COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS COMPLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

LEÇONS

SUR L'INTÉGRATION

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DE LA MÉCANIQUE

ET APPLICATIONS

PAR

P. PAINLEVÉ

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
Éditeur, Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norwège.
8, RUE DE LA SORBONNE, 8.

1895

Leçons sur l'Intégration des Équations différentielles de la Mécanique.

Faculté des Sciences de Paris.

Cours complémentaire de Mécanique rationnelle.

LEÇONS
sur l'Intégration des Équations différentielles de la Mécanique et Applications

par

P. PAINLEVÉ

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences.

Paris

Librairie Scientifique A. HERMANN

Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norwège

8, Rue de la Sorbonne

1895.

Table des Matières.

Pages

Conférences
sur l'Intégration des équations de la Mécanique
(Programme d'Agrégation de 1891)

faites à la Faculté des Sciences de Lille

par M. P. Painlevé

(rédigées par M. Boulanger, ancien élève de l'École Polytechnique)

Ces conférences ont pour but d'exposer les travaux de Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, etc, sur l'intégration des équations de la Mécanique.

Les trois premières seront consacrées à rappeler brièvement les définitions et principes fondamentaux de la Dynamique, les théorèmes généraux qui fournissent des intégrales premières du mouvement des systèmes matériels, et à présenter comme exemples quelques exercices.

1ère Leçon.

Avant d'aborder l'étude des systèmes, nous commencerons par résumer les postulats et axiomes qu'on admet au début de la dynamique du point matériel ; Nous renvoyons au Cours de licence pour les développements qui se rapportent à ce sujet.

Nous supposons connues les définitions relatives à la longueur, au temps, à la masse : pratiquement, les longueurs se mesurent en centimètres, le temps en secondes, les masses en grammes.

Axes absolus. — Soit ox, oy, oz trois axes matériels quelconques et M un point matériel donné placé à l'instant t_0 au point (x_0, y_0, z_0) avec la vitesse $(x'_0\ y'_0,\ z'_0)$ en présence d'un certain milieu matériel P. Toutes les conditions des phénomènes qui vont se produire sont alors déterminées, en particulier le mouvement que prendra le point M par rapport aux axes $oxyz$. L'accélération (γ) du point M à l'instant t_0 (en présence du milieu P) ne dépend donc que des conditions initiales $(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, t_0)$

Ceci posé, nous convenons d'appeler axes absolus tout système d'axes $oxyz$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1° (Principe de Kepler) — Un point matériel, s'il existait seul, décrirait par rapport à ces axes une ligne droite avec une vitesse constante : Autrement dit, son accélération serait constamment nulle.

2° (Principe de Newton) — Soit M un point matériel donné placé à l'instant t_0 dans des conditions initiales données; soit P le milieu extérieur à ce point et (γ) l'accélération de M à l'instant t_0. Imaginons que P soit formé de deux parties distinctes P' et P'' et qu'on supprime, à l'instant t_0, la partie P'', le point M et P' restant d'ailleurs identiques à eux-mêmes : l'accélération de M serait (γ'). Soit de même (γ'') l'accélération qu'aurait M au temps t_0 si P'' existait seul. Les grandeurs (γ), (γ'), (γ'') satisfont à l'égalité :

$$(\gamma) = (\gamma') + (\gamma'')$$

Ce principe comprend celui de Kepler.

Quand un système d'axes $oxyz$ est absolu, tous les systèmes animés par rapport à $oxyz$ d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme sont aussi des systèmes d'axes absolus, et on démontre bien aisément qu'il n'en existe pas d'autres. Si nous appelons accélérations absolues les accélérations des points matériels par rapport à des axes absolus, ces accélérations sont indépendantes du système d'axes absolus auxquels on rapporte le mouvement.

Nous admettons comme démontrée par l'expérience l'existence d'axes absolus. Ces axes sont sensiblement fixes par rapport aux étoiles ou animés par rapport aux étoiles d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.[1]

Force absolue. — La force absolue ou force qui s'exerce à un instant donné sur un point M est, par définition, la grandeur géométrique qui a pour origine le point M, pour direction et sens la direction et le sens de l'accélération absolue (Γ) de M, et pour longueur la longueur Γ de l'accélération multipliée par la masse de M :

$$(F) = m\,(\Gamma).$$

On dit que le point M est soumis à l'action de plusieurs forces $F_1, F_2, \dots F_n$, quand le milieu P extérieur à M est formé de n parties $P_1, P_2 \dots P_n$ qui, si elles existaient seules, exerceraient respectivement sur le même point M, placé à l'instant t dans les mêmes conditions initiales, les forces $F_1, F_2, \dots F_n$. L'égalité

$$(\Gamma) = (\Gamma_1) + (\Gamma_2) + \dots + (\Gamma_n)$$

---

[1] Quand on admet la notion de mouvement absolu, on doit regarder ces axes dits absolus comme absolument fixes ou animés d'un mouvement absolu de translation rectiligne et uniforme. Les accélérations dites absolues sont les accélérations des points dans leur mouvement absolu.

entraîne l'égalité

$$(F) = (F_1) + (F_2) + \dots + (F_n).$$

On peut donc énoncer cette proposition : dire que plusieurs forces (F_1), $(F_2) \dots (F_n)$ s'exercent sur M, c'est dire que la force (F) qui s'exerce sur M est la somme géométrique des grandeurs (F_1). $(F_2) \dots (F_n)$.

On déduit de là cette conséquence :

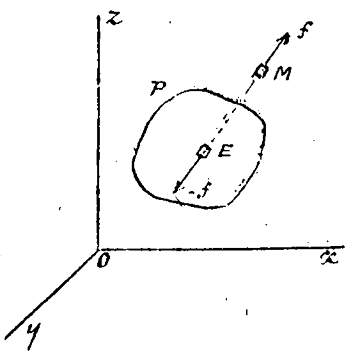
Supposons que le milieu P agissant sur le point M soit un ensemble matériel. On peut, si l'on veut, décomposer le système P en n parties, n étant aussi grand qu'on veut, et regarder la force absolue exercée sur M par le milieu P comme la somme géométrique des forces absolues qu'exercerait sur ce point chacune des n parties, en supposant qu'on pût les faire agir séparément, sans rien changer à leur état ni à celui du point M.

Si f est la force absolue qu'exercerait un quelconque des n milieux partiels dans ces conditions, et F la force absolue exercée par l'ensemble, on a donc, d'après le postulat précédent :

$$(F) = \Sigma (f).$$

Ainsi, ce postulat permet de calculer la force exercée par un ensemble sur un point quand on connaît la force exercée par un quelconque des éléments de l'ensemble sur ce point.

Postulat de l'Égalité de l'Action et de la Réaction. — Nous admettrons encore, comme vérifié par l'expérience dans les cas que nous traitons, le principe suivant :



Supposons qu'un milieu matériel P agisse sur un point M. On peut décomposer P en éléments, soit E l'un d'eux. L'élément E, s'il existait seul avec M, sans que rien fût changé à son état ni à l'état de M, exercerait sur le point M une force absolue f. On admet qu'inversement le point M exerce sur E une force absolue égale et directement opposée à la précédente, f. — Cela exige que la force f soit dirigée suivant la droite qui unit les points M et E.

Forces relatives. — Leur lien avec les forces absolues. — Dans tout ce qui précède, on a rapporté le mouvement à des axes absolus. — Supposons maintenant qu'on étudie le mouvement d'un point M par rapport à des axes (ox, oy, oz) quelconques.

Au temps t, le point M occupe une position (x, y, z) et est animé d'une vitesse $(x' y' z')$; sous l'action d'un milieu P, il prend une accélération Γ_r par rapport aux axes (ox, oy, oz). Nous appelons force relative s'exerçant au temps t sur le point M la grandeur géométrique $(F_r) = m(\Gamma_r)$.

Quand on connaît le mouvement des axes (ox, oy, oz) par rapport aux axes absolus, il est facile de calculer la force absolue F_a, connaissant la force relative F_r. On a en effet :

$$(F_a) = (F_r) + m(\Gamma_e) + m(\Gamma_c),$$

ou

$$(F_a) = (F_r) + (-A),$$

A étant la somme géométrique des 2 termes de Coriolis. — Cette quantité A est indépendante du milieu agissant.

On voit d'après cela qu'on obtiendra la force absolue en augmentant la force relative d'une grandeur géométrique qui dépend du temps, de la position et de la vitesse du point M et du mouvement des axes (ox, oy, oz), mais qui est indépendant du milieu agissant.

Regardons maintenant la force absolue agissant sur le point M comme provenant de l'action de plusieurs milieux $P_1 P_2 \ldots P_n$ dont l'ensemble compose le milieu P ; soient $(F_1)_a, (F_2)_a, \ldots (F_n)_a$ les forces absolues exercées sur M par ces milieux partiels. On a, d'après le principe de Newton sur l'action des milieux pour la force absolue totale :

$$(1) \qquad (F_a) = (F_1)_a + (F_2)_a + \ldots \ldots \ldots (F_n)_a.$$

Soient $(F_1)_r ; (F_2)_r, \ldots, (F_n)_r$ les forces relatives qu'exerceraient les mêmes milieux partiels isolément, et (F_r) la force relative exercée par l'ensemble. On a :

$$(F_1)_a = (F_1)_r + (-A)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(F_n)_a = (F_n)_r + (-A)$$
$$(F_a) = (F_r) + (-A)$$

Par suite la relation (1) donne, d'une part :

$$(F_r) = (F_1)_r + (F_2)_r + \ldots\ldots + (F_n)_r + (n-1)(-A),$$

et d'autre part, et c'est cela qui nous importe :

$$(F_r) = (F_1)_r + (F_2)_a + \ldots\ldots + (F_n)_a.$$

Ainsi, le principe Newton sur l'action des milieux étant admis pour les forces absolues, on obtient pour les forces relatives la conclusion suivante :

Soit M un point matériel placé à l'instant t dans des conditions initiales données, et P le milieu extérieur à M formé de plusieurs parties $P_1, P_2, \ldots P_n$. La force relative (par rapport à un système quelconque d'axes) exercée sur M par le milieu P est la somme géométrique de la force relative qu'exercerait l'un quelconque des milieux partiels, et des forces absolues qu'exerceraient les autres milieux partiels (si chacun de ces milieux existait seul avec M, identique à lui-même ainsi que M, à l'instant t).

En particulier, considérons un point matériel M qui se trouve en équilibre, sous l'influence d'un milieu donné P, par rapport à des axes (ox, oy, oz) quelconques, terrestres par exemple. La force relative agissant sur ce point est nulle : $(F_r)=0$. Faisons agir sur lui un milieu P' sans rien modifier au milieu précédent. — Par exemple, tirons à l'aide d'un fil sur un pendule au repos. — Sous l'action simultanée des deux milieux P et P', le point M prend une accélération relative Γ'_r et la force relative correspondante est $(F'_r)=m(\Gamma'_r)$. D'après ce qui précède, on a :

$$(F'_r)=(F_r)+(f_a),$$

(f_a) étant la force absolue exercée par le 2e milieu P'. Or $(F_r)=0$. Donc :

$$(F'_r)=(f_a).$$

Ainsi, c'est la force absolue (f_a) qui est mesurée par l'accélération relative du point M.

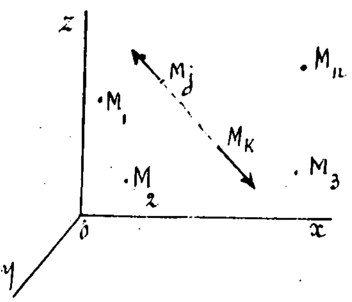
$$(f_a)=m(\Gamma'_r).$$

On voit par là comment les forces absolues s'introduisent dans les expériences physiques les plus simples, et correspondent à la notion vulgaire de l'effort.

Dans toutes les applications où on étudie le mouvement relatif d'un point matériel M, quand on dit que plusieurs forces $F_1, F_2 \ldots F_n$ agissent sur M, on sous-entend que l'une de ces forces est une force relative et les autres des forces absolues. Ceci revient donc à dire que la force relative qui s'exerce sur le point M est la somme géométrique des grandeurs $F_1, F_2, \ldots F_n$.

Forces extérieures et forces intérieures à un système matériel.

Le principe de l'Égalité de l'Action et de la réaction va nous conduire naturellement à des théorèmes importants sur les systèmes matériels.



Considérons un système d'axes absolus (ox, oy, oz) et un certain nombre de points matériels $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots M_j, M_K, \ldots M_n$, de masses respectives $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots m_j, m_K, \ldots m_n$. — Cet ensemble se trouve placé dans des conditions déterminées, c'est-à-dire que chacun de ces points M_j a, à l'instant t, une position donnée (x_j, y_j, z_j) et une vitesse donnée (x'_j, y'_j, z'_j). En présence d'un milieu extérieur donné, chaque point M_j prend une accélération Γ_j, et la force absolue qui s'exerce sur lui à l'instant t est : $(F_j)=m_j(\Gamma_j)$.

D'après ce qu'on a vu, cette force peut être considérée comme la somme géométrique des deux forces suivantes : l'une F_{je}, dite extérieure au système, à savoir la force qu'exercerait sur M_j le milieu extérieur s'il existait seul, rien n'étant changé d'ailleurs à son état ni à celui de M_j; - l'autre $F_{j,i}$, dite intérieure au système, à savoir la force qui s'exercerait sur M_j si le système, à l'instant t, existait seul identique à lui-même :

$$(F_j) = (F_{j,e}) + (F_{j,i}).$$

Cette force absolue intérieure $F_{j,i}$ peut être considérée comme la somme géométrique de $(n-1)$ forces partielles exercées isolément par chacun des $(n-1)$ points $M_1 M_2 \ldots\ldots M_k \ldots\ldots M_n$ sur le point M_j.

Si l'on admet le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la force exercée par un de ces points M_k sur le point M_j, soit $f_{k,j}$, sera dirigée suivant la droite $M_j M_k$, et inversement le point M_j exercera sur M_k une force $f_{j,k}$ égale en grandeur et directement opposée à $f_{k,j}$:

$$(f_{j,k}) + (f_{k,j}) = 0.$$

D'où cette conclusion : Les forces intérieures qui s'exercent entre tous les points d'un système matériel peuvent être regardées comme la somme géométrique de forces intérieures partielles qui sont deux à deux égales et directement opposées.

C'est là une propriété fondamentale des forces intérieures.

Il est aisé d'étendre les résultats précédents au cas d'un mouvement rapporté à des axes quelconques (ox, oy, oz). Répétons les mêmes considérations. Le point M_j a une accélération relative Γ_j^r et la force relative qui agit sur lui est $(F_j^r) = m(\Gamma_j^r)$. Si $(F_{j,e})$ est la force relative extérieure, c'est-à-dire la force relative que le milieu extérieur exercerait sur M_j s'il existait seul avec M_j, et $(F_{j,i})$ la force absolue intérieure, une proposition établie permet d'écrire :

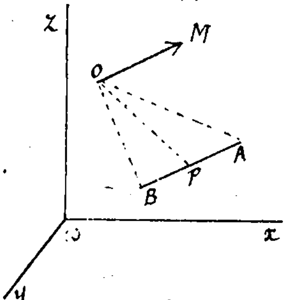
$$(F_j^r) = (F_{j,e}^r) + (F_{j,i}^a)$$

La force relative totale est la somme géométrique de la force relative extérieure et de la force absolue intérieure.

Par suite, chaque fois qu'on connaîtra les forces extérieures relatives, on aura avantage à se servir de cette décomposition, en tenant compte de ce fait que les forces absolues intérieures forment un système de forces égales deux à deux et directement opposées ; et comme, dans les théorèmes qu'on va établir, ces forces s'éliminent à cause de cette propriété, ces théorèmes seront vrais quels que soient les axes auxquels on rapporte le mouvement, pourvu que les forces extérieures soient relatives à ces axes.

Rappel de définitions et propriétés concernant les grandeurs géométriques. — Pour continuer cet exposé, il sera commode d'utiliser des propriétés des grandeurs géométriques qu'on va rappeler rapidement.[1]

On appelle moment d'une grandeur géométrique AB par rapport



à un point O une grandeur géométrique OM perpendiculaire au plan (O, AB), - dirigée de telle façon qu'un observateur placé les pieds en O et la tête en M, voie le segment AB disposé dans le sens indiqué par le trièdre des axes ($\omega x, \omega y, \omega z$) une fois choisi c'est-à-dire ici de gauche à droite, - ayant sa longueur absolue mesurée par le produit des 2 nombres qui mesurent l'un la longueur du segment AB, l'autre la distance du point O à ce segment... ou, si on veut, ayant pour longueur absolue le double de l'aire du triangle OAB.

La somme géométrique de $\underline{n}$ grandeurs géométriques AB, CD, etc..... ayant ou non une origine commune, est une grandeur géométrique ainsi construite : par un point arbitraire O, on mène des grandeurs géométriques respectivement équipollentes à AB, CD, ... et on en détermine la résultante OR. Cette somme géométrique n'est définie dans l'espace qu'en grandeur et direction, son origine est arbitraire.

Étant donné un système de segments AB, CD, ..., on appelle moment de ce système par rapport à un point O, la somme géométrique des moments des grandeurs AB, CD.... par rapport à ce point O.

Désignons par (AB, O) le moment de AB par rapport au point O.

Quand on considère deux points O et O', il existe entre les moments d'un même segment AB par rapport à ces deux points, la relation géométrique :

$$(AB, O) = (AB, O') + (O'B', O),$$

O'B' étant le segment équipollent de AB mené par O'.

Il résulte de là qu'étant donné un système de segments quelconques on peut énoncer ce théorème :

Le moment d'un système de segments par rapport à un point O est égal au moment du même système par rapport à un point O', augmenté géométriquement du moment par rapport au point O de la somme géométrique du système construite avec le point O' pour origine.

Ceci posé, on dit que deux systèmes de segments sont équivalents quand ils ont même somme géométrique et même moment par rapport à un point de l'espace.

---

[1] Consulter : J. Tannery. Deux leçons de Cinématique - An. de l'Ec. N. 1886.

D'après ce qui précède quand ces conditions sont remplies, les deux systèmes de segments ont même moment par rapport à un point quelconque de l'espace.

Il est dès lors facile de démontrer qu'étant donné un système de segments, on peut, et cela d'une infinité de manières, construire un système équivalent formé soit de deux segments, soit d'un segment et d'un couple.

Dans le cas où l'on peut former un système équivalent au système donné, qui se compose d'un segment unique, on dit que le système admet une résultante.

Lorsque le système de segments est composé de segments tous parallèles entre eux, ce système admet toujours une résultante, à moins qu'on ne puisse former un système équivalent composé d'un seul couple.

Enfin, quand on ajoute à un système quelconque des segments deux à deux égaux en longueur et directement opposés, le système formé par la réunion de ces deux systèmes est équivalent au premier système; car la somme géométrique du système introduit et son moment par rapport à un point quelconque de l'espace sont nuls.

Équivalence du système total des forces agissant sur un ensemble matériel et du système des forces extérieures. — Revenons à la dynamique. Soient (ox, oy, oz) des axes quelconques : $M_1 M_2, \ldots\ldots M_n$ un système de points matériels ; $m_1, m_2, \ldots m_n$ les masses de ces points.

Soit Γ_j l'accélération du point M_j par rapport aux axes (ox, oy, oz) dans les conditions données ; la force qui s'exerce sur ce point est $(F_j) = m(\Gamma_j)$; soit $(F_{j,e})$ la force extérieure relative qui s'exerce au même instant sur M_j.

Considérons le système de segments formé par les forces (F_j) et le système formé par les forces $(F_{j,e})$. Ces deux systèmes sont équivalents. — En effet le système (F_j) ne diffère du système $(F_{j,e})$ que par l'introduction des forces intérieures $(F_{j,i})$. Or les forces intérieures forment un système de segments deux à deux égaux et directement opposés. — Donc la somme géométrique des forces $(F_{j,e})$ est la même que la somme géométrique des forces (F_j), et le moment du système $(F_{j,e})$ par rapport à un point quelconque O est équipollent au moment du système (F_j) par rapport au même point.

Le théorème peut s'énoncer ainsi : Le système des segments $m(\Gamma_j)$ est équivalent au système des segments $(F_{j,e})$.

C'est enfin de cette proposition que nous allons déduire les théorèmes généraux que nous avons en vue.

Deuxième Leçon.

Théorème du Mouvement du Centre de Gravité.

Soit M un point quelconque du système, m sa masse, $x\,y\,z$ ses coordonnées par rapport à des axes rectangulaires quelconques.

L'accélération Γ de ce point a pour composantes suivant les axes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$

Soient X_e, Y_e, Z_e les composantes de la force extérieure F_e (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur ce point.

Exprimons que la somme géométrique de tous les segments $m(\Gamma)$ et celle de tous les segments (F_e) sont égales. – Nous aurons :

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_e\,; \qquad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_e\,; \qquad \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_e\,;$$

les sommations des premiers membres étant étendues à tous les points du système, et les sommations des seconds membres à toutes les forces extérieures qui agissent sur le système.

Si l'on désigne par M la masse totale $\sum m$ du système, et par (ξ, η, ζ) les coordonnées du centre de gravité, on a, d'après la définition du centre de gravité :

$$M\xi = \sum mx\,; \qquad M\eta = \sum my\,; \qquad M\zeta = \sum mz.$$

Par suite, les équations précédentes prennent la forme :

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_e\,; \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_e\,; \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z_e.$$

Ainsi le centre de gravité du système se meut comme un point matériel où serait concentrée la masse totale du système et qui serait soumis à des forces équipollentes à toutes les forces extérieures.

C'est en cela que consiste le théorème du mouvement du centre de gravité

Théorème des Moments des Quantités de Mouvement.

Exprimons que le moment par rapport à l'origine O du système de tous les segments $m(\Gamma)$ est égal au moment, par rapport au même point, du système de tous les segments (F_e), et cela en écrivant que les deux moments ont mêmes composantes suivant les trois axes. –

Nous aurons :

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (xY_e - yX_e)$$

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum (yZ_e - zY_e)$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum (zX_e - yZ_e)$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum (xY_e - yX_e)$$

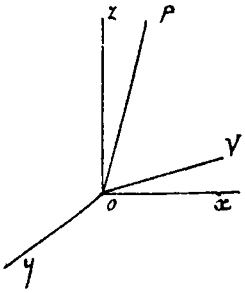
$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum (yZ_e - zY_e)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \sum (zX_e - YZ_e)$$

Si l'on appelle quantité de mouvement du point M la grandeur géométrique qui a pour origine le point M, pour direction et sens la direction et le sens de la vitesse V du point M, et pour grandeur absolue $m(V)$, les expressions $\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \ldots$ représentent les projections sur les axes de la somme des moments des quantités de mouvement des points du système par rapport à l'origine O.

Ainsi la dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe.

Représentation Géométrique des Théorèmes précédents.



Construisons à l'origine la somme géométrique OV des quantités de mouvement des points du système, et le moment OP des mêmes quantités par rapport à l'origine.

Soient (α, β, γ) et (a, b, c) les coordonnées des points V et P. – On a :

$$\alpha = \sum m \frac{dx}{dt} = M \frac{d\xi}{dt}; \quad \beta = \ldots\ldots; \quad \gamma = \ldots\ldots;$$

$$a = \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right); \quad b = \ldots\ldots; \quad c = \ldots\ldots;$$

les théorèmes précédents donnent :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum X_e; \qquad \frac{d\beta}{dt} = \Sigma Y_e; \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \Sigma Z_e;$$

$$\frac{da}{dt} = \sum (y Z_e - z Y_e); \frac{db}{dt} = \Sigma (z X_e - x Z_e); \frac{dc}{dt} = \Sigma (x Y_e - y X_e);$$

Ainsi : la vitesse du point V est équipollente à la somme géométrique des forces extérieures ; la vitesse du point P est équipollente au moment, par rapport au point O, du système des forces extérieures.

Intégrales du mouvement du système donné par les théorèmes précédents

— La forme des égalités obtenues montre dans quels cas ces théorèmes font connaître des intégrales du mouvement du système.

Le théorème du mouvement du centre de gravité donne une intégrale toutes les fois que, sur un axe fixe par rapport à (ox, oy, oz), la somme des projections des forces extérieures est nulle.

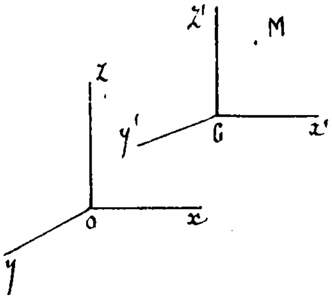
Le théorème des moments des quantités de mouvement donnera une intégrale toutes les fois que le moment du système des forces extérieures par rapport à un axe de position fixe sera nul, — par exemple quand toutes les forces extérieures rencontreront oz ou lui seront parallèles.

Extension du théorème des moments des Quantités de mouvement

— On peut étendre le théorème des moments des quantités de mouvement au cas du mouvement relatif par rapport à des axes animés eux mêmes par rapport à (ox, oy, oz) d'un certain mouvement que nous allons définir.

En particulier, ce théorème est applicable au mouvement relatif du système par rapport à des axes de directions fixes passant par le centre de gravité G du système.

Soient 3 axes de directions fixes (Gx', Gy', Gz'), par exemple parallèles à (ox, oy, oz). Par rapport à ces axes, chaque point M du système a une certaine accélération Γ^r et est soumis à une certaine



force $m(\Gamma^r)$, qui est la somme de la force extérieure relative F_e^r et de la force intérieure absolue F_i.

On sait que le système des segments $m(\Gamma_e^r)$ et celui des segments F_e^r sont équivalents.

Mais ce qu'on va démontrer, c'est que le moment par rapport au point G du système des segments (F_e^r) est équipollent au moment par rapport au même point du système des segments (F_e), c'est-à-dire qu'on peut appliquer le théorème des moments des quantités de mouvement aux axes Gx', Gy', Gz' sans changer les forces extérieures.

En effet, on a d'après le théorème de Coriolis l'égalité

$$(F_e) = (F_e^r) + m(A),$$

où (A) représente l'accélération du centre de gravité G par rapport aux axes (ox, oy, oz).

Le système des segments (F_e^r) peut être regardé comme formé par la réunion du système des segments (F_e) et du système des segments $-m(A)$. Or ces derniers segments sont tous parallèles entre eux et admettent une résultante passant par le centre de gravité G.

Le moment du système $-m(A)$ par rapport à G est nul, et le moment du système (F_e^r) par rapport à G est équipollent au moment du système (F_e).

On peut écrire :

$$\sum m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2} - y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = \sum (x'Y_e - y'X_e)$$

. . . .

ou encore

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \sum (x'Y_e - y'X_e)$$

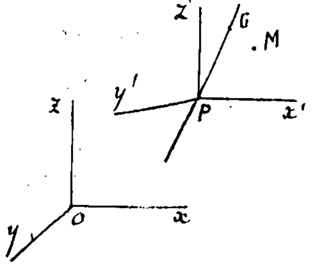
. . . .

Par suite, chaque fois qu'il existe un axe de direction fixe par rapport à (ox, oy, oz) et passant par le centre de gravité du système, tel que toutes les forces extérieures le rencontrent ou lui soient parallèles, on aura une intégrale du mouvement en appliquant à cet axe le théorème des moments des quantités de mouvement.

Rigoureusement, l'extension faite du théorème des moments des quantités de mouvement n'exige pas que le point G soit le centre de gravité du système.

Supposons en effet qu'on considère le mouvement relatif par rapport à 3 axes (Px', Py', Pz') parallèles à (ox, oy, oz), P étant un point quelconque dont l'accélération par rapport à (ox, oy, oz) est (A). On a:

$$(F_e^r) = (F_e) + m\,(A)$$



Pour que le système des segments (F_e^r) et celui des segments (F_e) aient par rapport au point P des moments équipollents, il faut et il suffit que le système des segments $m\,(A)$ ait un moment nul par rapport à P. Or le système $m\,(A)$ admet une résultante passant par le centre de gravité G et égale à $M\,(A)$. Pour que ce système ait un moment nul, il faut et il suffit que cette résultante passe par le point P. — Ainsi il faut et il suffit que l'accélération (A) du du point P soit à chaque instant dirigée suivant PG.

Cette condition est toujours réalisée quand le point P coïncide avec G ; ou quand l'accélération du point P est nulle ; mais dans ce dernier cas, P est animé d'une translation rectiligne et uniforme, et on sait qu'un tel mouvement ne change pas les forces relatives aux axes.

Remarque utile pour le calcul du moment des quantités de mouvement d'un système —— Le moment des quantités de mouvement d'un système par rapport à un point O est égal au moment des quantités de mouvement du système, par rapport au centre de gravité G du système, dans son mouvement relatif par rapport au centre de gravité, — augmenté géométriquement de la quantité de mouvement du centre de gravité (où l'on suppose toute la masse du système concentrée) par rapport au point O.

Soit O l'origine des axes ; $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ un système de points ; G leur centre de gravité ; par définition, on a:

$$M\xi = \sum m x \,; \qquad M\eta = \sum m y \,; \qquad M\zeta = \sum m z .$$

Rappelons cette propriété : Le moment d'un système de segments par rapport à un point O est égal au moment du même système par rapport à un point G, augmenté du moment par rapport à O de la somme géométrique des segments construite avec G comme origine.

Appliquons ce théorème en décomposant le moment des quantités de mouvement du système en deux parties.

1° — Moment de la somme des quantités de mouvement construite avec G pour origine :

Les projections de la somme des quantités de mouvement sur les axes sont $\sum m \frac{dx}{dt}$, $\sum m \frac{dy}{dt}$, $\sum m \frac{dz}{dt}$, ou encore $M\frac{d\xi}{dt}$, $M\frac{d\eta}{dt}$, $M\frac{d\zeta}{dt}$,

Le moment considéré est donc le moment par rapport au point O de la quantité de mouvement du centre de gravité où serait concentrée la masse M totale du système.

2° — Moment des quantités de mouvement du système par rapport au point G.

Je dis que ce moment est équipollent au moment, par rapport au même point G, des quantités de mouvement des points du système dans le mouvement relatif par rapport au centre de gravité.

Soient en effet V_a et V_r les vitesses d'un point quelconque du système par rapport à (ox, oy, oz) et par rapport à (Gx', Gy', Gz') ; W la vitesse du centre de gravité G par rapport à (ox, oy, oz). On a :

$$(V_r) = (V_a) - (W)$$

D'après cela, l'ensemble des segments $m(V_a)$ peut être regardé comme formé du système des segments $m(V_r)$ et du système des segments $m(W)$. Pour que le moment du système $m(V_a)$ et celui du système $m(W)$ par rapport à G soient les mêmes, il faut et il suffit que le moment du système $m(V_r)$ par rapport à G soit nul. — Or les segments $m(W)$ admettent une résultante passant par G et par suite le moment de leur système par rapport à G est nul. Donc le moment du système $m(V_a)$ et celui du système $m(V_r)$ par rapport à G coïncident.

Ainsi se trouve établie la proposition énoncée.

Théorème des Forces Vives — On va établir un 3e théorème qui fournit aussi, dans certains cas, des intégrales du mouvement des systèmes.

Considérons les équations du mouvement d'un point du système :

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = X = X_e + X_i \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y = Y_e + Y_i \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = Z = Z_e + Z_i \end{cases}$$

Multiplions-les respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et ajoutons-les membre à membre. Il vient, en désignant par v la vitesse de ce point

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\ v^2}{2}\right) = \left(X_e \frac{dx}{dt} + Y_e \frac{dy}{dt} + Z_e \frac{dz}{dt}\right) + \left(X_i \frac{dx}{dt} + Y_i \frac{dy}{dt} + Z_i \frac{dz}{dt}\right)$$

Faisons la somme des équations analogues relatives à tous les points du système. D'où :

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{m v^2}{2} = \sum \left(X_e \frac{dx}{dt} + Y_e \frac{dy}{dt} + Z_e \frac{dz}{dt}\right) + \sum \left(X_i \frac{dx}{dt} + Y_i \frac{dy}{dt} + Z_i \frac{dz}{dt}\right)$$

Les forces (X_i, Y_i, Z_i) peuvent être décomposées en forces partielles deux à deux égales et directement opposées. Si, dans la seconde somme, on remplace $X_i Y_i Z_i$ par les composantes de ces forces partielles (soit X_{jK}, Y_{jK}, Z_{jK} pour les points M_j et M_K), on sait que cette somme représente, au facteur $\frac{1}{dt}$ près, le travail élémentaire de toutes les forces intérieures, dans un déplacement infiniment petit du système ; or le travail de la force F_{jK} qui s'exerce entre M_j et M_K dans un tel déplacement est $f_{j,K}\, dr_{j,K}$, r_{jK} étant la distance des deux points M_j et M_K et $f_{j,K}$ la valeur absolue de la force, F_{jK} précédée du signe + ou du signe − suivant que la force est répulsive ou attractive.

La relation précédente peut alors s'écrire :

$$d \sum \frac{m v^2}{2} - \sum f_{j,K}\, dr_{jK} = \sum \left(X_e\, dx + Y_e\, dy + Z_e\, dz\right)$$

Dans le cas où les forces $f_{j,K}$ sont des forces données et fonctions de la seule distance des points, comme cela arrive pour les points matériels de notre système planétaire, $\sum f_{jK}\, dr_{jK}$ est une différentielle totale exacte ; chaque fonction f_{jK} dépend de la seule variable r_{jK}.

Quand les forces intérieures sont des réactions assujettissant le système à des liaisons on ne sait rien sur les forces f_{jK}. Mais dans le cas où le système est formé d'un corps solide, tous les dr_{jK} sont nuls. Donc pour un corps solide, on a :

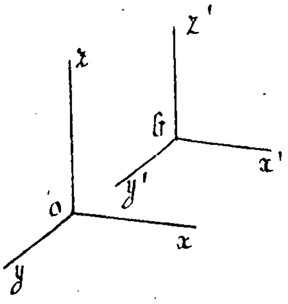
$$d \sum \frac{m v^2}{2} = \sum \left(X_e\, dx + Y_e\, dy + Z_e\, dz\right).$$

Dans ces deux cas distincts, où f_{jK} dépend de la seule variable r_{jK} et où dr_{jK} est nul, — si l'expression $\sum(X_e\, dx + Y_e\, dy + Z_e\, dz)$ est la différentielle totale exacte d'une fonction des coordonnées des points du système, soit d'$U(x_j, y_j, z_j, \dots)$, la relation que nous avons formée fait connaître une intégrale du mouvement. (1)

Cette intégrale se nomme l'intégrale des forces vives.

Quand il existe une telle fonction U, on dit que les forces extérieures admettent une fonction de forces U.

Remarque utile pour le calcul de la force vive d'un système. — On démontre aisément la proposition suivante : La force vive d'un système par rapport à des axes quelconques (ox, oy, oz) est égale à la somme de deux termes : la force vive du centre de gravité où serait concentrée toute la masse du système et la force vive du système dans son mouvement relatif par rapport à des axes de directions invariables passant par le centre de gravité.



Ainsi, soit v la vitesse du point M de masse m, par rapport à (ox, oy, oz) ; v' sa vitesse par rapport à (Gx', Gy', Gz') ; $\mathcal{M}$ la masse totale du système, V la vitesse du centre de gravité.

On a :

$$\sum m v^2 = \mathcal{M} V^2 + \sum m v'^2$$

Moments d'Inertie ; leur Calcul. — Quand on a affaire à des systèmes continus, à des corps solides homogènes par exemple, l'application du théorème des forces vives ou du théorème des moments des quantités de mouvement, conduit à considérer certaines sommes dites moments d'inertie et exprimées par des intégrales triples, doubles ou simples selon que le système est à trois, deux ou une dimensions

Étant donné un système de points matériels de masses $m, m_2 \dots$ occupant à un instant donné des positions $M_1, M_2 \dots$ à des distances $r_1, r_2 \dots$ d'une droite L, la quantité

$$\sum m\, r^2$$

étendue à tous les points du système, s'appelle le moment d'inertie du système par rapport à la droite L à l'instant considéré.

Voici comment s'introduit la considération de telles quantités.

Soit à calculer le moment de la quantité de mouvement d'un système par rapport à un axe L, dans un mouvement tel que tous les points soient animés d'une même rotation ω autour de la droite L. Pour chaque point le moment de la quantité

(1) Il suffit même que l'on ait : $\sum X_e x' + Y_e y' + Z_e z' \equiv \frac{d}{dt} U(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n, t)$, c'est-à-dire que X_e soit égal à $\frac{dU}{dx} + X'_e$, Y_e à $\frac{dU}{dy} + Y'_e$, Z_e à $\frac{dU}{dz} + Z'_e$, avec la condition : $\sum X'_e x' + Y'_e y' + Z'_e z' \equiv \frac{dU}{dt}$.
Ceci se présente par exemple si la force X'_e, Y'_e, Z'_e est normale pour chaque point à la vitesse (x', y', z'), U ne dépendant pas de t.

de mouvement est : $m\omega r \times r$ ou $mr^2\omega$. Le moment cherché est donc $\omega \sum mr^2$.

De même, si on a à calculer la force vive dans un tel mouvement, on trouve $\sum m\omega^2 r^2$ ou $\omega^2 \sum mr^2$.

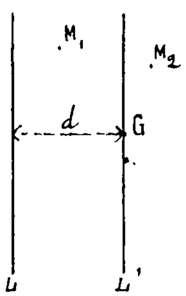
Dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, et notamment dans le mouvement d'un solide autour de son centre de gravité, à chaque instant les vitesses de tous les points du corps sont les mêmes que si tous ces points étaient animés d'une rotation autour d'une certaine droite passant par le point fixe et dite axe instantané de rotation. — Le calcul de la force vive dans un tel mouvement entraînera le calcul du moment d'inertie du système par rapport à cet axe instantané.

On peut énoncer sur les moments d'inertie certains théorèmes généraux qui en facilitent le calcul.

Le moment d'inertie d'un système par rapport à une droite L est égal au moment d'inertie du système par rapport à une droite parallèle à L et passant par le centre de gravité, augmenté du moment d'inertie par rapport à L du centre de gravité où la masse totale serait concentrée.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une proposition analogue indiquée à propos de la force vive d'un système. — Supposons en effet le système animé d'un certain mouvement de rotation ω autour de la droite L. La force vive du système est

$$\sum mr^2\omega^2.$$



Soit ρ la distance du point M et de la parallèle L' à L menée par le centre de gravité G du système ; $\mathcal{M}$ la masse totale du système ; d la distance de L et L'.

La force vive du système dans son mouvement par rapport au centre de gravité est $\sum m\rho^2\omega^2$.

La force vive du centre de gravité où toute la masse serait concentrée est $\mathcal{M} d^2\omega^2$.

D'après la proposition rappelée, on a :

$$\sum mr^2\omega^2 = \sum m\rho^2\omega^2 + \mathcal{M} d^2\omega^2$$

c'est-à-dire :

$$\sum mr^2 = \mathcal{M} d^2 + \sum m\rho^2$$

Pv Agr. 3.

c'est précisément le théorème en question.

D'après cela, quand on sait calculer le moment d'inertie d'un système par rapport à une droite quelconque OL passant par un point O de l'espace, par exemple par le centre de gravité, on sait calculer sans quadrature nouvelle, son moment d'inertie par rapport à une droite quelconque, à condition toutefois qu'on connaisse la masse totale du système. — Par conséquent, quand on aura à calculer des moments d'inertie, on cherchera le point O de l'espace le plus avantageux pour obtenir les moments d'inertie par rapport aux droites OL.

Au sujet des moments d'inertie par rapport à des droites passant par un point O, on démontre la proposition suivante : Si, sur chaque droite OL, on porte à partir de O, une longeur

$$OA = \frac{1}{\sqrt{\sum m r^2}}$$

$\sum m r^2$ étant le moment d'inertie du système par rapport à OL, le point A décrit un ellipsoïde ayant O pour centre et dit ellipsoïde d'inertie relatif au point O.

Supposons qu'on ait calculé l'équation de cet ellipsoïde d'inertie ; il suffit, pour trouver le moment d'inertie du système par rapport à une droite passant par O, de chercher l'intersection de cette droite avec l'ellipsoïde.

Si donc on connait les 3 axes de l'ellipsoïde d'inertie, et les moments d'inertie relatifs à ces axes, on peut calculer algébriquement le moment d'inertie du système par rapport à une droite quelconque passant par O (et par suite par rapport à une droite quelconque de l'espace, à condition de connaître la masse totale du système).

Tel sera le cas d'un solide à 3 plans de symétrie, quand on sait calculer les moments d'inertie par rapport aux trois axes de symétrie.

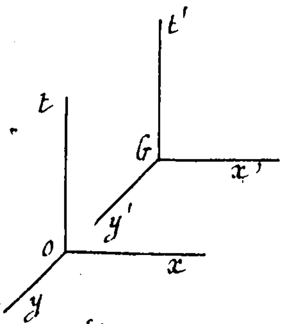
Plus généralement, quand, pour un système quelconque, on connaîtra la masse du système et les moments d'inertie relatifs à 6 droites concourantes et non situées toutes les six dans un même plan, on connaîtra 6 points de l'ellipsoïde d'inertie et son centre ; l'ellipsoïde d'inertie sera donc défini, et les moments d'inertie par rapport à des droites quelconques s'obtiendront algébriquement.

Les axes de l'ellipsoïde d'inertie, dits axes principaux d'inertie sont caractérisés, lorsqu'on les prend pour axes de coordonnées, par les relations :

$$\sum m y z = 0 \qquad \sum m z x = 0 \qquad \sum m x y = 0$$

Les théorèmes précédents sont souvent utiles dans le calcul de la force vive ou du moment (par rapport à un axe ou à un point) de la quantité de mouvement d'un système. Supposons par exemple que le système renferme des corps solides, et soit Σ un de ces corps solides. On décompose la force vive K de Σ en deux parties : la force vive K' du centre de gravité G de Σ où la masse de Σ serait concentrée, et la force vive K'' de Σ dans son mouvement relatif autour du point G.

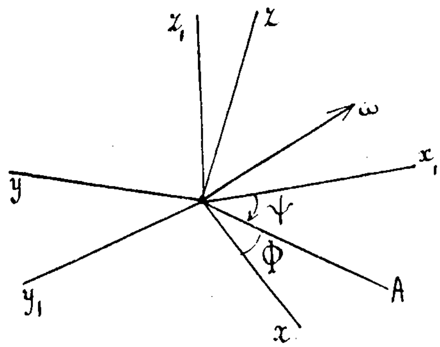
Soit $G\omega$ le segment de rotation instantanée de Σ autour de G au temps t, et p, q, r les composantes de $G\omega$ suivant les trois axes principaux d'inertie GX, GY, GZ de Σ, qui, à l'instant t ont une position bien déterminée ; on démontre que K'' est égal à $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, si $A\,B\,C$ désignent les moments d'inertie relatifs à GX, GY, GZ.



De même le calcul du moment $(O\Gamma)$ par rapport au point O de la quantité de mouvement de Σ (dans son mouvement par rapport à $Oxyz$) se ramène au calcul du moment $(G\Gamma')$ par rapport au point G de la quantité de mouvement de Σ, dans son mouvement par rapport à $Gx'y'z'$. On démontre que les projections de $(G\Gamma')$ sur GX, GY, GZ sont respectivement égales à Ap, Bq, Cr. Le calcul des moments par rapport à un axe se déduit aussitôt de ce qui précède.

3ème Leçon.

Mouvement d'un Corps Solide qui a un point fixe. — Soient (ox_1, oy_1, oz_1) 3 axes quelconques par rapport auxquels on veut étudier le mouvement d'un corps solide dont O est un point fixe.



On définit la position du solide à l'aide de ses axes principaux d'inertie ox, oy, oz, lesquels se déterminent par les 3 angles d'Euler.

Soit oA l'intersection du plan xoy avec le plan x_1oy_1; on prend arbitrairement sur cette droite une direction positive oA. — Les angles d'Euler sont :

$\psi = \widehat{x_1 o A}$ compté positivement autour de oz_1 de gauche à droite.

$\theta = \widehat{z_1 o z}$ " " " oA " "

$\phi = \widehat{A o x}$ " " " oz " "

On peut avoir besoin d'exprimer les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point en fonction de ses coordonnées x, y, z. — On emploie pour cela le procédé bien connu : on amène (ox_1, oy_1, oz_1) à coïncider avec (ox, oy, oz) par 3 rotations successives, l'une $\delta\psi$ autour de oz_1, la seconde $\delta\theta$ autour de oA, la 3e $\delta\phi$ autour de oz. — Chaque rotation partielle s'effectue par l'application des formules de transformation de coordonnées en géométrie plane. — Il vient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = (\cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\psi\sin\phi)x - (\sin\phi\cos\psi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi)y + \sin\theta\sin\psi . z \\ y_1 = (\sin\psi\cos\phi + \cos\theta\cos\psi\sin\phi)x + (\sin\phi\sin\psi - \cos\theta\cos\phi\cos\psi)y - \sin\theta\cos\psi . z \\ z_1 = \sin\phi\sin\theta\ x + \cos\phi\sin\theta\ y + \cos\theta\ z . \end{array}\right.$$

Soit

	ox	oy	oz
ox_1	α	α'	α''
oy_1	β	β'	β''
oz_1	γ	γ'	γ''

le tableau des cosinus directeurs des angles des axes $oxyz$ avec les axes $o_1x_1y_1z_1$.

Les formules de transformation sont :

$$x_1 = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$$

$$y_1 = \beta x + \beta' y + \beta'' z$$

$$z_1 = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z$$

En comparant ces formules à celles obtenues ci-dessus, on a les expressions de ces cosinus directeurs en fonction des angles d'Euler $\theta\ \phi\ \psi$.

$$\alpha = \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\phi \cos\theta$$

$$\beta = \sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\phi \cos\theta$$

$$\gamma = \sin\phi \sin\theta$$

$$\alpha' = \cos\psi \sin\phi - \sin\psi \cos\phi \cos\theta$$

$$\beta' = -\sin\phi \sin\psi + \cos\psi \cos\phi \cos\theta$$

$$\gamma' = -\cos\phi \sin\theta$$

$$\alpha'' = -\sin\theta \sin\psi$$

$$\beta'' = -\sin\theta \cos\psi$$

$$\gamma'' = \cos\theta .$$

On sait qu'à chaque instant, les vitesses de tous les points du solide sont les mêmes que si le système entier était animé d'une rotation ω autour de l'axe $o\omega$.

Cet axe instantané de rotation peut être défini, soit par ses projections p_1, q_1, r_1, sur ox_1, y_1, z_1, soit par ses projections $p\,q\,r$ sur $oxyz$. Ces quantités sont des fonctions du temps t.

Si on élimine t entre les expressions de p_1, q_1, r_1, on obtient le lieu des points ω dans l'espace $o_1x_1y_1z_1$.

Si on élimine t entre les expressions des rapports $\frac{p_1}{r_1}, \frac{q_1}{r_1}$, on a l'équation du cône base dans le mouvement du solide, c'est-à-dire le lieu de l'axe instantané dans l'espace $o_1x_1y_1z_1$ durant le mouvement.

Si on élimine t entre les expressions de p, q, r (ou entre celles de $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}$), on a le lieu du point ω dans le solide (ou l'équation du cone roulette, c'est-à-dire le lieu de l'axe instantané dans le solide durant le mouvement).

Il est facile de calculer les expressions de $p\ q\ r$ et p_1, q_1, r_1 en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées par rapport au temps.

En effet, pour un point du corps solide, $x\ y\ z$ restant invariables, on trouve que :

$$\frac{dx_1}{dt} = z_1\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \gamma'\frac{d\alpha'}{dt} + \gamma''\frac{d\alpha''}{dt}\right) - y_1\left(\alpha\frac{d\beta}{dt} + \alpha'\frac{d\beta'}{dt} + \alpha''\frac{d\beta''}{dt}\right) = q_1 z_1 - r_1 y_1$$

Donc :

$$r_1 = \alpha\frac{d\beta}{dt} + \alpha'\frac{d\beta'}{dt} + \alpha''\frac{d\beta''}{dt}$$

D'où p_1, q_1, r_1 en fonction de ψ, θ, ϕ et de $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$.

On a aussi $p\ q\ r$ en fonction des mêmes quantités, car :

$$p = \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma r_1 = \alpha''\frac{d\alpha'}{dt} + \beta''\frac{d\beta'}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma'}{dt}$$

. . . .

Ce calcul est praticable, mais long.

Au lieu de le faire, on décompose $O\omega$ suivant OA, OZ, OZ_1. La vitesse de chaque point due à la rotation instantanée $O\omega$ est la même que celle qui résulterait de la composition des 3 rotations instantanées $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt}$ autour de Oz_1, OA, Oz.

Dès lors, on aura p, q, r et p_1, q_1, r_1 en prenant la somme des projections de ces trois rotations respectivement sur $Ox, Oy, Oz, Ox_1, Oy_1, Oz_1$.

Il vient :

$$p = \frac{d\psi}{dt}\gamma + \frac{d\theta}{dt}\cos\phi$$

$$q = \frac{d\psi}{dt}\gamma' + \frac{d\theta}{dt}\sin\phi$$

$$r = \frac{d\psi}{dt}\gamma'' + \frac{d\phi}{dt}$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} p = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\phi\sin\theta + \dfrac{d\theta}{dt}\cos\phi \\[2ex] q = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\phi - \dfrac{d\theta}{dt}\sin\phi \\[2ex] r = \dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta + \dfrac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

De même :

$$p_1 = \frac{d\theta}{dt}\cos\psi + \frac{d\phi}{dt}\alpha''$$

$$q_1 = \frac{d\theta}{dt}\sin\psi + \frac{d\phi}{dt}\beta''$$

$$r_1 = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\gamma''$$

c'est - à - dire :

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{d\theta}{dt}\cos\psi + \dfrac{d\phi}{dt}\sin\theta\sin\psi \\[2ex] q_1 = \dfrac{d\theta}{dt}\sin\psi - \dfrac{d\phi}{dt}\sin\theta\cos\psi \\[2ex] r_1 = \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\phi}{dt}\cos\theta . \end{cases}$$

Il est à remarquer que les quantités $\alpha''\ \beta''\ \gamma''\ \gamma\gamma'$ ont des expressions simples : ce sont elles qui interviennent en général dans les problèmes.

Ceci posé, on démontre que le moment de la quantité de mouvement du système par rapport au point O est une grandeur géométrique $O\Gamma$ qui a pour projections sur (ox, oy, oz) Ap, Bq, Cr (A, B, C étant les moments d'inertie relatifs aux axes ox, oy, oz).

La méthode d'Euler, pour obtenir les équations du mouvement du solide, consiste à exprimer que la vitesse du point Γ est une grandeur géométrique équipollente au moment des forces extérieures par rapport au point O.

La réaction du point fixe O ayant un moment nul, on a 3 équations indépendantes de la réaction du point O pour déterminer le mouvement du système qui dépend des 3 paramètres θ, ψ, ϕ, équations qu'on obtient simplement en écrivant que les projections sur les axes ox, oy, oz, de la vitesse de Γ par rapport à ox_1, oy_1, oz_1, sont égales respectivement au moment par rapport à ox, oy, oz des forces extérieures appliquées au système.

Les équations ainsi obtenues, dites équations d'Euler, sont :

$$(\mathrm{II})\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = L \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = M \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = N \end{cases}$$

$L\,M\,N$ étant les projections sur ox, oy, oz du moment par rapport à o des forces extérieures.

Ces équations donnent des intégrales du mouvement dans bien des cas ; par exemple, quand le corps est de révolution autour d'un axe passant par o, cet axe est axe principal d'inertie, soit l'axe ox ; on a $B = C$, et si le moment des forces extérieures par rapport à cet axe est nul ($L = 0$), de la première équation d'Euler, on déduit $p = \text{Const}$.

Généralement, chaque fois que le moment des forces extérieures par rapport à une direction fixe, oz, par exemple, sera nul, on aura une intégrale première du mouvement en exprimant que le moment de la quantité de mouvement par rapport à cet axe est une Constante. Le moment de la quantité de mouvement ayant pour composantes suivant (ox oy oz) Ap, Bq, Cr, on aura :

$$A p \gamma + B q \gamma' + C r \gamma'' = \text{Const.} = K$$

si toutes les forces extérieures ont un moment nul par rapport à oz,.

Si elles avaient en outre un moment nul par rapport à ox,, on aurait une seconde intégrale du mouvement.

On voit par là qu'il est indispensable dans certains cas de savoir calculer $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$ $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$ en fonctions des angles d'Euler.

Les équations d'Euler et les équations (I) forment un système de 6 équations différentielles simultanées du 1er ordre, définissant $p, q, r, \theta, \phi, \psi$.

Si on remplace dans (II) $p\,q\,r$ par leurs valeurs en fonction de θ, ϕ, ψ, on a un système de 3 équations simultanées du 2e ordre, définissant θ, ϕ, ψ.

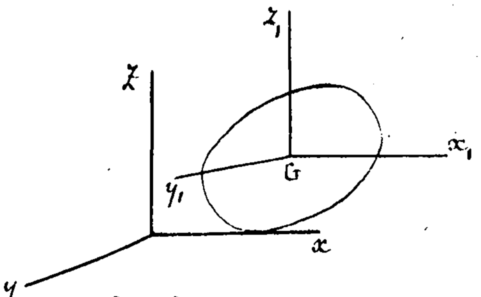
Il est plus avantageux de conserver les 6 équations, surtout si L, M, N ne dépendent pas de θ, ϕ, ψ. On intègre alors séparément le système (II), puis, ayant $p\,q\,r$, on intègre le système (I). Le calcul est ainsi plus simple.

La force vive du système est :

$$A p^2 + B q^2 + C r^2$$

Au point de vue pratique, observons que les intégrales premières qu'on obtient aisément sont données par le théorème des forces vives, et par celui des moments des quantités de mouvement lorsque les forces extérieures rencontrent un axe fixe ou lorsque le solide est de révolution autour d'un certain axe passant par o et que les forces extérieures ont un moment constamment nul par rapport à cet axe.

Mouvement d'un Solide entièrement libre. — Considérons maintenant le mouvement le plus général d'un corps solide.



On se sert des théorèmes énoncés pour étudier :

1° le mouvement, par rapport à 3 axes fixes ox, oy, oz, du centre de gravité G du corps, où l'on suppose appliquées toutes les forces extérieures qui s'exercent sur le solide ;

2° le mouvement relatif du solide par rapport aux axes Gx_1, Gy_1, Gz_1 de directions fixes, menés par le centre de gravité parallèlement à ox, oy, oz.

Pour étudier le mouvement du solide autour de son centre de gravité, on s'appuie sur ce fait que le théorème des moments des quantités de mouvement s'applique au mouvement par rapport au centre de gravité, sans qu'il soit besoin de changer les forces extérieures.

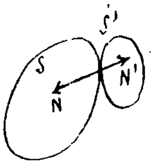
Dans le cas où le corps solide n'est pas entièrement libre, il faut moins de 6 paramètres pour déterminer son mouvement ; mais des réactions inconnues s'introduisent. Il convient alors, dans certains cas, de conduire autrement la question : par exemple, si un point fixe P du solide est assujetti à une certaine liaison, il peut être avantageux d'étudier le mouvement relatif autour de ce point.

Quand toutes les forces extérieures passent par le centre de gravité du corps, le mouvement du solide autour de son centre de gravité est celui d'un corps ayant un point fixe et sur lequel n'agit aucune force extérieure.

Exemple. — Soit une sphère homogène pesant lancée dans le vide. Son centre décrit un arc de parabole, et elle est animée autour de ce centre d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans l'espace et dans la sphère.

Mouvement d'un Ensemble de Solides. — Quand on a un système de corps solides, leurs réactions mutuelles sont des forces intérieures au système.

Dans certains cas, il y a avantage à considérer une partie du système comme un système isolé, et alors il faut prendre garde de regarder comme extérieures toutes les forces qui agissent sur ce système partiel, et qui ne sont pas détruites par le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.



Ainsi, soient deux surfaces S et S' glissant sans frottement l'une sur l'autre ; si on considère leur ensemble, leur réaction mutuelle est intérieure au système ; si on regarde l'une d'elles S comme un système séparé, on doit considérer la réaction de S' comme une force extérieure.

Applications.

(I). Une sphère creuse, pesante et homogène, glisse sans frottement sur un plan horizontal. Un point M pesant glisse sans frottement à l'intérieur de la sphère. — Mouvement du système.

Le mouvement du système dépend de 7 paramètres : 2 pour fixer la position du centre de la sphère ; 3 pour fixer la position de la sphère autour de son centre et 2 pour fixer la position du point mobile sur la sphère.

Remarquons d'abord que le mouvement de la sphère autour de son centre C (qui est son centre de gravité) est immédiatement connu. Les forces qui sollicitent la sphère, considérée comme un système isolé, sont en effet son poids, la réaction du plan et la réaction du point mobile, toutes passant par le centre C. D'après le théorème des moments des quantités de mouvement généralisé, le moment total des quantités de mouvement par rapport au point C est donc nul, et le mouvement de la sphère autour de son centre est une rotation uniforme autour d'un axe passant par C et fixe dans la sphère et l'espace.

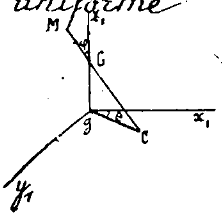
Dès lors, il suffira de 4 intégrales pour achever de déterminer le mouvement.

Deux intégrales sont données par le théorème du mouvement du centre de gravité. — Toutes les forces extérieures appliquées au système de la sphère et du point sont verticales ; en sorte que si l'on rapporte le mouvement à 3 axes (ox, oy, oz) dont l'un oz est vertical, et si (ξ, η, ζ) sont les coordonnées du centre de gravité G du système, on a :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0$$

Par suite, la projection horizontale du centre de gravité du système est animée d'une translation rectiligne et uniforme.

Rapportons alors le système à 3 axes parallèles à ox, oy, oz et ayant pour origine la projection g du centre de gravité G sur le plan horizontal qui contient le centre de la sphère, soit (gx_1, gy_1, gz_1). Pour étudier le mouvement par rapport à ces nouveaux axes, il n'y aura pas à changer les forces extérieures appliquées au système, parce que le nouveau trièdre est animé par rapport à l'ancien d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme



Soit m' la masse de la sphère, m celle du point. On a en désignant par R le rayon de la sphère :

$$CG = \lambda = \frac{m}{m'+m} R \; ; \qquad MG = \mu = \frac{m'}{m'+m} R .$$

La position des deux points M et G est définie par l'angle θ de CG avec gx, et l'angle φ de CG avec gz. Le mouvement du point C est le même que si ce point était un point matériel de masse m' auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures appliquées à la sphère (pesanteur, réaction normale du plan horizontal, réaction du point M sur la sphère dirigée selon MC). Si on applique au système des deux points M et C le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz et le théorème des forces vives, on obtient deux intégrales premières qui définissent θ et φ en fonction de t : en effet, le moment par rapport à Oz des forces extérieures appliquées au système est nul, et leur travail se réduit au travail de la pesanteur appliquée au point M ; quant au travail des forces intérieures, il est nul parce que la distance MC est constante. Calculons ces deux intégrales ; les coordonnées x, y, z, de C et de M sont respectivement :

(C)	$\lambda \sin\varphi \cos\theta$	$\lambda \sin\varphi \sin\theta$	0
(M)	$-\mu \sin\varphi \cos\theta$	$-\mu \sin\varphi \sin\theta$	$R\cos\varphi$.

En calculant les dérivées de ces coordonnées, on voit que le théorème des aires donne :

$$\sin\varphi\, \theta' = C^{te}$$

et le théorème des forces vives :

$$(m'\lambda^2 + m\mu^2)\sin^2\varphi\, \theta'^2 + \left[(m'\lambda^2 + m\mu^2)\cos^2\varphi + mR^2\sin^2\varphi\right]\varphi'^2 = -2mgR\cos\varphi + C^{te}$$

Si on élimine θ' entre ces deux équations, il vient (en tenant compte des valeurs de λ et de μ) :

$$\left(1 - \frac{m}{m+m'}\cos^2\varphi\right)\varphi'^2 = h - \frac{2g}{R}\cos\varphi - \frac{K^2}{\sin^2\varphi}$$

h et K désignant des constantes arbitraires ; la constante des aires est égale à $K\sqrt{\frac{m+m'}{m'}}$:

$$\sin^2\varphi\,\theta' = K\sqrt{\frac{m+m'}{m}}$$

On obtient ainsi t et θ en fonction de φ par deux quadratures hyperelliptiques :

$$(1)\quad dt = \pm \sin\varphi\, d\varphi \sqrt{\frac{1-\frac{m}{m+m'}\cos^2\varphi}{\left(h-\frac{2g}{R}\cos\varphi\right)\sin^2\varphi - K^2}} \quad \text{ou}\quad dt = \pm du \sqrt{\frac{1-\frac{m}{m+m'}u^2}{\left(h-\frac{2g}{R}u\right)(1-u^2)-K^2}}$$

(si on pose $\cos\varphi = u$), et

$$(2)\quad \frac{1}{K}\sqrt{\frac{m'}{m+m'}}\,d\theta = \pm\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-\frac{m}{m+m'}\cos^2\varphi}{\left(h-\frac{2g}{R}\cos\varphi\right)\sin^2\varphi-K^2}} = \pm\frac{du}{(1-u^2)}\sqrt{\frac{1-\frac{m}{m+m'}u^2}{\left(h-\frac{2g}{R}u\right)(1-u^2)-K^2}}$$

Ces égalités permettent de discuter le mouvement : soit $R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}$ la quantité placée sous le radical ; quand u varie de -1 à $+1$, $P(u)$ est toujours positif ; $Q(u)$ est un polynome du 3^e degré, positif pour $u = u_0$, négatif (si K^2 n'est pas nul) pour $u = \pm 1$; les trois racines u_1, u_2, u_3 de Q sont réelles, et le terme en u^3 étant positif, leur ordre est le suivant :

$Q(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
u	-1	u_1	u_0	u_2	$+1$	u_3	$+\infty$

Si au début du mouvement $\frac{du}{dt}$ est positif, u commence par croître et croît jusqu'à la valeur u_2 qu'il atteint ; si $\frac{du}{dt}$ est négatif, u décroît d'abord jusqu'à la valeur u_1. Si $\frac{du}{dt}$ est nul ; u commence par croître ou par décroître suivant que $Q'(u_0)$ est positif ou négatif (1)

$$Q'(u_0) = -2u_0\left(h - \frac{2g}{R}u_0\right) - \left(1-u_0^2\right)\frac{2g}{R},$$

(1) Remarquons que $u \equiv u_0$ est dans ce cas une intégrale de (1) ; l'égalité $u = u_0$ entraine l'égalité $\theta = at + b$; mais ces intégrales des équations (1) et (2) ne satisfont pas aux équations du mouvement du système, comme la suite de cette discussion va le prouver, à moins que u_0 ne soit racine double de Q. Ces solutions sont des solutions parasites introduites par les transformations qui conduisent des équations du mouvement aux équations (1) et (2) : il serait facile de s'en rendre compte directement, mais c'est là un point sur lequel nous reviendrons à propos des équations de Lagrange.

et en tirant $\left(h - \frac{2g}{R} u_0\right)$ de l'équation $Q(u_0) = 0$, on voit que $Q'(u_0)$ est positif si on a :

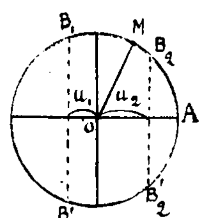
$$\frac{K^2 u_0}{(1-u_0)^2} + \frac{g}{R} < 0$$

ou encore (en remplaçant K^2 en fonction de θ'_0 et u_0) :

$$\frac{m}{m+m'} z_0 \, \theta_0'^2 + g < 0$$

z_0 désigne le z initial de M ; u croît donc d'abord, c'est-à-dire que φ décroît si cette condition est remplie ; au cas contraire φ commence par croître ; u_0 coïncide avec u_2 dans la première hypothèse, avec u_1 dans la seconde.

D'après cela, si on marque sur le cercle trigonométrique le point M qui définit l'angle φ, on voit que ce point oscillera constamment entre les points B_1 et B_2 ; chaque fois que M repasse par le même point de l'arc $B_1 B_2$, $\frac{d\varphi}{dt}$ garde la même valeur absolue mais est alternativement positif et négatif.



Au bout du temps $T = 2\int_{u_1}^{u_2} du \sqrt{R(u)}$, φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ reprennent les mêmes valeurs.

D'autre part $\frac{d\theta}{dt}$ garde toujours le signe de K ; supposons par exemple que K soit positif ; θ croît constamment avec t. Désignons par ω la variation de θ dans le temps T :

$$\omega = 2\int_{u_1}^{u_2} du \sqrt{R(u)}$$

les valeurs de θ au temps t et au temps $t+T$ ont une différence constante qui est ω. Si on fait tourner les axes gx_1, gy_1 de l'angle ω autour de gz_1, le mouvement du système au temps $t+T$ par rapport aux nouveaux axes est le même que son mouvement au temps t par rapport aux premiers axes gx, y, z_1.

Ce qui précède suppose u_1 et u_2 distincts ; ils ne peuvent se confondre que si u_0 annule à la fois Q et sa dérivée, conditions qui s'écrivent :

$$Q(u_0) = 0 \text{ ou } \varphi'_0 = 0 \,, \qquad \text{et } \frac{m'}{m+m'} z_0 \, \theta_0'^2 + g = 0$$

Si ces conditions sont remplies, u doit coïncider constamment avec u_0, φ avec φ_0 ; l'intégrale des aires donne alors

$$\theta' = \theta'_0 ,$$

d'où

$$\theta = \theta'_0 t + \alpha .$$

Inversement, les égalités $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta'_0 t + \alpha$ ne peuvent avoir lieu que si $u_0 = \cos\varphi_0$ est racine double de $Q(u)$. En effet, le point M décrit alors, avec la vitesse angulaire θ'_0, un cercle horizontal de rayon $\mu \sin\varphi$ et de centre P (P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur $g z_1$) La force qui s'exerce sur lui est donc dirigée suivant MP et égale à $m' \lambda \theta_0'^2 \sin\varphi_0$ ou $\frac{m m'}{m+m'} R \theta_0'^2 \sin\varphi_0$; mais cette force est la résultante des forces appliquées au point M et par suite coïncide avec la composante horizontale $T \sin\varphi_0$ de la réaction (T) de la sphère sur M ; (T) doit donc être dirigée de M vers G et sa valeur absolue est $\frac{m m'}{m+m'} R \theta_0'^2$. On trouverait la même valeur de T en raisonnant sur G comme sur M. D'autre part, il faut que la composante verticale de (T) soit égale et directement opposée à la pesanteur appliquée au point M, d'où l'égalité :

$$\frac{m m'}{m+m'} R\, u_0\, \theta_0'^2 + m g = 0 ,$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{m m'}{m+m'} z_0\, \theta_0'^2 + g = 0$$

Les équations

$$\varphi'_0 = 0 , \quad \frac{m'}{m+m'} z_0\, \theta_0'^2 + g = 0$$

équivalent aux suivantes

$$Q(u_0) = 0 \qquad\qquad Q'(u_0) = 0 ;$$

donc u_0 est racine double de Q. Ces conditions remplies, nous savons que le mouvement du système est bien une rotation uniforme autour de $g z_1$. Il est aisé d'ailleurs de le voir directement ; soit N la réaction normale du plan horizontal sur la sphère, comptée positivement dans le sens $g z_1$; on doit avoir

$$N - m' g - T u_0 = 0 , \text{ c'est-à-dire : } N = (m+m') g .$$

Si on écrit les trois équations du mouvement de M et de C respectivement, on trouve que ces équations sont vérifiées quand on y fait :

$x_1 = \lambda \sin\varphi_0 \cos\theta$, $y_1 = \lambda \sin\varphi_0 \sin\theta$, $z_1 = 0$, pour le point C

$x_1 = -\mu \sin\varphi_0 \cos\theta$, $y_1 = -\mu \sin\varphi_0 \sin\theta$, $z_1 = R\cos\varphi_0$, pour le point M

(avec $\theta = \theta_0' t + \alpha$), et

$$T = \frac{m m'}{m+m'} R\,\theta_0'^2 , \quad N = (m+m')g ,$$

pourvu toutefois que la condition $\frac{m}{m+m'} R\theta_0'^2 \cos\theta_0 + g = 0$ soit remplie.

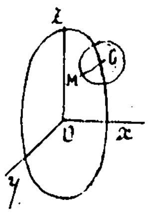
En définitive, si le point M est abandonné avec une vitesse horizontale en un point tel que son z soit égal à $-\frac{g(m+m')}{m\theta_0'^2}$, le mouvement de MC est un mouvement de rotation uniforme autour de gz_1.

Ce cas écarté, les intégrales hyperelliptiques (1) et (2) ne sauraient se réduire (pour $K \neq 0$) que si u_3 est aussi racine de P, ce qui exige que u_3 soit égal à $\sqrt{1+\frac{m'}{m}}$; t et θ sont alors donnés en u par des quadratures elliptiques, mais la discussion précédente n'est pas modifiée.

Si $K = 0$, ou bien $\sin\varphi$ est constamment nul, MC coïncide avec gz_1, ou bien $\theta = \theta_0$ et MC oscille dans un plan vertical.

II — Mouvement d'une sphère pesante et homogène glissant sans frottement sur un ellipsoïde de révolution à axe vertical

— Les forces extérieures appliquées à la sphère sont la pesanteur et la réaction de l'ellipsoïde (normale à la surface) : ces forces passant par le centre C de la sphère, le mouvement de la sphère autour de ce point est un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe dans l'espace et dans la sphère.



Quant au mouvement du centre de gravité C, c'est celui d'un point pesant mobile sur une surface de révolution parallèle à l'ellipsoïde donné. Le théorème des forces vives et le théorème des moments appliqué à oz donnent deux intégrales premières qui déterminent le mouvement. — Exprimons les coordonnées de l'ellipsoïde en fonction de deux angles θ, φ :

$$x = a\cos\varphi\cos\theta , \quad y = a\cos\varphi\sin\theta , \quad z = b\sin\varphi ;$$

les coordonnées de C qui correspond au point M sont, si R désigne le rayon de la sphère,

$$x = a\cos\varphi\cos\theta + \frac{bR\sin\varphi\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} , \quad y = a\cos\varphi\sin\theta + \frac{bR\sin\varphi\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} , \quad z = b\sin\varphi + \frac{aR\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

Les deux intégrales cherchées s'écrivent :

$$\left(a\cos\varphi + \frac{bR\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right)\frac{d\theta}{dt} = \text{Const.}$$

et

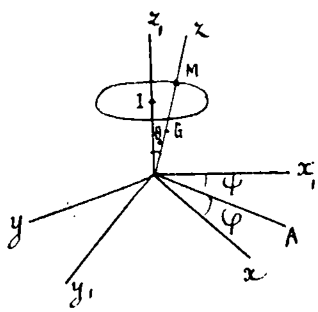
$$\left(a\cos\varphi + \frac{bR\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left[\left\{\frac{d}{d\varphi}\left(a\cos\varphi+\frac{bR\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{d}{d\varphi}\left(b\sin\varphi+\frac{aR\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right)\right\}^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A\left(b\sin\varphi+\frac{aR\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right) + C^{te}$$

L'élimination de $\frac{d\theta}{dt}$ entre ces équations donnera $dt = F(\varphi)d\varphi$, et par suite $d\theta = G(\varphi)d\varphi$.

Le problème est ramené aux quadratures.

III — Un corps solide pesant et homogène admet un axe de symétrie. Cet axe a un point fixe O et il est assujetti à glisser sans frottement sur un cercle fixe horizontal dont le centre est sur la verticale de O. — Mouvement du système.

— L'axe de symétrie Oz est un axe principal d'inertie relativement au point O.



Soient ox et oy les deux autres axes principaux d'inertie relatifs à o, oz_1 la verticale du point o, ox_1 et oy_1 deux horizontales rectangulaires fixes, oA la trace du plan yox sur le plan y_1ox_1.

L'angle $\widehat{z_1oz}$ est constant par suite des liaisons. — La position du solide dépend donc de deux paramètres :

$$\widehat{x_1oA} = \psi \text{ et } \widehat{Aox} = \phi$$

Le centre de gravité G du solide est sur oz ; son z_1 est constant, et par suite le travail de la pesanteur est nul.

Le théorème des forces vives et le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à oz_1, que la réaction de O rencontre et à laquelle la pesanteur est parallèle, donnent deux intégrales premières du mouvement :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$$

$$Ap\sin\theta_0\sin\phi + Bq\sin\theta_0\cos\phi + Cr\cos\theta_0 = K$$

D'ailleurs on a :

$$p = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta_0\sin\phi \qquad q = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta_0\cos\phi \qquad r = \frac{d\psi}{dt}\cos\theta_0 + \frac{d\phi}{dt}$$

Nos deux intégrales s'écrivent donc :

(1) $$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\Big[(A\sin^2\phi+B\cos^2\phi)\sin^2\theta_0+C\cos^2\theta_0\Big]+2C\frac{d\psi}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\theta_0+C\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=h$$

(2) $$\frac{d\psi}{dt}\Big[(A\sin^2\phi+B\cos^2\phi)\sin^2\theta_0+C\cos^2\theta_0\Big]+C\frac{d\phi}{dt}\cos\theta_0=k$$

L'élimination de $\frac{d\psi}{dt}$ entre ces deux équations donne

$$\Big[(A\sin^2\phi+B\cos^2\phi)\sin^2\theta_0+C\cos^2\theta_0\Big]\Big[h-C\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\Big]=k^2-C^2\cos^2\theta_0\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

D'où :

(3) $$dt=\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{h}{C}-\frac{k^2-hC\cos^2\theta_0}{C\sin^2\theta_0(A\sin^2\phi+B\cos^2\phi)}}}$$

En posant $\tan\phi=u$, on reconnaît que t est donné en fonction de μ par une intégrale elliptique ; en remplaçant dt par sa valeur dans l'équation (2), on voit qu'il en est de même de ψ. Quand $A=B$, $\frac{d\phi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont constants.

Dans le cas général, ψ varie toujours dans le même sens, car si $\frac{d\psi}{dt}$ s'annulait ; les équations (1) et (2) donneraient :

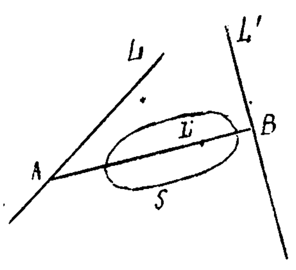
$$h-C\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=0 \qquad\qquad k-C\frac{d\phi}{dt}\cos\theta_0=0$$

et par suite

$$Ch\cos^2\theta_0-k^2=0,$$

condition qui en général n'est pas vérifiée par les données initiales. Si elle est vérifiée $\frac{d\psi}{dt}$ est nul identiquement, ψ est constant.

IV — Un solide de révolution pesant et homogène est traversé suivant son axe par une aiguille qui lui est assujettie et dont les extrémités glissent sans frottement sur deux règles L et L' non parallèles. — Mouvement de ce corps. — La position du système dépend de 2 paramètres un pour déterminer la position de l'aiguille de longeur constante AB, et un pour fixer l'orientation du solide autour de cette droite.



Le théorème des forces vives donne une intégrale première du mouvement.

D'autre part, les forces extérieures, à savoir la pesanteur et les réactions des règles, ont un moment nul par rapport à l'axe de révolution AB ;

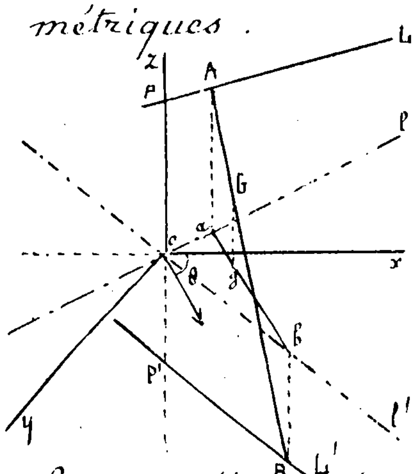
Pv fig. 5

si donc on étudie le mouvement du solide autour de son centre de gravité G, point pour lequel AB est axe principal d'inertie, l'une des équations d'Euler montre que la composante r suivant AB de la rotation instantanée du solide dans ce mouvement est constante. — D'où encore une intégrale première du mouvement.

Ainsi le mouvement dépend de 2 paramètres, et on en a deux intégrales premières.

Prenons alors pour axe des z la perpendiculaire commune aux 2 droites L et L'; pour origine le milieu de leur plus courte distance; pour plan des xy un plan perpendiculaire à oz; pour axes des x et des y les bissectrices des projections de L et L' sur ce plan.

Tout d'abord nous pouvons faire quelques remarques géométriques.



Tout point de la droite AB, et en particulier le centre de gravité G reste dans un plan parallèle à xoy.

La droite AB fait avec la direction oz un angle constant α.

La projection ab de AB sur xoy est un segment de longueur constante dont les extrémités décrivent les projections l et l' des droites L et L'. Donc tout point de ab, et en particulier la projection g de G, décrit une ellipse de centre o. Par suite le centre de gravité du solide décrit une ellipse située dans un plan parallèle à xoy, dont le centre est situé sur oz et dont deux diamètres conjugués sont parallèles à ox et oy.

En outre, on peut fixer la position de la droite AB par l'angle θ de sa projection ab avec ox, et il est dès lors aisé d'obtenir les coordonnées du centre de gravité (ξ, η, ζ) en fonction de θ.

Soit: $\overline{ag} = a$; $\overline{bg} = b$; $\pm K$ les coeff^{ts} angulaires de l et l'.

Les équations de ab, de l et de l' sont:

$$y - \eta = tg\,\theta\,(x - \xi) \qquad y = Kx \qquad y = -Kx$$

On en déduit:

$$\text{Proj. de } ag \text{ sur } ox = \frac{\eta - K\xi}{K - tg\,\theta} = a \cos\theta$$

$$\text{Proj. de } bg \text{ sur } ox = -\frac{\eta - K\xi}{K + tg\,\theta} = b \cos\theta.$$

D'où

$$\xi = -\frac{a+b}{2}\cos\theta + \frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{K}\sin\theta$$

$$\eta = -\frac{a-b}{2}K\cos\theta - \frac{a+b}{2}\sin\theta$$

D'ailleurs : $\quad \zeta = \text{Const}.$

Nous déduisons de là les expressions de la force vive du centre de gravité où toute la masse serait concentrée, et de la fonction des forces.

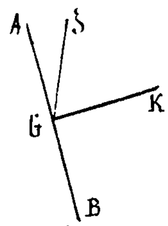
Pour la 1ère, M étant la masse du solide, on a

$$MV^2 = M\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\} = \frac{M}{4}\left\{(a+b)^2+(a-b)^2\left(\frac{\cos^2\theta}{K^2}+K^2\sin^2\theta\right)+2(a^2-b^2)\left(\frac{1}{K}-K\right)\sin\theta\cos\theta\right\}\theta'^2$$

Pour la 2ème, λ, μ, ν étant les cosinus directeurs de la direction de la pesanteur, on a :

$$U = Mg\left\{-\left[\frac{a+b}{2}\lambda + \frac{a-b}{2}\mu\right]\cos\theta + \left[\frac{a-b}{2}\frac{\lambda}{K} - \frac{a+b}{2}\mu\right]\sin\theta\right\} + \text{Const}.$$

Ces préliminaires établis, voyons à former les deux intégrales premières du mouvement que nous avons indiquées, en prenant pour second paramètre définissant la position du système, l'angle ψ que fait avec le demi plan $AG\xi$ le demi plan AGK fixe dans le solide (GK est perpendiculaire à AB, $G\xi$ est parallèle à Oz).



Le déplacement élémentaire du solide peut être défini par la translation $G\Gamma$ du centre de gravité et par la rotation $G\omega$ autour de l'axe instantané passant par le centre de gravité.

Soit p, q, r les composantes de $G\omega$ suivant GK, GK' (perpendiculaire au plan AGK) et GB ; A le moment d'inertie relatif à GK et GK' (le solide est de révolution), C celui relatif à GB.

Les intégrales premières du mouvement seront :

$$(\gamma)\quad \begin{cases} MV^2 + A(p^2+q^2) + Cr^2 = 2U + h \\ r = r_0 \end{cases}$$

Tout revient donc à calculer $\sqrt{p^2+q^2}$ et r, c'est-à-dire les projections de $G\omega$ sur plan KGK' et sur GA en fonction de θ, ψ, θ', ψ'.

A cet effet, remarquons que la rotation $G\omega$ et la translation $G\Gamma$ peuvent être remplacées par deux rotations dont l'une autour de AB et l'autre autour d'un certain axe CD que nous allons déterminer. La vitesse du point A est dirigée suivant L ; la rotation autour de AB

ne déplaçant pas ce point, cette vitesse est due à la rotation autour de CD, donc CD est dans le plan perpendiculaire à L en A. Par suite, l'axe CD est l'intersection des plans perpendiculaires respectivement à L et à L' en A et B. Cet axe est parallèle à oz.

Soit (ω_1) et (ω_2) les deux segments qui définissent les rotations instantanées autour de AB et de CD. La somme géométrique $(\omega_1)+(\omega_2)$ est égale à $(G\omega)$; on en conclut :

$$\sqrt{p^2+q^2} = |\omega_2 \sin\alpha|$$

et

$$r = \omega_1 + \omega_2 \cos\alpha,$$

si ω_1, ω_2 sont les longueurs de (ω_1) et (ω_2) comptées positivement dans le sens AB pour ω_1 et dans le sens oz pour ω_2. D'autre part, la rotation (ω_1) laisse t constant et fait varier ψ de $\omega_1\, dt$ (si on compte ψ positivement de gauche à droite autour de la direction AB).

De même, la rotation (ω_2) laisse ψ constant et fait varier θ de $\omega_2\, dt$. On a donc :

$$\omega_2 = \frac{d\theta}{dt} = \theta' \qquad\qquad \omega_1 = \frac{d\psi}{dt} = \psi'$$

Les équations (γ) deviennent ainsi :

$$\psi' + \cos\alpha\, \theta' = \text{const}^{te}$$

$$A\,l\, V'^2 + A \sin^2\alpha\, \theta'^2 = 2U + \text{const}.$$

Les quantités V et U ne dépendent que de θ ; t est donné en fonction de θ par une quadrature qui est de la forme (comme on le voit aussitôt en remplaçant V et U par leurs valeurs) :

$$t = \int \sqrt{\frac{a\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C}{a'\cos\theta + B'\sin\theta + C'}}\, d\theta,$$

intégrale hyperelliptique.

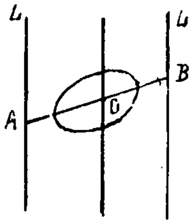
La première équation donne

$$\psi + \theta\cos\alpha = \lambda t + \mu.$$

λ et μ étant des constantes.

Ce qui précède s'applique au cas où les droites L et L' se rencontrent. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où elles seraient parallèles.

Cas particulier où les deux droites sont parallèles — Dans ce cas, le centre de gravité G décrit une droite parallèle aux droites données et située dans leur plan. Le déplacement élémentaire du système résulte d'une translation (de vitesse égale à la vitesse de G) et d'une rotation autour de G. Les vitesses des points G, A, B étant les mêmes, cette rotation doit laisser A et B fixes et par suite l'axe de rotation est AB



On a les mêmes intégrales que précédemment, mais le calcul est plus simple. – Soit ζ le z du point G (l'axe des z étant parallèle à L et L') et ψ l'angle avec le plan de L et L', d'un plan fixe du solide passant par AB; soit enfin i l'angle de la direction de la pesanteur avec oz; il vient

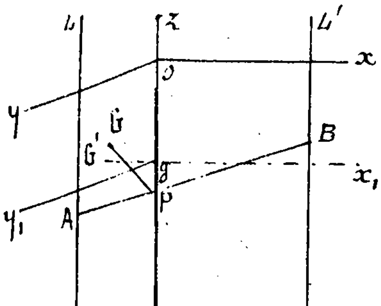
$$\begin{cases} M\zeta'^2 + MK^2\psi'^2 = 2Mg\zeta\cos i + c^{te} \\ \psi' = const^{te} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \psi = \lambda t + \mu \\ \zeta = \frac{1}{2} g\cos i\, t^2 + \lambda' t + \mu' \end{cases}$$

Le centre de gravité décrit une droite comme un point pesant tombant verticalement, l'accélération de la pesanteur étant la projection de g sur cette droite, tous les points de AB ont le même mouvement et le solide est animé autour de AB d'un mouvement de rotation uniforme. – On aurait pu aussi utiliser le théorème du mouvement du centre de gravité relatif à oz. C'est ce que nous allons faire en traitant, comme dernière application le problème précédent sans supposer que le solide soit de révolution.

V — Un corps solide pesant a deux de ses points A et B qui glissent sans frottement sur deux droites fixes parallèles. Mouvement du système. — Le centre de gravité G du solide n'est plus en général sur la droite AB. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de G sur AB. Le point P décrit une droite parallèle à L, L' et que nous prenons pour axe des z. L'axe ox est une perpendiculaire à L et L' menée dans le plan de ces droites.



Les deux paramètres par lesquels nous définissons la position du système sont ζ, le z de G, et ψ l'angle du demi-plan ABG avec le demi plan ABz, compté positivement de gauche à droite autour de la direction AB.

Le théorème du mouvement du centre de gravité appliqué à oz nous donne une première intégrale du mouvement : en effet, les réactions en A et B étant normales à L et à L' on a :

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = M \gamma$$

(en désignant par α, β, γ les composantes suivant ox, oy, oz de la pesanteur qui s'exerce sur l'unité de masse) ; donc

$$\zeta = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \lambda t + \mu$$

Le théorème des forces vives nous fournit une autre intégrale où figurent ψ, ψ', ζ et ζ'. Si on y remplace ζ et ζ' en fonction de t, on trouve que t s'élimine et que ψ dépend de t par une quadrature. Mais on se rend compte de ce fait sans calcul de la manière suivante.

Appelons G' la projection de G sur le plan xoz, g sa projection sur oz. L'accélération de g est la composante (γ) de la pesanteur. Rapportons, dans ce qui va suivre, le mouvement du solide aux axes gx_1, gy_1, gz_1 parallèles aux premiers. Les points A et B dans ce mouvement relatif décrivent encore les droites fixes L et L'. Les forces extérieures relatives appliquées au solide sont les réactions en A et B (normales aux vitesses relatives de A et B) et la pesanteur diminuée de sa composante suivant oz, qui est ici la force d'entrainement F_e. Si ξ_1, η_1, ζ_1 sont les coordonnées nouvelles de G, T_1 la demi-force vive relative du solide, on a :

$$T_1 = M(\alpha \xi_1 + \beta \eta_1) + \text{const}$$

avec

$$\xi_1 = -l \cos\psi \sin\omega$$

$$\eta_1 = -l \sin\psi$$

$$\zeta_1 = 0 \qquad , \omega \text{ désignant l'angle de AB avec } gx_1 .$$

Quand à T_1, c'est une fonction de ψ et de ψ' seulement.

Pour la calculer, observons que le déplacement élémentaire du système se décompose en une translation dont la vitesse est la vitesse de A, et une rotation autour de A qui, laissant B fixe, s'effectue autour de AB avec la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$. Le segment de rotation restant le même dans toutes les décompositions analogues, on voit que le mouvement du solide autour de G est un mouvement de rotation (de vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$) autour de la direction GB' parallèles à AB, fixe dans l'espace et dans le solide. Soit MK^2 le moment d'inertie du solide par rapport à GB'; d'après ce qui précède,

$$2T_1 = Ml^2(\cos^2\psi + \sin^2\omega \sin^2\psi)\psi'^2 + MK^2\psi'^2$$

D'où on déduit :

$$\psi'^2\left[A + \cos^2\psi\right] = B\cos\psi + C\sin\psi + h$$

en posant

$$A = \frac{l^2\sin^2\omega + K^2}{l^2\cos^2\omega}, \quad B = \frac{-2\alpha}{l\cos^2\omega}, \quad C = \frac{-2\beta}{l\cos^2\omega}$$

Cette équation permet de discuter le mouvement par rapport aux axes gx, y, z, mouvement qui est périodique. Si on pose $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = u$, on voit que t dépend de u par une intégrale hyperelliptique du 8^e degré.

Quel est le mouvement de la droite AB par rapport aux premiers axes? Le z du point P étant égal à $\zeta + l\cos\omega\cos\psi$, on en conclut que les vitesses de chaque point de la droite sont égales à chaque instant à $gt + \zeta'_0 - l\cos\omega\sin\psi\frac{d\psi}{dt}$ c'est-à-dire à $gt + w$: w désigne une fonction de t qui est périodique et qui oscille entre deux constantes w_0 et w_1.

Quand $l = 0$, ψ' est constant, la rotation du solide autour de AB est uniforme.

Quand α et β sont nuls, c'est-à-dire quand la pesanteur est parallèle aux droites L, L', on a :

$$\sqrt{h}\,dt = d\psi\sqrt{A + \cos^2\psi}$$

t dépend de ψ par une intégrale elliptique ; ψ varie constamment dans le même sens, et la période du mouvement relatif par rapport à g est

$$T = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^{2\pi} d\psi\sqrt{A + \cos^2\psi}$$

Quand $h = 0$, $\psi = \psi_0$; chaque point du solide se meut comme un point pesant.

Equations Générales du Mouvement des Systèmes. Systèmes à frottement et Systèmes sans frottement.

4e Leçon.

Nous allons indiquer les méthodes de Lagrange qui permettent de déterminer le mouvement d'un système matériel avec le moindre nombre d'equations possible, et avec le moindre nombre de données possible

Soit un système formé de n points $M_i(x_i\, y_i\, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ces points sont supposés soumis à des liaisons qui s'expriment par des relations entre leurs coordonnées et le temps:

$$(1)\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_i, y_i, z_i \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_i, y_i, z_i \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \end{cases}$$

Ces p équations, p étant nécessairement inferieur au nombre $3n$ des cordonnées, sont supposées distinctes, c'est-à-dire qu'elles permettent d'exprimer p des quantités x_i, y_i, z_i en fonction des $3n-p$ autres et du temps, ces $3n-p$ autres étant alors indépendantes. Par exemple, nous admettrons qu'on peut tirer des équations (1) les p dernières quantités $z_n\ y_n\ x_n\ z_{n-1} \ldots$ en fonction des $3n-p$ premières et du temps. Ceci revient à admettre que le déterminant fonctionnel de $f_1, f_2, \ldots f_p$ regardées comme fonctions des p variables $z_n, y_n, x_n, z_{n-1}, \ldots$, n'est pas nul.

La position du système dépend dans ce cas de $3n - p = K$ paramètres indépendants

On dit que les liaisons dépendent du temps quand les équations (1) dépendent de t: j'entends par là que t figure dans $f_1, f_2, \ldots\ldots f_p$ et que les systèmes de relations (1) qui correspondent à deux valeurs quelconques de t ne sont pas equivalents; d'une façon précise, les dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \ldots \frac{\partial f_p}{\partial t}$ ne sont pas nulles quel que soit t pour un système quelconque des valeurs x_i, y_i, z_i satisfaisant aux équations (1) où on donne à t la valeur t_0. Au cas contraire, t ne figure dans (1) qu'en apparence, il suffit de le remplacer par une constante.

On appelle déplacement virtuel d'un système à l'instant t tout déplacement compatible avec les liaisons à l'instant t. – Ne considérons que des déplacements virtuels infiniment petits.

Si $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ sont les variations des coordonnées x_i, y_i, z_i dans un tel déplacement, ces relations satisfont aux relations

$$\left.\begin{array}{l} \sum\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,\delta z\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\left(\frac{\partial f_p}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f_p}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f_p}{\partial z}\,\delta z\right) = 0 \end{array}\right\} (2),$$

(x, y, z) représentant un point quelconque du système, et les sommes $\sum$ étant étendues aux n points du système.

Inversement, tout ensemble de valeurs $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ satisfaisant aux relations (2) définit un déplacement virtuel élémentaire.

Des équations (2) on peut tirer les p derniers δ en fonction des K premiers, car le déterminant des équations linéaires à résoudre n'est autre chose que le déterminant fonctionnel de $f_1, f_2, \dots f_p$ regardées comme fonctions des p variables z_n, y_n, x_n, z_{n-1}, etc.

Le déplacement réel du système coïncidera avec un des déplacements virtuels si les liaisons sont indépendantes du temps. Sinon, le déplacement réel ne sera un des déplacements virtuels que pour des positions particulières du système et des valeurs particulières du temps. (1)

Soit (X, Y, Z) la force qui s'exerce sur le point (x, y, z).

Le travail virtuel des forces (X, Y, Z) est le travail de ces forces dans un déplacement virtuel du système. Il est représenté par l'expression :

$$\sum\left(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z\right),$$

la somme $\sum$ étant étendue aux n points du système, et les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$ étant assujetties à vérifier les relations (2).

Nous venons de voir que l'on peut choisir arbitrairement $(3n-p)$ des variations δ et qu'alors les p autres sont déterminées.

On va montrer que la connaissance du travail total des forces qui s'exercent sur chaque point du système, pour un déplacement virtuel quelconque, suffit à déterminer le mouvement du système.

Tout d'abord il est clair que si l'on connaît la force totale qui s'exerce sur chaque point du système, on aura pour déterminer le mouvement

---

(1) En effet le déplacement réel du système satisfait aux p relations

$$\frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\,dy_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\,dz_i\right) = 0 \qquad (f = f_1, f_2 \dots \text{ou } f_p)$$

Ce déplacement n'est un déplacement virtuel que si $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_p}{\partial t}$ sont nuls : quand ces conditions sont réalisées à un instant quelconque, pour une position quelconque du système, les liaisons sont indépendantes du temps.

du système, $3n$ équations telles que :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Ces équations sont en nombre surabondant ; elles doivent être compatibles avec les équations (1). Il suffit d'en conserver K qui ne renferment en dehors des x, y, z que des quantités connues pour que le mouvement du système soit déterminé ($K = 3n - p$).

Cela posé, considérons la somme

$$\sum \left\{ \left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z \right\}.$$

Cette somme est nulle quels que soient $\delta x, \delta y, \delta z$ et en particulier pour tout déplacement virtuel.

On a donc :

$$(3) \quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

pour tout déplacement virtuel.

Si on exprime, au moyen des relations (2), les p dernières variations δ en fonction des premières qui sont indépendantes, on se rend compte aussitôt que la connaissance du second membre de l'égalité précédente entraîne K relations distinctes entre les $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ et les quantités données.

Pour former commodément ces relations, établissons d'abord un lemme.

Lemme. — Quand un système de forces est tel que le travail virtuel total de ces forces est nul pour tout déplacement virtuel, si (X, Y, Z) est la force qui s'exerce sur le point (x, y, z), on a :

$$\left.\begin{aligned} X &= \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial x} \\ Y &= \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial y} \\ Z &= \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ étant des coefficients qui sont les mêmes pour tous les points du système :

L'hypothèse est que l'on a :

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0 \qquad (5),$$

quels que soient $\delta x, \delta y, \delta z$ vérifiant (2).

Il est clair d'abord que si X, Y, Z sont de la forme (4), la relation (5) est satisfaite :– Il suffit de faire la substitution pour que le 1er membre de (5) devienne la somme des premiers membres des équations (2) multipliées respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$. Par conséquent, les relations (4) sont conditions suffisantes pour que les forces jouissent de la propriété indiquée.

Elles sont aussi conditions nécessaires. En effet, si les forces $X\,Y\,Z$ vérifient la relation (5) pour tout déplacement virtuel, la relation suivante sera vérifiée pour les mêmes déplacements :

$$\Sigma\left[\left(X - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} \dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} \dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} \dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial z}\right)\delta z\right] = 0 \quad (5)';$$

les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ sont arbitraires. Déterminons-les de manière à annuler les coefficients des p dernières variations δ. Il viendra :

$$Z_n - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_n} \dots\dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial z_n} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces p équations, linéaires en $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$, définissent ces quantités ; leur déterminant est différent de zéro, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

Les λ étant ainsi choisis, il ne reste dans la relation (5)' que les $3n-p$ variations δ indépendantes.

Cette relation entraîne par suite les conditions :

$$X_1 - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots\dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial x_p} = 0$$

$$Y_1 - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dots\dots\dots - \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial y_p} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

au nombre de $3n-p$.

Réunissant ce système d'équations au précédent, on voit que si X, Y, Z vérifient la relation (5) pour tout déplacement virtuel, il existe un système de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ tel que X, Y, Z soient identiques aux expressions (4).

Le lemme énoncé est donc vrai.

D'après cela, si l'on considère deux systèmes de forces (X,Y,Z), (X',Y',Z'), (X,Y,Z) et (X',Y',Z') étant appliquées toutes deux au point (x,y,z), et si ces deux systèmes de forces ont même travail virtuel pour tout déplacement virtuel, on en conclut :

$$X = X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

$$Y = Y' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}$$

$$Z = Z' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}$$

Il suffit en effet d'observer que le système de forces $X-X'$, $Y-Y'$, $Z-Z'$ a un travail virtuel nul et d'appliquer le lemme précédent.

Ceci posé, supposons qu'on connaisse une forme du travail virtuel des forces du système pour un déplacement virtuel quelconque, soit :

$$\Sigma \, (A\delta x + B\delta y + C\delta z).$$

Si l'on regarde A, B, C comme les projections d'un segment d'origine x, y, z, ou encore comme les composantes d'une force qui s'exerce sur le point x, y, z, le travail virtuel de cette force est :

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z.$$

Par hypothèse, la somme des travaux analogues coïncide avec le travail virtuel des forces totales X, Y, Z appliquées en chaque point du système ; donc

$$\Sigma \, (A\delta x + B\delta y + C\delta z) = \Sigma \, (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

pour tout déplacement virtuel du système.

D'après la dernière remarque, il en résulte :

$$\left.\begin{aligned} X = A + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y = B + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z = C + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Il est clair dès lors que la connaissance des quantités A, B, C en fonction des positions des points du système, de leurs vitesses et du temps suffit à déterminer le mouvement du système.

En effet, les $3n$ équations (6) jointes aux p équations (1) permettent de calculer les $(3n+p)$ inconnues $x_i, y_i, z_i, \lambda_1 \dots \lambda_p$ en fonction de t. D'une façon précise, différentions deux fois les équations (1) par rapport à t ; nous formons ainsi p relations :

$$(1)' \quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} x''_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} y''_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} z''_i\right) + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} z'_i\right)\right]_2 = 0 \quad (f = f_1, f_2 \dots \text{ou } f_p).$$

L'indice 2 définit un carré symbolique. Les $(3n+p)$ équations (1) et (6) sont linéaires par rapport aux $(3n+p)$ inconnues $x''_i, y''_i, z''_i, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$, et le déterminant Δ des inconnues n'est pas nul. Autrement les $(3n+p)$ équations homogènes en $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ et $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (f = f_1, f_2 \dots \text{ou } f_p)$$

et

$$(6)' \quad \delta x_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i}, \quad \delta y_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i}, \quad \delta z_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i}$$

admettraient des solutions où toutes les inconnues ne seraient pas nulles : or multiplions les équations (6)' par $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ respectivement et faisons la somme, il vient d'après (2) :

$$\sum (\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2 + (\delta z_i)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que tous les δ doivent être nuls, par suite tous les λ d'après (6)'. Le déterminant Δ ne saurait donc être nul identiquement, et les équations (6) et (1)' définissent les x'', y'', z'' et les λ en fonction des x, y, z, x', y', z' et de t. Pour avoir les λ, il suffit de porter dans (1)' les valeurs des x'', y'', z'' tirées de (6) : les λ ainsi calculés, les K premières équations (6) où on remplace les p quantités $z_n, y_n \dots$ en fonction des K autres et de t, définissent les x, y, z en fonction de t et des $2K$ constantes initiales.

Tout ce qui précède résulte de la définition du travail virtuel. Nous allons maintenant introduire des définitions dynamiques qui montreront l'importance des résultats obtenus.

Nous décomposerons la force absolue (F), qui s'exerce à l'instant t sur le point M du système en deux autres, la force active et la force réactive ou réaction.

Soit V un petit volume fermé, entourant le point M ; considérons à l'intérieur de V, tous les éléments matériels E qui à l'instant t ne permettent pas de déplacer le point M arbitrairement dans V. Nous pouvons regarder la force absolue (F) qui s'exerce au temps t sur M comme la somme géométrique de la force (φ) qu'exercent sur M les éléments E et de la force (φ') qu'exercent tous les éléments extérieurs à M autres que E. Si V tend vers zéro, nous admettons que (φ) et (φ') tendent respectivement vers une limite (R) et (F') : (R) est la réaction absolue ou force réactive, (F') est la force active absolue.

$$(F) = (F') + (R).$$

(F') est (en langage abrégé) la force absolue qui s'exercerait sur le point M si, sans rien changer aux autres conditions on pouvait rendre ce point libre à l'instant t.

Supposons maintenant qu'on étudie le mouvement du point par rapport à des axes quelconques $oxyz$. Soit F'_r la force active relative, R_a la force réactive absolue, F_r la force totale relative qui s'exercent à l'instant t sur M. D'après une propriété établie précédemment, on a :

$$m(\Gamma_r) = (F_r) = (F'_r) + (R_a)$$

La force relative à laquelle est soumis le point M au temps t est la somme géométrique de la force active relative et de la réaction absolue.

Ces définitions vont nous conduire à distinguer les systèmes en systèmes à frottement et systèmes sans frottement.

Nous savons que (F_r) est déterminée à l'instant t pour un système donné, les conditions extérieures étant données, quand on connaît les positions des points du système et leurs vitesses à l'instant t.

De même la force active F'_r est une quantité qui, pour un système et un milieu extérieur donnés est bien déterminée quand on connaît les positions des points du système et leurs vitesses à l'instant t.

Par suite R_a est aussi déterminée en fonction des quantités x, y, z, x', y', z' à l'instant t.

Quand on considérera un système dans la réalité, on pourra étudier son mouvement par rapport à des axes $oxyz$, sous l'influence d'un milieu donné. On mesurera ainsi la force (F_r) qui s'exerce sur chaque point. On pourra rendre chaque point libre et mesurer F'_r dans les mêmes conditions. La réaction absolue sera $(F_r) - (F'_r)$.

Deux cas peuvent se présenter.

Ou bien, quand on calculera le travail virtuel de toutes les réactions, ce travail virtuel sera nul pour un déplacement virtuel quelconque, quels que soient l'instant considéré, la position du système, ses vitesses et les forces F'_r ; on dit dans ce cas que le système est sans frottement.

Ou bien ce travail virtuel ne sera pas toujours nul dans ces conditions ; on dit alors que le système est à frottement.

Dans la réalité, le travail des réactions n'est jamais rigoureusement nul; mais très souvent il est négligeable, et on considère le cas des systèmes sans frottement comme la limite d'un grand nombre de cas qui se rencontrent expérimentalement.

Plaçons-nous dans le cas où le système est sans frottement.

Soient R_x, R_y, R_z les projections de la réaction R qui s'exerce sur le point x, y, z. — On a, d'après un lemme établi précédemment.

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} \\ R_y &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} \\ R_z &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

les coefficients $\lambda_1 \dots \lambda_p$ ayant mêmes valeurs pour les différents points $x\,y\,z$.

Quand le système est sans frottement, la connaissance des forces actives suffit à déterminer le mouvement du système; cela résulte aussi d'un théorème démontré tout-à-l'heure. — En effet, le travail virtuel des forces actives est le même que le travail des forces totales qui s'exercent en chaque point du système.

Si X', Y', Z' est la force active qui s'exerce sur le point (x, y, z) on a :

$$\left.\begin{aligned} X &= X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y &= Y' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z &= Z' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

En définitive, quand il n'y a pas frottement, le travail virtuel :

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

est égal pour tout déplacement virtuel à

$$\Sigma\,(X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z),$$

travail virtuel des forces actives qui s'exercent sur les divers points du système.

On désigne souvent sous le nom de forces données les forces actives; ce sont celles que fournit directement l'expérience, et leur connaissance suffit à déterminer le mouvement du système quand il n'y a pas frottement.

Quand on connaît les forces actives, on connaît non seulement le mouvement du système, mais encore les réactions qui s'exercent sur chaque point du système, car on peut calculer les coefficients $\lambda_1 \ldots \lambda_p$.

Au sujet de ces coefficients, répétons que les équations (7) permettent de les exprimer en fonction des positions des points du système, de leurs vitesses et du temps, c'est à dire en fonction des $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ et de t (et aussi des X'_i, Y'_i, Z'_i).

Exemple. — Étudier le mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe ou mobile:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Soit X, Y, Z la force relative aux axes $oxyz$ qui s'exerce sur M:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

- - - - - - - - -

Il n'est pas nécessaire de connaître X, Y, Z, mais seulement la valeur de la quantité

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

pour tout déplacement $\delta x, \delta y, \delta z$ satisfaisant à la relation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Si X' Y' Z' sont tels que pour tout déplacement virtuel on ait:

$$X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

il en résultera, d'après les théorèmes démontrés:

$$X = X' + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

- - - - - - - - -

Si R_x, R_y, R_z désignent les projections sur les axes de la réaction, c'est-à-dire de la force absolue exercée sur le point par l'élément de surface en contact avec lui, pour qu'il n'y ait pas frottement, il faut et il suffit que le travail virtuel de R soit nul ou que:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z};$$

R doit être normale à la surface, ce qui est évident géométriquement un déplacement virtuel étant un déplacement quelconque tangentiel à la surface. Il y a frottement si R est oblique sur la surface.

Quand il n'y a pas frottement, la connaissance de la force active relative à $oxyz$, X', Y', Z', suffit à déterminer le mouvement du système. On a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X' + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Ces 4 équations donneront x, y, z et λ en fonction de t.

Pour avoir à chaque instant λ en fonction de x, y, z, x', y', z', t, il suffit de différentier deux fois l'équation de la surface par rapport au temps t :

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + x'\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}z'\right) + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

et de remplacer dans cette dernière relation x'', y'', z'' par leurs valeurs tirées des équations du mouvement.

5e Leçon

Systèmes à frottement.

Soit M ou (x, y, z) un point du système, (X, Y, Z) la force qui s'exerce sur lui à l'instant t, (X', Y', Z') la force active, (R_x, R_y, R_z) la réaction.

Les équations du mouvement de ce point sont :

$$(1)\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X = X' + R_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y = Y' + R_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z = Z' + R_z \end{aligned}\right.$$

Par définition, le système est sans frottement si

$$\sum R x \delta x + R y \delta y + R z \delta z = 0,$$

quels que soient le déplacement virtuel donné au système, l'instant t considéré, les positions des points du système et leurs vitesses.

(Dans ce cas, on a vu que la connaissance des forces actives suffit à déterminer le mouvement du système. Les $3n$ équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \dfrac{d^2x}{dt^2} = X' + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial x} \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

jointes aux p équations de liaison

$$(3) \qquad f_1 = 0, \; f_2 = 0, \ldots\ldots f_p = 0,$$

définissent le mouvement du système et permettent d'exprimer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ en fonction des quantités x, y, z, x', y', z', et du temps.

Au lieu de se servir des équations (2) et (3), on peut exprimer p des quantités x_i, y_i, z_i en fonction des $(3n - p) = K$ autres, et en exprimant celles-ci en fonction de K paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots q_K$, on met les x_i, y_i, z_i sous la forme :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots\ldots q_K, t) \\ y_i = \psi_i(q_1, q_2, \ldots\ldots q_K, t) \\ z_i = X_i(q_1, q_2, \ldots\ldots q_K, t) \end{array} \right.$$

Observons qu'inversement, quand les x_i, y_i, z_i se laissent exprimer ainsi, le système est soumis à $(3n - K) = p$ liaisons distinctes : car si de K des équations (4) on tire $q_1, q_2, \ldots q_K$ en fonction de K quantités x_i, y_i, z_i, on obtient, en portant ces valeurs dans les p autres équations (4), p relations distinctes entre les x_i, y_i, z_i. Ceci suppose toutefois que K des équations (4) peuvent être résolues par rapport aux $q_1, q_2, \ldots q_K$; autrement dit, nous admettons que si dans le rectangle :

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}, & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_K} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_2}, & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_K} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z_n}{\partial q_2} & & \dfrac{\partial z_n}{\partial q_K} \end{array}$$

on supprime p lignes quelconques, un au moins des déterminants D ainsi obtenus n'est pas nul identiquement. Au cas contraire, il existerait au moins $(p+1)$ relations distinctes entre les x_i, y_i, z_i, qui pourraient s'exprimer en fonction d'un nombre moindre de paramètres.

Quand les φ, ψ, X ne renferment pas t, les liaisons sont indépendantes du temps. Quand t figure dans les φ, ψ, X, les liaisons dépendent du temps, à moins que la relation obtenue en éliminant $q_1, q_2, \ldots q_K$ entre $(K+1)$ quelconques des équations (4) ne soit indépendante de t : ce cas exceptionnel se présente si tous les déterminants obtenus en supprimant $(p-1)$ lignes quelconques dans le rectangle

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, & \ldots\ldots & \frac{\partial x_1}{\partial q_K}, & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z_n}{\partial q_1}, & \ldots\ldots & \frac{\partial z_n}{\partial q_K}, & \frac{\partial z_n}{\partial t} \end{array}$$

sont nuls. Il suffit alors de faire $t = t_0$ dans les φ, ψ, X.

Par exemple, si le système se réduit à un point matériel dont les coordonnées s'expriment ainsi :

$$x = \varphi(q_1, q_2, t)$$
$$y = \psi(q_1, q_2, t)$$
$$z = X(q_1, q_2, t),$$

le point est assujetti à une liaison, c'est-à-dire qu'il est mobile sur une surface Σ, à moins que les trois déterminants

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_1}\right), \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_1} - \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right), \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$

ne soient nuls identiquement : auquel cas le point M est mobile sur une courbe. La surface Σ varie avec le temps si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Quand on met les x_i, y_i, z_i sous cette forme, un déplacement virtuel quelconque $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ se représente ainsi :

$$\delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_K}\delta q_K$$

$$\delta y_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_K}\delta q_K$$

$$\delta z_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \chi_i}{\partial q_K}\delta q_K$$

les δq étant arbitraires. Observons que tous les δx_i, δy_i, δz_i ne peuvent être nuls à la fois sans que tous les δq soient nuls ; autrement tous les déterminants D seraient nuls.

Il n'y a pas frottement si les K sommes

$$\sum\left(R_x\frac{\partial x}{\partial q_j} + R_y\frac{\partial y}{\partial q_j} + R\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

étendues à tous les points du système sont nulles pour $(j = 1, 2 \text{ ou } K)$

Quand, dans les équations (2), on exprime les x_i, y_i, z_i et leurs dérivées en fonction des q_j et de leurs dérivées, on forme $3n$ équations qui déterminent les $\frac{d^2 q_j}{dt^2}$ et les λ en fonction des q_j, $\frac{dq_j}{dt}$ et de t.

Pour éliminer les λ, il suffit de former la somme :

$$\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) = \sum\left(X'\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y'\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z'\frac{\partial z}{\partial q_j}\right);$$

on obtient ainsi

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) = \sum\left(X'\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y'\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z'\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

c'est-à-dire (en faisant $j = 1, 2, \ldots K$), K relations entre t, les K fonctions q et leurs dérivées premières et secondes, pour déterminer le mouvement du système.

Nous verrons dans la leçon prochaine quelle forme on peut donner à ces équations. Nous allons indiquer auparavant les modifications qu'entraîne dans les considérations précédentes l'existence du frottement.

Définition de la force de frottement. — Supposons qu'à l'instant t chaque point M du système ait une position et une vitesse déterminées, et soit R ou (R_x, R_y, R_z) la réaction qui s'exerce au temps t sur M.

Pour un déplacement virtuel quelconque, le travail total des réactions τ est égal à

$$\sum\left(R_x\,\delta x + R_y\,\delta y + R_z\,\delta z\right)$$

Il existe une infinité de systèmes de forces R ou (R'_x, R'_y, R'_z) appliquées à chaque point M et telles que le travail

$$T' = \sum \left(R'_x \ \delta x + R'_y \ \delta y + R'_z \ \delta z \right)$$

soit égal à T pour tout déplacement virtuel du système. D'après ce qu'on a démontré, il faut pour cela et il suffit qu'on ait :

$$R'_x = R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

$$R'_y = R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}$$

$$R'_z = R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}$$

ou, ce qui revient au même, (pour $j = 1, 2, \dots\dots$ ou K)

$$\sum \left(R'_x - R_x\right) \frac{\partial x}{\partial q_j} + \left(R'_y - R_y\right) \frac{\partial y}{\partial q_j} + \left(R'_z - R_z\right) \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points du système.

Parmi ces systèmes (R'), il en existe un et un seul [soit le système des forces (ρ)] tel que les segments $(\rho)\delta t$ définissent un déplacement virtuel: autrement dit, tel que le déplacement $\delta x = \rho_x \delta t$, $\delta y = \rho_y \ \delta t$, $\delta z = \rho_z \ \delta t$ soit un déplacement virtuel.

Pour le démontrer, observons d'abord que si T' est nul pour tout déplacement virtuel, il n'existe d'autre système (ρ) que celui où tous les segments (ρ) sont nuls. En effet, le travail τ' des forces (ρ) dans le déplacement virtuel $(\rho)\delta t$ est égal à $\delta t \ \Sigma \rho^2$, quantité qui ne peut être nulle sans que tous les ρ le soient.

Ceci posé, les $3n$ quantités ρ_x, ρ_y, ρ_z doivent satisfaire aux K équations (α) et aux p équations (β):

$$(\alpha) \quad \sum \rho_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho_z \frac{\partial z}{\partial q_j} = \sum R_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + R_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + R_z \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

$$(\beta) \quad \sum \rho_x \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(où on fait f égal successivement à $f_1, f_2, \dots f_p$). Ces $3n$ équations sont linéaires par rapport aux $3n$ inconnues ρ_x, ρ_y, ρ_z, et le déterminant des inconnues n'est pas nul : autrement il existerait des systèmes de forces (ρ) qui ne seraient pas toutes nulles et dont le travail virtuel serait nul, ce qui est impossible. Il existe donc un système et un seul de quantités ρ_x, ρ_y, ρ_z.

Théorème. — Parmi tous les systèmes (R') le système (ρ) est celui pour lequel la somme $\Sigma R'^2$ est minima.

En effet on a :

$$R'_x = \rho_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = \rho_x + \rho'_x$$

$$R'_y = \rho_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = \rho_y + \rho'_y$$

$$R'_z = \rho_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = \rho_z + \rho'_z$$

Si on calcule $\Sigma R'^2 = \Sigma(R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z)$ en tenant compte de ce fait que les sommes $\Sigma\left(\rho_x \frac{\partial f_j}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f_j}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f_j}{\partial z}\right)$ sont nulles, il vient (en posant $\rho'^2 = \rho'^2_x + \rho'^2_y + \rho'^2_z$)

$$\Sigma R'^2 = \Sigma \rho^2 + \Sigma' \rho'^2.$$

Cette somme est minima quand $\Sigma \rho'^2$ est nul, c'est-à-dire quand tous les ρ' sont nuls, ce qui démontre la proposition.

En définitive, soit un système de forces quelconques (R) appliquées aux différents points du système. On peut décomposer chaque force (R) en deux forces (ρ) et (ρ') qui satisfont aux conditions suivantes : 1° le travail virtuel des forces (ρ') est nul pour tout déplacement virtuel ; 2° les segments (ρ) et définissent un déplacement virtuel.

Cette décomposition n'est possible que d'une seule manière. Parmi tous les systèmes de forces (R') dont le travail virtuel est égal à celui des forces (R), le système des forces (ρ) est celui pour lequel la somme $\Sigma R'^2$ est minima.

Si la force R appliquée à chaque point M est la réaction qui s'exerce sur ce point, on donne à la force (ρ') le nom de force de liaison, et à la force (ρ) le nom de force de frottement.

Les composantes de la force de frottement (ρ) sont de la forme :

$$\rho_x = \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \cdots + \mu_K \frac{\partial x}{\partial q_K}$$

$$\rho_y = \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \cdots + \mu_K \frac{\partial y}{\partial q_K}$$

$$\rho_z = \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial z}{\partial q_2} + \cdots + \mu_K \frac{\partial z}{\partial q_K},$$

ce qui revient à dire qu'elles satisfont aux p égalités :

$$\Sigma\, \rho_x \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (\text{où } f = f_1, f_2 \ldots \text{ou } f_p)$$

Les composantes de la force de liaison (ρ') sont de la forme :

$$\rho'_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

$$\rho'_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}$$

$$\rho'_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots\cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z},$$

ce qui revient à dire qu'elles satisfont aux K égalités :

$$\sum\left(\rho'_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho'_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho'_z \frac{\partial z}{\partial q_j}\right) = 0$$

Il convient de remarquer enfin qu'on a :

$$\sum R^2 = \sum \rho^2 + \sum \rho'^2 .$$

Lorsque le travail virtuel des forces R est nul, toutes les forces ρ sont nulles. La réaction se confond avec la force de liaison.

Supposons par exemple que le système se compose d'un seul point assujetti à une liaison :

$$f(x, y, z, t) = 0 .$$

On peut décomposer la réaction (R) en une force (ρ') dont le travail virtuel est nul, c'est à dire normale à la surface $f = 0$, et en une force (ρ) telle que $(\rho)\delta t$ soit un déplacement virtuel, c'est à dire tangente à la surface $f = 0$. La force de frottement et la force de liaison sont donc, dans ce cas particulier, la composante de la réaction tangente à la surface et la composante normale.

Si le point était mobile sur une courbe, on verrait de même que la force de frottement est la composante de la réaction tangente à la courbe, et la force de liaison la composante normale.

Il est important de faire la remarque suivante : Supposons qu'à l'instant t chaque point M du système ait une position et une vitesse données et soit soumis à une force active donnée (X', Y', Z'). La force de liaison (ρ') qui s'exerce sur M est la même que le système soit à frottement ou sans frottement.

En effet, écrivons les équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X' + \rho_x + \rho'_x = X' + \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \cdots + \mu_K \frac{\partial x}{\partial q_K} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

$$(\gamma)\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' + \rho_y + \rho'_y = Y' + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \cdots + \mu_K \frac{\partial y}{\partial q_K} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' + \rho_z + \rho'_z = Z' + \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \cdots + \mu_K \frac{\partial z}{\partial q_K} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}$$

Pour éliminer les μ entre ces équations, il suffit de multiplier la première par $\frac{\partial f}{\partial x}$, la seconde par $\frac{\partial f}{\partial y}$, la troisième par $\frac{\partial f}{\partial z}$, d'ajouter et de faire la somme pour tous les points du système. En faisant f égal successivement à f_1, $f_2 \ldots f_p$ on obtient p équations linéaires (γ') qui déterminent les λ, car ce sont p combinaisons distinctes des équations (γ), qui sont compatibles et déterminées puisqu'elles définissent un système de grandeurs λ, μ et un seul.

D'autre part on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q''_2 + \dots\dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q''_K + A$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q''_2 + \dots\dots + \frac{\partial y}{\partial q_K} q''_K + B$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q''_2 + \dots\dots + \frac{\partial z}{\partial q_K} q''_K + C,$$

A, B, C dépendant seulement de $q_1, q_2 \dots q_K, q'_1, q'_2 \dots q'_K$ et de t.

Il suit de là que les équations (γ') déterminent les λ en fonction des quantités X', Y', Z', $q_1, q_2, \dots q_K$, $q'_1, q'_2 \dots q'_K$ et t.[1] La force de liaison (ρ') qui s'exerce sur chaque point M est donc déterminée à l'instant t, quand on connaît la position et les vitesses des points du système et les forces actives qui s'exercent sur eux (et cela sans aucune hypothèse sur les frottements du système).

On peut donc dire encore que la force de liaison est la réaction (ρ') qui s'exercerait à l'instant t sur le point M si le système était sans frottement (chaque point du système ayant au temps t même position et même vitesse et étant soumis à la même force active).

La force de frottement est la différence géométrique $(\rho) = (R) - (\rho')$. Cette force ainsi définie jouit des propriétés suivantes : les segments (ρ) et représentent un déplacement virtuel du système. De tous les systèmes de forces (R') dont le travail virtuel est le même que celui des forces (R), le système des forces (ρ) est celui pour lequel la somme $\Sigma R'^2$ est minima.

La force de frottement est aussi, d'après cela, la grandeur géométrique $m[(\Gamma) - (\Gamma_1)]$, où (Γ) représente l'accélération du point M au temps t, et (Γ_1) l'accélération qu'aurait ce point si le système placé à l'instant t dans les mêmes conditions, était sans frottement.

On a en effet :

$$m(\Gamma) = (F') + (R)$$

$$m(\Gamma_1) = (F') + (\rho')$$

D'où $$m[(\Gamma) - (\Gamma_1)] = (R) - (\rho') = (\rho).$$

Les théorèmes précédents se déduisent d'ailleurs de la proposition cinématique suivante : Soient deux systèmes Σ et Σ' de n points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) assujettis aux mêmes liaisons, et placés à l'instant t_0 dans

---

[1] On peut dire encore que les équations (γ') ne diffèrent pas des équations obtenues en différentiant deux fois les équations de liaison par rapport à t, et en remplaçant les x'', y'', z'' par leurs valeurs tirées de (γ) : nous avons vu que les équations en λ étaient déterminées.

les mêmes conditions initiales ; si (Δ) représente la différence géométrique des accélérations (Γ) et (γ) des points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) au temps t_0, les segments $(\Delta)\,\delta t$ définissent un déplacement virtuel des systèmes Σ et Σ'.

Pour le voir, exprimons les x, y, z et les ξ, η, ζ en fonction des mêmes paramètres $q_1, q_2 \ldots q_K$: dans le mouvement du système Σ, $q_1, q_2 \ldots q_K$ sont certaines fonctions de t : $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\ldots q_K(t)$; dans le mouvement du système Σ', ce sont d'autres fonctions $\overline{q_1}(t)$, $\overline{q_2}(t)$, $\ldots \overline{q_K}(t)$. Au temps t_0, on a : $q_1 = \overline{q_1}$, $\ldots q_K = \overline{q_K}$, et $q'_1 = \overline{q'_1}$, $\ldots q'_K = \overline{q'_K}$. Si on calcule $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2}$, on trouve (en tenant compte de ces conditions) qu'au temps t_0, on a :

$$\Delta_x = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial q_1}(q''_1 - \overline{q''_1}) + \frac{\partial x}{\partial q_2}(q''_2 - \overline{q''_2}) + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_K}(q''_K - \overline{q''_K});$$

et de même :

$$\Delta_y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial y}{\partial q_1}(q''_1 - \overline{q''_1}) + \frac{\partial y}{\partial q_2}(q''_2 - \overline{q''_2}) + \cdots + \frac{\partial y}{\partial q_K}(q''_K - \overline{q''_K})$$

$$\Delta_z = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial q_1}(q''_1 - \overline{q''_1}) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)(q''_2 - \overline{q''_2}) + \cdots + \left(\frac{\partial z}{\partial q_K}\right)(q''_K - \overline{q''_K}),$$

ce qui nous montre que le déplacement $\delta x = \Delta_x\,\delta t$, $\delta y = \Delta_y\,\delta t$, $\delta z = \Delta_z\,\delta t$ est un déplacement virtuel.

Ce théorème établi, appelons force de frottement s'exerçant sur M la grandeur géométrique $m\,[(\Gamma) - (\Gamma_1)] = (\rho_1)$ introduite plus haut, force de liaison la réaction (ρ') qui s'exercerait sur M si le système était sans frottement ; on a :

$$(R) = (\rho_1) + (\rho');$$

le travail virtuel des forces (ρ') est nul, et les segments $(\rho_1)\,\delta t$ représentent un déplacement virtuel. Une telle décomposition des (R) n'étant possible que d'une seule manière, les (ρ_1) ne diffèrent pas des (ρ). Cette nouvelle définition du frottement coïncide donc bien avec la première.

Si on suppose par exemple que le système se compose d'un seul point, mobile sur une surface, les remarques précédentes s'énoncent ainsi : la composante normale à la surface de la réaction est la même, que la surface soit ou non sans frottement, quand le point M placé dans des conditions initiales données, est soumis à une force active donnée (soit à la pesanteur). — Si deux points, mobiles sur la même surface, ont à l'instant t_0 même position et même vitesse, la différence géométrique de leurs accélérations au temps t_0 est tangente à la surface.

Il nous est facile maintenant de démontrer le théorème que Gauss énonce, au début de la dynamique des systèmes sur l'écart d'un système.

Supposons qu'à l'instant t chaque point M du système (de masse m) ait une position (x_0, y_0, z_0) et une vitesse (x'_0, y'_0, z'_0) données et soit soumis à une force active donnée (X', Y', Z'). Si le point M était libre, au bout du temps dt il occuperait une certaine position (x^1, y^1, z^1):

$$x^1 = x_0 + x'_0\,dt + \frac{X'}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

$$y^1 = y_0 + y'_0\,dt + \frac{Y'}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

$$z^1 = z_0 + z'_0\,dt + \frac{Z'}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

Dans la réalité, il occupe au bout du temps dt la position (x, y, z):

$$x = x_0 + x'_0\,dt + \frac{X}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

$$y = y_0 + y'_0\,dt + \frac{Y}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

$$z = z_0 + z'_0\,dt\ \frac{Z}{2m}\,dt^2 + \cdots\cdots$$

Désignons par d la distance des deux points (x, y, z) et (x^1, y^1, z^1), et considérons la somme $E = \Sigma\, m^2 d^2$ étendue à tous les points du système. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on a :

$$E = \Sigma\, m^2 d^2 = \frac{dt^4}{4}\Sigma\left(X - X'\right)^2 + \left(Y - Y'\right)^2 + \left(Z - Z'\right)^2 = \frac{dt^4}{4}\,\Sigma\, R^2$$

C'est cette grandeur E que Gauss appelle l'écart du système au temps t_0, pour l'intervalle de temps dt. Gauss démontre que cet écart est minimum à chaque instant quand le système est sans frottement.

Il suffit pour le voir, d'écrire l'égalité:

$$E = \frac{dt^4}{4}\Sigma R^2 = \frac{dt^4}{4}\left(\Sigma \rho^2 + \Sigma \rho'^2\right)$$

Les grandeurs (ρ') sont les réactions qui s'exercent sur les points M s'il n'y a pas frottement. La somme : $\Sigma\rho^2 + \Sigma\rho'^2$ est minima si toutes les grandeurs (ρ) sont nulles, c'est à dire s'il n'y a pas frottement. Pour que l'écart E soit constamment minimum, il faut donc et il suffit que le système soit sans frottement.

Etude du mouvement d'un système à frottement. — Quand il n'y a pas frottement, la connaissance des forces actives suffit pour qu'on puisse déterminer le mouvement du système. Mais quand il y a frottement, il n'en est plus ainsi. Il faut connaître, en outre des forces actives, les forces de frottement ou du moins leur travail virtuel.

L'expérience nous montre que, pour un système donné, dont les points ont à l'instant t des positions et des vitesses données les forces de frottement sont déterminées quand on connaît les forces de liaison. Autrement dit, pour un système donné, les $\rho x, \rho y, \rho z$ sont des fonctions des $\rho' x, \rho' y, \rho' z$ dont les coefficients dépendent de $q_1, q_2, \dots q_K, q'_1, q'_2 \dots q'_K, t$.

Si notamment les liaisons sont indépendantes du temps, et si les éléments du système restent identiques à eux-mêmes, on détermine empiriquement l'expression (indépendante de t) des $\rho x, \rho y, \rho z$ en fonction des $\rho' x, \rho' y, \rho' z$ en plaçant le système dans des conditions initiales variables et en le soumettant à des forces actives simples (telles que la pesanteur). Autrement dit si on pose:

$$\rho x = \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots + \mu K \frac{\partial x}{\partial q K} \qquad \rho' x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

$$\rho y = \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots + \mu K \frac{\partial y}{\partial q K} \quad \text{et} \quad \rho' y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}$$

$$\rho z = \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q K} + \dots + \mu K \frac{\partial z}{\partial q K} \qquad \rho' z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}$$

les $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_K$ sont des fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ et de $q_1, q_2 \dots q_K$, $q'_1, q'_2 \dots q_K$ qu'on calcule empiriquement pour le système donné. Les $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ s'exprimant à l'aide des forces actives X', Y', Z', ceci revient à dire que les forces de frottement sont déterminées à l'instant t, quand le système est placé dans des conditions initiales données et soumis à des forces actives données (quel que soit le milieu qui exerce ces forces actives).

D'une manière générale, quand on étudie le mouvement d'un système à frottement, on suppose connues (en outre des forces actives X', Y', Z') les expressions des $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_K$ en fonction des λ, des q, (et de t si les liaisons dépendent du temps). Écrivons alors les équations du mouvement d'un point du système.

$$(\gamma)\begin{cases} m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = X = X' + \mu_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_1} + \dots + \mu_K \dfrac{\partial x}{\partial q_K} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial x} \\ m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = Y = Y' + \mu_1 \dfrac{\partial y}{\partial q_1} + \dots + \mu_K \dfrac{\partial y}{\partial q_K} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial y} \\ m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = Z = Z' + \mu_1 \dfrac{\partial z}{\partial q_1} + \dots + \mu_K \dfrac{\partial z}{\partial q_K} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial f_p}{\partial z}. \end{cases}$$

Nous pouvons substituer à ce système les $3n$ équations suivantes:

1° les p équations (γ') obtenues en multipliant les trois équations (γ) par $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}$ en ajoutant et en faisant la somme pour tous les points du système (Ces p équations, nous l'avons vu, déterminent les $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ en fonction des q', de t et des $X' Y' Z'$);

2° les K équations (γ'') obtenues en multipliant les 3 équations (γ) respectivement par $\frac{\partial x}{\partial q_j}, \frac{\partial y}{\partial q_j}, \frac{\partial z}{\partial q_j}$, en ajoutant et en faisant la somme pour tous les points du système.

Ces équations sont de la forme :

$$(f'')\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)=\sum\left(X'\frac{\partial x}{\partial q_j}+Y'\frac{\partial y}{\partial q_j}\right)+Z'\frac{\partial z}{\partial q_j}+\sum\left(\rho_x\frac{\partial x}{\partial q_j}+\rho_y\frac{\partial y}{\partial q_j}+\rho_z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

La somme $\sum\left(\rho_x\frac{\partial x}{\partial q_j}+\rho_y\frac{\partial y}{\partial q_j}+\rho_z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$ est de la forme :

$$\mu_1\sum\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)+\cdots\cdots+\mu_K\sum\left(\frac{\partial x}{\partial q_K}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_K}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_K}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

Les $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_K$ sont des fonctions données des λ, des q, des q' et de t. On remplace (dans les μ) les λ par leurs valeurs tirées des équations (f'). Les K équations (f''), dont les seconds membres sont alors des fonctions connues des q, des q' et de t, déterminent le mouvement du système.

Appliquons ces généralités à l'étude du mouvement d'un point M sur une surface fixe : soit

$$z = F(x,y)$$

l'équation de la surface (Ici $q_1 = x$, $q_2 = y$) ; nous avons

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X' + \mu_1 - \lambda\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y' + \mu_2 - \lambda\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z' + \mu_1\frac{\partial F}{\partial x} + \mu_2\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda$$

L'expérience nous montre que la force de frottement (ρ), quand le point M est placé en un point déterminé de la surface est dirigée en sens inverse de la vitesse de M, sensiblement indépendante de cette vitesse, et proportionnelle à la composante normale de la réaction qui est, dans ce cas particulier, la force de liaison (ρ'). On a donc :

$$\rho = f\rho' ;$$

le coefficient de frottement ne dépend que de la position de M sur la surface (ici de x, y) ; il est constant si la surface est partout également rugueuse.

Quand la vitesse de M est nulle, (ρ) est directement opposé à la composante tangentielle à la surface F'_T de la force active ; mais pour sa valeur absolue deux cas sont à distinguer suivant qu'on a $F'_T > f\rho'$ ou $F'_T < f\rho'$.

Dans le premier cas, ρ est égal à $f\rho'$; dans le second cas, ρ est égal à F'_T et l'accélération de M est nulle.

D'après cela, comme ρ' est égal à

$$+\sqrt{\lambda^2\left[1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]},$$

μ_1 et μ_2, égaux à ρ_x et à ρ_y, s'expriment ainsi :

$$\mu_1 = - \frac{f x' |\lambda| \sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}x'+\frac{\partial F}{\partial y}y'\right)^2}}$$

$$\mu_2 = - \frac{f y' |\lambda| \sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}x'+\frac{\partial F}{\partial y}y'\right)^2}}$$

λ est donné par l'égalité :

$$m\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2\right] = -X'\frac{\partial F}{\partial x}-Y'\frac{\partial F}{\partial y}+Z'+\lambda\left[1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right],$$

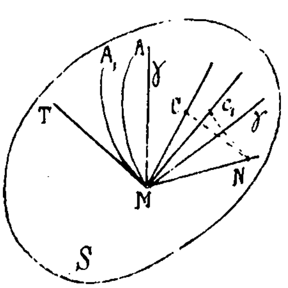
et si on remplace λ par cette valeur dans les expressions de μ_1 et μ_2, le mouvement du point M est déterminé par les équations :

$$m\left[x''+\frac{\partial F}{\partial x}z''\right] = X'+Z'\frac{\partial F}{\partial x}+\mu_1\left[1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]+\mu_2\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m\left[y''+\frac{\partial F}{\partial y}z''\right] = Y'+Z'\frac{\partial F}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\mu_2\left[1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right],$$

qui sont du second ordre en x et y, si on y remplace z par $F(x, y)$.

Dans ce cas particulier d'un point mobile sur une surface fixe, les théorèmes généraux que nous avons démontrés s'obtiennent bien aisément par voie géométrique. Par exemple, pour établir que la réaction normale de la surface est la même qu'il y ait frottement ou non, il suffit de prouver que si deux points mobiles sur la même surface, ont à l'instant t même position et même vitesse, la différence géométrique de leurs accélérations est tangente à la surface.



Or soit MA la trajectoire du 1er mobile, MA_1 celle du 2e ; leurs accélérations respectives γ et γ_1 sont situées dans les plans osculateurs en M à MA et MA_1. Les accélérations ont pour projections suivant la tangente à la trajectoire et la normale principale, l'une $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{R}$, l'autre $\left(\frac{dv}{dt}\right)_1$, $\frac{v^2}{R_1}$. La vitesse initiale est la même pour les 2 points ; les trajectoires sont donc tangentes en M, et l'on aura démontré que la différence géométrique $(\gamma)-(\gamma_1)$ n'a pas de composante normale à la surface si on prouve que les grandeurs $\frac{v^2}{R}$ et $\frac{v^2}{R_1}$ portées respectivement suivant les normales principales MC et MC_1 vers les centres de courbure, ont même projection sur la normale en M à la surface, MN. D'après le théorème de Meusnier, — si par les centres de courbure C et C_1 on mène des plans perpendiculaires à MC et MC_1 respectivement, ils couperont la normale à la surface au même point N, c'est-à-dire que C et C_1 sont sur un cercle de diamètre MN.

Si l'on transforme la figure par vecteurs réciproques, le pôle étant M et le module v^2, l'inverse du cercle est une droite perpendiculaire en P à MN. Donc les grandeurs $\frac{v^2}{R}$, $\frac{v^2}{R_1}$ portées sur MC et MC_1 ont même projection MP sur la normale à la surface, ce qui démontre la proposition.

On peut encore se servir des équations intrinsèques du mouvement d'un point sur une surface. — Ces équations s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} & m\frac{dv}{dt} = F_t = F'_t + R_t \\ & m\frac{v^2}{R}\sin\theta = F_p = F'_p + R_p \\ & m\frac{v^2}{R}\cos\theta = F_n = F'_n + R_n \end{aligned}\right.$$

F_t étant la composante de la force totale sur la direction Mt de la tg. à la trajectoire dans le sens du mouvement;
F_p " " " " " la direction M_p de la tg. à la surface perpendiculaire à Mt;
F_n " " " " " la normale M_n à la surface;
θ " l'angle de la binormale à la trajectoire avec la normale à la surface.

Si r désigne le rayon de courbure MC' de la section de la surface par le plan normal en M à la surface et passant par Mt, on a donc :

$$R_n = \frac{mv^2}{r} - F'_n$$

(en choisissant pour direction M_n la direction MC'); ce qui nous montre que la force de liaison $\rho' = (R_n)$ est déterminée quand on connaît la position du point, sa vitesse et la force F'.

Ces équations intrinsèques sont d'ailleurs commodes pour étudier le mouvement de M dans tous les cas. Qu'il y ait frottement ou non, R_p est nulle, car la composante (ρ) de la réaction tangentielle à la surface est dirigée en sens inverse de Mt, c'est-à-dire normale à M_p.

D'autre part, ρ est égal à $f\rho'$, c'est-à-dire à

$$f\left|\frac{mv^2}{r} - F'_n\right|;$$

le mouvement est donc déterminé par les équations :

$$m\frac{dv}{dt} = F'_t - f\left|\frac{mv^2}{r} - F'_n\right|$$

$$m\frac{v^2}{R}\sin\theta = F'_p.$$

R est le rayon de la trajectoire, r le rayon de courbure de la section normale de la surface tangente à la trajectoire.

Par exemple, si F est nulle, on a :

$$\sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire que la trajectoire est encore une géodésique de la surface ; mais le point parcourt cette trajectoire avec une vitesse qui est constamment diminuée par la force de frottement.

C'est là un fait général démontré par l'expérience : quand les liaisons ne dépendent pas du temps, les forces de frottement diminuent toujours la force vive du système. Autrement dit le travail des forces de frottement est essentiellement négatif.

6e Leçon.

Équations de Lagrange

Équation de D'Alembert

Tout ce qui a été énoncé précédemment peut se réduire à ceci : la somme

$$\sum \left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z \right]$$

étendue à tous les points du système. — δx, δy, δz désignant un déplacement virtuel quelconque et (X, Y, Z) la force qui s'exerce sur le point (x, y, z) — est identiquement nulle.

L'égalité qui exprime ce fait subsiste, quand il n'y a pas frottement, si l'on remplace (X, Y, Z) par la force active (X', Y', Z'). – et quand il y a frottement, si l'on remplace (X, Y, Z) par la somme géométrique de la force active et de la force de frottement qui s'exercent sur le point (x, y, z).

En désignant, suivant les cas, par (X', Y', Z') la force active ou la somme géométrique de la force active et de la force de frottement, cette égalité conduit à des équations de la forme :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

et ces équations, jointes aux équations de liaison :

$$f_1 = 0 \dots\dots\dots\dots f_p = 0 \qquad (1)$$

suffisent à déterminer le mouvement du système, et par suite les forces de liaison.

L'équation :

$$\Sigma \left[\left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) \delta x + \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right) \delta y + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right) \delta z \right] = 0 \qquad (2)$$

qu'on peut regarder comme l'équation la plus générale de la Mécanique, s'appelle souvent Equation de d'Alembert.

Principe des vitesses virtuelles. — En particulier pour qu'un système dont les liaisons ne dépendent pas du temps et où il n'y a pas frottement, soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail virtuel des forces actives soit nul.

(1°.) La condition est nécessaire. – En effet, puisqu'il n'y a pas frottement, le travail des forces de liaison est nul, et la force totale (X, Y, Z) qui s'exerce sur (x, y, z) est :

$$X = X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots\dots \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}$$

. . . .

(X', Y', Z') étant la force active du même point. – s'il y a équilibre : $X = Y = Z = 0$. Donc pour tout déplacement virtuel :

$$\Sigma \left(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z\right) = 0;$$

par suite pour tout déplacement virtuel, on a aussi

$$\Sigma \left(X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z\right) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(2°.) La condition est suffisante. – En effet, si elle est remplie, et si à l'instant t, avec des vitesses nulles, les points du système occupent des positions x_0, y_0, z_0, les équations du mouvement du système sont vérifiées quand on y fait pour chaque point du système $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$, $z \equiv z_0$. Il n'existe d'ailleurs qu'un système d'intégrales des équations du mouvement qui satisfasse aux conditions initiales : $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, $z'(t_0) = 0$, à moins toutefois que les valeurs t_0, x_0, y_0, z_0, $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$, ne forment un système de valeurs singulières des équations du mouvement. Ce cas exceptionnel écarté, le système restera donc nécessairement en équilibre.

On peut encore démontrer cette proposition en s'appuyant sur la suivante : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel reste en équilibre, si on l'abandonne sans vitesse au point x_0, y_0, z_0, est que l'on ait :

$$X(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0) = 0, \quad Y(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0) = 0, \quad Z(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0) = 0.$$

Cette condition n'est rigoureusement suffisante que si X, Y, Z sont des fonctions régulières dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$.

Ce lemme une fois admis, supposons que le travail virtuel des forces actives X', Y', Z' qui s'exercent sur les différents points d'un système sans frottement, soit nul. La force X, Y, Z, qui s'exerce sur chaque point du système, est nécessairement nulle ; en effet, soit (F) la force qui s'exerce sur le point M ; ce point doit se mettre en mouvement dans le sens de (F) et le travail de (F) dans le déplacement réel ds du point M est égal à $F\,ds$. La somme $\sum F\,ds$ est essentiellement positive. Le travail virtuel des forces (F), par suite le travail virtuel des forces actives, n'est donc pas nul pour le déplacement virtuel $\delta s = ds$, à moins que toutes les forces (F) ne soient nulles. C. Q. F. D.

Les positions d'équilibre d'un système sans frottement soumis à des forces actives données sont donc déterminées par l'égalité :

$$\sum (X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) = 0$$

qui équivaut aux $3n$ équations :

$$X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = 0,$$

$$Y' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = 0,$$

$$Z' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots\dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = 0.$$

Ces $3n$ équations, jointes aux p équations de liaison, déterminent dans le cas le plus général des valeurs isolées des x, y, z et des λ. Dans certains cas, ces équations peuvent être incompatibles ou indéterminées.

Au cas où X', Y', Z' dépendraient du temps, les positions x_0, y_0, z_0, d'équilibre devraient satisfaire aux égalités précédentes pour toute valeur de t. Il n'existe pas alors, dans le cas général, de position d'équilibre.

Si on exprime les x, y, z en fonction de K paramètres $q_1, q_2, \ldots q_K$, il vient :

$$\sum (X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z) = \delta q_1 \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) + \cdots + \delta q_K \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_K} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_K} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_K} \right)$$

$$= Q_1 \delta q_1 + Q_1 \delta q_2 + \cdots + Q_K \delta q_K$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre sont :

$$Q_1 (q_1, q_2, \ldots q_K, 0, \ldots 0) = 0, \; Q_2 (q_1, q_2 \ldots q_K, 0, \ldots 0) = 0, \ldots\ldots Q_K (q_1, q_2 \ldots q_K, 0 \ldots 0) = 0,$$

d'où K équations entre les $q_1, q_2, \ldots q_K$.

Lorsque $Q_1, Q_2, \ldots Q_K$ sont les dérivées partielles d'une même fonction $U(q_1, q_2 \ldots q_K)$, ces égalités sont les conditions nécessaires pour que la fonction U soit minima. Nous verrons, dans une leçon prochaine, que si U est réellement minima l'équilibre est stable et nous étudierons les petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre.

En particulier pour qu'un système pesant soit en équilibre, il faut et il suffit que l'ordonnée verticale ζ de son centre de gravité satisfasse aux conditions

$$\frac{\partial \zeta}{\partial q_1} = 0 \ldots\ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial q_K} = 0 ;$$

autrement dit, que son centre de gravité soit le plus haut ou le plus bas possible.

Lorsqu'il y a frottement, mais que les éléments matériels extérieurs qui exercent des réactions sur le système sont fixes, les conditions d'équilibre trouvées précédemment sont encore suffisantes, mais ne sont plus nécessaires.

En effet, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'expérience nous montre que le travail des forces de frottement est toujours négatif. Si les conditions d'équilibre énoncées sont remplies, le système, supposé sans frottement, aurait à un instant quelconque une force vive nulle. Le frottement ne pouvant que diminuer cette force vive, elle est encore nulle à fortiori si le système est sans frottement, c'est-à-dire que le système reste en équilibre.

Mais ces conditions ne sont plus nécessaires. Par exemple, soit M un point mobile avec frottement sur une surface matérielle fixe. Tout point P où la force active (F') qui s'exerce sur M est normale à la surface est une position d'équilibre ; mais considérons les points P' de la surface tels qu'on ait : $F'_t < f F'_n$, f étant le coefficient de frottement, F'_t et F'_n les composantes de (F') tangente et normale à la surface. Ces points P' forment autour de P une zône continue dont tous les points sont des positions d'équilibre.

Nous n'insisterons pas davantage ici sur le principe des vitesses virtuelles.

Nous allons passer à l'étude du mouvement des systèmes.

Equations de Lagrange

Nous avons vu dans la cinquième leçon qu'on peut définir le mouvement d'un système à l'aide de K équations indépendantes des forces de liaison et qui s'écrivent ainsi :

$$(1)\quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)=\sum\left(X'\frac{\partial x}{\partial q_j}+Y'\frac{\partial y}{\partial q_j}+Z'\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)=Q_j\,;$$

les sommes doivent être étendues à tous les points du système. Quand à j, il est égal à 1, à 2, ... ou à K.

Si on remplace les x, y, z et leurs dérivées en fonction des q, des q' et des q'', les équations précédentes sont linéaires par rapport aux q'', et résolubles par rapport à ces variables. En effet, ces K équations forment un système de K combinaisons distinctes des $3n$ équations (γ) de la 5ᵉ leçon (voir page 55), lesquelles sont distinctes. Mais c'est là un point que nous démontrerons tout-à-l'heure directement.

Les quantités X', Y', Z' sont les projections de la force active qui s'exerce sur M, s'il n'y a pas frottement, ou de la force active augmentée géométriquement de la force de frottement s'il y a frottement.

Lagrange a donné aux premiers membres des équations (1) une forme qui permet de les calculer facilement. Il a été conduit à ce résultat par l'induction suivante : le second membre Q_j d'une équation (1) est le coefficient de δq_j dans l'expression du travail virtuel relatif au déplacement δq_j. Si on fait un changement d'axes rectangulaires (x, y, z) quelconque en gardant les mêmes paramètres q, Q_j ne change pas ; le premier membre de l'équation (1) doit donc rester lui aussi invariant. Or la force vive d'un système est une fonction de t, des q et des q' qui reste invariante dans un changement d'axes rectangulaires. De là l'idée de Lagrange d'exprimer le premier membre des équations (1) à l'aide de la seule force vive et de ses dérivées

Posons

$$T=\frac{1}{2}\sum m v^2=\frac{1}{2}\sum m\left(x'^2+y'^2+z'^2\right),$$

et écrivons d'autre part le premier membre d'une équation (1) :

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q_j}+y'\frac{\partial y}{\partial q_j}+z'\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)-\sum m\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_j}+y'\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_j}+z'\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

ou $\quad \dfrac{d}{dt} \cdot P_1 \quad - P_2$

Rappelons-nous qu'on a

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q'_K + \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial y}{\partial q_K} q'_K + \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial q_K} q'_K + \frac{\partial z}{\partial t}$$

par suite,

$$\frac{\partial x}{\partial q_j} = \frac{\partial x'}{\partial q'_j} \qquad \frac{\partial y}{\partial q_j} = \frac{\partial y'}{\partial q'_j} \qquad \frac{\partial z}{\partial q_j} = \frac{\partial z'}{\partial q'_j}$$

donc

$$P_1 \equiv \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_j} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_j} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_j} \right) \equiv \frac{\partial T}{\partial q'_j}$$

Pour calculer P_2, remarquons que $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial x}{dq_j}$ ne diffère pas de $\dfrac{\partial}{\partial q_j} \dfrac{dx}{dt}$. En effet,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_j} = \frac{\partial x^2}{\partial q_j \, \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_j \, \partial q_2} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_j \, \partial q_K} q'_K + \frac{\partial^2 x}{\partial q_j \, \partial t}$$

et $$\frac{\partial}{\partial q_j} x' = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \, \partial q_j} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \, \partial q_j} q'_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_K \, \partial q_j} q'_K + \frac{\partial^2 x}{\partial t \, dq_j}$$

De même, $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial y}{dq_j} \equiv \dfrac{\partial y'}{\partial q_j}$, $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial z}{\partial q_j} \equiv \dfrac{\partial z'}{\partial q_j}$. On peut donc écrire

$$P_2 \equiv \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_j} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_j} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_j} \right) \equiv \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Les équations de Lagrange deviennent ainsi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_K} = Q_K$$

Avant d'employer ces équations à l'étude du mouvement d'un système, nous allons étendre les considérations précédentes aux systèmes continus:

Systèmes continus dont la position ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des systèmes formés d'un nombre fini de points matériels. Supposons maintenant que le système considéré renferme des corps continus, mais dont la position dépend seulement d'un nombre fini de paramètres (par exemple des solides homogènes aussujettis à certaines liaisons)

Les coordonnées x, y, z, d'un élément matériel déterminé du système s'expriment en fonction de K paramètres $q_1 q_2, \dots q_K$ et de t:

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x &= \varphi\,(q_1, q_2, \cdots q_K, t) \\ y &= \psi\,(q_1, q_2, \cdots q_K, t) \\ z &= \chi\,(q_1, q_2, \cdots q_K, t). \end{aligned} \right.$$

A chaque corps continu du système correspond un système de fonctions φ, ψ, χ qui dépend de constantes $a_1, b_1, \dots$ en nombre égal à 3, 2 ou 1 suivant que le corps est un volume, une aire ou une ligne. C'est ainsi que les coordonnées x, y, z des points d'un solide libre (à trois dimensions) s'expriment en fonction de six paramètres (et de trois constantes, par exemple des coordonnées a, b, c du point considéré rapportées aux axes principaux d'inertie Ga, Gb, Gc, G désignant le centre de gravité du solide.)

Quand le système renferme en outre des points matériels isolés, à chaque point matériel correspond un système déterminé de fonctions φ, ψ, χ.

Nous supposons que les K paramètres q sont indépendants, c'est-à-dire que pour un instant t quelconque, on peut se donner arbitrairement les valeurs de $q_1, q_2, \cdots q_K$ et de $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots\dots \frac{dq_K}{dt}$. Cela signifie encore qu'on peut se donner arbitrairement la position x, y, z et la vitesse x', y', z' de tous les éléments du système, pourvu seulement que ces conditions initiales soient compatibles avec les équations (1).

Entre $(K+1)$ coordonnées x, y, z de points déterminés du système existe une relation où peut figurer t et qu'on obtient en éliminant $q_1, q_2, \dots q_K$ entre les $(K+1)$ équations (1) correspondantes. Nous admettons qu'une telle relation n'existe pas entre K coordonnées x, y, z quelconques : autrement dit, on peut disposer des paramètres q (pour t quelconque) de façon à donner à K coordonnées x, y, z de certains points du système des valeurs arbitraires ; si on écrit les K équations (1) correspondantes, ces K équations se laissent résoudre par rapport à $q_1, q_2, \dots q_K$. (Dans l'hypothèse contraire, on pourrait laisser constants un ou plusieurs paramètres q, et les coordonnées des points du système seraient exprimées en fonction d'un moindre nombre de paramètres.) Nous disons alors que la position du système dépend de K paramètres distincts. Analytiquement, ceci revient à admettre que les équations en $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_K$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 \, \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_K} \delta q_K = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 \, \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_K} \delta q_K = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1} \delta q_1 \, \frac{\partial \chi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \chi}{\partial q_K} \delta q_K = 0$$

écrites pour tous les points du système, n'admettent pas (pour $q_1, q_2, \ldots\ldots q_K$ et t quelconques) d'autres solutions que $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \ldots\ldots \delta q_K = 0$. S'il en était autrement, en effet, le déterminant fonctionnel de K équations (1) quelconques (en $q_1, q_2, \ldots q_K$) serait identiquement nul.

Les liaisons sont indépendantes du temps, quand les φ, ψ, χ ne renferment pas t. Si t figure dans les φ, ψ, χ, les liaisons dépendent du temps à moins que toutes les relations obtenues en éliminant les paramètres q entre $(K+1)$ équations (1) ne soient indépendantes de t.

Pour que ces conditions exceptionnelles soient remplies, il faut et il suffit que les équations en $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_K, \delta t$

$$(\alpha) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_K} \delta q_K + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_K} \delta q_K + \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \delta t = 0 \\ \dfrac{\partial \chi}{\partial q_1} \delta q_1 + \dfrac{\partial \chi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \chi}{\partial q_K} \delta q_K + \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \delta t = 0 \end{cases}$$

écrites pour tous les points du système, admettent (pour $q_1, q_2, \ldots\ldots q_K$ et t quelconques) d'autres solutions que $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \ldots\ldots \delta q_K = 0, \delta t = 0$. Il est loisible, dans ce cas particulier, de laisser à t dans les φ, ψ, χ une valeur constante.

Un déplacement virtuel du système est un déplacement élémentaire compatible avec les liaisons au temps t. Quand les K paramètres q sont indépendants et distincts, le déplacement virtuel le plus général dépend de K variations arbitraires $\delta q_1, \delta q_2, \ldots\ldots \delta q_K$. On a pour chaque élément matériel x, y, z, du système :

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_K} \delta q_K$$

$$\delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots \frac{\partial \psi}{\partial q_K} \delta q_K$$

$$\delta z = \frac{\partial \chi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \chi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots\ldots \frac{\partial \psi}{\partial q_K} \delta q_K$$

Tous les $\delta x, \delta y, \delta z$ ne peuvent être nuls à la fois (pour $q_1, \dots q_K, t$ quelconques) que si tous les δq le sont.

Le déplacement réel du système satisfait aux équations:

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} dq_2 + \dots\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_K} dq_K + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\partial t$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} dq_2 + \dots\dots + \frac{\partial\psi}{\partial q_K} dq_K + \frac{\partial\psi}{\partial t}\partial t$$

$$dz = \frac{\partial\chi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\chi}{\partial q_2} dq_2 + \dots\dots + \frac{\partial\chi}{\partial q_K} dq_K + \frac{\partial\chi}{\partial t} dt$$

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, le déplacement réel est un des déplacements virtuels. Il n'en est plus ainsi quand les liaisons dépendent du temps; en effet, on devrait avoir:

$$(\alpha')\dots\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}(dq_1 - \delta q_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}(dq_2 - \delta q_2) + \dots\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_K}(dq_K - \delta q_K) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt = 0\\
&\frac{\partial\psi}{\partial q_1}(dq_1 - \delta q_1) + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}(dq_2 - \delta q_2) + \dots\dots + \frac{\partial\psi}{\partial q_K}(dq_K - \delta q_K) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt = 0\\
&\frac{\partial\chi}{\partial q_1}(dq_1 - \delta q_1) + \frac{\partial\chi}{\partial q_2}(dq_2 - \delta q_2) + \dots\dots + \frac{\partial\chi}{\partial q_K}(dq_K - \delta q_K) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt = 0
\end{aligned}\right.$$

pour des valeurs convenables de $\delta q_1, \delta q_2, \dots\dots \delta q_K$. Mais quand les liaisons dépendent du temps, les équations (α') n'admettent d'autres solutions que $(dq_1 - \delta q_1) = 0 \dots$ $\dots (dq_K - \delta q_K) = 0$, $dt = 0$, (sauf pour des valeurs exceptionnelles de $q_1, q_2, \dots q_K, t$)

Ces préliminaires établis, décomposons le système en un nombre fini n d'éléments de très-petites dimensions. Si nous regardons ces n éléments comme des points matériels, nous pouvons appliquer au système les équations de Lagrange, et les équations approchées ainsi obtenues tendent vers des égalités rigoureuses quand on fait croître indéfiniment le nombre des éléments, les dimensions de chaque élément tendant vers zéro. Pour nous rendre compte de ce que deviennent ces égalités, considérons à l'instant t un corps continu Σ du système, et un élément dv de Σ entourant le point M ou (x, y, z): élément de volume, d'aire ou d'arc, suivant que Σ est un volume, une surface ou une ligne. Pour fixer les idées, supposons que Σ soit à trois dimensions. Soit m la masse de l'élément dv. Si on fait tendre les dimensions de dv vers zéro, $\frac{m}{dv}$ tend vers une limite ρ, qu'on appelle densité du corps au point M fonction bien déterminée de x, y, z à l'instant t pour une position donnée du système: $\rho = f(t, q_1, \dots q_K, x, y, z)$. Il peut y avoir exception toutefois pour des points isolés M' de masse finie, ou pour des points M'' formant des surfaces σ ou des lignes λ. En ces points M'', m est de l'ordre de l'élément de σ

ou de λ intercepté par la masse matérielle dv. En définitive, nous admettons que le système considéré se compose de points isolés et de lignes, de surfaces, de volumes continus qui ont respectivement en chaque point une densité linéaire ou superficielle, ou une densité en volume.

Regardons maintenant chacun des n éléments dv comme un point matériel : la force (F) relative à $Oxyz$ qui s'exerce à l'instant sur le point matériel M ou dv est égale à $m(\gamma)$, γ étant l'accélération du point M par rapport à $Oxyz$. On a donc

$$F = (\rho + \varepsilon)\,\gamma\, dv$$

ε tendant vers zéro avec les dimensions de dv ; par suite

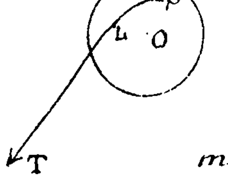
$$(F) = \Big[(f) + (\eta)\Big]\, dv$$

(f) est une grandeur géométrique bien déterminée, dont la longueur peut être nulle ; η tend vers 0 avec dv. Si on décompose (F) en force active (F') et réaction absolue (R), en général (F') et (R) sont de l'ordre de dv :

$$(F') = \Big[(f') + (\eta')\Big]\, dv, \qquad (R) = \Big[(r) + (\eta'')\Big]\, dv$$

Les grandeurs $(f)\,dv$, $(f')\,dv$, $(r)\,dv$ sont les forces totale, active et réactive qui s'exercent à l'instant t sur l'élément dv. Toutefois, il peut y avoir exception en certains points isolés M' (où F' et R sont finies) et en des points M'' qui formant, si le corps Σ est un volume, des surfaces σ ou des lignes λ. En ces points M'', (F') et (R) sont de l'ordre de l'élément de σ ou de λ intercepté par la masse matérielle dv considérée. Dans tous les cas, la somme $(F') + (R)$ est de la forme $\Big[(f) + (\eta)\Big]\, dv$.

Par exemple, supposons que Σ soit une sphère homogène, de densité $\rho = 1$, pesante, plongée dans un liquide et sur laquelle on exerce une traction avec un fil élastique L fixé en un point P de la sphère. Supposons de plus que la sphère soit en équilibre dans ces conditions. La force active (F') qui s'exerce sur chaque élément dv de la sphère est égale et directement opposée à la réaction (R). Pour tout élément dv intérieur à la sphère, (F') est égale à $(g)\,dv$. Pour un élément dv situé à la surface σ de la sphère, (F') est égale à $(g)\,dv + (p)\,d\sigma$, $(p)\,d\sigma$ désignant la pression du liquide sur l'élément $d\sigma$.



Pour un élément dv en contact avec le fil PL, (F') est égale à $(g)\,dv + (p)\,d\sigma + (l)\,d\lambda$, $(l)\,d\lambda$ désignant la pression du fil qui est de l'ordre de l'élément $d\lambda$ de l'arc du fil. Enfin au point P, (F') tend vers T (tension du fil) quand les dimensions de dv tendent vers zéro.

De même quand le corps continu est une surface σ, la force active et la réaction sont en général de l'ordre de l'élément matériel à deux dimensions $d\sigma$.

Ces remarques s'appliquent à la décomposition de la réaction en forces de liaison et force de frottement.

Ceci posé, écrivons les équations de Lagrange qui définissent le mouvement du système formé par les n points matériels dv. On a :

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

avec :

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right).$$

Si on exprime x', y', z', en fonction des t, des q et des q', il vient :

$$2T = A_1^1 q_1'^2 + A_2^2 q_2'^2 + \dots + A_k^k q_k'^2 + 2A_1^2 q_1' q_2' + \dots + 2A_{k-1}^k q'_{k-1} q'_k + 2B_1 q'_1 + \dots + B_k q'_k + C,$$

avec

$$A_1^1 = \sum m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2\right] \quad , \quad A_2^2 = \text{etc}$$

$$A_1^2 = \sum m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right), \quad A_1^3 = \text{etc}$$

$$B_1 = \sum m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial t}\right), \quad B_2 = \text{etc}$$

$$C = \sum m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right]$$

Considérons dans chacun des coefficients A, B, C, soit dans A_1^1, la partie a_1^1 relative à un des corps continus Σ du système, et supposons, pour fixer les idées que Σ soit un volume. Pour chaque élément dv (d'affixe x, y, z) de Σ on a

$$m = \left[\rho\,(t, q_1 \dots q_k, x, y, z) + \varepsilon\right] dv$$

et de plus les dérivées $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ étant bien déterminées pour des valeurs données de $t\ q_1, q_2, \dots q_k$ en chaque point x, y, z, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 = \alpha_1^1\,(t, q_1, q_2, \dots q_k, x, y, z)$$

par suite, la somme $a_1^1 = \sum (\rho + \varepsilon)\alpha_1^1\, dv$ étendue aux éléments dv de Σ tend, quand on fait tendre vers zéro les dimensions de ces éléments, vers l'intégrale :

$$\int \rho\,\alpha_1^1\,(t\ q_1, \dots q_k, x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

étendue à tout le volume Σ

La fonction T qui figurera dans les équations définitives sera donc un polynome du second degré par rapport aux q', dont les coëfficients, fonctions de t et des q, se calculeront à l'aide d'intégrales triples, doubles ou simples étendues aux corps continus du système formant des volumes, des surfaces ou des lignes

On verrait de même que les seconds membres des équations définitives se calculent à l'aide d'intégrales triples, doubles ou simples, étendues aux volumes v, aux surfaces σ et aux lignes λ tels que la force active qui s'exerce sur chaque élément matériel soit de l'ordre du volume dv de v, de l'aire $d\sigma$ de σ ou de l'arc $d\lambda$ de λ interceptés par l'élément.

Avant de développer ces généralités, nous allons indiquer un certain nombre de systèmes qui sont sans frottement.

Enumération de systèmes sans frottement

Nous signalerons tout d'abord le corps solide libre : les réactions qui s'exercent sur les points de ce système sont des forces intérieures, égales deux à deux et directement opposées d'après le principe de l'action et de la réaction. Le travail de ces forces dans un déplacement virtuel du système est égal à

$$\sum f_{jk} \, \delta r_{jk} ,$$

f_{jk} désignant la force qui s'exerce entre les points M_j, M_k et r_{jk} la distance de ces deux points. Dans un déplacement virtuel, tous les r_{jk} restent constants ; donc τ est nul.

Pour que cette proposition subsiste, il suffit même d'admettre que les réactions du solide forment un système de segments géométriquement équivalent à un segment unique de longueur nulle. En effet, dans un déplacement virtuel quelconque du solide les variations δx, δy, δz des coordonnées x, y, z d'un point quelconque sont de la forme :

$$\delta x = (a + qz - ry)\,\delta t$$
$$\delta y = (b + rx - pz)\,\delta t$$
$$\delta z = (c + py - qx)\,\delta t,$$

et le travail virtuel τ des réactions (R_x, R_y, R_z) est égal à

$$a\sum R_x + b\sum R_y + c\sum R_z + p\sum (yR_z - zR_y) + q\sum(zR_x - xR_z) + r\sum(xR_y - yR_x)$$

Pour que τ soit nul pour tout déplacement virtuel, il faut et il suffit que les coefficients de a, b, c, p, q, r soient nuls : ce qui est précisément la condition énoncée.

Ce que nous venons de dire reste vrai si les dimensions du solide varient avec le temps, autrement dit si les distances des différents points du système sont assujetties à rester invariables à chaque instant t, mais sont des fonctions données de t

Avant d'énumérer d'autres liaisons, nous ferons la remarque suivante : soit M un point du système et (R) la réaction qui s'exerce sur lui. Si on décompose les éléments matériels E qui exercent cette réaction en deux parties E' et E'', (R) est la somme géométrique des réactions exercées par (E') et par (E''). Par exemple, soit une sphère solide assujettie à rester en contact avec un plan ; la réaction qui s'exerce à l'instant t sur l'élément M de la sphère en contact avec le plan est la somme géométrique des deux réactions exercées sur M d'une part par les éléments de la sphère, d'autre part par les éléments du plan voisins de M.

Considérons d'après cela un système dont les éléments sont assujettis à plusieurs liaisons distinctes. Si les réactions partielles dues à chaque liaison ont un travail nul pour tout déplacement compatible avec la liaison, ce travail est nul à fortiori pour tout déplacement virtuel du système, et le système est sans frottement.

Ceci posé, soit un corps solide S assujetti à glisser sur une surface donnée σ (c'est-à-dire à rester en contact avec σ). Les réactions qui s'exercent sur S sont les réactions intérieures (R') du solide et la réaction (R'') exercée par σ sur S. Pour que le travail de (R'') soit nul dans un déplacement quelconque où le solide reste tangent à σ, il faut et il suffit, comme on le voit aussitôt, que (R'') soit normale à S et σ. C'est la définition ordinaire de l'absence de frottement dans ce cas particulier ; on voit qu'elle coïncide avec la définition générale. Nous disons, si cette condition est vérifiée, que la surface σ est parfaitement polie. Il peut d'ailleurs y avoir contact entre S et σ en plusieurs points et même le long d'une ligne.

D'une manière générale, un corps solide S qui n'est pas libre forme un système sans frottement s'il est assujetti à l'une des conditions suivantes :

1° à glisser sur une surface σ parfaitement polie ;

2° à glisser sur une courbe σ parfaitement polie ;

3° à avoir un point fixe P

4° à rouler sur une surface σ quelconque ou sur une courbe γ [1]

Ceci est vrai encore quand la surface σ ou la courbe γ, ou le point P varient avec t suivant une loi donnée (ainsi que les distances des points du corps S). On peut supposer également que S se réduise à une aire plane, ou à une ligne ou à un point.

Soit maintenant un système formé de deux solides S et Σ ; ce système est sans frottement si S et Σ roulent l'un sur l'autre, ou si leurs

[1] On entend par là que S reste en contact avec σ ou (γ) et que les arcs parcourus par le point de contact sur la surface de S et sur σ (ou γ) sont égaux.

surfaces parfaitement polies sont assujetties à glisser l'une sur l'autre, ou si les deux corps sont articulés autour d'un point commun etc. Les deux solides peuvent se réduire respectivement à une aire plane, ou à une courbe, ou à un point.

Enfin quand deux éléments du système sont liés par un fil flexible, inextensible et sans masse, qui passe soit sur un point donnée, soit sur une courbe γ ou sur une surface σ parfaitement polie de position donnée, les réactions qui résultent de cette liaison ont un travail virtuel nul. Il en est de même si la surface σ, la courbe γ, le point P sont une surface, une courbe ou un point du système; il en est de même encore si l'une des extrémités ou les deux extrémités du fil sont attachées à des points de position donnée et non à des élém.ts du syst.e

Si maintenant on considère un système formé d'un nombre fini de points matériels et de corps solides, et dont les liaisons résultent d'une combinaison des liaisons précédentes, il est clair que ce système sera sans frottement.

Au cas où il y aurait frottement, il faudrait emprunter à l'expérience les données nécessaires pour calculer les forces de frottement. Par exemple, soit un corps solide S qui glisse sur une surface fixe σ: il y a frottement si la réaction (R'') n'est pas normale au plan tangent commun à S et σ. On vérifie aisément que la force de frottement, telle que nous l'avons définie en général, coïncide dans ce cas particulier avec la composante R''_t, tangente à S et σ, de (R''). L'expérience montre que R''_t est dirigée en sens inverse de la vitesse du point matériel de S en contact avec σ et qu'elle est proportionnelle à la composante normale de R'': $R''_t = f R''_n$ (pour une position donnée du système). La connaissance du coefficient de frottement f suffit pour qu'on puisse déterminer le mouvement de S, quand S est soumis à des forces actives données.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les systèmes étudiés sont des systèmes sans frottement.

VII.e Leçon.

Équations de Lagrange (Suite)

Le mouvement d'un système sans frottement dont la position dépend de K paramètres $q_1, q_2, \dots q_K$ est déterminé par les K équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

où T représente la demi-force vive du système, et Q_j le coefficient de δq_j dans l'expression du travail virtuel des forces actives. Le mouvement du système se trouve ainsi déterminé à l'aide du moindre nombre d'équations et de données possible.

Les équations (1) renferment linéairement les dérivées secondes des paramètres q. Démontrons directement que ces équations sont résolubles par rapport aux q''. Pour cela, rappelons nous la forme de T:
$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)$ est un polynome du second degré par rapport aux q'; on peut poser:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

T_2 et T_1 étant deux polynomes homogènes par rapport aux q' de second degré et du premier degré respectivement; T_0 ne dépend pas des q'.

Quand les coordonnées x, y, z de chaque point du système s'expriment en fonction de $q_1, q_2, \dots q_K$ sans que t figure explicitement, T est homogène et se réduit à T_2. Lorsque les liaisons sont indépendantes du temps, on peut toujours choisir les paramètres q de façon que cette condition soit réalisée.

Dans tous les cas on a:

$$T_2 = \sum m\left[\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)^2\right]$$

en convenant de poser:

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}q'_2 + \dots\dots + \frac{\partial x}{\partial q_K}q'_K$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\partial y}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}q'_2 + \dots\dots + \frac{\partial y}{\partial q_K}q'_K$$

$$\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\partial z}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}q'_2 + \dots\dots + \frac{\partial z}{\partial q_K}q'_K$$

Rappelons-nous que d'après une remarque faite dans la leçon précédente tous les $\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t}$ ne peuvent être nuls à la fois que si $q'_1, q'_2, \dots q'_K$ sont nuls (sauf peut-être pour des valeurs particulières de $q_1, q_2, \dots q_K, t$). Il suit de là que T_2 ne peut être nul (pour des valeurs arbitraires de $q_1, q_2, \dots q_K, t$) sans que tous les q' soient nuls.

Ceci posé, considérons la quantité

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} = \frac{\partial T_2}{\partial q'_j} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_j}$$

Le terme $\frac{\partial T_2}{\partial q'_j}$ dépend seul des q' et le déterminant des q'' dans les équations (1) coïncide avec le déterminant des K équations linéaires et homogènes par rapport aux q' :

(2) $$\frac{\partial T_2}{\partial q_1'} = 0, \; \frac{\partial T_2}{\partial q_2'} = 0 \; \ldots\ldots \; \frac{\partial T_2}{\partial q_K'} = 0$$

Je dis que ce déterminant n'est pas nul identiquement : autrement, il existerait ($q_1, q_2, \ldots\ldots q_K$, t étant choisis arbitrairement) des valeurs de $q_1', q_2', \ldots\ldots q_K'$ qui ne seraient pas toutes nulles et qui satisferaient aux équations (2). Mais, d'après le théorème d'Euler, on a :

$$2T_2 = q_1' \frac{\partial T_2}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T_2}{\partial q_2'} + \ldots\ldots + q_K' \frac{\partial T_2}{\partial q_K'} \; ;$$

T_2 s'annulerait donc pour des valeurs des q' qui ne seraient pas toutes nulles, ce qui est impossible.

Les équations (1) peuvent donc être résolues par rapport aux q'', et forment un système de K équations différentielles distinctes du second ordre. Ces équations admettent un système d'intégrales $q_1(t), q_2(t) \ldots q_K(t)$ et un seul qui satisfait aux conditions initiales : $q_1(t_0) = q_1^0$, $q_1'(t_0)\, q_1'^0, \ldots\ldots q_K(t_0) = q_K^0$, $q_K'(t_0) = q_K'^0$. Il peut y avoir exception toutefois pour certains systèmes singuliers de valeurs $t_0, q_1^0, q_1'^0, \ldots\ldots q_K^0, q_K'^0$.

Calcul de T — Pour écrire les équations de Lagrange, il faut calculer d'une part la force vive du système, d'autre part, le travail virtuel des forces actives. Quand le système renferme des corps continus, ce calcul s'effectue à l'aide d'intégrales étendues à ces corps continus. Les seuls corps continus qui interviennent dans les applications sont des solides. Pour calculer leur force vive, le plus simple sera en général de décomposer cette force vive en deux parties : la force vive du centre de gravité où on suppose toute la masse concentrée, et la force vive du solide dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité. Dans tous les cas, le calcul se ramènera au calcul de la masse totale du solide et de ses trois axes principaux d'inertie relatifs à un point arbitrairement choisi.

Les paramètres q devront être choisis de façon à donner à T la forme la plus simple ; on cherchera notamment à faire disparaître les rectangles $q_j' q_K'$ de T. Par exemple, s'il s'agit d'étudier le mouvement d'un point sur une surface fixe, T dans le cas le plus général est de la forme :

$$T = \frac{m}{2}\left(A_1^1 q_1'^2 + 2A_1^2 q_1' q_2' + A_2^2 q_2'^2\right)$$

où $$A_1^1 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 \qquad A_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2$$

$$A_1^2 = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}$$

Si les coordonnées curvilignes $q_1 = C^{te}$, $q_2 = C^{te}$ sont orthogonales, A_1^2 est nul, et réciproquement.

On peut même choisir q_1 et q_2 de façon que le ds^2 de la surface soit de la forme :

$$ds^2 = A(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2),$$

et T est alors de la forme :

$$T = \frac{m}{2} A \left(q_1'^2 + q_2'^2\right)$$

De même, si on étudie le mouvement d'un point libre en coordonnées curvilignes, les conditions nécessaires et suffisantes pour que T ne renferme pas de rectangles sont

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0$$

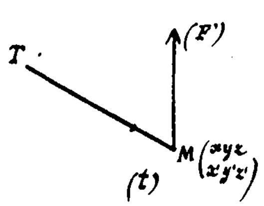
égalités qui expriment que les coordonnées curvilignes $q_1 = C^{te}$, $q_2 = C^{te}$, $q_3 = C^{te}$ sont orthogonales.

Calcul des Q_j. — Les coefficients Q_j sont donnés par les égalités

$$Q_j = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_j} \right)$$

On peut simplifier parfois leur calcul à l'aide des remarques suivantes :

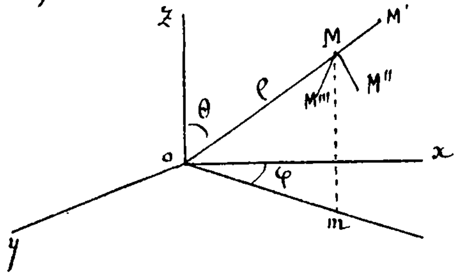
Donnons à q_1 la variation δq_1, $q_2, \dots q_k$ restant constants ; le travail virtuel dans ce déplacement sera $Q_1 \delta q_1$. Considérons un point M du système ; soit (x, y, z) sa position, (x', y', z') sa vitesse, (F') la force active qui s'exerce sur lui à l'instant t. Dans le déplacement δq_1, les divers points du système décrivent des arcs élémentaires ; soit δs l'arc décrit par M, et soit f' la projection de (F') sur la direction δs ; $f' \delta s$ représente le travail de (F') dans le déplacement δq_1. Il en résulte que :



$$Q_1 \delta q_1 = \sum f' \frac{\delta s}{\delta q_1} \delta q_1$$

où :
$$Q_1 = \sum f' \frac{\delta s}{\delta q_1},$$
la sommation étant étendue à tous les points du système

Cette forme de Q_1 est utile dans certains cas où l'on aperçoit aisément le déplacement de chaque point pour chaque variation $\delta q_1, \dots \delta q_K$.



Exemple – Soit à étudier le mouvement d'un point M en coordonnées polaires de l'espace.

La force vive se calcule immédiatement. Elle est
$$T = \frac{m}{2}\left[\rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, \varphi'^2\right]$$
Soit : $q_1 = \rho \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = \varphi$.

On va calculer Q_1, Q_2, Q_3.

Donnons successivement :

à ρ un accroissement $+\delta\rho$; M vient en M' sur le prolongement de OM

à θ —— " —— $+\delta\theta$; —— " —— M'' ; le déplacement MM'' est dans le plan zOM, perpendiculaire à OM ; il fait avec Oz un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$;

à φ —— " —— $+\delta\varphi$; —— " —— M''' ; et la direction MM''' est perpendiculaire au plan zOM dans le sens des φ croissants ; MM''' fait avec Ox un angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Cela étant, soit F la force qui s'exerce sur le point M supposé libre ; R, Θ, Φ ses composantes suivant les directions MM', MM'', MM'''. D'après ce qu'on a dit tout à l'heure :
$$Q_1 = R\frac{\delta s'}{\delta\rho} = R$$
$$Q_2 = \Theta\frac{\delta s''}{\delta\theta} = \Theta\rho$$
$$Q_3 = \Phi\frac{\delta s'''}{\delta\varphi} = \Phi\rho\sin\theta$$

Dès lors, les équations de Lagrange pour le mouvement d'un point en coordonnées polaires de l'espace sont :
$$m\rho'' - m\rho\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2\right) = R$$
$$m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\theta'\right) - m\rho^2\varphi'^2 \sin\theta\cos\theta = \rho\,\Theta$$
$$m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\sin^2\theta\, \varphi'\right) = \rho\,\Phi\sin\theta$$
Dans le cas où Φ serait nul on aurait :
$$\rho^2 \sin^2\theta\, \varphi' = \text{Const.};$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la force soit dans le plan MOZ; l'égalité est d'ailleurs donnée par le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à l'axe OZ.

Quand le système renferme des corps solides, pour calculer le travail virtuel des forces actives appliquées au solide, on peut remplacer ces forces par tout autre système de segments géométriquement équivalent, en particulier par deux forces convenablement choisies (ou par une seule dans le cas où les forces (F') admettent une résultante). Si l'on veut encore, le calcul du travail virtuel se ramène au calcul des quantités $\sum X'$, $\sum Y'$, $\sum Z'$ et $\sum(yZ'-zY')$, $\sum(zX'-xZ')$, $\sum(xY'-yX')$. Ces sommes calculées, le travail virtuel $\mathcal{T}$ des forces appliquées au solide pour un déplacement virtuel quelconque du solide est donné par la formule:

$$\mathcal{T} = \delta a \sum X' + \delta b \sum Y' + \delta c \sum Z' + \delta u \sum(yZ'-zY') + \delta v \sum(zX'-xZ') + \delta w \sum(xY'-yX');$$

δa, δb, δc représentent le déplacement virtuel du point du solide qui coïncide à l'instant t avec l'origine O, et δu, δv, δw les composantes de la grandeur $(\omega)\delta t$, (ω) étant la rotation virtuelle instantanée.

En particulier, si le déplacement virtuel est une translation (parallèle à ox par exemple) le travail virtuel des forces (F') appliquées au solide est égal à $\delta x \sum X'$. Si le déplacement virtuel est une rotation du solide autour de OZ, le travail virtuel des forces (F') est égal à $\delta\theta \sum(xY'-yX')$; θ désigne l'angle du plan MOZ qui contient le point matériel M avec le plan xoz.

Plus généralement, si on suppose que OZ coïncide avec l'axe du déplacement hélicoïdal virtuel, le travail virtuel des forces F' dans ce déplacement est égal à:

$$\delta c \sum Z' + \delta\theta \sum(xY'-yX')$$

Application au mouvement d'un corps solide libre. —— La position d'un corps solide (que ce corps soit continu ou formé d'un nombre fini de points) dépend de six paramètres: par exemple, les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité G du solide et les trois angles d'Euler θ, φ, ψ qui définissent les cosinus directeurs des trois axes principaux d'inertie du solide relatifs au point G. Les forces actives (F') coïncident pour ce système avec les forces extérieures.

Exprimons d'abord la force vive en fonction de ces six paramètres. Nous savons que l'on a:

$$(3)\quad 2T = M(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2;$$

M est la masse totale du solide, A, B, C sont les moments et $G\alpha\beta\gamma$ les axes principaux d'inertie du solide relatifs au point G; p, q, r sont donnés par les formules:

$$p = \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi \qquad q = \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi \qquad r = \psi'\cos\theta + \varphi'$$

Si nous faisons $\xi = q_1$, la première équation de Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{dt} \quad M\,\xi' = Q_1\,;$$

d'ailleurs $Q_1\,\delta q_1 = \Sigma X'.\,\delta\xi$; on a donc :

$$M\,\xi'' = \Sigma X'$$
$$M\,\eta'' = \Sigma Y'$$
$$M\,\zeta'' = \Sigma Z'.$$

Formons maintenant l'équation relative au paramètre φ ; on trouve d'après (3) :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = Cr',\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Ap\frac{\partial p}{\partial \varphi} + Bq\frac{\partial q}{\partial \varphi} = Ap(\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi) + Bq(-\psi'\sin\theta\sin\varphi - \psi'\cos\varphi) = (A-B)pq.$$

D'ailleurs, le déplacement virtuel $\delta\theta$ est une rotation autour de l'axe d'inertie $G\gamma$. Si donc on appelle N le moment des forces (F') par rapport à $G\gamma$, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$(4)\quad C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = N$$

Cette équation coïncide avec la troisième équation d'Euler. Les équations de Lagrange relatives à θ et ψ seraient des combinaisons des équations d'Euler ; mais de l'équation (4) on peut déduire les deux premières équations d'Euler par permutation. On retrouve bien ainsi les équations déjà étudiées du mouvement d'un solide.

Intégrales premières des équations de Lagrange. — Lorsque le système est un solide libre, on connaît une intégrale des équations du mouvement.

1° lorsque la projection sur un axe fixe la somme géométrique des forces (F') est nulle ou constante.

2° lorsque le système des forces (F') a un moment nul ou constant relativement à un axe fixe, soit Oz, ou à un axe direction fixe passant par le centre de gravité, soit Gz'.

On obtient encore aisément une intégrale première si le travail des forces (F') est nul pour un déplacement hélicoïdal déterminé du solide, quels que soient la position du solide et l'instant considéré. J'entends par déplacement hélicoïdal déterminé un déplacement où chaque point x, y, z regardé comme point du solide, subit un déplacement déterminé. L'axe de ce déplacement hélicoïdal est une droite fixe L : le déplacement $(v)\,\delta t$ d'un point de cet axe, et la vitesse instantanée de rotation virtuelle (ω) sont deux segments constants qui ont pour ligne d'action L. Pour que la condition énoncée soit remplie, il faut et il suffit qu'il existe des valeurs constantes de $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$, telles qu'on ait :

$$\delta a\,\Sigma X' + \delta b\,\Sigma Y' + \delta c\,\Sigma Z' + \delta u\,\Sigma(yZ' - zY') + \delta v\,\Sigma(zX' - xZ') + \delta w\,\Sigma(xY' - yX') \equiv 0,$$

quels que soient l'instant considéré, la position et la vitesse des points du solide. Cette condition remplie, on peut prendre la droite L comme axe des z, et écrire l'égalité

$$\delta c \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} + \delta w \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \delta c \sum Z' + \delta w \sum (yX' - xY') = 0,$$

ou bien en posant $\frac{\delta w}{\delta c} = b$,

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + b \frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

d'où l'intégrale

$$M \frac{d\zeta}{dt} + b \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = C^{te}.$$

Ces égalités peuvent s'appliquer dans certains cas au mouvement d'un système quelconque. D'une manière générale, si on applique le théorème de la projection des quantités de mouvement à un système quelconque, on obtient une égalité telle que :

$$(4) \quad \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X' + \sum R_x,$$

en appelant R_x la composante suivant ox d'une des réactions extérieures (c'est-à-dire exercées par des éléments extérieurs au système).

La somme $\sum R_x$ ne sera nulle que dans des cas particuliers.

De même le théorème du moment des quantités de mouvement appliqué par exemple à l'axe oz ou à l'axe oz', ne conduit à une équation indépendante des réactions extérieures que si ces réactions ont un moment nul par rapport à cet axe.

C'est ce qui arrivera dans les cas particuliers suivants :

1° Le système (pour une position et un instant quelconques) admet comme déplacement virtuel une translation parallèle à un axe fixe (soit ox). D'après le principe de d'Alembert on a :

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X';$$

cette équation doit être une conséquence des équations de Lagrange qui sont équivalentes au principe de d'Alembert; elle coïncide bien avec l'égalité (4), car la somme $\sum R_x$ est nulle puisque le travail virtuel $\delta x \sum R_x$ est nul par hypothèse.

Pour que le système jouisse de cette propriété cinématique, il faut et il suffit que les équations de liaison ne renferment les coordonnées x_j des points M_j du système que par leurs différences $x_j - x_K$. C'est le cas d'un point mobile sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à ox.

Si en outre la somme $\sum X'$ est nulle, on obtient ainsi une intégrale des équations de Lagrange :

$$\sum m x = M \xi = a t + b.$$

Il suffit même que $\sum X'$ soit une constante ou une simple fonction de t.

2° Le système (pour une position et un instant quelconques) admet comme déplacement virtuel une rotation d'ensemble autour d'un axe fixe (soit Oz) ou d'un axe de direction fixe passant par le centre de gravité (soit Gz'). On peut écrire alors l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(xY'-yX') \quad (\text{pour l'axe } Oz)$$

ou l'égalité

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=\sum(x'Y'-y'X') \quad (\text{pour l'axe } Gz'),$$

où $x'=x-\xi$, $y'=y-\eta$.

Pour que le système jouisse de cette propriété cinématique, il faut et il suffit que les équations de liaison où x, y (ou bien x', y') sont exprimées à l'aide des coordonnées polaires r et θ, ne renferment les angles θ_j que par leurs différences $(\theta_j - \theta_k)$. C'est le cas d'un point mobile sur une surface de révolution autour de Oz.

Si le moment des forces (F') par rapport à Oz (ou à Gz') est nul, ou constant, ou seulement fonction de t, on obtient ainsi une intégrale des équations de Lagrange.

3° Le système (pour une position et un instant quelconques) admet comme déplacement virtuel un déplacement hélicoïdal déterminé. Si on prend pour axes des z l'axe de ce déplacement, on peut écrire l'égalité :

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}+h\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum Z'+h\sum(xY'-yX')$$

h désignant une certaine constante.

Pour que le système jouisse de cette propriété cinématique, il faut et il suffit que les équations de liaison ne renferment les deux dernières des coordonnées r, θ, z que par les différences $\theta_j-\theta_k$, z_j-z_k, $z_j-h\theta_k$. C'est le cas d'un point mobile sur un hélicoïde gauche à plan directeur d'axe Oz.

Si en outre la quantité $\sum Z'+h\sum(xY'-yX')$ est nulle, on obtient ainsi une intégrale première :

$$M\frac{d\zeta}{dt}+h\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C^{te}.$$

Il suffit même que $\sum Z'+h\sum(xY'-yX')$ soit une constante ou une simple fonction de t.

Cas où T ne renferme pas explicitement un des paramètres q. — Si le paramètre q_j ne figure pas explicitement dans la fonction T, l'équation de Lagrange relative à q_j s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right)=Q_j.$$

De là une intégrale première du mouvement chaque fois que Q_j est nul, ou constant ou simplement fonction de t.

Les intégrales premières qui se mettent ainsi en évidence se confondent souvent avec celles que nous avons signalées plus haut.

Par exemple, soit un point M mobile sur la surface cylindrique $z = f(y)$. Faisons $x = q_1$, $y = q_2$. L'expression de T est :

$$T = \frac{m}{2}\left[x'^2 + y'^2(1 + f_y'^2)\right]$$

L'équation de Lagrange relative à x est :

$$m\, x'' = X',$$

d'où, si X' est nul, $\qquad x = at + b.$

Cette égalité coïncide avec celle qu'on obtiendrait en appliquant à l'axe Ox le théorème sur la projection de la quantité de mouvement.

Soit de même M un point mobile sur une surface de révolution : $z = \varphi(r)$. Faisons $r = q_1$, $\theta = q_2$. L'expression de T est :

$$T = \frac{m}{2}\left[r'^2(1 + \varphi_r'^2) + r^2\theta'^2\right].$$

D'où l'égalité

$$\frac{d}{dt}\, m\, r^2\theta' = xY' - yX',$$

et, si $(xY' - yX')$ est nul,

$$m r^2 \theta' = C^{te}.$$

Cette égalité coïncide avec celle qu'on obtiendrait en appliquant à Oz le théorème du moment de la quantité de mouvement.

Soit enfin M un point mobile sur un hélicoïde à plan directeur : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = K\theta$. Faisons $r = q_1$, $\theta = q_2$; l'expression de T est :

$$T = \frac{m}{2}\left[r'^2 + (r^2 + K^2)\theta'^2\right];$$

d'où l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\, m\,(r^2 + K^2)\,\theta' = xY' - yX' + KZ',$$

et si $(xY' - yX' + KZ')$ est nul,

$$m(r^2 + K^2)\theta' = C^{te}.$$

Cette égalité coïncide avec celle qu'on obtiendrait en appliquant la remarque sur le déplacement hélicoïdal d'un système.

Mais l'intégrale qui se présente le plus fréquemment dans les applications est l'intégrale des forces vives.

Intégrale des forces vives. — Quand les liaisons sont indépendantes du temps, nous avons dit que le déplacement réel du système coïncide (quels que soient la position du système et l'instant considéré) avec un déplacement virtuel : ce qui n'est pas exact quand les liaisons dépendent du temps. Pour ce déplacement virtuel particulier dx, dy, dz (le système étant supposé sans frottement) le principe de d'Alembert donne :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dy\right) = \sum(X'dx + Y'dy + Z'dz),$$

ou encore :

$$d\sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum(X'dx + Y'dy + Z'dz).$$

Quand les liaisons sont indépendantes du temps, on peut toujours choisir les paramètres $q_1, \ldots q_K$ de façon que les x, y, z s'expriment en fonction de ces paramètres sans que t figure explicitement. Dans ces conditions on a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,dq_1 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_K}\,dq_K\,, \text{ etc},$$

et $\quad \sum(X'dx + Y'dy + Z'dz) = Q_1\,dq_2 + Q_2\,dq_2 + \ldots + Q_K\,dq_K.$

L'égalité des forces vives s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2} m v^2 = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_K q'_K.$$

Cette égalité, conséquence du principe de d'Alembert, doit être une conséquence des équations de Lagrange. On le vérifie aisément de la manière suivante : dans le cas qui nous occupe, T est un polynome homogène et du second degré par rapport aux q'. Or calculons d'après les équations de Lagrange la quantité $Q_1 q'_1 + \ldots + Q_K q'_K$. On trouve :

$$Q_1 q'_1 + \ldots + Q_K q'_K = q'_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_1} + \ldots + q'_K \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_K} - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \ldots - q'_K \frac{\partial T}{\partial q_K}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \ldots + q'_K \frac{\partial T}{\partial q'_K}\right) - q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \ldots - q''_K \frac{\partial T}{\partial q'_K} - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \ldots - q'_K \frac{\partial T}{\partial q_K}.$$

D'après le théorème d'Euler : $q'_1 \dfrac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \dfrac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots + q'_K \dfrac{\partial T}{\partial q'_K} = 2T$; d'autre part, T ne contenant pas t explicitement,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q'_1}\, q''_1 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_K}\, q''_K + \frac{\partial T}{\partial q_1}\, q'_1 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_K}\, q'_K.$$

D'après cela,

$$Q_1 q'_1 + \dots + Q_K q'_K = 2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt}.$$

Ceci suppose essentiellement que les liaisons soient indépendantes du temps : sinon, le travail des réactions intervient dans la variation de la force vive.

Cette équation des forces vives fournit une intégrale des équations du mouvement chaque fois que la quantité $Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K$ est la différentielle totale exacte d'une même fonction U de $q_1, q_2 \cdots q_K$. On peut écrire alors :

$$T = U + h.$$

Pour que $Q_1, Q_2, \dots Q_K$ soient les dérivées partielles d'une même fonction $U(q_1, q_2 \cdots q_K)$, il faut et il suffit, comme on sait, que ces quantités dépendent seulement de $q_1; q_2 \cdots q_K$ et satisfassent aux $\frac{K(K-1)}{2}$ conditions :

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_K} = \frac{\partial Q_K}{\partial q_j}$$

Ces conditions sont toujours remplies chaque fois que la quantité : $\Sigma(X'dx + Y'dy + Z'dz)$ est la différentielle totale exacte d'une fonction $u(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n)$; mais cette dernière condition n'est pas nécessaire.

Dans le cas où il existe une fonction des forces $U(q_1, q_2 \cdots q_K)$ les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_j} = 0.$$

On peut leur donner la même forme chaque fois que les Q_j (fonctions des q, des q' et de t) sont les dérivées, par rapport aux q_j d'une même fonction $U(q_1 \cdots q_K, q'_1, \cdots q'_K, t)$

$$Q_j(q_1, \cdots q_K, q'_1 \cdots q'_K, t) = \frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1, \cdots q_K, q'_1, \cdots q'_K, t).$$

mais on ne peut plus écrire alors l'intégrale des forces vives.

C'est ce qui arrive notamment quand, les liaisons dépendant du temps, la somme $\Sigma(X'dx + Y'dy + Z'dz)$ est la différentielle totale d'une fonction $u(x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n)$. Les Q_j sont alors les dérivées par rapport aux q_j d'une fonction U qui dépend des q_j et de t.

Mais il arrive que le théorème des forces vives fournit encore une intégrale des forces vives dans un grand nombre de cas où les forces actives dépendent des vitesses.

Pour qu'on puisse écrire l'intégrale des forces vives, il faut en effet et il suffit que (les liaisons ne dépendant pas du temps) on ait :

$$Q_1 \, , \, q'_1 + Q_2 \, q'_2 + \dots + Q_K \, q'_K \equiv \frac{dU}{dt} \, ,$$

U est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_K, t$ qui ne peut dépendre des q' ; autrement $\frac{dU}{dt}$ dépendrait des q''.

Cette condition peut s'écrire encore :

$$Q_1 \, q'_1 + Q_2 \, q'_2 + \dots + Q_K \, q'_K \equiv \frac{\partial U}{\partial q_1} \, q'_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \, q'_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_K} q'_K + \frac{\partial U}{\partial t} ,$$

ou : $$Q_1 \equiv \frac{\partial U}{\partial q_1} + Q'_1 \, ; \quad Q_2 \equiv \frac{\partial U}{\partial q_2} + Q'_2 \, , \dots \dots Q_K \equiv \frac{\partial U}{\partial q_K} + Q'_K$$

avec la condition $$Q'_1 \, q'_1 + Q_2 \, q'_2 + \dots + Q_K \, q'_K \equiv \frac{\partial U}{\partial t} .$$

Si les Q_j ne dépendent pas des q', ces égalités exigent que $Q'_1 = Q'_2 = \dots = Q'_K = \frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$. Il n'en est plus de même quand les Q_j dépendent des q'. En particulier, dans un grand nombre de cas, il arrive que ces conditions sont vérifiées, $\frac{\partial U}{\partial t}$ étant nul, c'est-à-dire qu'on a :

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} + Q'_1 \dots \dots Q_K = \frac{\partial U}{\partial q_K} + Q'_K \, ,$$

avec la condition $Q'_1 \, q'_1 + Q'_2 \, q'_2 + \dots Q'_K \, q'_K \equiv 0$;

U désigne une fonction de $q_1, q_2 \dots q_K$.

Supposons par exemple que chaque force (F') soit la somme géométrique de deux forces (F'_1) et (F'_2) : les forces (F'_1) admettent une fonction de force u $(x_1, y_1, \dots z_n)$ et chaque force F'_2 est normale à la vitesse du point matériel auquel elle est appliquée :

$$x' X'_2 + y' Y'_2 + z' Z'_2 = 0 .$$

On a dans ce cas :

$$\Sigma \left(X'x' + Y'y' + Z'z' \right) = \frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt} \left(q_1, q_2, \dots q_K \right) ,$$

et $$T = U + h .$$

Cette remarque trouve son application dans l'étude du mouvement relatif des systèmes. Soit M un point d'un système Σ, (F') la force relative aux axes $oxyz$ qui s'exerce sur lui. On veut étudier le mouvement de Σ par rapport à des axes $o_1 x_1 y_1 z_1$ animés par rapport à $oxyz$ d'un mouvement donné. La force active $(F'r)$ relative aux axes $o_1 x_1 y_1 z_1$ est égale à $(F') - m \, (\Gamma_e) - m \, (\Gamma c)$. La force $(Fc) = m \, (\Gamma_c)$ est normale à la vitesse relative du point M. Si les coordonnées x_1, y_1, z_1 s'expriment en fonction des q, sans que t figure explicitement, et si les forces $(F) - m(\Gamma_e)$ admettent une fonction de force $U(q_1, \dots q_K)$, T_1 désignant la demi force relative, l'intégrale des forces vives s'applique: $T_1 = U + h$.

Ainsi, soit M un point pesant, mobile, sans frottement sur une surface qui tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical Oz. La liaison, si on garde les axes $Ox\,y\,z$, dépend du temps, et on ne peut employer le théorème des forces vives.

Mais prenons des axes Ox, y, z liés à la surface, et par suite tournant autour de Oz avec la vitesse de rotation constante ω.

Posons $T_1 = \frac{m}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2)$ et $U = m\left(-g z_1 + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + y_1^2)\right)$; on a $T_1 = U + h$.

Ce procédé sera utile quand par un changement d'axes on pourra rendre les liaisons indépendantes du temps. Mais nous reviendrons dans une leçon prochaine sur la théorie du mouvement relatif.

Cas où les liaisons dépendent du temps. — On peut former une intégrale analogue à l'intégrale des forces vives dans certains cas où les liaisons dépendent du temps. Tout d'abord, si T est de la forme: $T = T_2 + T_0$, T_0 ne dépendant que de t, et T_2 n'en dépendant pas, on a:

$$\frac{dT_2}{dT} = Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K'$$

d'où l'intégrale $T_2 = U + h$, si le second membre $Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K'$ est égal à $\frac{dU}{dT}$.

D'une manière générale, soit $T = T_2 + T_1 + T_0$; on peut écrire:

$$Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K' = \frac{d}{dt}\left(q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \dots + q_K' \frac{\partial T}{\partial q_K'}\right) - q_1'' \frac{\partial T}{\partial q_1'} \dots - q_K'' \frac{\partial T}{\partial q_K'} - q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1} \dots - q_K' \frac{\partial T}{\partial q_K}$$

D'après le théorème d'Euler:

$$q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + \dots + q_K' \frac{\partial T}{\partial q_K'} = 2T_2 + T_1 ;$$

il vient par suite

$$Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K' = 2\frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dT} - \frac{dT_2}{dt} - \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t},$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(T_2 - T_0\right) = Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K' - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Si la quantité $Q_1 q_1' + \dots + Q_K q_K' - \frac{\partial T}{\partial t}$ est égale à $\frac{d}{dt} U(q_1, \dots q_K, t)$, on a donc:

$$T_2 - T_0 = U + h.$$

C'est ce qui a lieu par exemple, si $\frac{\partial T}{\partial t}$ dépend seulement de t, et si $Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K$ est une différentielle totale exacte $dU(q_1, \dots q_K)$.

L'intégrale s'écrirait dans ce cas :

$$T_2 - T_0 = U + F(t) + h,$$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ étant égal à $F'(t)$.

Comme application, traitons le problème suivant :

Un point M pesant est mobile sans frottement sur un cylindre de révolution d'axe vertical, qui se dilate proportionnellement au temps en restant homothétique à lui-même.

Nous pouvons écrire :

$x = Rt\cos\frac{s}{t}$, $y = Rt\sin\frac{s}{t}$, $z = z$, R étant une constante ; par suite :

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left[R^2\left(s' - \frac{s}{t}\right)^2 + R^2 + z'^2\right]$$

Appliquons l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\left(T_2 - T_0\right) = Q_1 q_1' + Q_2 q_2' - \frac{\partial T}{\partial t}.$$ Ici $q_1 = s$, $q_2 = r$; il vient :

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left(R^2 s'^2 + z'^2 - R^2\frac{s^2}{t^2}\right) = -mgz' - mR^2\left(\frac{ss'}{t^2} - \frac{s^2}{t^3}\right) = -mgz' - \frac{mR^2}{2}\frac{d}{dt}\frac{s^2}{t^2};$$

Donc

$$R^2 s'^2 + z'^2 - R^2\frac{s^2}{t^2} = -2gz - R\frac{s^2}{t^2} + h, \text{ ou}$$

$$R^2 s'^2 + z'^2 = -2gz + h.$$

D'ailleurs l'équation de Lagrange relative à z donne :

$$z'' = -g, \quad \text{d'où } z = -\frac{gt^2}{2} + at + b,$$

et par suite $R^2 s'^2 = K$, $\quad s = ct + d$, (a, b, c, d sont ses constantes).

Si g est nul, on voit que $z = \alpha s + \beta$.

On serait arrivé aux mêmes résultats en exprimant x, y, z en fonction de $\theta = q_1$, $z = q_2$ par les formules :

$$x = Rt\cos\theta, \quad y = Rt\sin\theta, \quad z = z,$$

et en écrivant les équations de Lagrange relatives à θ et à z :

Ici, $T = \frac{m}{2}\left[R^2\left(t^2\theta'^2 + 1\right) + z'^2\right]$, d'où les équations :

$$\frac{d}{dt}\, mR^2t^2\theta' = 0$$

$$\frac{d}{dt}\, mz' = -mg;$$

ce qui donne :

$$z = -\frac{gt^2}{2} + at + b, \text{ et } \quad t^2\frac{d\theta}{dt} = C^{te}, \text{ ou } \theta = c + \frac{d}{t},$$

ce qui coïncide bien avec les équations obtenues plus haut.

Cas où les paramètres q ne sont pas indépendants. — Dans ce qui précède, nous avons supposé que les coordonnées x, y, z étaient exprimées en fonction du moindre nombre possible de paramètres. Il sera commode, dans certains cas, d'exprimer x, y, z en fonction d'un plus grand nombre de paramètres liés par certaines relations. Par exemple, on peut étudier le mouvement d'un point sur une surface en se servant des coordonnées polaires de l'espace r, θ, φ, qui sont alors astreintes à une relation : $(r, \theta, \varphi) = 0$.

Soient donc $q_1, q_2, \ldots q_K$ K paramètres distincts en fonction desquels sont exprimés les x, y, z ;

$$x = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_K, t) \quad y = \psi(q_1, q_2 \ldots q_K, t), \quad z = \chi(q_1, q_2 \ldots q_K, t),$$

et soient

$$(\alpha) \begin{cases} f_1(q_1, \ldots \ldots q_K, t) = 0 \\ f_2(q_1, \ldots \ldots q_K, t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(q_1, \ldots \ldots q_K, t) = 0 \end{cases}$$

les p relations distinctes auxquelles sont assujettis ces paramètres. De ces p relations on peut tirer p des quantités q_i en fonction des $K-p$ autres ; autrement dit, l'un au moins des déterminants δ obtenus en supprimant $K-p$ colonnes dans le rectangle

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_K} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial q_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial q_K} \end{matrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Dans ces conditions, la position du système dépend de $(K-p)$ paramètres distincts. Un déplacement virtuel du système est un déplacement où les variations $\delta q_1, \ldots \delta q_K$ des $q_1, \ldots q_K$ satisfont aux p relations :

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial q_K}\delta q_K = 0 \quad (f = f_1, f_2 \ldots\ldots \text{ou } f_p).$$

Le travail virtuel d'un système de forces X, Y, Z appliquées aux points (x, y, z) du système est de la forme :

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_K\delta q_K ;$$

mais pour que ce travail soit nul dans un déplacement virtuel quelconque, il n'est plus nécessaire que les K coefficients Q_j soient nuls; il faut et il suffit qu'on ait.

$$Q_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_K = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_K} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_K}.$$

Cette proposition se démontre absolument comme la proposition analogue de la 4e Leçon.

D'après cela, soit (X, Y, Z) la force totale et (X', Y', Z') la force active qui s'exercent sur chaque point (x, y, z) d'un système sans frottement. Posons:

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \dots + Q_K\,\delta q_K$$

$$\Sigma(X'\,\delta x + Y'\,\delta y + Z'\,\delta z) = Q'_1\,\delta q_1 + Q'_2\,\delta q_2 + \dots + Q'_K\,\delta q_K.$$

On a:

$$Q_j = Q'_j + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_j} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \text{ou } K).$$

D'autre part, du principe de d'Alembert

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = \Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z),$$

on déduit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots\dots \text{ou } K)$$

Donc:

$$(\beta)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q'_j + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_j} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_j} + \dots\dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j}$$

Ces K équations (β), jointes aux p équations de liaison (α), déterminent les K paramètres q et les p indéterminées λ en fonction du temps et des constantes initiales. Pour le voir rigoureusement, différentions deux fois par rapport à t chaque équation de liaison. Il vient:

$$(\gamma)\quad \frac{\partial f}{\partial q_1}\,q''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_K}\,q''_K + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\,q'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_K}\,q'_K\right)_2 = 0.$$

Le système des $(K+p)$ équations (β) et (γ), linéaires par rapport aux q'' et aux λ, peut être résolu par rapport à ces variables. En effet, le déterminant des (q'', λ) est le même que le déterminant Δ des (q', λ) dans les équations homogènes:

$$(\beta')\quad \frac{\partial T_2}{\partial q'_j} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_j} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_j} \dots\dots - \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots \text{ou } K)$$

$$\text{et } (\gamma')\quad \frac{\partial f}{\partial q_1}\,q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\,q'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_K}\,q'_K = 0. \qquad (f = f_1, f_2, \dots \text{ou } f_p)$$

Or Δ n'est pas identiquement nul : sinon il existerait des valeurs des q' et des λ qui ne seraient pas toutes nulles et qui vérifieraient les équations (β'), (γ'), par suite l'équation

$$q'_1 \frac{\partial T_2}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T_2}{\partial q'_2} + \dots + q'_K \frac{\partial T_2}{\partial q'_K} = 0$$

ou

$$T_2 = 0 ;$$

ceci ne peut avoir lieu ($q_1, q_2, \dots q_K$, t étant quelconques) que si les q' sont tous nuls, par suite tous les λ.

On tirera donc des équations (β) et (γ) les q''_j et les λ en fonction de t, des q_j et des q'_j.

Les équations différentielles (β), jointes aux équations de liaison, déterminent ainsi le mouvement du système quand on connaît la position et la vitesse de ses points à l'instant t_0.

On pourra appliquer le théorème des forces vives chaque fois que x, y, z seront exprimés en fonction des q_j sans que le temps figure explicitement dans ces expressions ni dans les équations de liaison (α). Le théorème donnera une intégrale quand la quantité $Q'_1\, dq_1 + \dots + Q'_K\, dq_K$ sera de plus la différentielle totale d'une fonction $U(q_1, q_2, \dots q_K)$. Observons toutefois que ces conditions ne sont pas nécessaires.

8^e Leçon.

Applications des Équations de Lagrange.

Nous allons appliquer les équations de Lagrange à l'étude du mouvement de systèmes particuliers. À ce sujet, nous ferons la remarque suivante : chaque fois qu'on apercevra une combinaison simple des équations de Lagrange, notamment une combinaison intégrable, il conviendra de remplacer une des équations de Lagrange par cette combinaison. En particulier chaque fois que le théorème des forces vives donnera une intégrale, il faudra substituer cette intégrale à une des équations.

Par exemple, étudions le mouvement d'un point M mobile sans frottement sur une surface de révolution et soumis à une force active (F') qui admet une fonction de force U. Soient

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = X(r)$$

les coordonnées du point M; $(r = q_1,\ \theta = q_2)$. On a:

$$T = \frac{m}{2}\left[(1+X'^2)r'^2 + r^2\theta'^2\right]$$

X' désignant $\frac{dX}{dr}$, et les équations du mouvement sont:

$$(1)\begin{cases} m r'' - m\,(X'X''\,r'^2 + r\,\theta'^2) = \dfrac{\partial U}{\partial r}, \\ \dfrac{d}{dt}\cdot m r^2\theta' = \dfrac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases}$$

On peut remplacer la première équation par l'intégrale des forces vives:

$$(2)\ \frac{m}{2}\left[(1+X'^2)\,r'^2 + r^2\theta'^2\right] = U + h.$$

Supposons de plus que $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ soit nul: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le travail de (F') soit nul dans le déplacement virtuel $\delta\theta$, par suite que F' soit dans le plan zOM. La seconde équation s'intègre alors et devient:

$$(3)\ :\ m r^2\theta' = C^{te}, \quad \text{ou} \quad r^2\theta' = K,$$

intégrale qu'on pouvait obtenir encore en appliquant le théorème des moments à l'axe Oz.

En remplaçant dans l'équation (2) θ' en fonction de r d'après (3), on voit que t et θ sont donnés en fonction de r par une quadrature (1):

$$(4)\qquad \pm dt = \frac{r\sqrt{m\,(1+X'^2)}}{\sqrt{2(U+h)r^2 - mK^2}}\,dr, \qquad \pm d\theta = m\,\frac{K\sqrt{m\,(1+X'^2)}}{r\sqrt{2(U+h)r^2 - mK^2}}\,dr$$

Observons toutefois que de telles transformations peuvent introduire des solutions parasites, qui ne satisfont pas aux équations primitives du mouvement. Les équations nouvelles qu'on substitue aux équations de Lagrange sont des conséquences de ces équations, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

---

(1) C'est là un cas particulier d'une proposition générale que nous démontrerons par la suite: soit S un système sans frottement dont les liaisons sont indépendantes du temps et dont la position dépend de deux paramètres. Si les forces actives qui s'exercent sur le système ne dépendent ni du temps ni des vitesses, la connaissance de deux intégrales premières (qui ne contiennent pas t explicitement) permet toujours de ramener à des quadratures les équations du mouvement du système.

C'est ainsi que dans l'exemple précédent, les équations (2) et (3) ne sont équivalentes aux équations de Lagrange que si r' est différent de zéro.

D'une manière générale, il existe un système de fonctions $q_j(t)$ et un seul satisfaisant aux équations de Lagrange et aux conditions initiales $q_j(t_0) = q_j^0$, $q'_j(t^0) = q'^0_j$. Il n'y a d'exception que si les fonctions q''_j de $q_1, q_2, \dots q_K$, $q'_1, q'_2, \dots q'_K$ et t, définies par les équations de Lagrange, ne sont pas régulières dans le voisinage des valeurs $q^0_1, \dots q^0_K$, $q'^0_1, \dots q'^0_K$, t_0 des variables. Nous disons dans ce cas que les conditions initiales sont singulières. — D'après cela, supposons le système abandonné dans des conditions initiales qui ne soient pas singulières ; si le système d'équations (1') qu'on substitue aux équations de Lagrange (1) n'admet qu'un système d'intégrales satisfaisant à ces conditions initiales, il est clair que ces intégrales satisfont aux équations (1) et définissent le mouvement du système. Mais si les équations (1') admettent, pour ces conditions initiales données, plusieurs systèmes d'intégrales, un seul de ces systèmes satisfait aux équations (1); les autres ont été introduits par les transformations de calcul. — Enfin, quand les conditions initiales sont singulières, il faut vérifier si les intégrales des équations (1') sont des intégrales des équations de Lagrange.

Pour fixer les idées revenons à l'exemple précédent : les équations (4) sont équivalentes aux équations (1) si r' n'est pas nul. Supposons qu'à l'instant t_0, on ait : $r = r_0$, $r' = 0$, $\theta = \theta_0$, $\theta' = \theta'_0$, r_0 n'étant pas nul et ne correspondant pas à une valeur singulière de $U(r)$; r_0 est racine de $\Phi(r)$ ou $2[U+b]r^2 - mK^2$. Les équations (4) sont vérifiées par les deux systèmes :

$$r(t) \equiv r_0, \qquad \theta = \theta_0 + \theta'_0 (t - t_0)$$

et

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{r\sqrt{m(1+X'^2)}}{\sqrt{2(U+b)r^2 - mK^2}}\, dr \; ; \quad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{K\sqrt{m(1+X'^2)}}{r\sqrt{2(U+b)r^2 - mK^2}}\, dr ;$$

dans ces dernières égalités, K est égal à $r_0^2\, \theta'_0$, et le signe qu'on prend devant le coefficient de dr est positif si la dérivée de $(U+b)r^2$ est positive pour $r = r_0$, négatif au cas contraire. Un de ces systèmes d'intégrales ne saurait vérifier les équations primitives du mouvement : c'est nécessairement le premier pour lequel r' est nul. Si toutefois r_0 est racine multiple de $\Phi(r)$, les équations (4) n'admettent d'autres intégrales que :

$$r \equiv r_0, \qquad \theta = \theta_0 + \theta'_0 (t - t_0),$$

qui satisfont nécessairement aux équations (1). — C'est ce qu'il est facile d'ailleurs de vérifier en différentiant la première équation (4):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\Phi(r)}{m r^2 (1+X'^2)} = V(r)$$

par rapport à t; il vient, en divisant les deux membres par r',

$$(4)' \quad 2\, r'' = V'(r),$$

et cette équation, jointe à l'équation (3), est équivalente aux équations (1). Pour que $r \equiv r_0$ satisfasse à l'équation (4'), il faut que $V'(r_0)$ soit nul: $r \equiv r_0$ est donc une solution parasite, à moins qu'on ait à la fois $V(r_0) = 0$, $V'(r_0) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\Phi(r_0) = 0$, $\Phi'(r_0) = 0$.

Nous ferons encore cette remarque bien simple: soient S et S' deux systèmes sans frottement qui dépendent du même nombre de paramètres et dont on étudie le mouvement sous l'action de forces données. Si on peut choisir les paramètres de telle façon que les expressions de T, $Q_1, \ldots Q_K$ soient identiques pour les deux systèmes, il est clair que les deux problèmes sont équivalents. Le mouvement de l'un des deux systèmes se déduit du mouvement de l'autre. Par exemple, soient Σ et Σ' deux surfaces applicables l'une sur l'autre: on sait qu'on peut choisir les paramètres q_1, q_2, de telle façon que le ds^2 ait la même expression pour les deux surfaces.

$$ds^2 = A_1^1\, dq_1^2 + 2 A_1^2\, dq_1 dq_2 + A_2^2\, dq_2^2$$

Si deux points M et M' de même masse, sont mobiles sans frottement sur les surfaces Σ et Σ' respectivement et soumis à une force active qui admet une fonction de force $U(q_1, q_2)$, la même pour les deux points, le mouvement de chacun de ces points est défini par les mêmes équations:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

où $$T = \frac{m}{2}\left[A_1^1\, q_1'^2 + 2 A_1^2\, q'_1 q'_2 + A_2^2\, q_2'^2\right]$$

Par exemple, étudions le mouvement d'un point qui glisse sans frottement sur un hélicoïde gauche à plan directeur:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = K\theta.$$

on a:

$$ds = (r^2 + K^2)\,\theta'^2 + r'^2.$$

D'autre part le ds^2 d'une surface de révolution:

$$\xi = \rho\cos\omega,\ \eta = \rho\sin\omega,\ \zeta = \lambda(\rho),$$

est de la forme

$$ds^2 = (1 + \lambda'^2)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2.$$

On peut ramener les deux ds^2 à la même forme en posant :

$$\theta = \omega, \quad r = F(\rho), \text{avec } F^2 + K^2 = \rho^2, \quad 1 + X'^2 = F'^2 ;$$

de ces équations on déduit aussitôt :

$$\frac{dX}{d\rho} = \frac{K}{\sqrt{\rho^2 - K^2}} \text{ d'où :}$$

$$\frac{X}{iK} = \frac{\zeta}{iK} = \text{arc cos } \frac{\rho}{K} + C^{te},$$

et en annulant la constante (ce qui revient à changer l'origine des ζ)

$$\rho = \frac{K}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{K}} + e^{-\frac{\zeta}{K}}\right),$$

c'est à dire que l'helicoïde est applicable sur la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (ou alysseïde).

Nous savons d'autre part que les équations du mouvement d'un point sur une surface de révolution s'intègrent par quadrature quand la composante tangente à la surface de la force active admet une fonction de force $U(\rho)$ qui ne dépend pas de θ. Cette propriété s'appliquera donc au mouvement d'un point sur un hélicoïde gauche à plan directeur, chaque fois qu'il existera une fonction de force U fonction de la seule variable r. Il faut pour cela et il suffit que la composante tangente à la surface de la force active soit dirigée suivant la génératrice rectiligne qui passe par le point M, et fonction de la seule distance de ce point à l'axe oz de l'hellicoïde. — C'est ce qui arrivera par exemple si le point M est attiré (ou repoussé) par tous les éléments pp' de l'axe $O\zeta$ proportionnellement à leur longueur PP' et en raison inverse de R^n, R désignant la distance MP et n un nombre plus grand que 1.

Il est facile d'ailleurs dans le cas qui nous occupe, de ramener immédiatement à des quadratures les équations du mouvement. Ces équations sont :

$$m r'' - m r \theta'^2 = \frac{dU}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt}\left[m(r^2 + K^2)\theta'\right] = 0.$$

Remplaçons la première par l'intégrale des forces vives.

$$m\left[(r^2 + K^2)\theta'^2 + r'^2\right] = 2U + h,$$

et intégrons la seconde qui devient

$$(r^2 + K^2)\theta' = C.$$

Il suffit de tirer θ' de cette dernière égalité et de porter dans la précédente pour avoir t, et par suite θ, en fonction de r par une quadrature. — En particulier si U est nul, les géodésiques de l'helicoïde sont données par une quadrature elliptique ; elles correspondent aux géodésiques de l'alysseïde.

L'intégrale $(r^2 + K^2)\cdot\frac{d\theta}{dt} = C^{te}$ pouvait s'obtenir aussi en appliquant la remarque sur le deplacement virtuel hélicoïdal. Analogue au théorème des moments pour les surfaces de révolution, cette remarque fournit une intégrale du mouvement d'un point sur un helicoïde de l'espèce la plus générale, quand la force active est normale à l'hélice de la surface qui passe par le point M. On sait d'ailleurs qu'un hélicoïde quelconque est applicable sur une surface de révolution.

Soit de même M un point mobile sur un cône; le cône est applicable sur un plan; si on appelle σ l'arc de la courbe sphérique découpée par le cône sur la sphère du rayon 1, et r la distance de M au sommet, on a:

$$ds^2 = r^2 d\sigma^2 + dr^2.$$

En faisant $\sigma = \theta$, on voit que le problème est le même que celui du mouvement dans un plan d'un point rapporté à des coordonnées polaires r et θ. Chaque fois qu'il existe une fonction de force U, fonction seulement de r, le problème s'achève par quadratures.

Le mouvement d'un point sur un cylindre se ramène de même au mouvement plan. Il suffit d'appeler σ l'arc de la trajectoire orthogonale aux génératrices rectilignes du cylindre, x la cote du point M par rapport à une section droite déterminée pour mettre le ds^2 sous la forme:

$$ds^2 = d\sigma^2 + dx^2.$$

Si on fait $\sigma = y$, on obtient les mêmes équations que pour le mouvement plan en coordonnées cartésiennes x, y. Chaque fois qu'il existe une fonction de force U, et que la composante tangente au cylindre de (F) fait un angle constant avec les génératrices rectilignes, le problème s'achève par quadratures.

Si notamment (F) est normale aux génératrices, une des intégrales premières peut s'obtenir à l'aide du théorème des projections des quantités de mouvement appliqué à la direction de ces génératrices.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces applications très simples et bien connues, et nous allons étudier maintenant quelques exemples plus compliqués du mouvement des systèmes.

Applications.

I. — Deux points M et M_1 sont assujettis respectivement à glisser sans frottement sur les deux hélices:

$x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = K\theta$ et $x_1 = R_1\cos\theta_1$, $y_1 = R_1\sin\theta_1$, $z_1 = K\theta_1$:

Les deux points se repoussent proportionnellement à leur distance. — Mouvement du système. — Cas particulier où les deux hélices se réduisent à deux cercles ($K = 0$).

La position du système dépend de deux paramètres θ et θ_1. Le théorème des forces vives donne une intégrale première. Pour en obtenir une autre, observons que le déplacement virtuel $\delta\theta = \delta\theta_1$, auquel correspondent les variations:

$\delta x = -y\,\delta\theta$, $\delta y = x\,\delta\theta$, $\delta z = K\delta\theta$ et $\delta x_1 = -y_1\,\delta\theta_1$, $\delta y_1 = x_1\,\delta\theta_1$, $\delta z_1 = K\,\delta\theta$

est un déplacement hélicoïdal constant. Dans ce déplacement le travail des forces actives qui sont ici des forces intérieures et nul ; on a donc :

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(R^2\frac{d\theta}{dt}+K\frac{dz}{dt}\right)+m_1\left(R_1^2\frac{d\theta_1}{dt}+K\frac{dz_1}{dt}\right)\right]=0,$$

ou bien :

$$m\left[R^2+K^2\right]\frac{d\theta}{dt}+m_1\left[R_1^2+K^2\right]\frac{d\theta_1}{dt}=0.$$

Cette intégrale pouvait s'obtenir aussi à l'aide des équations de Lagrange. On a ici :

$$2T=m\left[R^2+K^2\right]\theta'^2+m_1\left[R_1^2+K^2\right]\theta_1'^2.$$

D'autre part la fonction de force U est égale à $\frac{\mu r^2}{2}+h$, r désignant la distance MM_1 et μ une certaine constante (positive, puisque la force F est répulsive). Calculons r^2 :

$$r^2=R^2+R_1^2-2RR_1\cos(\theta_1-\theta)+K^2(\theta_1-\theta)^2.$$

Par suite :

$$U=-\nu\cos(\theta_1-\theta)+\frac{\mu K^2}{2}(\theta_1-\theta)^2+C^{te}. \qquad (\nu=\mu RR_1).$$

Posons $\theta_1-\theta=\varphi$, et substituons au paramètre θ_1 le paramètre φ. Il vient :

$$2T=\theta'^2\left[mR^2+m_1R_1^2+K^2(m+m_1)\right]+m_1(R^2+K_1^2)\left[2\theta'\varphi'+\varphi'^2\right]$$

et

$$U=-\nu\cos\varphi+\frac{\mu K^2}{2}\varphi^2+C^{te}.$$

L'équation de Lagrange, relative à θ, s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\left(mR^2+m_1R_1^2+(m+m_1)K^2\right)\theta+m_1(R_1^2+K^2)\varphi'\right]=0,$$

ou bien :

$$(\alpha)\qquad \left[mR^2+m_1R_1^2+(m+m_1)K^2\right]\theta'+m_1(R_1^2+K_1^2)\varphi'=C,$$

ce qui équivaut à l'intégrale trouvé plus haut :

$$m(R^2+K^2)\theta'+m_1(R_1^2+K_1^2)\theta_1'=C^{te}.$$

Substituons maintenant à la seconde équation de Lagrange l'intégrale des forces vives :

$$(\beta)\qquad \theta'^2\left[mR^2+m_1R_1^2+(m+m_1)K^2\right]+m_1\left[K_1^2+K_1^2\right]\left[2\theta'\varphi'+\varphi'^2\right]=\mu K^2\varphi^2-2\nu\cos\varphi+C^{te}.$$

Si nous remplaçons θ' par sa valeur tirée de (α), il vient :

$$(\gamma)\qquad \varphi'^2=A\varphi^2-2B\cos\varphi+h,$$

h désignant une constante, et A, B les coefficients :

$$A=\mu R^2\left[\frac{1}{m(R^2+K^2)}+\frac{1}{m_1(R_1^2+K^2)}\right],\quad B=\nu\left[\frac{1}{m(R^2+K^2)}+\frac{1}{m_1(R_1^2+K^2)}\right]$$

L'équation (γ) nous donne t en fonction de φ par la quadrature :

$$t-t_0=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{A\varphi^2-2B\cos\varphi+h}}$$

et d'ailleurs, d'après l'équation (α), on a :

$$\theta=ct-\frac{m_1(R_1^2+K_1^2)}{mR^2+m_1R_1^2+(m+m_1)K^2}\varphi+c'=c'+ct-a\varphi$$

$$\theta_1=ct+\frac{m(R^2+K^2)}{mR^2+m_1K_1^2+(m+m)K^2}\varphi+c'=c'+ct+(1-a)\varphi,$$

C et C' étant des constantes, ... $C = mR^2\theta'_0 + m_1R_1^2\theta'_{1,0}$

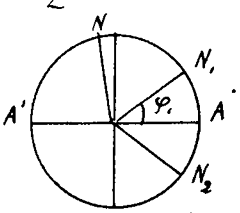
Supposons en particulier que K soit nul ; les deux hélices se réduisent à deux cercles de centre O. L'équation (α) devient alors : $-mR^2\theta' + m_1R_1^2\theta'_1 = C$, intégrale qu'on pouvait obtenir également en appliquant le théorème des moments à l'axe Oz ; t est donné en fonction de φ par la quadrature :

$$t - t_0 = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2B\cos\varphi + h}}$$

où $B = \gamma\left[\frac{1}{mR^2} + \frac{1}{m_1R_1^2}\right]$. C'est l'équation qui détermine le mouvement d'un pendule de longueur $l = \frac{B}{g}$, si φ désigne l'angle du pendule avec la verticale menée de bas en haut. (Si la force F était attractive, B serait négatif, et φ serait l'angle du pendule avec la direction de la pesanteur) ; $\cos\varphi$ est une fonction doublement périodique de t. — Il convient de distinguer deux cas suivant que la valeur absolue de $\frac{h}{2B}$ est ou non plus grande que 1. Dans le premier cas, φ varie toujours dans le même sens, et varie de 2π dans le temps T :

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h - 2B\cos\varphi}} .$$

Au bout du temps T, le système se retrouve placé dans les mêmes conditions initiales à cela près que tout le système a tourné autour de O de l'angle $\omega = cT \pm 2a\pi$, suivant que φ' est négatif ou positif. — Si au contraire $\left|\frac{h}{2B}\right|$ est < 1 marquons sur le cercle trigonométrique les deux extrémités N_1, N_2 des angles $\varphi_1\ \varphi_2$ dont le cosinus est égal à $\frac{h}{2B}$, et l'extrémité N de l'angle φ ; N parcourt deux fois l'arc $N_1A'N_2$ en sens contraire dans le temps $T = \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{h-2B\cos\varphi}}$. Au bout du temps T, le système se retrouve placé dans les mêmes conditions initiales, à cela près qu'il a tourné autour de O de l'angle cT. Si notamment le système est abandonné sans vitesse, il revient à la même position avec des vitesses nulles au bout du temps $T = \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{h-2B\cos\varphi}}$.



Enfin, quand $\left|\frac{h}{2B}\right| = 1$, φ tend vers 0 ou π (suivant que $\frac{h}{2B}$ est égal à $+1$ ou -1) quand t croît indéfiniment, et $\theta - ct$ tend vers 0 ou $-a\pi$; au cas toutefois où $\cos\varphi_0 = \frac{h}{2B} = \pm 1$, φ reste constamment égal à 0 ou à π, et θ et θ_1 varient proportionnellement au temps.

Si la force (F) est attractive, rien n'est changé dans la discussion précédente mais dans l'hypothèse $\left|\frac{h}{2B}\right| < 1$, N parcourt l'arc N_1AN_2.

—— Étudions maintenant d'autres systèmes qui renferment des corps continus. Tout d'abord, il est facile d'appliquer les équations de Lagrange aux problèmes que nous avons traités dans la troisième leçon. Par exemple, dans le problème III (voir page 32), on a, en gardant la même notation :

$$2T = \psi'^2\left[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta_0 + C\cos^2\theta_0\right] + 2C\psi'\theta'\cos\theta_0 + C\varphi'^2,$$

et $U = 0$. L'intégrale des forces vives et l'équation de Lagrange relative à ψ nous fournissent les deux intégrales qui nous ont permis d'étudier le mouvement.

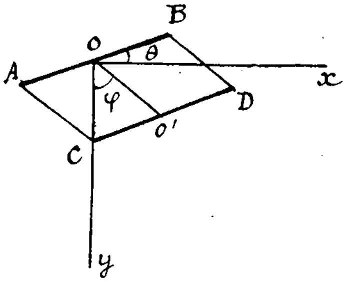
De même, dans le problème IV (voir page 33), on a :

$$2T = [L\cos 2\theta + M\sin 2\theta]\theta'^2 + A\sin^2\alpha\,\theta'^2 + C[\psi' + \cos\alpha\,\theta']^2$$

et $U = l\cos\theta + m\sin\theta$,

L, M, A, C, l, m étant des coefficients déterminés (voir page 34); l'intégrale des forces vives et l'équation de Lagrange relative à ψ coïncident avec les équations dont nous nous sommes servis. Mais voici de nouvelles applications :

II – Deux barres AB, CD pesantes, homogènes, de même longueur et de même densité, ont leurs extrémités A, C et B, D reliées par deux fils AC, BD de même longueur, flexibles, inextensibles et sans masse. Le milieu O de AB est fixe. Mouvement du système abandonné sans vitesse dans le plan vertical xOy.



Le mouvement du système a lieu dans le plan des x, y. La position du système dans ce plan dépend de deux paramètres, soit φ l'angle de OO' avec la direction Oy de la pesanteur (O' est le milieu de CD) et θ l'angle xOB de l'horizontale Ox avec AB.

La force vive de AB est égale à

$$2\int_0^l \rho\,\lambda^2\theta'^2 d\lambda = \frac{2\rho}{3} l^3\theta'^2 = \frac{Ml^2}{3}\theta'^2,$$

si $2l$ désigne la longueur des 2 barres, ρ leur densité et M leur masse.

D'autre part, la vitesse de rotation de CD autour de son centre de gravité O' étant égale à θ', la force vive de CD est égale à :

$$MR^2\varphi'^2 + \frac{Ml^2}{3}\theta'^2, \text{ si on pose } R = \overline{OO'}.$$

Donc :

$$T = \frac{Ml^2}{3}\theta'^2 + \frac{MR^2}{2}\varphi'^2.$$

Quant à U, on a :

$$U = MgR\cos\varphi.$$

L'équation de Lagrange relative à θ est :

$$\frac{d}{dt}\frac{2Ml^2}{3}\theta'^2 = 0,$$

ou

$$\theta' = C,$$

$$\theta = Ct + C'.$$

Cette intégrale résulte du théorème des moments appliqué à l'axe Oz.

L'équation de Lagrange relative à φ est :

$$\frac{d}{dt}MR^2\varphi' = -MgR\sin\varphi,$$

ou

$$\varphi'' = -\frac{g}{R}\sin\varphi.$$

On peut substituer à cette équation l'intégrale des forces vives ; mais c'est inutile, puisque l'équation précédente est celle du mouvement pendulaire. Le point O' se meut comme un pendule dont le fil est fixé au point O, et les barres AB, $A'B'$ tournent respectivement autour des points O et O' avec une vitesse de rotation uniforme.

III.— Mouvement d'une sphère homogène assujettie à glisser sans frottement sur un hélicoïde gauche à plan directeur horizontal, aucune force active ne s'exerçant sur la sphère.

Tout d'abord, le mouvement de la sphère autour de son centre de gravité G est une rotation uniforme autour d'un axe de direction fixe. Etudions le mouvement du centre de gravité.

Pour étudier ce mouvement, nous pouvons faire abstraction de la force vive de la sphère autour de G (qui est constante) et considérer seulement l'expression

$$T' = \frac{M}{2}\left(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\right)$$

Nous avons ici

$$\xi = u\cos\psi + \frac{KR\sin\psi}{\sqrt{K^2+u^2}}$$

$$\eta = u\sin\psi - \frac{KR\cos\psi}{\sqrt{K^2+u^2}}$$

$$\zeta = K\psi + \frac{Ku}{\sqrt{K^2+u^2}},$$

(R est le rayon de la sphère, K le pas de vis de l'hélicoïde) Par suite,

$$T = \frac{M}{2}\left\{\psi'^2\left(u^2+K^2+\frac{K^2R^2}{K^2+u^2}\right) + u'^2\left(1+\frac{K^2R^2}{(u^2+K^2)^2}\right) + 4\psi'u'\frac{KR}{\sqrt{K^2+u^2}}\right\}$$

Ecrivons l'équation de Lagrange relative à ψ.

$$\frac{d}{dt}\left[M\psi'\left(u^2+K^2+\frac{K^2R^2}{K^2+u^2}\right) + \frac{2MKR}{\sqrt{K^2+u^2}}u'\right] = 0,$$

d'où une intégrale première qu'on pouvait former aussi en appliquant la remarque sur le déplacement virtuel hélicoïdal.

Joignons à cette équation l'intégrale des forces vives :

$$(\alpha)\qquad \psi'^2\left(u^2+K^2+\frac{K^2R^2}{K^2+u^2}\right) + u'^2\left(1+\frac{K^2R^2}{(u^2+K)^2}\right) + 4\psi'u'\frac{KR}{\sqrt{K^2+n^2}} = h.$$

Il suffit d'éliminer ψ' entre cette égalité et l'égalité :

$$(\beta)\qquad \psi'\left(u^2+K^2+\frac{K^2R^2}{K^2+u^2}\right) + 2u'\frac{KR}{\sqrt{K^2+u^2}} = C$$

pour obtenir t en fonction de u par une quadrature elliptique :

$$(\alpha')\qquad \pm\, dt = \frac{du\left[(u^2+K^2)^2 - K^2R^2\right]}{(u^2+K^2)\sqrt{h(u^2+K^2)^2 - C^2(u^2+K^2) + hK^2R^2}} = \frac{du\left[(u^2+K^2)^2-K^2R^2\right]}{(u^2+K^2)\sqrt{F(u)}}$$

Quant à ψ, il est donné en fonction de u par une quadrature elliptique et une quadrature logarithmique :

$$(\beta')\qquad d\psi = \frac{du}{(u^2+K^2)^2+K^2R^2}\left[\pm\frac{C(u^2+K^2)^2 - K^2R^2}{\sqrt{F(u)}} - 2KR\sqrt{u^2+K^2}\right]$$

Le point G se meut sur une surface parallèle Σ de l'hélicoïde comme un point libre et décrit une géodésique de cette surface avec une vitesse constante. On peut d'ailleurs discuter le mouvement quand on suppose $R < K$.

Discussion. – La dérivée $\frac{du}{dt}$ ne peut alors changer de signe que si u atteint une valeur annulant $F(u)$. Posons $u^2 + K^2 = V$. L'équation

$$F_1(V) = h V^2 - C^2 V + h K^2 R^2 = 0$$

a ses racines V_1 et V_2 réelles ou imaginaires suivant que le nombre positif $\frac{C^2}{h}$ est ou non plus grand que $2KR$. Si $\frac{C^2}{h}$ est compris entre $R^2 + K^2$ et $2KR$, ces racines sont plus petites que K^2; si $\frac{C^2}{h}$ est plus grand que $K^2 + R^2$, K^2 sépare V_1 et V_2. D'après cela:

1°. Soit $\frac{C^2}{h} < R^2 + K^2$; $F(u)$ ne s'annule pour aucune valeur de u; u varie donc toujours dans le même sens et sa valeur absolue croît indéfiniment avec t; $\frac{du}{dt}$ tend vers $\pm\sqrt{h}$ (suivant le signe de u'_0); $\frac{d\psi}{dt}$ au bout d'un certain temps garde un signe constant et décroît en valeur absolue indéfiniment:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{C}{u^2}\,(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro quand $|u|$ croît indéfiniment. Il suit de là que ψ tend vers une limite ψ_1. Le point G s'éloigne sur une branche de courbe asymptote à la droite:

$$\xi = u \cos \psi_1, \qquad \eta = u \sin \psi_1, \qquad \zeta = K \psi_1 + R.$$

Il convient de signaler le cas particulier $\frac{C^2}{h} = 2KR$ où les deux racines v_1 et v_2 de $F_1(v)$ sont égales; la racine double est alors égale à $+KR$ et l'équation (α') donne:

$$\sqrt{h}\, t = u + R \operatorname{artg} \frac{u}{K} + C^{te}.$$

Le mouvement d'ailleurs a lieu comme ci-dessus.

2°. – Soit $\frac{C^2}{h} > R^2 + K^2$; $v_0 = u_0^2 + K^2$ est alors supérieur à la plus grande racine v_1 de $F_1(V)$. On peut toujours supposer $u_0 > 0$: si u'_0 est négatif, u croît constamment et indéfiniment comme dans le premier cas. Si u'_0 est négatif, u décroît jusqu'à la valeur $u_1 = +\sqrt{v_1 - K^2}$, rétograde et croît ensuite indéfiniment. La dérivée $\frac{d\psi}{du}$ est infinie pour $u = u_1$; la trajectoire est tangente à la courbe $u = u_1$. – 3°. Soit $\frac{C^2}{h} = R^2 + K^2$; alors $v_1 = K^2$, $u_1 = 0$; $F(u)$ contient u^2 en facteur; si u_0 étant positif, u'_0 est aussi positif, u croît indéfiniment; si u'_0 est négatif, u décroît et tend vers zéro quand t croît indéfiniment; ψ' tend vers $\frac{C}{R^2+K^2}$; la projection de la trajectoire sur le plan des x, y admet le cercle de centre O et de rayon R comme cercle asymptote. Si $u'_0 = 0$, $(u_0 > 0)$, on se trouve nécessairement dans le second ou le troisième cas. Dans le second cas, u' croît nécessairement. Dans le troisième, on a: $u = u_0$; ψ varie proportionnellement au temps.

— Quand R est plus grand que K, il est impossible de poursuivre la discussion si u atteint une des valeurs $\pm u_1 = \pm\sqrt{K(R-K)}$ qui annulent le dénominateur de $\frac{du}{dt}$. Supposons que, pour $t = t_1$, on ait $u = u_1$; $\frac{du}{dt}$ est infini pour $t = t_1$, et on a:

$$\pm (t - t_1) = (u - u_1)^2 \left[\alpha + (u - u_1) A\right],$$

α étant un nombre positif; il faut prendre le signe + devant $(t - t_1)$, et si on pose $\theta = \pm (t - t_1)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$u - u_1 = \theta \left[\alpha + \beta\, \theta + \dots \right] = \pm (t - t_1)^{\frac{1}{2}} \varphi(t) + (t - t_1)\, \psi(t).$$

Or les conditions initiales ne permettent pas de déterminer le signe qu'il faut prendre devant $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$; il y a deux trajectoires possibles du point G.

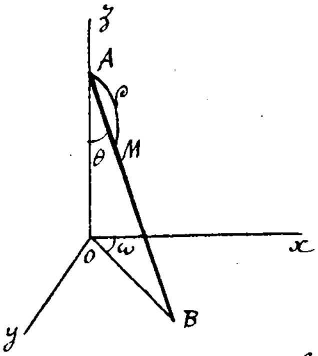
L'hélice $u = u_1$ de la surface Σ est un lieu de points singuliers de cette surface : chaque point de cette courbe est un point double des géodésiques qui y passent. — Cette singularité du mouvement ne se présente d'ailleurs que si $\frac{C^2}{h}$ est plus petit que $2KR$, c'est-à-dire si les racines de $F_1(r)$ sont imaginaires : car dans le cas contraire $F_1(KR)$ est toujours négatif.

Voici maintenant un autre exercice où l'application du théorème des forces vives présente quelques difficultés.

IV. — Les extrémités d'une barre AB glissent sans frottement l'une sur une droite verticale OZ, l'autre sur un plan horizontal xOy. — Cette barre est homogène et pesante ; de plus, chacun de ses éléments est attiré par le point de rencontre O de OZ et du plan proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de la distance. Mouvement de la barre.

La position de AB dépend de deux paramètres soit $BOx = \omega$, $BAO = \theta$.

Le théorème des forces vives et celui des quantités de mouvement appliqué à OZ donnent deux intégrales premières. Mais nous allons les obtenir par la méthode de Lagrange.



— Calcul de la force vive de la barre. Soit l la longueur de la barre ; M un point quelconque défini par $AM = \rho$.

Les coordonnées sont : $x = \rho \sin\theta \cos\omega$ D'où : $x' = \rho[\cos\theta \cos\omega\, \theta' - \sin\theta \sin\omega\, \omega']$

$y = \rho \sin\theta \sin\omega$ $\quad y' = \rho[\cos\theta \sin\omega\, \theta' + \sin\theta \cos\omega\, \omega']$

$z = (l - \rho) \cos\theta.$ $\quad z' = -(l - \rho) \sin\theta . \theta'.$

La demi force vive de l'élément $d\rho$ attenant au point M est, en supposant la densité égale à l'unité :

$$\frac{1}{2} \left\{ \rho^2 (\cos^2\theta\ \theta'^2 + \sin^2\theta\ \omega'^2) + (l - \rho)^2 \sin^2\theta . \theta'^2 \right\} d\rho.$$

La demi force vive du système est donc :

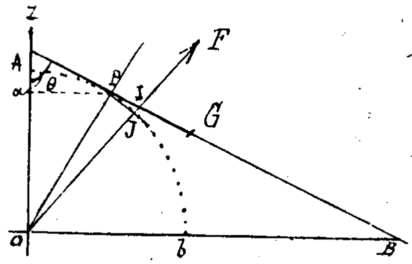
$$\frac{1}{2} (\cos^2\theta . \theta'^2 + \sin^2\theta\ \omega'^2) \int_0^l \rho^2 d\rho + \frac{1}{2} \sin^2\theta . \theta'^2 \int_0^l (l - \rho)^2 d\rho$$

D'où :

$$T = \frac{l^3}{6} (\theta'^2 + \omega'^2 \sin^2\theta)$$

Calcul du Travail virtuel du système. — Soit $Q_1 \delta\theta + Q_2 \delta\omega$ le travail virtuel dans un déplacement $(\delta\theta, \delta\omega)$. On va calculer Q_1 et Q_2.

Rappelons d'abord un théorème connu : L'action de la barre AB sur le point O dans les conditions de l'énoncé, est la même que celle qu'exercerait



un arc de cercle de même densité, de centre O, tangent à AB et limité à OA et OB, ses éléments étant soumis à la même loi d'attraction de la part de O.

Il résulte de là que, par raison de symétrie, les actions du point O sur les éléments de la barre AB ont une résultante appliquée au point I où la barre AB est rencontrée par la bissectrice de l'angle AOB, et dirigée suivant IO. — Le point d'application est variable à chaque instant dans la barre. — Quant à l'intensité, un calcul aisé en donne la valeur

$$\frac{f\sqrt{2}}{OP},$$

f étant le coefficient d'attraction, ou, en posant : $f\sqrt{2} = \mu$:

$$\frac{\mu}{\overline{OP}},$$

D'ailleurs :

$$OP = OA \sin\theta = l \sin\theta \cos\theta.$$

Cela posé, dans un déplacement virtuel $\delta\omega$, le point I se déplace normalement à la force attractive IO en restant fixe dans la barre, et le centre de gravité G, point d'application de la pesanteur, se déplace horizontalement. — Le travail virtuel dans ce déplacement est donc nul, et l'on a :

$$Q_2 = 0.$$

Pour évaluer Q_1, considérons un déplacement $\delta\theta$, et évaluons séparément le travail virtuel de la pesanteur et de l'attraction.

Pesanteur. — La cote du centre de gravité est $\frac{l}{2}\cos\theta$. Le travail virtuel de la pesanteur est donc :

$$-M\,g\,\frac{l}{2}\sin\theta.\delta\theta,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{g\,l^2}{2}\sin\theta.\delta\theta.$$

Attraction. — Calculons le déplacement du point I considéré comme fixe dans le corps. — Soit : $AI = \lambda$; ζ et ξ les coordonnées de I par rapport à OZ et OB.

On a $\qquad \xi = \lambda \sin\theta \quad , \quad \zeta = (l-\lambda)\cos\theta \quad , \quad \zeta = \xi$

D'où : $\qquad \delta\xi = \lambda\cos\theta.\delta\theta \quad \delta\zeta = -(l-\lambda)\sin\theta.\delta\theta.$

La composante $\delta\sigma$ de ce déplacement suivant IO est :

$$\delta\sigma = -(\delta\xi + \delta\zeta)\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(l-\lambda)\sin\theta - \lambda\cos\theta\right]\delta\theta,$$

C'est-à-dire en tenant compte de ce qu'on a :

$$\frac{\lambda}{\cos\theta} = \frac{l-\lambda}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin\theta+\cos\theta},$$

$$\delta\sigma = \frac{l}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\,\delta\theta = \frac{l}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)\,\delta\theta.$$

Le travail virtuel de l'attraction est :

$$\frac{\mu}{OF}\, d\sigma$$

C'est-à-dire $\qquad \dfrac{\mu}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta}\right)\delta\theta.$

Donc enfin :

$$Q_1 = \frac{gl^2}{2}\sin\theta + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right).$$

On remarquera que Q_1 et Q_2 sont les dérivées partielles de la fonction U :

$$U = -\frac{gl^2}{2}\cos\theta + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right) + C^{te}.$$

Équations du problème. — On a d'abord l'intégrale des forces vives :

$$T = U + h,$$

c'est-à-dire

$$\frac{l^3}{6}\left(\theta'^2 + \omega'^2\sin^2\theta\right) = -\frac{gl^2}{2}\cos\theta + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right) + h.$$

L'équation de Lagrange relative à ω est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{l^3}{3}\,\omega'\sin^2\theta\right) = 0$$

ou :

$$\omega'\sin^2\theta = \text{Const.} = k.$$

C'est là aussi l'intégrale des aires.

Si on tire ω de cette équation pour en faire la substitution dans celle des forces vives, il vient :

$$\frac{l^3}{6}\theta'^2 = -\frac{gl^2}{2}\cos\theta + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} + h$$

ou bien :

$$\frac{l^2}{6}\theta'^2 = \frac{l^3}{6}\frac{1}{F(\theta)}.$$

Par suite :

$$t = \int\sqrt{F(\theta)}\, d\theta$$

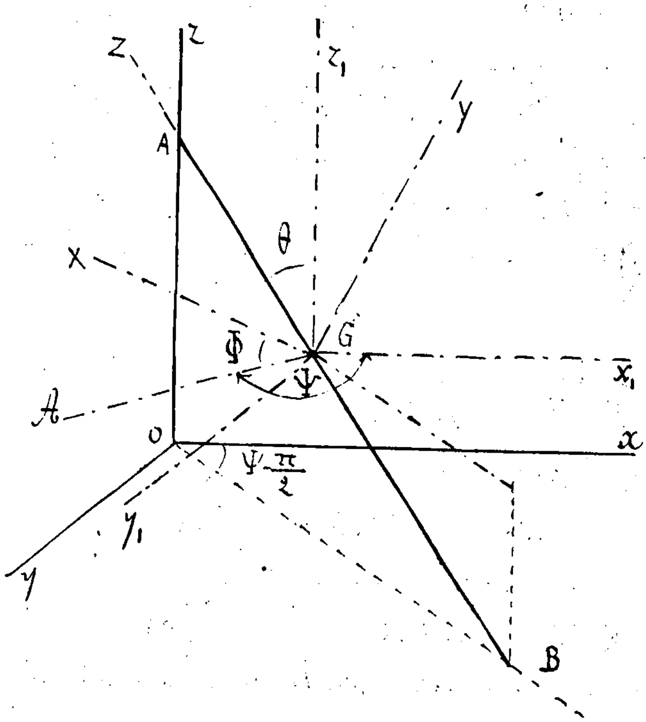
$$\omega = \int\frac{k\sqrt{F(\theta)}}{\sin^2\theta}\, d\theta.$$

On est ainsi ramené aux quadratures.

Étudions maintenant le mouvement d'un système qui dépende de plus de deux paramètres.

V. — Un corps solide de révolution, pesant et homogène, est traversé suivant son axe, par une aiguille qui lui est assujettie, et dont les extrémités glissent sans frottement l'une sur une verticale o z, l'autre sur un plan horizontal x o y. Etudier son mouvement.

Le mouvement dépend de 3 paramètres : deux pour fixer la position



de l'axe de révolution et un pour fixer la position du corps autour de cet axe.

Nous aurons trois intégrales premières en appliquant :

1° Le théorème des forces vives

2° Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à oz.

3° Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de révolution AB dans le mouvement autour du centre de gravité (3e équation d'Euler). — Mais servons-nous des équations de Lagrange.

Calcul de la force vive du système. — Considérons les axes (ox, oy, oz) et les axes parallèles à ceux-là (Gx_1, Gy_1, Gz_1) menés par le centre de gravité.

Soient $G\mathcal{A}$ la trace sur x_1Gy_1 du plan mené par G perpendiculairement à AB ; GX et GY deux droites rectangulaires de ce plan, fixes dans le solide.

Soient : $\theta = \widehat{AGz_1}$; $\psi = \widehat{x_1G\mathcal{A}}$. $\phi = \widehat{\mathcal{A}GX}$.

On en conclut : $\widehat{oAB} = \theta$ $\widehat{xoB} = \psi - \frac{\pi}{2}$.

Donc les angles θ, ψ, ϕ permettent de déterminer la position du corps.

Force vive du centre de gravité. — Soit $AG = d$. Les coordonnées du point G par rapport à (ox, oy, oz) sont :

$$x = d \sin\theta \sin\psi \qquad \text{D'où :} \quad x' = d\left[\sin\theta\cos\psi . \psi' + \cos\theta \sin\psi . \theta'\right]$$
$$y = d \sin\theta \cos\psi \qquad y' = d\left[\sin\theta\sin\psi . \psi' - \cos\theta\cos\psi . \theta'\right]$$
$$z = (l-d)\cos\theta \qquad z' = -(l-d)\sin\theta . \theta'$$

La force vive du centre de gravité, où toute la masse serait concentrée, serait :

$$M\left[d^2(\sin^2\theta . \psi'^2 + \cos^2\theta . \theta'^2) + (l-d)^2 \sin^2\theta . \theta'^2\right].$$

Force vive dans le mouvement autour du centre de gravité. — Le corps étant de révolution et θ, ϕ, ψ étant les angles d'Euler, cette force vive est :

$$A(p^2+q^2) + C r^2$$

avec :

$$p = \sin\phi \sin\theta . \psi' + \cos\phi . \theta'$$
$$q = \cos\phi \sin\theta . \psi' - \sin\phi . \theta'$$
$$r = \cos\theta . \psi' + \phi'.$$

Elle est donc : $A(\sin^2\theta . \psi'^2 + \theta'^2) + C(\cos\theta . \psi' + \phi')^2$.

Par suite la force vive totale du système est :

$$2T = (A + Md^2)\sin^2\theta . \psi'^2 + [A + M\{d^2\cos^2\theta + (l-d)^2\sin^2\theta\}]\theta'^2 + C(\cos\theta . \psi' + \phi')^2.$$

D'ailleurs il y a une fonction de forces :

$$U = Mg(l-d)\cos\theta.$$

Equations de Lagrange. — U et T ne contiennent ni l'un ni l'autre ϕ et ψ.

On aura donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi'}\right) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\phi' + \psi'\cos\theta = \text{Const.} = a \qquad (1)$$

$$(A + Md^2)\sin^2\theta . \psi' + C\cos\theta(\phi' + \psi'\cos\theta) = \text{Const.}$$

Cette dernière équation s'écrit en posant $\alpha = \dfrac{aC}{A + Md^2}$:

$$\psi' . \sin^2\theta + \alpha\cos\theta = b. \qquad (2)$$

Enfin l'équation des forces vives donnera, en tenant compte de (1) et en posant :

$$\frac{Ml(l-2d)}{A + Md^2} = \beta \quad \frac{2Mg(l-d)}{A + Md^2} = \gamma :$$

$$\psi'^2\sin^2\theta + [1 + \beta\sin^2\theta]\theta'^2 = \gamma\cos\theta + h. \qquad (3)$$

Si entre (2) et (3) on élimine ψ', il vient :

$$(1') \qquad \pm t = \int\sqrt{\frac{1 + \beta\sin^2\theta}{(\gamma\cos\theta + h)\sin^2\theta - (b - \alpha\cos\theta)^2}}\sin\theta\, d\theta \quad \text{ou} \quad t = \int F(\theta)\, d\theta$$

Par suite (2) donne :

$$(2') \qquad \psi = \int\frac{b - \alpha\cos\theta}{\sin^2\theta}F(\theta)\, d\theta$$

Enfin (1) donne

$$(3') \qquad \varphi = \int\left[a - \frac{\cos\theta(b - \alpha\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]F(\theta)\, d\theta.$$

Le problème est donc ramené aux quadratures.

Pour discuter le mouvement, on pose $\cos\theta = u$; il vient :

$$\pm t = \int\sqrt{\frac{1 + \beta - \beta u^2}{(\gamma u + h)(1 - u^2) - (b - \alpha u)^2}}\, du.$$

Le numérateur de la quantité placée sous le radical ne s'annule pas quand u varie de -1 à $+1$; le dénominateur admet deux racines u_1 et u_2 comprises entre -1 et $+1$. θ varie donc entre deux limites θ_1 et θ_2. Au bout d'une certaine période T, le mouvement recommence à cela près que ψ et φ ont augmenté d'une certaine constante. — Observons que $\sin\theta = 0$ se présente comme une valeur singulière des équations (2') et (3') ; mais θ ne peut devenir égal à 0 que si $b = \alpha$, et à π que si $b = -\alpha$. Pour ces conditions initiales particulières, on fait disparaître toute difficulté en introduisant les lignes trigonométriques de l'angle $\frac{\theta}{2}$; si par exemple $b = \alpha$, on a :

$$\pm t = \int \sqrt{\frac{1+\beta \sin^2\theta}{(\gamma \cos\theta + b)\cos^2\frac{\theta}{2} - b\sin^2\frac{\theta}{2}}} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \int F(\theta)\, d\theta$$

et

$$\psi = \int \frac{b}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} F(\theta)\, d\theta$$

$$\varphi = \int \left[a - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right] F(\theta)\, d\theta \,;$$

ces équations sont régulières dans le voisinage de $\theta = 0$.

9e Leçon.

Applications des équations de Lagrange (Suite)

Théorème de Liouville. _ Mouvement relatif.

Liouville a indiqué un cas très étendu où les équations de Lagrange s'intègrent par quadratures.

Considérons un système sans frottement dont les liaisons soient indépendantes du temps et dont la force vive s'exprime en fonction des paramètres $q_1, q_2 \cdots q_K$ sous la forme

(1) $2T = \varphi \left[A_1(q_1) q_1'^2 + A_2(q_2) q_2'^2 + \cdots + A_K(q_K) q_K'^2\right]$,

φ étant une somme de K fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_K$ de $q_1, q_2, \cdots q_K$ respectivement :

$$\varphi = \varphi_1(q_1) + \varphi_2(q_2) + \cdots + \varphi_K(q_K).$$

Le mouvement d'un tel système peut toujours se calculer par quadratures quand aucune force active ne s'exerce sur lui, ou plus généralement quand les forces actives qui s'exercent sur lui admettent une fonction de force $U(q_1, q_2 \cdots q_K)$ de la forme

$$U = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \cdots + \psi_K(q_K)}{\varphi_1(q_1) + \varphi_2(q_2) + \cdots \varphi_K(q_K)}.$$

C'est là le théorème de Liouville.

Tout d'abord, il suffit de substituer aux paramètres $q_1, q_2 \cdots q_k$ les paramètres $u_1, u_2 \ldots u_k$ liés aux premiers par les relations:

$$\sqrt{A_i(q_i)}\, dq_i = du_i ,$$

pour ramener T à la forme:

$$(2) \qquad 2T = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdot + \varphi_k)(q_1'^2 + q_2'^2 + \cdots + q_k'^2).$$

Cette substitution effectuée, écrivons les équations de Lagrange:

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}(\varphi q_i') - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}(q_1'^2 + q_2'^2 + \cdots q_k'^2) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

L'égalité des forces vives:

$$(4) \qquad T = \frac{\varphi}{2}(q_1'^2 + \cdots + q_k'^2) = U + h$$

est une conséquence de ces équations. Or multiplions les deux membres de l'equation (3) par $2\varphi q_i'$, il vient:

$$\frac{d}{dt}(\varphi^2 q_i'^2) - q_i' \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\varphi(q_1'^2 + \cdots + q_k'^2) = 2 q_i' \varphi \frac{\partial U}{\partial q_i};$$

ou encore en tenant compte de (4):

$$\frac{d}{dt}(\varphi^2 q_i'^2) - 2q_i' \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}(U + h) = 2 q_i' \varphi \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

ou enfin:

$$\frac{d}{dt}(\varphi^2 q_i'^2) = 2 q_i' \frac{\partial}{\partial q_i}\varphi(U + h).$$

mais

$$\varphi(U+h) = \psi_1(q_1) + \cdots + \psi_k(q_k) + h\left[\varphi_1(q_1) + \cdots + \varphi_k(q_k)\right];$$

donc:

$$\frac{d}{dt}(\varphi^2 q_i'^2) = 2q_i' \frac{d}{dq_i}(\psi_i + h\varphi_i) = 2\frac{d}{dt}(\psi_i + h\varphi_i),$$

ou enfin:

$$\varphi^2 q_i'^2 = \psi_i + h\varphi_i + \alpha_i .$$

Les α_i et h sont des constantes arbitraires, assujetties seulement à la condition que l'équation (4)

$$T = U + h$$

soit vérifiée. Or des égalités

$$\frac{\varphi q_i'^2}{2} = \frac{\psi_i + h\varphi_i + \alpha_i}{\varphi},$$

on déduit:

$$T = \frac{\varphi}{2}(q_1'^2 + q_2'^2 + \cdots + q_k'^2) = \frac{\psi}{\varphi} + h + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

$$= U + h + \Sigma\alpha_i .$$

Il faut donc et il suffit qu'on ait:

$$\Sigma\alpha_i = 0$$

En définitive, les équations de Lagrange equivalent dans ce cas aux égalités

$$\varphi^2 q_i'^2 = 2(\psi_i + b\varphi_i + \alpha_i) = 2F_i(q_i) \quad (i = 1, 2, \ldots K),$$

où b et les α désignent $(K+1)$ constantes arbitraires assujetties à l'unique condition :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_K = 0.$$

On déduit de là :

$$\frac{\sqrt{2}\,dt}{\varphi} = \frac{dq_1}{\sqrt{F_1(q_1)}} = \frac{dq_2}{\sqrt{F_2(q_2)}} = \ldots = \frac{dq_K}{\sqrt{F_K(q_K)}}$$

Les $(K-1)$ dernières égalités donnent, par des quadratures, les relations entre $q_1, q_2 \cdots q_K$ et $K-1$ constantes arbitraires ; t est donné par une dernière quadrature quand on a exprimé $q_2, q_3 \cdots q_K$ par exemple en fonction de q_1. On peut remarquer encore qu'on a :

$$\frac{\sqrt{2}\,dt}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_K}\left(\frac{\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \frac{\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \cdots + \frac{\varphi_K\,dq_K}{\sqrt{F_K}}\right)$$

et par suite

$$\sqrt{2}\,dt = \frac{\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \frac{\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \cdots\cdots + \varphi_K\,\frac{dq_K}{\sqrt{F_K}},$$

ou

$$\sqrt{2}\,t + C^{te} = \int\frac{\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{F_1}} + \int\frac{\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{F_2}} + \cdots + \int\frac{\varphi_K\,dq_K}{\sqrt{F_K}}.$$

Nous avons supposé la force vive T ramenée à la forme :

$$T = \frac{\varphi}{2}\left(q_1'^2 + q_2'^2 + \cdots + q_K'^2\right).$$

Si l'on revient maintenant à la forme plus générale :

$$2T = \left[\varphi_1(q_1) + \varphi_2(q_2) + \cdots + \varphi_K(q_K)\right]\left[A_1(q_1)q_1'^2 + A_2(q_2)q_2'^2 + \cdots + A_K(q_K)q_K'^2\right],$$

il résulte aussitôt de ce qui précède que, dans le cas où U est de la forme :

$$U = \frac{\psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \cdots + \psi_K(q_K)}{\varphi_1(q_1) + \varphi_2(q_2) + \cdots + \varphi_K(q_K)},$$

le mouvement est déterminé par les égalités

$$\frac{\sqrt{2}\,dt}{\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_K} = \frac{dq_1\sqrt{A_1}}{\sqrt{F_1}} = \frac{dq_2\sqrt{A_2}}{\sqrt{F_2}} = \ldots = \frac{dq_K\sqrt{A_K}}{\sqrt{F_K}},$$

où $F_i = \psi_i(q_i) + b\varphi_i(q_i) + \alpha_i$; b et les α_i sont les constantes assujetties à la condition :

$$\Sigma\,\alpha_i = 0.$$

Ces égalités équivalent aux suivantes :

$$\int\sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\,dq_1 + \beta_1 = \int\sqrt{\frac{A_2}{F_2}}\,dq_2 + \beta_2 = \ldots = \int\sqrt{\frac{A_K}{F_K}}\,dq_K + \beta_K,$$

et

$$\sqrt{2}\,t + C^{te} = \int\varphi_1\sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\,dq_1 + \int\varphi_2\sqrt{\frac{A_2}{F_2}}\,dq_2 + \cdots + \int\varphi_K\sqrt{\frac{A_K}{F_K}}\,dq_K.$$

Tel est le théorème de Liouville sous sa forme la plus générale.

Nous allons indiquer quelques applications de ce théorème.

Tout d'abord, quand aucune force active ne s'exerce sur le système, il suffit que la force vive soit de la forme :

$$T = \frac{(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_k)}{2}\left[A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \cdots + A_k q_k'^2\right]$$

pour que le mouvement s'intègre par la méthode précédente. Les fonctions F_i introduites plus haut se réduisent alors respectivement à $b\varphi_i + \alpha_i$.

Par exemple, si le ds^2 d'une surface se laisse mettre sous la forme :

$$ds^2 = (\varphi_1 + \varphi_2)\left[A_1 dq_1^2 + A_2 dq_2^2\right],$$

les géodésiques de cette surface sont données par l'équation

$$\int \frac{dq_1 \sqrt{A_1}}{\sqrt{b\varphi_1 + \alpha_1}} = \int \frac{dq_2 \sqrt{A_2}}{\sqrt{b\varphi_2 - \alpha_1}} = C^{te}.$$

(On peut faire $b = 1$ dans cette équation)

C'est ce qui se présente pour les surfaces du 2e degré quand on introduit les coordonnées elliptiques. Mais c'est là un point sur lequel nous reviendrons dans la suite.

En particulier, quand la surface est un plan (ou une surface applicable sur un plan) on peut d'une infinité de manières mettre le ds^2 sous la forme considérée. Ainsi soient x et y les coordonnées cartésiennes d'un point du plan ; on a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Le théorème de Liouville s'applique si U est de la forme :

$$U = \psi_1(x) + \psi_2(y);$$

Employons de même les coordonnées polaires :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = r^2\left[\frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2\right];$$

ici $\varphi = r^2$, $A_1 = \frac{1}{r^2}$, $A_2 = 1$. Le théorème de Liouville s'applique si on a :

$$U = \frac{1}{r^2}\left[\psi_1(r) + \psi_2(\theta)\right];$$

il faut pour cela et il suffit que la force active qui s'exerce sur le point M admette une fonction de force et que sa composante F_N normale au rayon vecteur OM varie le long de chaque rayon vecteur en raison inverse du carré de OM : $F_N = \frac{K(\theta)}{r^2}$. La relation entre r et t est la même que si F_N était nulle.

Quand la surface est de révolution, on peut donner au ds^2 l'expression :

$$ds^2 = dr^2\left[1 + \varphi'^2(r)\right] + r^2 d\theta^2 = r^2\left[\frac{dr^2\left[1 + \varphi'^2(r)\right]}{r^2} + d\theta^2\right]$$

Le théorème de Liouville s'applique si U est de la forme :

$$U = \frac{1}{r^2}\left[\psi_1(r) + \psi_2(\theta)\right].$$

On déduit de là par exemple que le mouvement d'un point sur un hélicoïde gauche à plan directeur se détermine par quadratures, lorsque la force active qui s'exerce sur le point admet une fonction de force et que de plus, le long de chaque génératrice rectiligne, la composante de la force suivant la tangente à l'hélice qui passe par le point, varie en raison inverse du carré de la distance du point à l'axe de la surface.

Comme exemple plus compliqué, traitons le problème classique suivant :

I. – Un point matériel libre est attiré par deux points fixes F et F' en raison inverse du carré de la distance et par le point O, milieu de FF', proportionnellement à la distance. Mouvement du point.

Supposons d'abord que le point soit abandonné sans vitesse ou que sa vitesse initiale soit comprise dans le plan F'MF. Le point M se meut constamment dans ce plan. Prenons comme axe des x la droite OF, comme axe des y la perpendiculaire oy. Parmi les coniques qui ont pour foyers F et F' et dont l'équation s'écrit,

$$(1) \quad \frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{u-c^2} = 1,$$

il en existe deux qui passent, à un instant donné, par le point M. L'équation (1) en u, pour x et y donnés, admet en effet deux racines réelles et positives, l'une λ plus grande que c^2 qui correspond à une ellipse, l'autre μ plus petite que c^2 qui correspond à une hyperbole. On peut déterminer la position du point M dans le plan à l'aide des deux paramètres λ et μ. On a :

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda-c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\mu-c^2} = 1 \qquad (0<\mu<c^2<\lambda)$$

On déduit de là :

$$c^2x^2 = \lambda\mu, \qquad c^2y^2 = (\lambda-c^2)(c^2-\mu),$$

et par suite :

$$2\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu}$$

$$2\frac{dy}{y} = \frac{d\lambda}{\lambda-c^2} - \frac{d\mu}{c^2-\mu},$$

d'où :

$$4\,ds^2 = 4(dx^2+dy^2) = (\lambda-\mu)\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda(\lambda-c^2)} + \frac{d\mu^2}{\mu(c^2-\mu)}\right);$$

Le ds^2 s'exprime donc, en fonction de λ et μ, sous la forme de Liouville. Nous pouvons écrire :

$$2T = m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (\lambda-\mu)\left[\frac{m}{4}\frac{\lambda'^2}{\lambda(\lambda-c^2)} + \frac{m}{4}\frac{\mu'^2}{\mu(c^2-\mu)}\right];$$

ici $\varphi_1 = \lambda,\quad \varphi_2 = -\mu,\quad A_1 = \frac{m}{4\lambda(\lambda-c^2)},\quad A_2 = \frac{m}{4\mu(c^2-\mu)}$.

Pour que le théorème de Liouville s'applique, il faut et il suffit qu'on ait :

$$U = \frac{\psi_1(\lambda)+\psi_2(\mu)}{\lambda-\mu}$$

Or posons : $r = FM$, $r' = F'M$, $\rho = OM$; il vient :

$$U = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'} + \alpha\rho^2,$$

K, K', α étant des coefficients donnés. Mais $\sqrt{\lambda}$ étant le grand axe de l'ellipse $u=\lambda$, on a :

$$r + r' = 2\sqrt{\lambda},$$

et de même, en considérant l'hyperbole $u=\mu$,

$$r - r' = 2\sqrt{\mu}.$$

Donc :

$$r = \sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}, \qquad r' = \sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu}.$$

$$\frac{K}{r} = \frac{K}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}} = \frac{K(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})}{\lambda-\mu},$$

$$\frac{K'}{r'} = \frac{K'}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu}} = \frac{K'(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})}{\lambda-\mu}.$$

Enfin :

$$\rho^2 = x^2+y^2 = \lambda+\mu+C^{te}.$$

$$\alpha\rho^2 = \frac{\alpha(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda-\mu} + C^{te}.$$

Par suite :

$$U = \frac{\sqrt{\lambda}(K+K')+\alpha\lambda^2+\sqrt{\mu}(K'-K)-\alpha\mu^2}{\lambda-\mu} = \frac{\psi_1(\lambda)+\psi_2(\mu)}{\lambda-\mu}.$$

Ce résultat subsiste encore si on suppose que le point M est attiré (ou repoussé) par l'axe des x et par l'axe des y en raison inverse du cube de sa distance à ces axes. Pour tenir compte de ces forces, il faut ajouter à U un terme U_1 de la forme :

$$U_1 = \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2},$$ β et γ étant des coefficients donnés.

Mais on sait que :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{c^2}{\lambda\mu} = \frac{c^2}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{c^2}{(\lambda-c^2)(c^2-\mu)} = \frac{c^2}{(\lambda-\mu)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-c^2}+\frac{\mu}{c^2-\mu}\right)$$

Donc :

$$U_1 = \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\frac{-\beta c^2}{\lambda} + \frac{\gamma\lambda}{\lambda-c^2} + \frac{\beta c^2}{\mu} + \frac{\gamma\mu}{c^2-\mu}\right]$$

La somme $U + U_1$ est donc bien encore de la forme :

$$\frac{\psi_1'(\lambda) + \psi_2'(\mu)}{\lambda-\mu}.$$

Le mouvement du point est déterminé par les égalités :

$$(2) \ldots\ldots \sqrt{\frac{8}{m}}\frac{dt}{\lambda-\mu} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda c^2)[\psi_1+b\lambda+\alpha_1]}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(c^2-\mu)[\psi_2+b\mu-\alpha_1]}},$$

avec

$$\psi_1'(\lambda) = (K+K')\sqrt{\lambda} + \alpha\lambda^2 - \frac{\beta c^2}{\lambda} + \frac{\gamma\lambda}{\lambda-c^2}$$

$$\psi_2(\mu) = (K'-K)\sqrt{\mu} - \alpha\mu^2 + \frac{\beta c^2}{\mu} + \frac{\gamma\mu}{c^2-\mu}.$$

De ces égalités résulte la suivante

$$\sqrt{\frac{8}{m}}\,t + C^{te} = \int\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda-c^2)[\psi_1+b\lambda+\alpha_1]}} - \int\frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{\mu(c^2-\mu)[\psi_2-b\mu-\alpha_1]}}.$$

En particulier quand aucune force ne s'exerce sur le point M, les équations (2) deviennent

$$(3) \ldots \sqrt{\frac{8}{m}}\frac{dt}{\lambda-\mu} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-c^2)(b\lambda+\alpha_1)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\mu-c^2)(b\mu+\alpha_1)}}$$

Mais nous savons que dans ce cas le mouvement du point est rectiligne et uniforme :

$$x = at + b, \qquad y = a't + b', \qquad y = nx + p.$$

Si on remplace x et y en fonction de λ, μ, on voit que les équations (1) s'intègrent algébriquement.

L'intégrale de l'équation :

$$(4) \ldots\ldots \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-c^2)(\lambda+\alpha_1)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\mu-c^2)(\mu+\alpha_1)}}$$

est donc algébrique et de la forme :

$$A\sqrt{\lambda\mu} + A'\sqrt{(\lambda-c^2)(c^2-\mu)} + A'' = 0;$$

A, A', A'' sont des constantes dont on trouve aisément la valeur en exprimant x_0, y_0, y_0' en fonction des valeurs initiales $\mu_0 = -\alpha_1$, $\lambda_0 = C$, $\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_0 = 0$:

$$A = \sqrt{C(c^2+\alpha_1)}, \quad A' = \sqrt{-\alpha_1(C-c^2)}, \quad A'' = c^2\sqrt{-\alpha_1(c^2+\alpha_1)};$$

dans ces égalités, C est une constante arbitraire.

Si de même on suppose que la seule force qui s'exerce sur le point M soit l'attraction du point O, les équations (2) deviennent

$$\sqrt{\frac{8}{m}}\frac{dt}{\lambda-\mu} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-c^2)(\alpha\lambda^2+b\lambda+\alpha_1)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\mu-c^2)(\alpha\mu^2+b\mu+\alpha_1)}}$$

On sait qu'alors x et y s'expriment en fonction de t à l'aide d'exponentielles et que la relation entre x et y est algébrique et du second degré. Les équations (5) s'intègrent donc à l'aide d'exponentielles et l'intégrale de l'équation :

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda-c^2)(\alpha\lambda^2+b\lambda+\alpha_1)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\mu-c^2)(\alpha\mu^2+b\mu+\alpha_1)}}$$

est algébrique. On sait que ces équations s'introduisent dans la théorie des fonctions elliptiques.

Nous avons admis dans ce qui précède, que le point était lancé dans le plan FMF'. Supposons maintenant les conditions initiales quelconques.

Les forces qui s'exercent sur le point M (attractions des points F, F' et O) rencontrent toutes l'axe ox; appliquons à cet axe le théorème des moments; il vient, en appelant R la distance du point M à l'axe, et θ l'angle du plan Mox avec le plan fixe xoy :

$$R^2\frac{d\theta}{dt} = C^{te} = \gamma.$$

Ceci posé, étudions le mouvement relatif du point M dans le plan Mox. Autrement dit, étudions le mouvement de M par rapport au trièdre trirectangle oxy_1z_1, oy_1 étant la perpendiculaire menée à ox à chaque instant dans le plan Mox. Par rapport à ce trièdre, le point M reste constamment dans le plan xoy_1 : évaluons la projection sur ce plan de la force relative aux axes oxy_1z_1 qui s'exerce sur M. La force centrifuge composée est normale au plan Mox; la force d'entraînement (F_e) est située dans ce plan, dirigée suivant la perpendiculaire PM à Ox; cette force comptée suivant Oy_1 a pour expression :

$$m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 y_1\,;$$

mais d'autre part

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{R_4} = \frac{\gamma^2}{y_1^4}\,;\ \text{donc}$$

$$F_e = \frac{m\gamma^2}{y_1^3}.$$

Il suit de là que le point M se meut dans le plan xoy_1 comme un point attiré par les points F et F' en raison inverse du carré de la distance, par le point O proportionnellement à la distance, et repoussé par l'axe ox en raison inverse du cube de la distance, le coefficient de répulsion étant $m\gamma^2$. Le mouvement du point est donc déterminé par les égalités écrites plus haut. Observons que ce résultat subsiste, si l'axe ox attire (ou repousse) le point M en raison inverse du cube de sa distance à ce point.

On serait arrivé d'ailleurs aux mêmes conclusions en étudiant, à l'aide des équations de Lagrange le mouvement absolu de M. Déterminons en effet la position du point M à l'aide des coordonnées elliptiques λ, μ du plan Mox, et de l'angle θ que fait ce plan avec le plan xoy. On trouve aussitôt:

$$T = \frac{m}{a}\left[\frac{(\lambda-\mu)}{4}\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda(\lambda-c^2)}+\frac{\mu'^2}{\mu(c^2-\mu)}\right)+y_1^2\theta'^2\right] = T_1 + \frac{m}{2}y_1^2\theta'^2$$

Les équations de Lagrange peuvent s'écrire:

(i) $$\frac{d}{dt}\cdot m y_1^2\theta' = 0, \quad \text{ou} \quad y_1^2\theta' = \gamma;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial\lambda'} - \frac{\partial T_1}{\partial\lambda} - \frac{m\theta'^2}{2}y_1\frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial\lambda}$$

Or en tenant compte de (i),

(j) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\lambda'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{m\gamma^2}{y_1^3}\frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \frac{\partial U_1}{\partial\lambda},$$

si on pose:

$$U_1 = U + \frac{m\gamma^2}{2y_1^2} = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'} + \alpha\rho^2 - \frac{m\gamma^2}{2y_1^2}.$$

Et de même:

(k) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\mu'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial\mu} = \frac{\partial U_1}{\partial\mu}.$$

Ces résultats coïncident bien avec ceux que nous venons d'obtenir.

Voici une autre application au mouvement d'un point sur une surface.

II. – Un point M est mobile sans frottement sur un cône du second degré; il est attiré par le sommet O du cône en raison inverse du carré de la distance OM et par l'axe intérieur du cône en raison inverse du cube de sa distance MP à cet axe. Mouvement du point.

Prenons comme axes $oxyz$ les trois axes principaux du cône, l'axe oz étant l'axe intérieur. L'équation du cône est:

$$z^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2.$$

Définissons la position d'un point sur la surface à l'aide des deux paramètres ρ et u:

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2 \qquad u = \frac{y}{x}.$$

Les coordonnées curvilignes $u = u_0$ et $\rho = \rho_0$ sont les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales.

On trouve aussitôt:

$$x^2 = \frac{\rho^2}{1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)},$$

$$y^2 = \frac{u^2\rho^2}{1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)}$$

$$z^2 = \frac{(\alpha^2+u^2\beta^2)\rho^2}{1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)}$$

Si on pose $D = 1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)$, on déduit de ces trois égalités les suivantes :

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{u(1+\beta^2)\,du}{D},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{(1+\alpha^2)\,du}{uD}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{(\beta^2-\alpha^2)\,u\,du}{(\alpha^2+u^2\beta^2)D};$$

d'où pour la somme $dx^2+dy^2+dz^2$, en remplaçant x^2, y^2, z^2 en fonction de ρ et u, la valeur :

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2[\alpha^2(1+\alpha^2)+u^2\beta^2(1+\beta^2)]}{(\alpha^2+u^2\beta^2)D^2}\,du^2;$$ par suite, si on pose :

$$A(u) = \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)+u^2\beta^2(1+\beta^2)}{(\alpha^2+u^2\beta^2)[1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)]^2},$$

on a :

$$T = \frac{m}{2}\rho^2\left[\frac{\rho'^2}{\rho^2} + A(u)\,u'^2\right].$$

En substituant au paramètre u le paramètre θ.

$$\theta = \int\sqrt{A(u)}\,du = \int\sqrt{\frac{\alpha^2(1+\alpha^2)+u^2\beta^2(1+\beta^2)}{\alpha^2+u^2\beta^2}}\,\frac{du}{1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)},$$

on ramène le ds^2 à la forme :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

expression du ds^2 dans le plan en coordonnées polaires ; ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir géométriquement.

Evaluons maintenant U. Soit $r = MP$:

$$U = \frac{K}{\rho} + \frac{K'}{r^2}$$

D'ailleurs,

$$r^2 = x^2+y^2 = \rho^2 - z^2 = \frac{\rho^2(1+u^2)}{D},$$

donc :

$$U = \frac{1}{\rho^2}\left(K\rho + \frac{K'D}{1+u^2}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left[\psi_1(\rho)+\psi_2(u)\right].$$

Le théorème de Liouville s'applique donc ici ; si on veut encore, le problème est ramené au problème du mouvement dans un plan d'un point soumis à une force qui admet une fonction de force, et dont la composante normale au rayon vecteur OM varie le long de OM en raison inverse de OM^2.

Les équations qui définissent le mouvement sont :

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\,\frac{dt}{\rho^2} = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{F_1}} = du\sqrt{\frac{A(u)}{F_2}},$$

avec
$$F_1 = k\rho + b\rho^2 + C,$$
$$F_2 = \frac{K'(1+u^2)}{(1+\alpha^2)+u^2(1+\beta^2)} - C.$$

Donc :
$$\sqrt{\frac{2}{m}}\, dt = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{k\rho + b\rho^2 + C}}, \quad \text{et}$$
$$\frac{d\rho}{\rho\sqrt{k\rho + b\rho^2 + C}} = du \sqrt{\frac{\alpha^2(1+\alpha^2)+u^2\beta^2(1+\beta^2)}{(\alpha^2+u^2\beta^2)\left[1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)\right]\left\{K'(1+u^2)-C\left[1+\alpha^2+u^2(1+\beta^2)\right]\right\}}}$$

La relation entre ρ et t est indépendante du coefficient d'attraction de l'axe OZ.

-- Ajoutons, pour terminer, qu'on a souvent à appliquer le théorème de Liouville dans le cas simple où φ est une constante, c'est-à-dire où T est de la forme :
$$T = A_1(q_1)\, q_1'^2 + A_2(q_2)\, q_2'^2 + \dots + A_k(q_k)\, q_k'^2$$
Il faut et il suffit alors qu'on ait
$$U = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \dots + \psi_k(q_k).$$

Reprenons par exemple, le problème déjà traité (voir page 37).

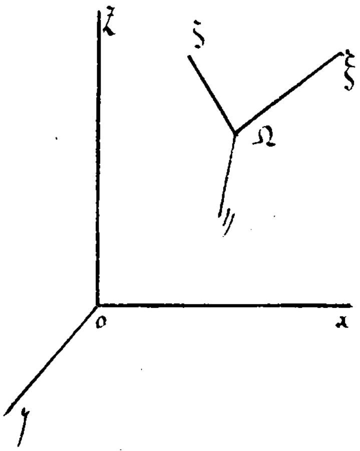
III. – Un corps solide pesant a deux de ses points A et B qui glissent sans frottement sur deux droites fixes parallèles. – Mouvement du système.

En gardant la notation des pages 37 et 38 on trouve :
$$2T_1 = \psi'^2(a + b\cos^2\psi) + M\zeta'^2$$
$$U = \lambda\cos\psi + \mu\sin\psi + \nu\zeta,$$
$a, b, M, \lambda, \mu, \nu$ étant des coefficients donnés. Le mouvement est donc déterminé par les équations :
$$\sqrt{2}\, dt = d\psi\sqrt{\frac{a + b\cos^2\psi}{\lambda\cos\psi + \mu\sin\psi + h}} = d\zeta\sqrt{\frac{M}{\nu\zeta + \alpha}},$$
α et h étant des constantes

Nous retrouverons, par une autre voie, ce théorème de Liouville et nous reviendrons à ce sujet sur ses applications.

Dixième Leçon.

Application des équations de Lagrange à l'étude du mouvement relatif des systèmes.



Soient deux systèmes d'axes coordonnés (ox, oy, oz) et ($\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$) animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement quelconque donné.

Appelons a, b, c les coordonnées de Ω par rapport à $oxyz$,
α, β, γ les cosinus directeurs de $\Omega\xi$ "
α', β', γ' " " $\Omega\eta$ "
$\alpha'', \beta'', \gamma''$ " " $\Omega\zeta$ "

Ces 12 quantités sont des fonctions données du temps t.

Considérons un point matériel libre et supposons qu'on connaisse la force (F) relative aux axes $oxyz$ qui s'exerce sur ce point. On demande d'étudier le mouvement du point M par rapport aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$.

Il est clair que quand on connaît le mouvement de M par rapport aux premiers axes, on connaît, d'après les formules de changement d'axes, son mouvement par rapport aux seconds, mais ce calcul est en général incommode.

Un procédé meilleur consiste dans l'emploi du théorème de Coriolis; on calcule la force relative aux axes $\Omega\xi\eta\zeta$ qui s'exerce sur M, par la formule:

$$(F_r) = (F_a) - m(\gamma_r) - m(\gamma_c),$$

et on étudie le mouvement d'un point soumis à la force F_r.

Au lieu de cela, on peut calculer la force vive $2T$ du point M dans son mouvement par rapport à $Oxyz$ en fonction des paramètres ξ, η, ζ, et écrire les 3 équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \Xi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta} = H$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = Z.$$

Si la force (F) admet une fonction de force U, les trois seconds membres sont égaux respectivement à $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$.

Plus généralement, soit M un point matériel libre ou non, (F) la force active relative aux axes $Oxyz$ qui s'exerce sur lui ; exprimons ses coordonnées ξ, η, ζ, en fonction des paramètres q_i les plus commodes (et s'il est nécessaire de t). Pour étudier le mouvement du point M par rapport aux axes $\Omega \xi \eta \zeta$, on peut suivre les méthodes suivantes :

1ère Méthode. — On calcule la force active (φ) relative à $\Omega \xi \eta \zeta$ par la formule de Coriolis :

$$(\varphi) = (F) - m(\gamma_e) - m(\gamma_c),$$

et la force vive $2T_1$ relative à $\Omega \xi \eta \zeta$:

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\right).$$

On écrit alors les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q} = Q,$$

$Q\,\delta q$ désignant le travail virtuel de φ dans le déplacement δq. Les équations ainsi obtenues définissent les paramètres q et par suite ξ, η, ζ en fonction de t.

2ème Méthode. — Au lieu de calculer la force vive $2T_1$ par rapport à $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$. — On peut calculer la force vive $2T_2$ par rapport à ox, oy, oz. On n'a plus alors qu'à écrire les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q$$

où

$$\Sigma\, Q\,\delta q = \Sigma\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\right)$$

si X, Y, Z sont les composantes de (F) suivant (ox, oy, oz).

Les équations finales auxquelles on arrive sont les mêmes que précédemment, mais le calcul est plus commode.

Pour calculer T_2 il n'est pas nécessaire de former les expressions de x, y, z en fonction des q et de t ; il est facile de calculer la vitesse V de M par rapport à ox, oy, oz en fonction de ξ, η, ζ et de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$. — En effet, à chaque instant la vitesse du point M est la même que si ce point était animé d'un mouvement de translation dont la vitesse serait celle de l'origine Ω et d'un mouvement de rotation ω autour d'un certain axe ΩI. Appelons u, v, w, les composantes suivant $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ de la vitesse de Ω
p, q, r " " de la rotation ΩI

La vitesse du point M par rapport à ox, oy, oz, a pour composantes suivant $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$:

$$V_\xi = \frac{d\xi}{dt} + u + q\zeta - r\eta$$

$$V_\eta = \frac{d\eta}{dt} + v + r\xi - p\zeta$$

$$V_\zeta = \frac{d\zeta}{dt} + w + p\eta - q\xi$$

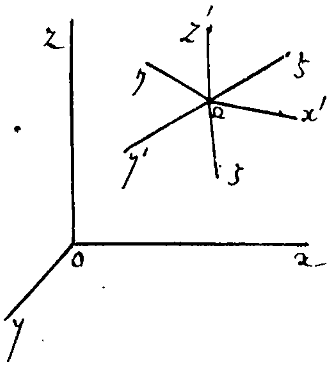
D'où

$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d\xi}{dt}+u+q\zeta-r\eta\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}+v+r\xi-p\zeta\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}+w+p\eta-q\xi\right)^2\right].$$

Il serait facile de développer l'expression de cette force vive.

Remarquons qu'il y a un terme qu'on pourra négliger de calculer: c'est $\frac{1}{2} m (u^2+v^2+w^2)$; il ne contient en effet que t et ne donnera rien pour les dérivées par rapport à q_i et à q_i'.

3e Méthode. — On présente parfois le calcul précédent sous une forme un peu différente (x).



On considère un système d'axes intermédiaires $(\Omega x', \Omega y', \Omega z')$ parallèles à (ox, oy, oz); on calcule la force vive et la force active par rapport à ces axes, et on applique les équations de Lagrange.

La force active par rapport à ces axes est:

$$(F') = (F) - m(\gamma)$$

F étant la force active par rapport à (ox, oy, oz) et γ l'accélération du point Ω par rapport à (ox, oy, oz); γ se calcule sans difficulté et par suite F' s'obtient bien aisément.

Quant à la force vive T_3 relative à $(\Omega x', \Omega y', \Omega z')$ elle est évidemment, en conservant les notations précédentes:

$$T_3 = \frac{1}{2} m \left\{\left(\frac{d\xi}{dt}+q\zeta-r\eta\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}+r\xi-p\zeta\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}+p\eta-q\xi\right)^2\right\}.$$

On écrira enfin les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_3}{\partial q'}\right)-\frac{\partial T_3}{\partial q} = Q$$

où $\Sigma Q\,\delta q$ est le travail virtuel de la force F'.

Remarquons que $T_3 = \mathcal{T} + G + \mathcal{V}$

en posant:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$

$$G = \frac{1}{2} m \left[(q\zeta-r\eta)^2+(r\xi-p\zeta)^2+(p\eta-q\xi)^2\right]$$

$$\mathcal{V} = m \left[\frac{d\xi}{dt}(q\zeta-r\eta)+\frac{d\eta}{dt}(r\xi-p\zeta)+\frac{d\zeta}{dt}(p\eta-q\xi)\right]$$

Ces trois termes s'interprètent ainsi:

$\mathcal{T}$ est la force vive du point dans son mouvement par rapport aux axes $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$.

(x) Gilbert. — Annales de la Société Scientifique de Bruxelles — 6e Année 1882 — p. 270 et suivantes.

G est la force vive du point due à la rotation autour de l'axe instantané ΩI. Si r est la distance de M à ΩI, on a :

$$G = \frac{1}{2}(m r^2)\omega^2$$

Enfin l'expression de $\mathcal{V}$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{V} = p . m \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}\right) + \dots + \dots$$

Si nous désignons par P le moment, par rapport à Ω, de la quantité du mouvement du point M dans son mouvement par rapport à $(\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta)$ et par P_ξ, P_η, P_ζ ses projections sur ces axes, on a :

$$\mathcal{V} = p P_\xi + q P_\eta + r P_\zeta$$

ou

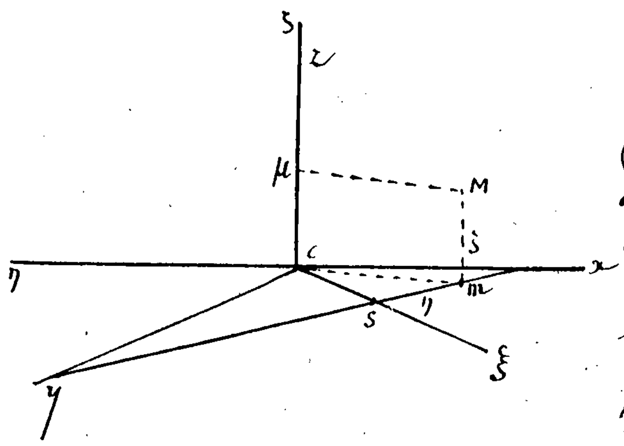
$$\mathcal{V} = \omega . P \cos(\widehat{\omega, P}).$$

Ainsi $\mathcal{V}$ est le produit géométrique de la rotation instantanée ΩI par le moment par rapport à Ω de la quantité de mouvement du point dans son mouvement par rapport aux axes de comparaison $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$.

Ces interprétations géométriques facilitent dans certains cas le calcul de la force vive.

Remarque. — Il importe d'observer que les trois méthodes indiquées conduisent identiquement aux mêmes équations différentielles pour définir les paramètres q qui déterminent la position du point.

Exemple. — Mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur un plan vertical animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical.



Soit oz l'axe de rotation ; ox, oy 2 horizontales rectangulaires fixes.

Prenons pour axes de comparaison $(o\xi, o\eta, o\zeta)$, $o\xi$ étant perpendiculaire au plan donné, $o\zeta$ coïncidant avec oz.

Supposons la masse du point mobile égale à l'unité ; définissons la position de ce point par ses coordonnées : η, ζ, son ξ étant nul. — Soit enfin ω la vitesse de rotation. —

1ère Méthode. — On a :

$$2T_1 = \zeta'^2 + \eta'^2.$$

Calculons le travail virtuel. — Dans ce cas particulier, on n'a pas à se préoccuper de la force centrifuge composée qui est normale au plan que décrit le mobile et par conséquent à tout déplacement virtuel.

La force d'entraînement est $\omega^2 . M\mu$, $M\mu$ étant la distance de M à oz; elle est dirigée de M vers oz. La force donnée est la pesanteur. – On trouve immédiatement que:

$$Q_\zeta = -g$$
$$Q_\eta = \omega^2 \eta.$$

Les équations de Lagrange correspondantes sont:

$$\begin{cases} \zeta'' = -g \\ \eta'' = \omega^2 \eta \end{cases}$$

dont les intégrales premières sont:

$$\zeta' = -gt + A \qquad \eta'^2 = \omega^2 \eta^2 + B.$$

et les intégrales complètes:

$$\zeta = -\frac{1}{2} g t^2 + At + A' \qquad \eta = C e^{\omega t} + D e^{-\omega t}$$

Ces intégrales pouvaient s'obtenir en appliquant le théorème des forces vives et celui des projections relativement à oz.

2^e Méthode. – On a:

$$x = l \cos \omega t + \eta \sin \omega t$$
$$y = l \sin \omega t - \eta \cos \omega t$$
$$z = \zeta,$$

l désignant la distance de O au plan donné.

On en conclut:

$$2 T_2 = l^2 \omega^2 + \eta^2 \omega^2 + \eta'^2 + 2 l \omega \eta' + \zeta'^2.$$

Il y a une fonction de force:

$$U = -g \zeta.$$

Les équations de Lagrange sont:

$$\begin{cases} \zeta'' = -g \\ \dfrac{d}{dt}(\eta' + l\omega) - \eta \omega^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \eta'' - \omega^2 \eta = 0. \end{cases}$$

3^e Méthode. – Les axes intermédiaires coïncident avec ox, oy, oz. Par suite T_3 sera identique à T_2. – Constatons-le à l'aide des formules de M. Gilbert. – On a:

$$2 \mathcal{T} = \zeta'^2 + \eta'^2$$
$$2 \mathcal{G} = (l^2 + \eta^2) \omega^2$$
$$2 \mathcal{V} = 2 \omega . l \eta \qquad (\widehat{\omega, P}) = 0.$$

Par suite:

$$T_3 = T_2.$$

L'origine des axes intermédiaires est fixe; – on n'a donc que la pesanteur comme force donnée et on retrouve les équations précédentes.

On traiterait aisément le même problème en supposant le point attiré en outre par chaque élément de l'axe oz suivant une fonction de la distance, et même en supposant le point mobile sur un cylindre vertical tournant uniformément autour d'un axe vertical.

Extension des Considérations précédentes au Mouvement Relatif des systèmes.

Quand on a à étudier le mouvement relatif d'un système de points par rapport à des axes $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ animés d'un mouvement connu relativement à des axes fixes ox, oy, oz, connaissant la force active qui s'exerce sur chaque point du système, par rapport à ox, oy, oz, on peut encore employer les trois méthodes indiquées pour le cas d'un point unique.

On rapportera les positions des points du système aux paramètres q les plus commodes pour définir ces positions relativement aux axes mobiles $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$, et on calculera la force vive du système:

Soit par rapport aux axes mobiles $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$;

Soit par rapport aux axes fixes ox, oy, oz;

Soit par rapport à des axes intermédiaires $\Omega x', \Omega y', \Omega z'$;

en fonction des q, des q' et de t.

Pour appliquer les équations de Lagrange, il reste à déterminer les quantités Q.

Dans le premier cas, on calculera le travail virtuel total à la fois des forces données par rapport à ox, oy, oz, et des forces de Coriolis changées de signe.

Dans le 2e cas, on calculera le travail virtuel total des forces données par rapport à ox, oy, oz.

Dans le 3e cas, on calculera le travail virtuel total à la fois des forces données et des forces d'entraînement $m(\gamma_e)$, γ_e étant l'accélération du point Ω.

M. Gilbert a donné aux équations qu'on obtient par la 3e méthode une forme intéressante et qui résulte aussitôt de ce qui précède.

Plaçons-nous dans le cas où les forces données admettent une fonction de forces U.

Soit $\gamma_\xi, \gamma_\eta, \gamma_\zeta$ les composantes suivant $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ de l'accélération γ_e du point Ω. Posons:

$$N = -\Sigma m(\xi\gamma_\xi + \eta\gamma_\eta + \zeta\gamma_\zeta).$$

Nous aurons alors:

$$Q = \frac{\partial(U+N)}{\partial q}.$$

D'ailleurs la demi force vive T_3 est la somme de 3 termes:

L'un $\mathcal{T}$ est la demi force vive du système dans son mouvement relatif par rapport à $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$;

L'autre $\mathcal{G}$, est le demi produit du moment d'inertie du système à l'instant considéré, par rapport à l'axe instantané Ω du système $\Omega\xi\eta\zeta$ dans son mouvement autour de Ω, par le carré de la rotation instantanée ω;

Le 3e $\mathcal{V}$ est le produit de la rotation instantanée ω par le moment de la quantité de mouvement du système par rapport à Ω (dans le mouvement relatif par rapport à $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$) et par le cosinus de l'angle de ces deux grandeurs.

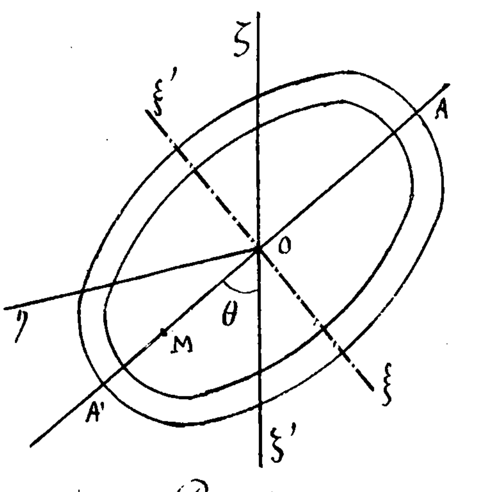
Ainsi $$T_3 = \mathcal{T} + \mathcal{G} + \mathcal{V}.$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT_3}{\partial q'}\right) = \frac{\partial(U+N+T_3)}{\partial q}.$$

Application. — I. — Un tore pesant et homogène T est mobile autour d'un diamètre équatorial $\xi o \xi'$ horizontal ; ce diamètre est animé d'une rotation uniforme ω autour de la verticale du centre O. — En un point M du diamètre équatorial perpendiculaire à $\xi o \xi'$ est placé un poids additionnel m. — Mouvement du tore autour du diamètre $\xi o \xi'$.(x)

(Agrégation — 1874)



Soit $OM = d$; A et C les moments d'inertie du tore par rapport à un diamètre équatorial et par rapport à l'axe de révolution.

Le mouvement sera défini par l'angle θ du rayon OM avec la verticale descendante.

On a :

$$2\mathcal{T} = (A + md^2)\theta'^2$$
$$2\mathcal{G} = \omega^2[A\cos^2\theta + C\sin^2\theta] + \omega^2 m d^2 \sin^2\theta$$
$$2\mathcal{V} = 0, \qquad \text{car } (\widehat{\omega, P}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$2T_3 = (A + md^2)\theta'^2 + \omega^2(C - A + md^2)\sin^2\theta + \omega^2 A$$

L'origine des axes est fixe, donc $N = 0$

La force active se réduit au poids additionnel, car O est le

(x) Gilbert. — Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif, Loc. cit. p. 276.

centre de gravité du tore.

La fonction de forces est donc:

$$U = -mg\, d \cos\theta.$$

L'équation de Lagrange qui résout le problème est:

$$(A + md^2)\theta'' - \omega^2 (C - A + md^2)\sin\theta\cos\theta = -mgd\sin\theta.$$

Il resterait à intégrer cette équation différentielle du 2e ordre.

II — Un corps solide de révolution est fixé par son centre de gravité, l'axe de révolution Gz est de plus assujetti à rester dans un plan fixe. Mouvement du solide par rapport aux objets terrestres, en tenant compte du mouvement de la terre (gyroscope de Foucault).

Traitons d'abord le problème par la première méthode en appliquant le théorème de Coriolis.

Soient $Gxyz$ les axes principaux d'inertie du solide, $Gx_1y_1z_1$ des axes fixes par rapport à la terre. Nous choisissons pour plan des x_1y_1 le plan dans lequel se meut Gz, et pour axe Gx_1 la projection sur ce plan du segment de rotation terrestre (ω) ou (GS): GS est la direction nord-sud de l'axe du monde. Nous prenons Gz_1 dirigé du même côté que GS par rapport au plan x_1Gy_1.

La position du solide dépend de deux paramètres, par exemple des deux angles d'Euler φ et ψ; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Par rapport à des axes de directions stellaires fixes et passant par le centre de la terre, la force active qui s'exerce sur chaque point M du solide est une grandeur $m(\gamma)$, proportionnelle à la masse de M et de direction fixe relativement à $Gx_1y_1z_1$. La force active relative aux axes terrestres, qui s'exerce sur le même point est égale à

$$m(\gamma) - m(\gamma_e) - m(\gamma_c).$$

La grandeur (γ_c) est sensiblement invariable (relativement aux axes $Gx_2y_2z_2$) pour les différents points du solide et quelle que soit leur position. Nous pouvons donc poser:

$$m(\gamma) - m(\gamma_c) = m(g),$$

la grandeur (g) ne variant pas par rapport aux axes terrestres.

Rendons-nous compte de cette dernière approximation. Pour cela considérons des axes de directions stellaires fixes et passant par G; la force active relative à ces axes qui s'exerce sur M est:

$$m(\gamma) - m(\Gamma_c),$$

en appelant (Γ_c) l'accélération de G dans le mouvement de la terre autour de son centre: On peut poser: $m(\gamma) - m(\Gamma_c) = m(g)$, la grandeur (g) étant invariable par rapport à $Gx_1y_1z_1$.

D'ailleurs, la force active, relative à ces derniers axes, qui s'exerce sur M est égale à

$$m(g) - m(j'_e) - m(j_c);$$

la grandeur (j_c) est la même que plus haut ; quant à la grandeur (j'_e), elle se laisse définir ainsi : Soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur GS ; (j_e) est dirigée suivant MQ et égale à $\omega^2 MQ$. Nous négligeons donc un terme de l'ordre de ω^2.

Évaluons maintenant $-(F_c) = -m(j_c)$. Si on construit une grandeur GM équipollente à la vitesse (V_r) du point M (relative aux axes $G x_1 y_1 z_1$), on sait que la grandeur $\left(\frac{j_c}{2}\right)$ est égale à la vitesse qu'aurait le point M en tournant autour de GS avec la vitesse angulaire ω. Désignons donc par X_c Y_c, Z_c les composantes de $-(F_c)$ suivant les axes $Gxyz$, par a, b, c, et par v_x, v_y, v_z les composantes de (ω) et de (V_r) suivant les mêmes axes, enfin par p, q, r les composantes de la rotation instantanée du solide. Il vient :

$$X_c = -2m(bv_z - cv_y)$$
$$Y_c = -2m(cv_x - av_z)$$
$$Z_c = -2m(av_y - bv_x)$$

avec

$$v_x = qz - ry \qquad V_y = px - qz, \qquad V_z = qy - rx.$$

Donc

$$X_c = -2m\left[b(py - qx) - c(rx - pz)\right]$$
$$Y_c = -2m\left[c(qz - ry) - a(py - qx)\right]$$
$$Z_c = -2m\left[a(rx - pz) - b(qz - ry)\right].$$

Ceci posé, nous savons que le travail de la force centrifuge composée est nul ; il en est de même du travail des forces (g), qui admettent une résultante passant par G. La force vive du solide est donc constante pendant le mouvement :

(1) .... $A(p^2 + q^2) + Cr^2 = h.$

D'autre part les réactions du plan x, Gy, rencontrent toutes l'axe Gz. Écrivons donc la troisième équation d'Euler :

$$C\frac{dr}{dt} = N;$$

ici $$N = \Sigma(xY_c - yX_c),$$

et si on tient compte de ce fait que les axes $Gxyz$ sont axes principaux d'inertie, on trouve :

$$N = -2aq\,\Sigma mx^2 + 2bp\,\Sigma my^2 = C(bp - aq).$$

Donc : (2) $$\frac{dr}{dt} = bp - aq.$$

Introduisons maintenant les variables φ et ψ. Si λ désigne l'angle xGS, on a :

$$a = \omega \sin\lambda \sin\varphi + \omega\cos\lambda\cos\psi\cos\varphi$$
$$b = \omega\sin\lambda\cos\varphi - \omega\cos\lambda\cos\psi\sin\varphi$$
$$c = \omega\sin\lambda .$$

D'ailleurs, θ étant égal à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\cos\theta$ sont nuls, $\sin\theta = 1$; d'où il résulte :

$$p = \psi'\sin\varphi, \qquad q = \psi'\cos\varphi, \qquad r = \varphi'.$$

L'équation (2) devient ainsi

$$\frac{dr}{dt} = -\omega\cos\lambda\cos\psi\frac{d\psi}{dt}$$

ou bien

$$r = \frac{d\varphi}{dt} = -\omega\cos\lambda\sin\psi + K$$

K désignant une constante. Quant à l'équation (1) elle donne :

$$A\psi'^2 + C\varphi'^2 = h;$$

la question est résolue par quadratures. On a :

$$A\psi'^2 + C\left(K - \omega\cos\lambda\sin\psi\right)^2 = h$$

ou bien :

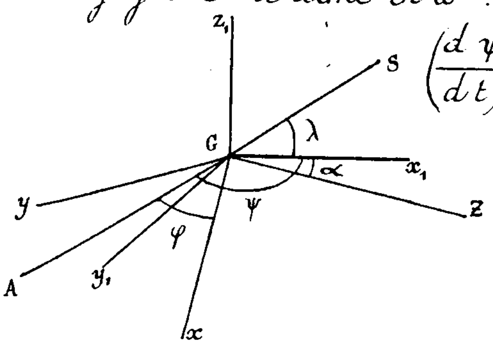
$$dt = \frac{A\,d\psi}{\sqrt{h - C\left(K - \omega\cos\lambda\sin\psi\right)^2}},$$

et de même :

$$d\varphi = \frac{(\omega\cos\lambda\sin\psi + K)\,d\psi}{\sqrt{h - C(\omega\cos\lambda\sin\psi - K)^2}}$$

Si on pose $\sin\psi = u$, t et φ sont exprimés en fonction de u par des quadratures elliptiques ; $\sin\psi$ est une fonction doublement périodique de t.

La discussion s'effectue sans difficulté. — Si on suppose qu'au début du mouvement $\frac{d\varphi}{dt}$ soit positif et très grand, K est positif et très grand, et il vient en négligeant le terme en ω^2 :



$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = L^2\sin\psi + C^{te},$$

avec $L^2 = \frac{2KC\omega\cos\lambda}{A}$. D'autre part, si α désigne l'angle x_1Gz, on a : $\alpha = \psi - \frac{\pi}{2}$; donc :

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = L^2\cos\alpha + C^{te}$$

c'est-à-dire que l'axe Gz est animé d'un mouvement pendulaire autour de Gx_1. Dans la réalité, par suite de la résistance de l'air et des frottements, l'axe Gz s'arrête au bout d'un certain temps en Gx_1, c'est-à-dire suivant la projection, sur le plan fixe x_1Gy_1, de l'axe du monde.

Employons maintenant la méthode de M. Gilbert. Calculons la demi-force vive T_3 du système dans son mouvement par rapport à des axes Σ de directions stellaires fixes et passant par G. Nous avons :

$$T_3 = T + \mathcal{G} + \mathcal{V}$$

Ici T est la demi-force vive du solide par rapport aux axes $Gx_1 y_1 z_1$:

$$2T = A(p^2+q^2) + Cr^2 = A\psi'^2 + C\varphi'^2.$$

$\mathcal{G}$ est le demi produit par ω^2 du moment d'inertie du solide par rapport à $G\mathcal{S}$. L'équation de l'ellipsoïde d'inertie est :

$$A(x^2+y^2) + Cz^2 = 1 ;$$

si u désigne l'angle de $G\mathcal{S}$ et de GZ et ρ^2 l'inverse du moment d'inertie cherché, on a :

$$A\sin^2 u + B\cos^2 u = \frac{1}{\rho^2}$$

D'autre part, on trouve aussitôt :

$$\cos u = \sin\psi \cos\lambda$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho^2} = A(1-\cos^2\lambda\sin^2\psi) + C\cos^2\lambda\sin^2\psi$$

par suite

$$2\mathcal{G} = \omega^2(C-A)\cos^2\lambda\sin^2\psi + \omega^2 A.$$

Calculons enfin $\mathcal{V}$; si (M) désigne le moment des quantités de mouvement relatif du solide par rapport à G, et β l'angle de (M) et de $G\mathcal{S}$, on a :

$$\mathcal{V} = \omega M \cos\beta.$$

Mais les composantes de (M) suivant Gx, Gy, Gz sont Ap, Aq, Cr. Calculons les cosinus directeurs ξ, η, ζ de $G\mathcal{S}$ par rapport à Gx, Gy, Gz ; on trouve (en tenant compte de ce fait que $\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\xi = \cos\lambda\cos\psi\cos\varphi + \sin\lambda\sin\varphi$$
$$\eta = -\cos\lambda\cos\psi\sin\varphi + \sin\lambda\cos\varphi$$
$$\zeta = \cos\lambda\sin\psi$$

D'ailleurs :

$$\mathcal{V} = A(p\xi + q\eta) + Cr\zeta$$

d'où, en remplaçant p par $\psi'\sin\varphi$, q par $\psi'\cos\varphi$, r par φ' :

$$\mathcal{V} = A\psi'\sin\lambda + C\varphi'\cos\lambda\sin\psi.$$

En définitive :

$$2T_3 = A\psi'^2 + C\varphi'^2 + 2\omega\left[A\psi'\sin\lambda + C\varphi'\cos\lambda\sin\psi\right] + \omega^2(C-A)\cos^2\lambda\sin^2\psi + \omega^2 A$$
$$= 2(T_2 + T_1 + T_0).$$

D'ailleurs, la force active (relative aux axes Σ) qui s'exerce sur chaque point M du solide est $m(g)$; ici $U + \mathcal{N}$ est donc nul.

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_3}{\partial \varphi'}\right) = \frac{\partial T_3}{\partial \varphi}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_3}{\partial \varphi'}\right) = \frac{\partial T_3}{\partial \psi}$$

La première donne

$$\frac{d}{dt}\left[C\varphi' + \omega C \cos\lambda \sin\psi\right] = 0$$

ou bien :

$$\varphi' = -\omega \cos\lambda \sin\psi + K$$

Nous pouvons de plus substituer à la 2ᵉ équation l'équation des forces vives généralisée (voir page 89) :

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = Q_1 q_1' + Q_2 q_2' + \ldots\ldots + Q_K q_K' - \frac{\partial T}{\partial t},$$

qui donne ici :

$$T_2 - T_0 = A\psi'^2 + C\varphi'^2 + \omega^2 (C-A)\cos^2\lambda \sin^2\psi + \omega^2 A = h.$$

Si nous négligeons le terme en $\omega^2 (C-A)\cos^2\lambda \sin^2\psi$, (ce qui revient à négliger les forces $m(\gamma e)$ considérées plus haut), on retrouve bien l'équation :

$$A\psi'^2 + C\varphi'^2 = C^{te}.$$

Quand on conserve ce terme, t et φ sont encore donnés en fonction de ψ par deux quadratures elliptiques.

11ᵉ Leçon

Application des équations de Lagrange à l'étude des petits mouvements.

Lorsque les liaisons d'un système sans frottement sont indépendantes du temps et que les forces actives qui s'exercent sur lui admettent une fonction de forces U, on sait que les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre sont :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ldots\ldots \frac{\partial U}{\partial q_K} = 0,$$

($q_1, q_2, \ldots q_K$ sont les K paramètres indépendants dont dépend la position du système).

Ces égalités sont des conditions nécessaires pour que U présente un maximum ou un minimum. Nous allons démontrer que si la fonction de forces est maxima, l'équilibre est stable. Ce théorème est dû à Lejeune-Dirichlet.

Nous pouvons toujours supposer que les valeurs des paramètres qui correspondent à la position d'équilibre sont $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, …. $q_K = 0$, et que U est nul pour ces valeurs. L'équilibre est stable, par définition, si pour des conditions initiales suffisamment voisines des conditions d'équilibre, le système s'écarte de cette position d'équilibre d'aussi peu qu'on le veut. D'une façon précise, soient q_i^0, $q_i'^0$ les conditions initiales dans lesquelles on abandonne le système et ε un nombre donné à l'avance aussi petit qu'on veut : on peut trouver un nombre η assez petit pour que les q_i^0, $q_i'^0$ étant inférieurs à η en valeur absolue, les $|q_i|$ restent dans toute la durée du mouvement inférieurs à ε.

Cette définition rappelée, admettons que U soit nul et maximum pour les valeurs $q_1 = 0, \dots q_K = 0$; je dis que l'équilibre est stable.

En effet, puisque U est maximum, on peut trouver un nombre ε assez petit pour que U soit négatif quand les $|q_i|$ ne dépassent pas ε et ne sont pas tous nuls ; tous les nombres inférieurs à ε jouissent d'ailleurs de la même propriété :

$$U < 0 \qquad \text{si } |q_i| \leq \varepsilon,$$
$$U = 0 \qquad \text{si } q_1 = q_2 = \dots\dots = q_K = 0 .$$

Donnons en particulier à q_i les valeurs $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, et aux autres paramètres q_j toutes les valeurs de module au plus égal à ε, et soit A_i la plus grande valeur de U pour ces valeurs des q ; A_i est un nombre essentiellement négatif. Soit de plus A le plus grand des nombres A_i : A est négatif et différent de zéro. D'après cela, on a nécessairement :

$$U \leq A$$

quand un des paramètres q_i atteint l'une des valeurs $\pm\varepsilon$, les autres paramètres n'étant pas de module supérieur à ε.

Écrivons d'autre part l'équation des forces vives

$$T = U + \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 - U_0 = U + h .$$

On peut toujours trouver un nombre η assez petit pour que, les $|q_i^0|$ et les $|q_i'^0|$ ne dépassant pas η, la constante $h = \left(\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 - U_0\right)$ soit inférieure à $-A$, c'est-à-dire qu'on ait : $h + A < 0$. Dans ces conditions les $|q_i|$ restent dans toute la durée du mouvement inférieur à ε ; autrement, un au moins des paramètres q_i, atteindrait, à un instant t, l'une des valeurs $\pm\varepsilon$, les modules des autres paramètres ne dépassant pas ε et on aurait alors :

$$U + h \leq A + h < 0$$

donc

$$T < 0$$

ce qui est impossible.

L'équilibre est donc stable. C. Q. F. D. Ajoutons que la force vive du système reste elle-même inférieure à h, quantité qui peut être choisie aussi petite qu'on veut.

Étude des petites oscillations d'un système. — Les équations de Lagrange sont alors commodes pour étudier les petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable. La méthode que nous allons indiquer s'applique d'ailleurs au cas où l'équilibre est instable mais seulement pour une durée très-petite, à moins qu'on ne sache à l'avance que, pour les conditions initiales données, le système s'écarte très-peu de sa position d'équilibre.

Plaçons donc le système dans des conditions initiales très-voisines des conditions de l'équilibre stable. Les paramètres q_i variant très peu dans le mouvement, on peut regarder, dans la force vive

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} q'_i q'_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

les coefficients a_{ij} comme des constantes α_{ij} : α_{ij} désigne la valeur de la fonction a_{ij} pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$. De même, développons la fonction des forces U par rapport aux puissances des q_i :

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots\dots$$

$U_0 = 0$; U_1, U_2 .... sont des fonctions homogènes du premier degré, du second degré, etc ; U_1 est nul identiquement par hypothèse (puisque $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$). Nous réduirons donc U au terme :

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \beta_{ij} q_i q_j \qquad (\beta_{ij} = \beta_{ji})$$

Ces approximations reviennent à considérer les q_i et les q'_i comme des infiniment petits du premier ordre et à négliger, devant ces quantités, les quantités de la forme $q_i q_j$, $q'_i q_j$, $q'_i q'_j$, et les quantités d'ordre supérieur. En effet :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_{j=1}^{j=K} a_{ij} q'_j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_{j=1}^{j=K} \alpha_{ij} q''_j + \varepsilon \, ; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \varepsilon' \, ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{j=K} \beta_i q_j + \eta \, ;$$

ε, ε' et η étant négligeables devant les q_j d'après la convention précédente. Nous pouvons donc substituer à l'équation de Lagrange

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

l'égalité approchée

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=K} \alpha_{ij} q''_j = \sum_{j=1}^{j=K} \beta_{ij} q_j$$

Autrement dit, on peut, dans les équations de Lagrange, considérer les a_{ij} (coefficients de T) comme des constantes α_{ij}, et réduire U à U_2. La méthode ne serait en défaut que si le déterminant δ des α_{ij} était nul ; il conviendrait alors de changer les paramètres q_j.

Ceci posé, l'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{j=1}^{j=K} \alpha_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{j=K} \beta_{ij} q_j$$

Introduisons la fonction

$$s = \frac{1}{2}\sum_{ij} \alpha_{ij} q_i q_j ;$$

nous aurons :

$$\sum_{j=1}^{j=K} \alpha_{ij} q_j = \frac{\partial s}{\partial q_j}$$

Donc l'équation (2) équivaut à la suivante :

$$(3) \quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{ds}{dq_i} = \frac{\partial U_2}{\partial q_i},$$

s et U_2 étant deux fonctions homogènes du 2^e degré par rapport aux q_i.

Les équations (3) forment un système de n équations linéaires à coefficients constants. On a donc :

$$q_i = A_1^i c^{\alpha_1 t} + A_2^i c^{\alpha_2 t} + \dots\dots\dots\dots ,$$

les exposants étant réels ou imaginaires.

Il convient d'observer que, même si l'équation caractéristique du système (3) a des racines multiples, les intégrales ne contiennent le temps qu'en exponentielles

En effet, étant données deux formes quadratiques s et U_2, dont l'une au moins renferme tous les carrés, on peut toujours par une même substition linéaire faire disparaître les rectangles des deux formes. Or s renferme tous les carrés ; autrement, en annulant tous les q sauf un seul, on annulerait s, et la force vive T serait nulle (pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$), toutes les vitesses n'étant pas nulles.

On pourra donc, par une même substitution linéaire ramener s et U_2 aux formes :

$$s = \frac{1}{2}\sum_i a_i q_i^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\sum_i b_i q_i^2 ,$$

et les équations (3) deviennent :

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \beta_i q_i$$

Si on suppose l'équilibre stable, les q_i ne peuvent entrer que sous des signes trigonométriques. En effet, U_2 est négatif pour les petites valeurs des q_i ; donc les β_i sont négatifs $\beta_i = -\gamma_i^2$, et on a :

$$q_i = A_i \sin \gamma_i t + B_i \cos \gamma_i t .$$

Equation caractéristique du système (3). — Cherchons directement l'équation caractéristique du système

$$(3) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\partial s}{\partial q_i} = \frac{\partial U_2}{\partial q_i}$$

Pour cela, je multiplie chaque équation (3) par une constante λ_i et j'ajoute membre à membre. Il vient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum \lambda_i \frac{\partial s}{\partial q_i} = \sum \lambda_i \frac{\partial U_2}{\partial q_i}\ .$$

Or on a :

$$\sum \lambda_i \frac{\partial s}{\partial q_i} = \sum q_i \frac{\partial s}{\partial \lambda_i}\ ;$$

de même :

$$\sum \lambda_i \frac{\partial U_2}{\partial q_i} = \sum q_i \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i}$$

$\frac{\partial s}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i}$ étant les dérivées de s et de U_2 après qu'on a remplacé les q_i par les λ_i. On peut donc écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i \frac{\partial s}{\partial \lambda_i}\, q_i = \sum_i \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i}\, q_i$$

Si nous posons :

$$\sum \frac{\partial s}{\partial \lambda_i}\, q_i = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i}\, q_i = Q\,,$$

L'équation à intégrer devient :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \mu Q$$

Si je peux trouver K valeurs distinctes de μ (auxquelles correspondent K systèmes de valeur λ_i), je connaîtrai 2 K intégrales distinctes du système (3) qui se trouvera ainsi intégré.

Or les indéterminées λ_i, μ doivent satisfaire à la condition :

$$\sum \left(\mu \frac{\partial s}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i}\right) q_i = 0\,,$$

c'est-à-dire aux K équations

$$\mu \frac{\partial s}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots K)\ .$$

Mais

$$s = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\,\lambda_i\,\lambda_j\,,$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}\,\lambda_i\,\lambda_j\ ;$$

il vient donc

$$\mu \sum_j a_{ij}\,\lambda_j - \sum b_{ij}\,\lambda_j = 0$$

ou bien

$$(\mu a_{i1} - b_{i1})\lambda_1 + (\mu a_{i2} - b_{i2})\lambda_2 + \ldots + (\mu a_{iK} - b_{iK})\lambda_K = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots K)$$

Pour que ces K équations, linéaires et homogènes par rapport aux λ_i, admettent des solutions où tous les λ_i ne soient pas nuls, il faut et il suffit que le déterminant Δ de ces équations soit nul ; on forme ainsi une équation en μ de degré K ; c'est l'équation caractéristique cherchée. Si ses K racines sont distinctes, on obtient K fonctions Q distinctes :

$$Q = \sum \lambda_i \frac{\partial s}{\partial q_i}$$

et le système (3) est intégré. Si l'équation caractéristique admet une racine double μ_1, le système d'équations qui définit les rapports des λ devient indéterminé, et à cette racine double on peut faire correspondre deux fonctions Q distinctes, Q_1 et Q'_1, et on a :

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} = \mu\, Q_1$$

$$\frac{d^2 Q'_1}{dt^2} = \mu\, Q'_1$$

D'une manière générale, si μ_1 est racine multiple d'ordre i, tous les mineurs d'ordre $i-1$ du déterminant Δ sont nuls pour $\mu = \mu_1$, et à cette racine μ_1 on peut faire correspondre i fonctions Q distinctes. Le système (3) se trouve ainsi intégré dans tous les cas.

Dans la pratique, on pourra commencer par faire disparaître les rectangles dans s seulement ; s étant ramené à la forme

$$s = \frac{1}{2} \sum a_i q_i^2,$$

on aura les équations :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i \lambda_i q_i = \sum_i \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i} q_i$$

et on posera :

$$\sum_i \lambda_i q_i = \frac{1}{\mu} \sum_i \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i} = Q \quad ,$$

d'où les conditions :

$$\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_2} = \dots\dots = \frac{1}{\lambda_K} \frac{\partial U_2}{\partial \lambda_K} = \mu$$

Si, par exemple, K est égal à 3, les équations précédentes définissent les axes de la quadrique :

$$U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1$$

Si l'équation en μ admet une racine double, la surface est de révolution ; il y a une infinité d'axes, donc de valeurs $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, qui correspondent à cette valeur de μ. Si l'équation en μ a une racine triple, on peut prendre λ_1, λ_2, λ_3 arbitrairement.

Applications. — I. Étude du mouvement d'un pendule sphérique dans le voisinage de sa position d'équilibre. — Nous ne pouvons définir la position du point M sur la sphère par sa longitude φ et sa latitude θ. En effet, φ est une fonction du point x, y, z de la sphère qui devient indéterminée aux points le plus haut et le plus bas de la Sphère. Si on forme la force vive :

$$T = \frac{m}{2} R^2 \left(\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2\right),$$

le déterminant δ des α_{ij} (voir page 133) est ici (pour $\theta = 0$ et φ quelconque)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et la méthode ne saurait s'appliquer.

Nous prendrons pour origine des axes le centre o de la sphère, pour axe des z la direction de la pesanteur, et pour paramètres les coordonnées x et y. Nous avons :

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

on trouve aussitôt :

$$T = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2 + \frac{(xx' + yy')^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right),$$

d'où

$$s = \frac{m}{2}\left(x'^2 + y'^2\right)$$

D'autre part,

$$U = mg\,(z - R) = U_2 + \mathcal{E}$$

Un calcul bien simple montre que pour $x = 0, y = 0, (z = +R)$, on a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-1}{R}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0 .$$

Donc

$$U_2 = -\frac{mg}{2R}\left(x^2 + y^2\right).$$

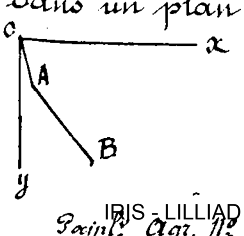
D'où les deux équations :

$$x'' = -\frac{g}{R}x, \quad y'' = -\frac{g}{R}y,$$

qui déterminent x et y :

$$x = A\cos t\sqrt{\frac{g}{R}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \text{et} \qquad y = A'\cos t\sqrt{\frac{g}{R}} + B'\sin t\sqrt{\frac{g}{R}}$$

II — Soient deux barres OA, AB homogènes et pesantes, de densité ρ et ρ', de longueurs l et l'. La première est fixée par son extrémité O et s'articule en A avec AB. Mouvement du système abandonné sans vitesse dans un plan vertical, dans le voisinage de sa position d'équilibre stable.



Le système se meut dans le plan initial xoy : oy est la direction de la pesanteur. Appelons θ l'angle de OA et φ l'angle de OB avec oy. La fonction de forces U est ici :

$$U = g\left[\rho\frac{l^2}{2}\cos\theta + \rho' l'\left(l\cos\theta + \frac{l'}{2}\cos\varphi\right)\right] + C^{te}$$

La position d'équilibre stable correspond aux valeurs $\theta = 0$, $\varphi = 0$ des deux paramètres.

Calculons la force vive ; on a pour OA :

$$\sum m v^2 = \int_0^l \rho r^2 \theta'^2 dr = \rho\frac{l^3}{3}\theta'^2 ;$$

et pour AB :

$$\sum m v^2 = \int_0^{l'} \rho'\left[l^2\theta'^2 + 2rl\cos(\theta-\varphi)\theta'\varphi' + \frac{l'^2}{3}\varphi'^2\right]dr'$$

$$= \rho' l^2 l'\theta'^2 + \rho' l l'^2\cos(\theta-\varphi)\theta'\varphi' + \rho'\frac{l'^3}{3}\varphi'^2 .$$

Par suite :

$$2T = l^2\left(\rho\frac{l}{3} + \rho' l'\right)\theta'^2 + \rho' l l'^2\cos(\theta-\varphi)\theta'\varphi' + \rho'\frac{l'^3}{3}\varphi'^2 .$$

Les expressions de s et de U_2 seront donc ici :

$$2s = l^2\left(\rho\frac{l}{3} + \rho' l'\right)\theta^2 + \rho' l l'^2\theta\varphi + \rho'\frac{l'^3}{3}\varphi^2$$

et

$$U_2 = -\frac{g}{2}\left[l\left(\rho\frac{l}{2} + \rho' l'\right)\theta^2 + \rho'\frac{l'^2}{2}\varphi^2\right].$$

Le mouvement approché sera déterminé par les équations

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{l}{g}\left[1 - \frac{\rho l}{3\rho l + 6\rho' l'}\right]\theta'' + \frac{\rho' l'^2}{g(\rho l + 2\rho' l')}\varphi'' = -\theta \\ &\frac{l}{g}\theta'' + \frac{2l'}{3g}\varphi'' = -\varphi \end{aligned}\right.$$

système de la forme :

$$A\theta'' + B\varphi'' = -\theta.$$
$$B\theta'' + C\varphi'' = -\varphi.$$

Cherchons son équation caractéristique ; multiplions la première équation par λ, la seconde par λ', et déterminons λ et λ' de façon qu'on ait :

$$\frac{A\lambda + B'\lambda'}{\lambda} = \frac{B\lambda + C\lambda'}{\lambda'} = \mu \quad ;$$

la valeur de s est donnée par l'égalité

$$(A-\mu)(C-\mu) - BB' = 0 .$$

B et B' sont de même signe ; les deux valeurs μ_1 et μ_2 de μ sont réelles extérieures aux deux nombres positifs A et C, et de plus positives ; en effet $AC - BB'$ est positif, autrement la force vive T s'annulerait sans que toutes les vitesses fussent nulles. Un calcul direct montre d'ailleurs qu'on a

$$AC - BB' = \frac{l l'}{3g^2(\rho l + 2\rho' l')}\left(\frac{4}{3}\rho l + \rho' l'\right)$$

Nous pouvons prendre comme multiplicateurs λ et λ' correspondants les nombres

$$\lambda = \mu - C = \mu - \frac{2l'}{3g}, \qquad \lambda' = B = \frac{\rho' l'^2}{g(\rho l + 2\rho' l')}$$

et si nous posons

$$Q_1 = (\mu_1 - C)\,\theta + B\varphi$$
$$Q_2 = (\mu_2 - C)\,\theta + B\varphi\ ,$$

ou encore (en introduisant la variable $\psi = B\varphi - C\theta$)

$$Q_1 = \mu_1\theta + \psi, \qquad Q_2 = \mu_2\theta + \psi\ ,$$

nous savons que Q_1 et Q_2 sont de la forme

$$Q_1 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t$$
$$Q_2 = a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t\ ;$$

dans ces égalités, a_1, b_1, a_2, b_2 sont des constantes arbitraires, $\omega_1 = \sqrt{\mu_1}$, $\omega_2 = \sqrt{\mu_2}$

De là résultent pour θ et ψ (en divisant toutes les constantes par $(\mu_1 - \mu_2)$) les expressions :

$$\theta = a_1\cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t - a_2\cos\omega_2 t - b_2\sin\omega_2 t$$
$$\psi = \omega_1^2\,(a_2\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t) - \omega_2^2\,(a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t)\ .$$

Si, au temps $t = 0$, le système est abandonné sans vitesse, les constantes b_1 et b_2 doivent satisfaire aux deux conditions

$$\omega_1\ b_1 - \omega_2\ b_2 = 0$$
$$\omega_1^2\omega_2\, b_2 - \omega_2^2\,\omega_1\, b_1 = 0$$

et, comme ω_1^2 n'est pas égal à ω_2^2, b_1 et b_2 sont nuls, il vient donc

$$\theta = a_1\ \cos\omega_1 t - a_2\ \cos\omega_2 t$$
$$\psi = \omega_1^2 a_2 \cos\ \omega_2 t - \omega_2^2 a_1 \cos\omega_1 t\ ,$$

ou encore, en appelant θ_0 et ψ_0 les valeurs initiales de θ et ψ,

$$(\beta)\ \begin{cases} \theta = \dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\Big[(\theta_0\,\omega_1^2 + \psi_0)\cos\omega_1 t - (\theta_0\,\omega_2^2 + \psi_0)\cos\omega_2 t\Big] \\[2ex] \psi = \dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\Big[\omega_1^2(\theta_0\omega_2^2 + \psi_0)\ \cos\omega_2 t - \omega_2^2(\theta_0\omega_1^2 + \psi_0)\cos\omega_1 t\ \Big]. \end{cases}$$

θ_0 et ψ_0 étant très petits, θ et ψ restent très petits. Si le rapport $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ est commensurable, le mouvement est périodique.

Si on suppose $\rho = \rho' = 1$, et $l = l'$, les équations (α) deviennent

$$\frac{8}{3}\theta'' + \varphi'' = \frac{-3g}{l}\,\theta$$
$$\theta'' + \frac{2\varphi''}{3} = -\frac{g}{l}\,\varphi\ ,$$

et les nombres μ_1, μ_2 sont les racines de l'équation :

$$\mu^2 - \frac{14\,l}{9g}\,\mu + \frac{7\,l}{27g^2} = 0\ , \quad \text{d'où}$$

$$\mu_1 = \frac{l}{9g}(7 + 2\sqrt{7}), \qquad \mu_2 = \frac{l}{9g}(7 - 2\sqrt{7})$$

Il suffit de remplacer ω_1 et ω_2 par $\sqrt{\mu_1}$ et $\sqrt{\mu_2}$ dans les égalités (β) pour avoir θ et ψ : dans ce cas particulier, $\psi = \dfrac{l}{3g}(\varphi - 2\theta)$.

12e Leçon

Equations canoniques. Théorie du dernier multiplicateur.

Le mouvement d'un système qui dépend de K paramètres est déterminé par les K équations de Lagrange
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\dots K).$$

Ces équations, qui sont linéaires en $q''_1, q''_2, \dots q''_K$, peuvent être résolues par rapport à ces variables ; nous l'avons démontré en établissant que le déterminant principal des expressions $\frac{\partial T_2}{\partial q'_i}$, linéaires et homogènes en $q'_1, q'_2, \dots q'_K$, n'est pas nul (T_2 est la partie homogène et du second degré de $T=T_2+T_1+T_0$).

Les équations de Lagrange forment un système de K équations du 2e ordre portant sur les K fonctions $q_1, q_2, \dots q_K$ de t. Mais ce système est équivalent au système des 2 K équations

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt}=q'_i, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\dots K),$$

équations du premier ordre où figurent les 2 K fonctions q_i, q'_j de t. Ces équations (1) résolues par rapport aux $\frac{dq'_i}{dt}$ s'écriraient :
$$\frac{dq_i}{dt}=q'_i, \qquad \frac{dq'_i}{dt}=f_i(t, q_1, q_2, \dots q_K, q'_1, q'_2, \dots q'_K), \qquad (i=1,2,\dots K).$$

Mais il faudra, dans chaque cas, effectuer cette résolution.

Poisson a indiqué un changement de variables qui permet de substituer aux équations (1) un système de 2 K équations du premier ordre qui se trouve tout résolu par rapport aux dérivées qui y figurent.

La méthode consiste à remplacer les variables $q'_1, q'_2 \dots q'_K$ par des variables nouvelles $p_1, p_2, \dots p_K$ liées aux précédentes par les K relations :
$$(2) \qquad p_i=\frac{\partial T}{\partial q'_i} \qquad (i=1,2,\dots K).$$

Les équations (2) linéaires en $q'_1, q'_2, \dots q'_K$, peuvent être résolues par rapport à ces variables, puisque le déterminant des expressions $\frac{\partial T_2}{\partial q'_i}$ n'est pas nul. On tirera donc des équations (2) les q'_i en fonction des p_i sous la forme :
$$(2') \qquad q'_i=B^i(t, q_1, q_2 \dots q_K)+\sum_{j=1}^{j=K} p_j A^i_j(t, q_1, q_2, \dots q_K).$$

En portant ces valeurs des q'_i dans les équations (1) on obtiendra 2 K équations du premier ordre en t, p_i, q_i.

Ces 2K équations se trouvent résolues par rapport aux $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$. En effet elles peuvent s'écrire :

$$(3) \quad \frac{dq_i}{dt} = q_i', \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots K).$$

Dans ces équations, il faut remplacer partout $q_1', q_2', \ldots q_K'$ par leurs valeurs tirées de (2'). Mais le fait remarquable, c'est qu'après cette substitution les seconds membres des équations (3) s'expriment à l'aide des Q_i et des dérivées partielles d'une même fonction $K(t, q_1, q_2, \ldots q_K, p_1, p_2, \ldots p_K)$.

Posons en effet :

$$K = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \ldots + p_K q_K' - T$$

La quantité K peut être regardée comme une fonction des variables $t, q_1, q_2, \ldots q_K, q_1', q_2', \ldots q_K', p_1, p_2, \ldots p_K$ liées par les équations (2).

Laissons t constant dans K, $t = t_0$, et donnons aux q_i, q_i', p_i des variations δq_i, $\delta q_i'$, δp_i compatibles avec les équations (2) (pour cette valeur de t). On aura

$$\delta K = \sum_i (p_i \delta q_i' + q_i' \delta p_i) - \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \right),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (2):

$$\delta K = \sum_i q_i' \delta p_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i.$$

D'autre part, appelons (K) ce que devient la fonction K quand on y a remplacé les q' en fonction des p, q et de t. Laissons-y t constant, $t = t_0$, et donnons aux p, q des variations δp, δq. Il vient :

$$\delta(K) = \sum_i \frac{\partial (K)}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_i \frac{\partial (K)}{\partial q_i} \delta q_i$$

Or $\delta(K)$ est identique à δK pour des valeurs arbitraires des δp, δq. Cela exige qu'on ait :

$$q_i' = \frac{\partial (K)}{\partial p_i}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial (K)}{\partial q_i}.$$

Ces dernières équations sont donc des conséquences des équations (2).

De là résulte cette conclusion : Les équations (3) peuvent s'écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \end{cases}$$

en posant

$$K = \sum p_i q_i' - T.$$

et en admettant qu'on a remplacé dans K les q' en fonction des p, q et de t d'après les relations :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}.$$

Ces équations (4) sont dites équations canoniques

Cas où les liaisons sont indépendantes du temps. — Nous avons dans ce cas :

$$\sum p_i q'_i = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i = 2T,$$

car T est homogène et du 2e degré en $q'_1, q'_2, \dots q'_K$; donc

$$K = 2T - T = T$$

Désignons par (T) la fonction T où on a remplacé les q' en fonction des p, q. Les équations canoniques s'écrivent

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (T)}{\partial q_i} + Q_i$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (T)}{\partial p_i}.$$

Les p_i sont des fonctions linéaires et homogènes des q'_i et réciproquement $(T) = K$ est une fonction homogène et du second degré par rapport aux p_i. On a à la fois :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}, \qquad q'_i = \frac{\partial (T)}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial (T)}{\partial q_i}$$

Inversement, si (K) est une fonction homogène et du second degré en $p_1, p_2, \dots p_K$, les liaisons sont indépendantes du temps. En effet les égalités

$$q'_i = \frac{\partial (K)}{\partial p_i}$$

nous montrent que les p_i sont des fonctions linéaires et homogènes des q'_i ; par suite la fonction :

$$T = \sum p_i q'_i - K$$

(où les p sont exprimés en fonction des q', q et de t) est une fonction homogène des q'_i. Ceci exige que T_1 et T_0 soient nuls, or T_0 est égal à

$$\sum m \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right]$$

et cette somme ne peut être nulle que si les $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ sont nuls identiquement, c'est-à-dire si les liaisons sont indépendantes du temps.

Cas où les liaisons dépendent du temps. — Décomposons T, comme nous l'avons fait déjà, en la somme des 3 termes :

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

On peut écrire :

$$K = \sum \left(\frac{\partial T_2}{\partial q'_i} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} \right) q'_i - T_2 - T_1 - T_0 \; ;$$

or

$$\sum_i \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} q'_i = 2T_2, \qquad \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i = T_1 .$$

Donc :

$$K = T_2 - T_0 .$$

T_2 est une forme quadratique des q', T_0 ne dépend que de q et de t. Dans T_2 on remplace les q' en fonction des p, et comme les q' sont linéaires, mais non plus homogènes, par rapport aux p, T_2 devient une fonction (T_2) du second degré en $p_1, p_2, \dots p_K$, mais non plus homogène.

On a ici :

$$p_i = \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_i}, \qquad q'_i = \frac{\partial (T_2)}{\partial p_i}, \qquad - \frac{\partial (T_2)}{\partial q_i} = \frac{\partial T_2}{\partial q_i} + \frac{\partial T_1}{\partial q_i} .$$

On voit, en définitive, que $(K) = (T_2) - T_0$ est un polynôme du second degré par rapport aux p, dont les coefficients dépendent de t et des q d'une façon quelconque.

Observons que les équations canoniques peuvent s'écrire :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (T_2)}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial (T_2)}{\partial q_i} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} + Q_i .$$

Dans le cas particulier où T_0 est une simple fonction de t, il est loisible de remplacer (K) par (T_2).

Cas où il existe une fonction de forces. — Supposons que $Q_1, Q_2, \dots Q_K$ soient les dérivées par rapport à $q_1, q_2, \dots q_K$ d'une même fonction U, qui peut d'ailleurs dépendre du temps, mais non des vitesses :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} (q_1, q_2, \dots q_K, t) .$$

Après l'introduction des variables p_i, la fonction U, indépendante des q'_i, est indépendante des p_i, et si on pose :

$$H = K - U,$$

les équations canoniques s'écrivent :

$$(5) \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = - \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\[2mm] \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} , \end{cases}$$

car $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{\partial K}{\partial p_i}$. Les seconds membres s'expriment ainsi à l'aide de la seule fonction H. Quand les liaisons dépendent du temps, U dépend en général du temps, ainsi que H. Quand les liaisons sont indépendantes du temps, $K = T$ et par suite :

$$H = (T) - U$$

(T) est alors une forme quadratique par rapport aux p_i qui ne dépend pas de t. Si d'autre part t ne figure pas dans U, H est une simple fonction des p_i. q_i :

$$H = \sum_{ij} p_i\, p_j\, A_{ij}\,(q_1, q_2, \cdots q_K) - U(q_1, q_2, \cdots q_K) .$$

Dans ce dernier cas, le théorème des forces vives fournit une intégrale du mouvement, à savoir l'intégrale :

$$T - U = h ,$$

ou bien

$$H = h .$$

Cette égalité doit être une conséquence des équations canoniques qui définissent le mouvement ; autrement dit, si dans H on remplace les p_i, q_i par un système d'intégrales quelconque $p_i(t)$, $q_i(t)$ des équations (5), la fonction $H_1(t)$ ainsi obtenue doit se réduire à une constante. Or calculons $\frac{dH_1}{dt}$;

$$\frac{dH_1}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) ,$$

ou bien, puisque les $p_i(t)$, $q_i(t)$ satisfont aux équations (5) :

$$\frac{dH_1}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv 0 ,$$

c'est ce qu'il nous fallait vérifier.

Remarque. — La transformation de Poisson est particulièrement simple dans le cas où T est de la forme :

$$2T = \sum_i A_i\,(q_1, q_2, \cdots q_K)\, q_i'^2 .$$

On a alors

$$p_i = A_i\, q_i' ,$$

et

$$2(T) = 2(K) = \sum_i \frac{p_i^2}{A_i} .$$

Inversement d'ailleurs, si (K) est de la forme

$$(K) = \frac{1}{2} \sum_i B_i\, p_i^2 ,$$

on a

$$q_i' = B_i\, p_i$$

et

$$2T = \sum \frac{q_i'^2}{B_i} ;$$

les liaisons sont alors indépendantes du temps, et par suite les B_i ne renferment pas t.

C'est ce qui se présente, par exemple, quand on étudie le mouvement d'un point libre rapporté à des coordonnées curvilignes orthogonales. Si ces coordonnées sont les coordonnées cartésiennes,

$$2T = m(x'^2+y'^2+z'^2),$$

$$p_1 = m x', \qquad p_2 = m y', \qquad p_3 = m z',$$

et

$$2T = \frac{1}{m}\left[p_1^2+p_2^2+p_3^2\right];$$

Si ces cordonnées sont les coordonnées polaires de l'espace, r, θ, φ, on sait que :

$$2T' = m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2\theta\, \varphi'^2),$$

donc

$$p_1 = m r', \quad p_2 = m r^2 \theta', \quad p_3 = m r^2 \sin^2\theta\, \varphi',$$

et

$$2(T) = \frac{1}{m}\left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \sin^2\theta}\right].$$

C'est ce qui se présente encore quand on étudie le mouvement sur une surface d'un point rapporté à des coordonnées orthogonales de la surface. Ainsi soit un point M rapporté aux coordonnées polaires $r = OM$, $\theta = xOM$ d'un plan xoy et attiré par le point o suivant une fonction de la distance ; on a :

$$2T = m(r'^2 + r^2\theta'^2), \qquad p_1 = m r', \qquad p^2 = \frac{m\theta'}{r^2},$$

$$2(T) = \frac{1}{m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right),$$

$$H = (T) - U(r).$$

Les équations canoniques sont :

$$(\alpha) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{p_1}{m} \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{p_2^3}{m r^3} + \frac{\partial U}{\partial r}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p_2}{m r^2} \\ \frac{dp_2}{dt} &= 0. \end{aligned}\right.$$

La dernière égalité donne $p_2 = C^{te}$ (intégrale des aires) ; d'autre part $H = h$ est une intégrale du système (α). Il serait facile d'achever directement l'intégration de ce système. Mais cette intégration se présentera dans la suite comme une conséquence de théorèmes très généraux que nous allons maintenant démontrer.

Auparavant, je ferai une dernière remarque relative au mouvement relatif des systèmes.

Équations canoniques du mouvement relatif.

Soit un système S soumis à des forces données par rapport à un système $oxyz$.

On veut étudier son mouvement relativement à des axes $o_1 x_1 y_1 z_1$ animés par rapport aux premiers d'un mouvement donné.

On rapporte, comme nous l'avons dit, le système aux paramètres q_1, $q_2 \ldots q_K$ les plus commodes pour déterminer sa position relativement aux axes $o_1 x_1 y_1 z_1$. On peut, pour former le système canonique qui détermine le mouvement, appliquer les trois méthodes que nous avons indiquées à propos des équations de Lagrange (voir la 10^e Leçon).

1° Former la force vive $2T_1$ par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$, et prendre pour variables canoniques les variables $p_i = \frac{\partial T_1}{\partial q_i'}$ (Il faut avoir soin d'ajouter aux forces données qui s'exercent sur chaque point du système les deux forces de Coriolis).

2° Former la force vive $2T_2$ par rapport aux axes $Oxyz$ et prendre pour variables conjuguées les variables $p_i = \frac{\partial T_2}{\partial q_i'}$.

3° Former la force vive $2T_3$ par rapport aux axes intermédiaires $O_1 \xi \eta \zeta$ parallèles aux axes $Oxyz$, et prendre pour variables conjuguées les variables $p_i = \frac{\partial T_3}{\partial q_i'}$ (Il faut avoir soin d'ajouter aux forces données qui s'exercent jusqu'à point M, de masse m, la force $m(\gamma e)$, (γe) étant l'accélération de O_1 par rapport à $Oxyz$).

Les trois méthodes conduisent à des systèmes canoniques distincts, car les variables conjuguées sont différentes. Au contraire, les trois méthodes conduisaient aux mêmes équations de Lagrange. Si on se reporte d'ailleurs à ce que nous avons dit dans la 10^e Leçon sur le calcul de T_1, T_2, T_3, on voit que la formation de ces systèmes canoniques ne présente pas de difficulté.

Il n'y a pas lieu de s'étonner qu'aux mêmes variables $q_1, q_2, \dots q_K$ on puisse faire correspondre des variables conjuguées et par suite des systèmes canoniques différents. Les équations de Lagrange s'écrivent en effet :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

et les variables $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ forment un premier système de variables conjuguées. Mais posons :

$$T = T' + \Omega,$$

Ω désignant une fonction linéaire des q_i' dont les coefficients dépendent des q_i et de t :

$$\Omega = A_0(q_1, q_2, \dots q_K, t) + q_1' A_1(q_1, q_2, \dots q_K, t) + \dots + q_K' A_K(q_1, q_2, \dots q_K, t).$$

Il vient :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial q_i'} - \frac{\partial T'}{\partial q_i} = Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial q_i'} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = Q_i';$$

Q_i' dépend de t, des q_i et des q_i'. Si nous introduisons les variables $p_i = \frac{\partial T'}{\partial q_i'}$, le système des équations entre les q_i, p_i et t sera canonique. Il arrive parfois que, pour un choix convenable de la fonction Ω, T' représente encore la demi force vive du système par rapport à certains axes : c'est ce qui a lieu pour les fonctions T_1, T_2, T_3 considérées plus haut.

Sans insister davantage sur cette question, nous allons passer à l'étude des propriétés les plus importantes des systèmes canoniques. La forme canonique est en effet la forme des équations du mouvement qui se prête le mieux aux applications de la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Avant de développer ces applications, nous établirons les théorèmes généraux auxquels nous aurons recours.

Généralités sur les équations différentielles. — Soit un système d'équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

entre les fonctions $x_1, x_2, \dots x_n$ de t ; $X_1, X_2, \dots X_n$ désignent des fonctions données de $x_1, x_2, \dots x_n$ et t.

L'intégrale générale d'un tel système dépend de n constantes arbitraires : On peut, pour $t = t_0$, se donner arbitrairement les valeurs $x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$ de $x_1, x_2, \dots x_n$. Cette intégrale se laisse donc mettre sous la forme :

$$x_1 = \varphi_1\left(t, (t_0), x_1^0, x_2^0 \dots\dots x_n^0\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \varphi_n\left(t, (t_0), x_1^0, x_2^0 \dots\dots x_n^0\right);$$

(t_0) représente un nombre arbitraire, 0 ou 1 par exemple, $x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$ des constantes arbitraires.

On peut supposer ces relations résolues par rapport à $x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$, et on aura évidemment :

$$x_1^0 = \varphi_1\left(t_0, (t), x_1, x_2 \dots\dots x_n\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n^0 = \varphi_n\left(t_0, (t), x_1, x_2 \dots\dots x_n\right).$$

On donne le nom d'intégrale première du système (1) à toute relation de la forme

$$f(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C^{te}$$

qui est vérifiée pour un système quelconque $x_1(t) \dots x_n(t)$ d'intégrales des équations (1). Autrement dit, si on remplace dans f les variables x_1, x_2, x_n par des fonctions de t qui satisfont aux équations (1), f se réduit à une constante.

Si $f = \alpha$ est une intégrale première, $F(f) = \beta$ est aussi une intégrale première. Plus généralement, soient

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \dots\dots\dots\dots f_m = \alpha_m$$

m intégrales premières, $F(f_1, f_2, \dots f_m) = \beta$ est encore une intégrale première. On dit que les m intégrales $f_1 = \alpha_1, \dots f_m = \alpha_m$ sont distinctes, si aucune des fonctions f_i ne peut s'exprimer en fonction des $(m-1)$ autres, sous la forme

$$f_i = F(f_1, f_2, \dots\dots f_{i-1}, f_{i+1}, f_m).$$

Pour que le système (1) soit intégré, il suffit qu'on en connaisse n intégrales premières distinctes :

$$(2) \qquad f_1 = \alpha_1, \; f_2 = \alpha_2, \dots\dots f_n = \alpha_n.$$

En effet, ces n équations sont résolubles par rapport à $x_1, x_2, \dots x_n$: autrement, il existerait une relation de la forme

$$F(f_1, f_2, \dots f_n, t) = 0.$$

De cette relation, on peut tirer t, puisqu'il ne saurait exister entre les f_i de relation indépendante de t ; $t = C^{te}$ serait donc une intégrale première du système (1) ce qui est absurde.

D'autre part, on peut disposer des α de façon à donner pour $t = t_0$ des valeurs arbitraires à $x_1, x_2, \dots x_n$, comme le montrent aussitôt les égalités :

$$\alpha_1^0 = f_1(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0), \text{etc.}$$

Le système des n fonctions $x_1, x_2, \dots x_n$ de t définies par les équations (2) représente donc l'intégrale générale des équations (1).

Intégrales quelconques. — D'une manière générale, on dit que la relation :

$$F(t, x_1, x_2, \dots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m) = 0$$

est une intégrale du système (1), si elle est vérifiée identiquement, quand on y remplace $x_1, x_2, \dots x_n$ par une solution quelconque de (1), pour des valeurs convenables des constantes α.

Quand $F = 0$ ne dépend que d'une constante α_1, on peut résoudre par rapport à cette constante et écrire :

$$\alpha_1 = f(t, x_1, x_2, \dots x_n).$$

Une intégrale première est donc une intégrale qui ne dépend que d'une constante.

Théorème. — Quand une intégrale $F = 0$ dépend de m constantes distinctes, on peut déduire de cette intégrale m intégrales premières.

Précisons ce qu'on entend en disant que $F = 0$ dépend de m constantes distinctes.

Supposons pour cela qu'on remplace dans F les variables $x_1, x_2, \dots x_n$ par les fonctions de t les plus générales qui satisfont aux équations (1), à savoir :

$$x_1\left[t, (t_0), x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n\left[t, (t_0), x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0\right] ;$$

F devient :

$$\mathcal{F}\left[t, (t_0), x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m\right]$$

Si on exprime que cette fonction $\mathcal{F}(t)$ est nulle quel que soit t, on obtient des relations entre les constantes x^0 et α. Pour que $F = 0$ soit une intégrale de (1), il faut et il suffit que, les x^0 étant quelconques, ces relations entre les α soient compatibles.

On dit que l'intégrale $F=0$ dépend de m constantes distinctes, si ces relations qui relient les m constantes α à $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, (t_0)$ satisfont aux conditions suivantes :

1° Leur ensemble forme un système de m relations distinctes :

(Remarquons qu'il ne peut exister plus de m relations distinctes ; sinon on tirerait $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ de m d'entre elles, et en substituant ces valeurs dans la $(m+1)^{e}$, on obtiendrait une condition :

$$\psi\left[x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, (t_0)\right]=0$$

qui ne serait pas vérifiée identiquement ; $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$, pour $t=t_0$, ne seraient donc pas arbitraires).

2° Ces m relations qu'on peut supposer résolues par rapport aux α

$$(3) \qquad \alpha_i = X_i\left[x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0 (t_0)\right]$$

permettent de disposer des x^0 de manière à donner aux α des valeurs arbitraires. Autrement dit, pour des valeurs quelconques données aux α, les relations (3) entre les x_0 sont compatibles, ou encore il n'existe entre les α aucune relation indépendantes des x_0.

Quand ces conditions ne sont pas remplies, on peut écrire l'intégrale $F=0$ sous une forme où elle renferme moins de m constantes.

Tout d'abord, si le nombre des relations distinctes entre les α (et les x_0) est égal à $m-K$, on peut annuler K des constantes α en laissant les autres arbitraires.

Si maintenant, le nombre des relations étant égal à m, il existe des relations entre les α, soit $\alpha_m = h(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1})$, en remplaçant α_m par cette expression, on ramène l'intégrale à dépendre de moins de m constantes.

Inversement, quand les conditions énoncées sont vérifiées, il est impossible, par un changement de constantes

$$\alpha_1 = \theta_1(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p), \dots\dots\dots \alpha_m = \theta_m(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p) \qquad (p<m)$$

de réduire de nombre des constantes de l'intégrale $F=0$.

En effet, s'il en était ainsi, la relation $F=0$, quand on y remplace $x_1, x_2, \dots x_n$ par un système quelconque d'intégrales de (1), serait vérifiée pour des valeurs convenablement choisies des constantes $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$. Or, pour des valeurs arbitraires des β, les α ne sont pas arbitraires mais satisfont à certaines relations. La relation $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ serait donc vérifiée (les x^0 étant arbitraires) pour des valeurs non arbitraires des α, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ceci posé, il est facile de voir que si $F=0$ dépend de m constantes distinctes, on peut en déduire m intégrales premières distinctes.

La chose est certainement possible, car on a :

$$\alpha_i = X_i\left[x_1^0\ x_2^0, \dots x_n^0\ (t_0)\right] \qquad (i=1,2,\dots m)$$

Si on donne à t_0 une valeur quelconque t, et si on appelle $x_1, x_2, \dots x_n$ les valeurs des fonctions intégrales $x_i(t)$ pour cette valeur t, on a encore:

$$\alpha_i = X_i\{x_1, x_2, \dots x_n, t\}.$$

Autrement dit, $X_i = \alpha_i$ est une intégrale première. Les m intégrales premières ainsi obtenues sont d'ailleurs distinctes, puisque les X_i ne sont liées par aucune relation.

Pour former ces m intégrales premières explicitement, on procédera ainsi.

Résolvons $F = 0$ par rapport à α_m; il vient:

$$\alpha_m = \psi(t, x_1, x_2, \dots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}).$$

Différentions par rapport à t:

$$(3) \qquad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt};$$

$x_1, x_2, \dots x_n$ sont des fonctions de t qui satisfont aux équations (1), c'est-à-dire qu'on a:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots\dots\dots\dots \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

Donc $$0 = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}X_1 + \dots\dots\dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}X_n = F'$$

est une intégrale du système (1). $F = 0$ dépend effectivement des $(m-1)$ constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$; autrement, α_{m-1} par exemple n'y figurerait pas, et la relation $F' = 0$, par suite la relation (3) serait vérifiée, pour des valeurs convenables de $\alpha_1, \dots \alpha_{m-2}$ la constante α_{m-1} étant arbitraire. En intégrant la relation (3), on voit que la relation $\alpha_m = \psi$ serait vérifiée, α_{m-1} étant arbitraire (égal à zéro par exemple), et les m constantes α ne seraient pas distinctes.

D'ailleurs les $(m-1)$ constantes qui figurent dans l'intégrale $F' = 0$ sont distinctes, puisque $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ s'expriment en fonction des x^0, $\alpha_i = X_i$, et qu'il n'existe aucune relation entre les X_i.

Si on raisonne sur l'intégrale $F' = 0$ comme sur la première, et ainsi de suite, on arrivera à une égalité de la forme

$$\alpha_1 = X_1(x_1, x_2, \dots\dots x_n, t)$$

qui sera une intégrale première.

En portant cette valeur de α_1 dans l'intégrale précédente et résolvant par rapport à α_2, on aura une seconde intégrale première et ainsi de suite.

Remarquons que la méthode de calcul que nous venons d'exposer, appliquée à une relation quelconque $F(t, x_1, \dots x_n, \alpha_1, \dots \alpha_m) = 0$ permet de reconnaître 1° si cette relation est une intégrale de (1); 2° de combien de constantes distinctes dépend cette intégrale. Plus exactement, la question se trouve ramenée à reconnaître si une relation $\alpha = X(x_1, \dots x_n, t)$ est une intégrale première: c'est là, une question dont nous allons nous occuper dans un instant.

D'après cela, il suffit de trouver une intégrale $F=0$ qui dépende de n constantes distinctes pour que le système (1) soit intégré.

Le problème le plus simple qu'on puisse se proposer (et qui, par suite, a le plus de chances d'être résolu) c'est donc la recherche d'intégrales premières.

12^e^ Leçon (Suite)

Propriétés des intégrales premières. —

Nous avons dit que si on connaît n intégrales premières distinctes du système (1), ce système se trouve complètement intégré. De ces n intégrales, on peut tirer $x_1, x_2, \dots x_n$ en fonction de t et des n constantes α.

Plus généralement, si on connaît $m=(n-K)$ intégrales premières distinctes de (1), de ces intégrales on peut tirer m des variables convenablement choisies en fonction des K autres et de t. En effet, la première intégrale renferme au moins une des variables x_i, soit x_1 (sinon, $t=C^{te}$ serait une intégrale première) : résolvons par rapport à x_1 et remplaçons x_1 par la valeur ainsi obtenue dans les $(m-1)$ autres intégrales ; puisque les m intégrales sont distinctes, les seconds membres des nouvelles intégrales :

$$\alpha_2 = f_2'(\alpha_1, t, x_2, \dots x_n), \text{ etc,}$$

ne se réduisent pas à une fonction de α_1 et f_2' renferme au moins une des variables $x_2, \dots x_n$, soit x_2. Tirons x_2 de la seconde intégrale et portons la valeur ainsi obtenue dans les suivantes. Au bout de $(m-1)$ opérations analogues, nous formerons ainsi l'expression de x_{n-K} par exemple en fonction de $x_{(n-K+1)}, \dots x_n, t$, et des constantes ; si on revient en arrière, on voit que $x_{(n-K-1)}, \dots, x_1$ se trouveront exprimées en fonction des mêmes quantités.

Si nous remplaçons $x_1, x_2, \dots x_{n-K}$ par ces valeurs dans les K dernières équations (1)

$$dt = \frac{dx_{(n-K+1)}}{X_{(n-K+1)}} = \dots\dots\dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

nous n'avons plus à intégrer qu'un système de K équations du premier ordre entre $(K+1)$ variables. Il nous suffit de trouver K intégrales premières distinctes de ce système, par exemple les K intégrales :

$$x^0_{(n-K+i)} = \varphi_{(n-K+i)}(t, x_{(n-K+1)}, \dots x_n) \quad (i=1,2,\dots K).$$

Les φ dépendent des $\alpha_1, \dots \alpha_{n-K}$: si nous remplaçons les constantes par $f_1, f_2, \dots f_{n-K}$ nous obtenons K intégrales premières de (1).

$$x^0_{(n-K+i)} = f_{(n-K+i)}(t, x_1, x_2, \dots x_n).$$

Ces intégrales, jointes aux $(n-K)$ précédentes, forment un système de n intégrales premières distinctes : car on en peut tirer $x_1, x_2, \dots x_n$ en fonction de t et des constantes.

Condition analytique pour que $(n-K)$ intégrales premières soient distinctes.

—— . D'après ce qui précède, pour que n intégrales premières soient distinctes, il faut et il suffit que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{\partial x_1} & \frac{df_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{df_1}{\partial x_n} \\ \frac{df_2}{\partial x_1} & \frac{df_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{df_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_n}{\partial x_1} & \frac{df_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{df_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul.

Plus généralement, pour que $(n-K)$ intégrales premières soient distinctes, il faut et il suffit que, parmi les déterminants obtenus en supprimant K colonnes dans le rectangle

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{(n-K)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{(n-K)}}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{(n-K)}}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

un au moins ne soit pas identiquement nul.

Observons qu'il ne saurait exister plus de n intégrales premières distinctes. Car s'il en existait $(n+1)$, on pourrait tirer $x_1, x_2, \dots x_n$ de n d'entre elles et substituer dans la $(n+1)^e$, d'où la relation

$$\alpha_{n+1} = \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) ;$$

les $(n+1)$ intégrales étant distinctes, t devrait figurer effectivement dans φ ; $t = C^{te}$ serait donc une intégrale première, ce qui est impossible.

D'après cela, quand on connait n intégrales premières distinctes du système (1), soient $\alpha_i = f_i$, toute autre intégrale première $\beta = \varphi(t, x_1, \dots x_n)$ s'exprime en fonction de ces n intégrales :

$$\beta = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \qquad , \varphi = F(f_1, f_2, \dots f_n).$$

Ceci nous montre qu'une intégrale quelconque ne saurait dépendre de plus de n constantes distinctes.

Recherche des intégrales premières. —— La recherche d'une intégrale première se présente, avons nous dit, comme le problème le plus simple qu'on puisse se proposer. Nous allons démontrer d'ailleurs qu'une telle intégrale se laisse caractériser par une condition très simple qui se déduit aussitôt des équations (1). Au contraire, pour reconnaitre qu'une relation $F=0$ dépendant de plusieurs constantes est une intégrale, il faut éliminer les constantes dans chaque cas particulier.

Soit
$$\alpha = f(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$$
une intégrale première. Tout système d'intégrales $x_1(t), x_2(t) \ldots\ldots x_n(t)$ de (1) doit vérifier la relation :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_K}\frac{dx_K}{dt},$$

c'est-à-dire que cette relation doit être une conséquence des équations (1)

Il existe donc des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ de $t, x_1, x_2, \ldots x_n$, telles que l'on ait :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \equiv \lambda_1\left(\frac{dx_1}{dt} - X_1\right) + \ldots + \lambda_n\left(\frac{dx_n}{dt} - X_n\right),$$

ou encore

$$(A) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1' + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n' \equiv \lambda_1(x_1' - X_1) + \ldots + \lambda_n(x_n' - X_n).$$

Cette identité entraine les relations

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n X_n,$$

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots \lambda_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Les multiplications λ doivent donc satisfaire aux conditions :

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}, \\ &\frac{\partial(\lambda_1 X_1)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\lambda_2 X_2)}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial(\lambda_n X_n)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \lambda_i}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Inversement, si un système de fonctions $\lambda(t, x_1, \ldots x_n)$ vérifie les équations (B), la fonction

$$f = \int \lambda_1\, dx_1 + \lambda_2\, dx_2 + \ldots\ldots + \lambda_n\, dx_n + (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n)\, dt,$$

égalée à une constante, définit une intégrale première.

A n intégrales premières distinctes correspondent n systèmes de multiplicateurs λ linéairement distincts, et réciproquement.

La recherche directe de ces multiplicateurs λ est en général très compliquée.

Painl. 391. N° 20

Mais dans certains cas, on peut apercevoir immédiatement un ou plusieurs systèmes de tels multiplicateurs. C'est ce qui arrive, par exemple, pour l'intégrale des forces vives et la plupart des intégrales usuelles de la dynamique. Ainsi, soient les équations:

$$m\,\frac{dx_1}{dt} = X, \qquad \frac{dx}{dt} = x_1,$$

$$m\,\frac{dy_1}{dt} = Y, \qquad \frac{dy}{dt} = y_1,$$

$$m\,\frac{dz_1}{dt} = Z, \qquad \frac{dz}{dt} = z_1,$$

où l'on a :
$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Formons l'expression

$$x_1\left(m\frac{dx_1}{dt} - X\right) + y_1\left(m\frac{dy_1}{dt} - Y\right) + z_1\left(m\frac{dz_1}{dt} - Z\right) - X\left(\frac{dx}{dt} - x_1\right) - Y\left(\frac{dy}{dt} - y_1\right) - Z\left(\frac{dz}{dt} - z_1\right);$$

elle se réduit à
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - U\right] = \frac{df}{dt};$$

les multiplicateurs λ sont ici x_1, y_1, z_1, X, Y, Z.

Voilà une première forme qu'on peut donner à la condition qui caractérise une intégrale première. Mais la forme suivante est d'une application plus commode. La relation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = 0$$

est vérifiée par tout système d'intégrales $x_1(t), \dots x_n(t)$ des équations (1); il en est donc de même de la relation :

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \dots\dots\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}X_n = 0,$$

qui ne diffère pas de la première si on tient compte des équations (1). Comme on peut, d'autre part, disposer des constantes d'intégration de façon que $x_1, x_2, \dots x_n$ prennent pour $t = t_0$ des valeurs arbitraires $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$, l'équation (3) doit être vérifiée quand on donne à $t, x_1, x_2, \dots x_n$ des valeurs quelconques ; c'est donc une identité. D'où ce théorème : si $f = \alpha$ est une intégrale première de (1), f vérifie identiquement l'équation (3).

Inversement, toute solution f de l'équation (3) définit une intégrale première du système (1). Remplaçons en effet dans f les variables $x_1, x_2, \dots x_n$ par un système quelconque d'intégrales de (1) et calculons $\frac{df}{dt}$; il vient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}X_n = 0$$

Donc $f = C^{te}$ est une intégrale première de (1).

Ainsi, pour que $f = \alpha$ soit une intégrale première de (1), il faut et il suffit que f soit solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots\cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \; .$$

Observons que d'après ce qui précède, si $f_1, f_2, \ldots f_n$ sont n intégrales distinctes de l'équation (3), l'intégrale générale de cette équation est $F(f_1, f_2, \ldots f_n)$. C'est là une proposition bien connue qu'il est facile de démontrer directement : soit, pour plus de symétrie, l'équation

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \; ,$$

et $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ $(n+1)$ intégrales de cette équation. Les $(n+1)$ relations

$$X \frac{\partial f_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$$

ne sont compatibles pour des valeurs des X_j qui ne sont pas toutes nulles que si le déterminant des $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est identiquement nul ; il existe donc au moins une relation entre les f_i.

Appliquons ces résultats à un système d'équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \; , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \; .$$

L'équation (3) prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial q_i} \right) + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} Q_i = 0 \; .$$

Dans le cas où les Q_i sont les dérivées partielles d'une fonction $U(q_1, \ldots q_k, t)$ on a :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; ,$$

et l'équation (3) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \; .$$

D'une manière générale, f et H étant deux fonctions quelconques des p_i, q_i, Poisson désigne par le symbole (f, H) l'expression : $\sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$. Avec cette notation, l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0 \; .$$

Lorsque H ne dépend pas de t, on peut écrire ainsi les équations canoniques :

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots\dots = \frac{dq_K}{\frac{\partial H}{\partial p_K}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \dots\dots = \frac{dp_K}{-\frac{\partial H}{\partial q_K}} = dt ,$$

et faire abstraction de t en négligeant la dernière équation. Si on cherche une intégrale première indépendante de t :

$$f(q_1, q_2, \dots q_K, p_1, p_2, \dots p_K) = \alpha ,$$

la fonction f doit satisfaire à l'équation

$$(f, H) = 0 .$$

Nous allons maintenant aborder la théorie du dernier multiplicateur (due à Jacobi), qui permet dans un grand nombre de cas d'achever l'intégration d'un système (1) par quadratures quand on connait un certain nombre ν d'intégrales premières ($\nu < n$).

Observons d'abord que quand t ne figure pas explicitement dans les équations du mouvement d'un système il suffit de connaître $(2K-1)$ intégrales premières indépendantes de t. En effet, de ces $(2K-1)$ intégrales on peut tirer $(2K-1)$ des quantités p_i, q_i en fonction d'une d'entre elles, soit q_1, et, en portant ces valeurs dans la première équation canonique, on voit que t est donné en fonction de q_1 par une quadrature :

$$dt = A(q_1)\, dq_1 .$$

La même remarque s'applique évidemment si une des variables q_i ne figure pas explicitement dans les équations canoniques.

La théorie du dernier multiplicateur conduit à la proposition suivante :

Quand un système matériel sans frottement, dont les liaisons sont indépendantes du temps, est soumis à des forces données qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps, il suffit de connaître $(2K-2)$ intégrales premières distinctes du mouvement (où t ne figure pas) pour que la détermination du mouvement s'achève par quadratures ; K est le nombre de paramètres dont dépend la position du système.

Quand les liaisons ou les forces données dépendent du temps, il suffit de connaître $(2K-1)$ intégrales premières distinctes (où t peut entrer).

Théorie du dernier multiplicateur. — L'intégration d'une équation du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

revient à déterminer une intégrale première de cette équation :

$$f(x, y) = \alpha ,$$

c'est-à-dire une fonction f satisfaisant à l'équation :

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

La recherche de f équivaut à celle d'un multiplicateur M tel que l'expression

$$M(Y\,dx - X\,dy)$$

soit une différentielle totale exacte ; si on connait un tel multiplicateur, la fonction

$$f = \int M(Y\,dx - X\,dy)$$

définit une intégrale première. Pour que M soit un facteur intégrant de l'équation (1), il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\partial (MY)}{\partial y} + \frac{\partial (MX)}{\partial x} = 0 \;,$$

ou bien

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0 \;,$$

ou enfin

$$(2) \quad X\frac{\partial \log M}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 .$$

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire M ou $\log M$.

Dans certains cas, on aperçoit immédiatement un multiplicateur (Par exemple, si $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \equiv 0$, $M = 1$ est un multiplicateur). Il est commode, pour cela, d'écrire l'équation (2) sous une forme un peu différente ; supposons que dans cette équation on remplace y par une intégrale quelconque $y(x)$ de l'équation (1), on pourra l'écrire :

$$\frac{\partial \log M}{\partial x} + \frac{\partial \log M}{\partial y}\,y' + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0 \;,$$

ou bien

$$(2)' \quad \frac{d(\log M)}{dx} + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0 .$$

Inversement, si une fonction $M(x,y)$ satisfait à l'équation (2)' quand on remplace y par une intégrale quelconque de (1), M est un facteur intégrant. En effet, M vérifie l'équation (2) quand on y remplace y par une intégrale quelconque de (1), c'est-à-dire pour des valeurs arbitraires de x, y.

D'après cela, si on aperçoit une fonction $U(x,y)$ telle qu'on ait :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

quand y est une intégrale de (1), $M = e^{-U}$ est un multiplicateur.

Supposons par exemple que :

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \equiv \varphi(x) \;;$$

un multiplicateur M sera donné par l'égalité :

$$\operatorname{Log} M = -\int \varphi(x)\,dx$$

De même si

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\equiv\psi(y) \quad ,$$

un multiplicateur est donné par l'égalité :

$$\mathrm{Log}\, M = -\int \psi(y)\,dy \quad .$$

C'est ce qui se présente pour l'équation linéaire du premier ordre :

$$y' = Ay + B \quad ,$$

$$\text{ou} \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{Ay+B} \quad .$$

L'équation du dernier multiplicateur est ici

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Log}\, M + A(x) = 0 \, ,$$

d'où
$$M = e^{-\int A(x)\,dx} \quad .$$

Nous allons étendre cette théorie du facteur intégrant au cas d'un système de deux équations différentielles du premier ordre, puis au cas d'un système quelconque.

Cas de deux équations différentielles. — Soit le système

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad ,$$

X, Y, Z étant des fonctions données de x, y, z.

Pour intégrer ces équations, il suffit de connaître deux intégrales premières

$$f(x,y,z) = \alpha \quad ,$$
$$\varphi(x,y,z) = \beta \quad .$$

Supposons qu'on en connaisse une, soit $\varphi(x,y,z) = \beta$. On pourra, de cette intégrale, tirer z par exemple en fonction de x, y et β et substituer dans X et Y ; désignons par X', Y' ce que deviennent X, Y après cette substitution ; x et y sont liés par l'équation

$$(2) \qquad Y'dx - X'dy = 0$$

Quand on connaît un facteur intégrant $\lambda(x,y,\beta)$ de l'équation (2), cette équation s'intègre par une quadrature. Nous allons montrer que si $M(x,y,z)$ satisfait à la relation :

$$X\frac{\partial \log M}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M}{\partial y} + Z\frac{\partial \log M}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0 \quad ,$$

l'expression $\frac{M}{\varphi'_z}$ (où z est remplacé en fonction de x, y et β) est un facteur intégrant de l'équation (2).

Adjoignons pour un instant à l'intégrale $\varphi = \beta$ une seconde intégrale $f = \alpha$ du système (1). Nous avons :

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0\,,$$

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv 0\,,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z}\,,$$

en posant :

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$C = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Soit M_1 la valeur commune des rapports $\frac{A}{X}, \frac{B}{Y}, \frac{C}{Z}$. Je dis d'abord que $\frac{M_1}{\varphi'_z}$, où z est exprimé en x, y et β, est un facteur intégrant de l'équation (2).

Désignons, en effet, par A', B', M'_1 et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ ce que deviennent A, B, M_1 et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ quand on y a remplacé z en fonction de x, y et β. On a évidemment : $A' = M'_1\,X'$, $B' = M'_1\,Y'$. Il me suffit de montrer que $\frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}$ est un facteur intégrant de l'équation

$$B'dx - A'dy = 0\,.$$

Or substituons dans $f(x, y, z)$ à la variable z la variable β définie par la relation $\varphi = \beta$, et soit $f'(x, y, \beta) \equiv f(x, y, z)$. Calculons A et B en fonction des dérivées de f' ; il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f'}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

On déduit de là :

$$A = \frac{\partial f'}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$B = \frac{\partial f'}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

z étant exprimé partout en x, y et β, ou bien

$$A' = \frac{\partial f'}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$B' = \frac{\partial f'}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\,,$$

et par suite :

$$\frac{B'dx - A'dy}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = -\left(\frac{\partial f'}{\partial x}dx + \frac{\partial f'}{\partial y}dy\right) .$$

Si on donne à β une valeur constante on voit que $\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}$ est un facteur intégrant de l'équation $B'dx - A'dy = 0$; l'intégrale correspondante de cette équation est $f'(x,y,\beta) = C^{te}$.

Ce lemme établi, observons que les fonctions A, B, C vérifient identiquement l'égalité :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 .$$

On a donc :

$$\frac{\partial(M_1 X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_1 Y)}{\partial y} + \frac{\partial(M_1 Z)}{\partial z} = 0 .$$

Autrement dit, M_1 est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

(3) $$X\frac{\partial \log M_1}{\partial x} + Y\frac{\partial \log M_1}{\partial y} + Z\frac{\partial \log M_1}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 .$$

Comparons maintenant à M_1 une intégrale quelconque M de l'équation (3) ; en retranchant membre à membre les deux identités (3) relatives à M et M_1, on obtient la relation :

$$X\frac{\partial \log \frac{M}{M_1}}{\partial x} + Y\frac{\partial \log \frac{M}{M_1}}{\partial y} + Z\frac{\partial \log \frac{M}{M_1}}{\partial z} = 0 .$$

Par conséquent, $\frac{M}{M_1} = N$ vérifie l'équation :

$$X\frac{\partial N}{\partial x} + Y\frac{\partial N}{\partial y} + Z\frac{\partial N}{\partial z} = 0 ,$$

c'est-à-dire que N est une fonction de f et de φ. Ainsi :

$$M = M_1\, \chi(f, \varphi) .$$

La proposition que nous avions en vue est dès lors démontrée. En effet, dans l'égalité :

$$\frac{M_1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}(Y'dx - X'dx) = d.f'(x,y,\beta)$$

(où β est constant), remplaçons M_1 en fonction de M. Si M' désigne ce que devient M quand on y a exprimé z en x, y et β, on a évidemment :

$$M' = M_1'\, \chi(f', \beta)$$

et par suite :

$$\frac{M'}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}(Y'dx - X'dx) = \chi(f',\beta)\,df' = dF(x,y,\beta) .$$

Si donc M est une solution de l'équation (3), $\frac{M'}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}$ est un facteur intégrant de l'équation (2). C. Q. F. D.

De là résulte ce théorème : Quand on connait une intégrale M de l'équation

$$(3) \quad X \frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x} + Y \frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial y} + Z \frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

il suffit de connaître une intégrale première du système (1) pour que l'intégrale de ce système s'achève par quadratures. On donne à M le nom de dernier multiplicateur du système.

Un cas très simple où l'on trouve immédiatement un multiplicateur M est celui où

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

$M=1$ est alors solution de (3) et $\dfrac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ est un facteur intégrant de l'équation (2).

Plus généralement, on peut donner à l'équation (3) une forme un peu différente, en y regardant y et z comme des fonctions de x satisfaisant au système (1) ; l'équation (3) s'écrit alors :

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{Log} M\right) + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

Aperçoit-on une fonction $U(x,y,z)$ telle que l'on ait

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

quand y et z sont des intégrales quelconques $y(x)$, $z(x)$ du système (1), $M = e^{-U(x,y,z)}$ est un multiplicateur. On le voit en raisonnant comme dans le cas d'une seule équation.

C'est ce qui se présente notamment si la quantité $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ est une fonction de x seulement ; de même si les quantités $\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ ou $\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ se réduisent respectivement à des fonctions de y ou de z.

Applications.

Comme application, considérons l'équation générale du 2e ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Elle équivaut au sytème

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{F(x,y,y')}.$$

Ici

$$X = 1, \quad Y = 1, \quad Z = F(x,y,y')$$

Par suite

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial y'}$$

Pour que cette quantité soit nulle, il faut et il suffit que F ne dépende pas de y'.

Ainsi, étant donnée l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2}=F(x,y)\ ,$$

il suffit de connaître une intégrale première $\varphi(x,y,y')=\beta$, pour que l'intégration s'achève par quadrature. De cette intégrale, on tire y' en fonction de x, y et β, soit $y'=\psi(x,y,\beta)$, et l'équation

$$\psi\, dx - dy = 0$$

admet comme facteur intégrant $\dfrac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}$.

Dans le cas où

$$F(x,y,y')=\alpha(x)\,y'+\beta(x,y)\ ,$$

on détermine un multiplicateur M par une simple quadrature

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Log} M+\alpha(x)=0.$$

D'après cela, si on étudie le mouvement d'un point mobile sans frottement sur une courbe fixe et soumis à une force donnée F qui ne dépend pas de la vitesse du point, il suffit de connaître une intégrale première du mouvement pour que le problème s'achève par quadratures.

Il en est de même si la force donnée dépend de la vitesse V de telle façon que la composante tangentielle F_T soit de la forme

$$F_T=\alpha(s)V+\beta(s,t)\ ,$$

s désigne l'arc de la courbe fixe.

On sait qu'en effet le mouvement du point est déterminé dans ce cas par l'équation

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_T\ .$$

Plus généralement, l'équation de Lagrange qui détermine le mouvement d'un système à liaisons complètes s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\ .$$

Si Q ne dépend pas de q', il suffit de connaître une intégrale première du mouvement pour que le mouvement se détermine par quadrature.

En effet, l'équation de Lagrange équivaut aux équations :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq}{q'} = \frac{dq'}{\left(\frac{u}{\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}}\right)}$$

où l'on a posé :

$$u = \frac{\partial T}{\partial q} + Q - \frac{\partial^2 T}{\partial q' \partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial q' \partial q} q'.$$

L'équation (3) qui correspond à ce système (1) est

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial q} q' + \frac{\partial M}{\partial q'} \frac{u}{\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}} + M \frac{\partial}{\partial q'}\left(\frac{u}{\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}}\right) = 0.$$

Je dis que la fonction $M = \frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}$ est un multiplicateur ; pour le voir, il suffit de remplacer M par $\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}$ dans l'équation précédente. Il vient :

$$0 = \frac{\partial^3 T}{\partial q'^2 \partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial q'^2 \partial q} q' + \frac{\partial^3 T}{\partial q'^3} \frac{u}{\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}}$$

$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}\left[-\frac{\partial^3 T}{\partial q'^3} \frac{u}{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}\right)^2} + \frac{1}{\frac{\partial^2 T}{\partial q'^2}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial q'} - \frac{\partial^3 T}{\partial q'^2 \partial t} - q' \frac{\partial^3 T}{\partial q'^2 \partial q} - \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial q'}\right)\right].$$

Le théorème est ainsi démontré. On y serait parvenu plus facilement en se servant des équations canoniques

$$(1)' \quad \frac{dt}{1} = \frac{dq}{\frac{\partial K}{\partial p}} = \frac{dp}{-\frac{\partial K}{\partial p} + Q}.$$

L'expression $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ est égale ici à $\left(\frac{\partial^2 K}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 K}{\partial p \partial q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\right)$ c'est-à-dire à zéro, puisque Q ne dépend pas de p ; $M = 1$ est donc un multiplicateur du système canonique (1)'.

13.e Leçon.

Théorie du dernier multiplicateur (Suite).

Applications.

Considérons maintenant le système d'équations (1) le plus général

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots\dots\dots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où $X, X_1, \dots\dots X_n$ sont des fonctions données de $x, x_1, \dots\dots x_n$.

Le système (1) est integré si on en connait n integrales premières distinctes. Supposons qu'on en connaisse seulement $(n-1)$, soient :

$$(\gamma) \quad \begin{cases} f_2\,(x, x_1, x_2, \dots\dots x_n) = \alpha_2 \\ f_3\,(x, x_1, x_2, \dots\dots x_n) = \alpha_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n\,(x, x_1, x_2, \dots\dots x_n) = \alpha_n \end{cases}.$$

De ces $(n-1)$ intégrales, nous pouvons tirer $(n-1)$ des variables x_i par exemple $x_2, x_3, \dots x_n$ en fonction des deux autres x et x_1 et des α. Ceci revient à dire que le déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots\dots\dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots\dots\dots & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots\dots\dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

D'une manière générale, si F désigne une fonction quelconque de $x, x_1, \ldots x_n$, nous représentons par F' ce que devient F quand on y a remplacé $x_2, x_3, \ldots x_n$ par leurs valeurs tirées du système (γ). Cette convention faite, il est clair que x et x_1 satisfont à l'équation :

$$X'_1\, dx - X'\, dx_1 = 0$$

où on laisse les α constants.

Quand on connait une solution M de l'équation :

$$(3)\ X\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x} + X_1\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x_1} + \cdots\cdots + X_n\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

on connait un facteur intégrant de l'équation (2). Ce facteur est égal à $\frac{M'}{\Delta'}$ (1).

Autrement dit :

$$\frac{M'}{\Delta'}(X'_1\, dx - X'\, dx_1) = dF(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m).$$

La démonstration ne diffère de celle qui a été donnée pour le cas de deux équations que par la complication des calculs.

Supposons pour un instant qu'on connaisse n intégrales premières $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$. Les équations :

$$X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X\frac{\partial f_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

équivalent aux suivantes

$$\frac{A}{X} = \frac{A_1}{X_1} = \frac{A_2}{X_2} = \cdots\cdots\cdots = \frac{A_n}{X_n} = M_1,$$

si on pose :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

(1) Δ' ne saurait être nul quels que soient $x, x_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, car autrement Δ serait identiquement nul.

et

$$A = \frac{\partial R}{\partial \alpha}, \quad A_1 = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, \ldots\ldots A_n = \frac{\partial R}{\partial \alpha_n}.$$

Nous allons montrer d'abord que les quantités A_i vérifient la relation :

$$(4) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Observons en effet que le premier membre de (4) est une fonction linéaire et homogène des dérivées secondes de $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Or cette fonction ne peut contenir de terme en $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i^2}$; car le terme en question proviendrait de $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, et $A_i = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$ ne contient aucune dérivée des f par rapport à la variable x_i.

Elle ne peut renfermer non plus de terme en $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$; car ce terme proviendrait de la somme $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_j}{\partial x_j}$: posons, pour abréger l'écriture, $\beta_i^k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$; le terme en $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ provenant de $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ a pour coefficient $\frac{\partial A_i}{\partial \beta_j^k}$ ou $\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha_i \partial \beta_j^k}$; le terme provenant de $\frac{\partial A_j}{\partial x_j}$ a pour coefficient $\frac{\partial A_j}{\partial \beta_i^k}$ ou $\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha_j \partial \beta_i^k}$. Les deux mineurs du second ordre de R qui s'introduisent ainsi sont égaux en valeur absolue, car ils s'obtiennent en supprimant les mêmes lignes et les mêmes colonnes de R ; ils sont d'ailleurs de signes contraires, car on passerait de l'un à l'autre en permutant deux colonnes de R.

La somme des termes du premier membre de (4) est donc identiquement nulle, et la relation (4) est établie. Si dans cette relation on remplace $A, A_1, \ldots \ldots A_n$ par $M_1 X$, $M_1 X_1, \ldots M_1 X_n$, on voit que M_1 est une intégrale de l'équation :

$$(5) \quad X \frac{\partial \log M}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \log M}{\partial x_1} + \ldots\ldots + X_n \frac{\partial \log M}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

Cela posé, il est facile de voir que $\frac{M_1'}{\Delta'}$ est un facteur intégrant de l'équation (2). Comme on a :

$$A' = M_1' X', \qquad\qquad A_1' = M_1' X_1',$$

il suffit de prouver que $\frac{1}{\Delta'}$ est un facteur integrant de l'équation :

$$(2)' \quad A_1' \, dx - A' \, dx_1 = 0.$$

A cet effet, exprimons dans $f_1(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ les variables x_1 $x_2, \ldots\ldots x_n$ en fonction des $(n-1)$ variables $\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ et de x et x_1.

Nous avons :

$$f_1(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = f_1'(x, x_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n)$$

et par suite

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1'}{\partial x} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial f_1'}{\partial \alpha_i} \frac{\partial f_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1'}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial f_1'}{\partial \alpha_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial f_1'}{\partial \alpha_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial f_1'}{\partial \alpha_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

D'ailleurs, on sait que :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Si on remplace les $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$ par les valeurs écrites ci-dessus, on voit qu'en supposant $x_2, x_3, \ldots x_n$ exprimées partout en fonction de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ et x, x_1, les expressions A et A_1 se réduisent respectivement à $\frac{\partial f_1'}{\partial x_1}\Delta$ et $-\frac{\partial f_1'}{\partial x_1}\Delta$, c'est-à-dire qu'on a :

$$A' = \frac{\partial f_1'}{\partial x_1}\Delta', \qquad A_1' = -\frac{\partial f_1'}{\partial x_1}\Delta'.$$

Par suite,

$$(5) \qquad \frac{A'_1\, dx - A'\, dx_1}{\Delta'} = -\left[\frac{\partial f'_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f'_1}{\partial x_1}\, dx_1\right].$$

Si donc on donne à $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ des valeurs constantes, le premier membre de l'équation (5) est la différentielle totale de la fonction $f(x, x_1, \alpha_2\, \alpha_3, \ldots \alpha_n)$, ce qui démontre que $\frac{M'_1}{\Delta'}$ est bien un facteur intégrant de l'équation (2).

Soit enfin M une solution quelconque de (3). On voit aussitôt que le rapport $\frac{M}{M_1}$ ou N satisfait à l'équation :

$$X\frac{\partial N}{\partial x} + X_1\frac{\partial N}{\partial x_1} + \cdots\cdots X_n\frac{\partial N}{\partial x_n} = 0,$$

et par suite

$$N = \varphi\,(f_1, f_2, \cdots f_n).$$

Donc

$$M = M_1\,\varphi(f_1, f_2, \cdots f_n).$$

Si on remplace M_1 en fonction de M dans l'équation (5), il vient :

$$\frac{M'}{\Delta'}(X'_1\, dx - X'\, dx_1) = \varphi\,(f_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\, df_1 = dF(x, x_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n);$$

$\frac{M'}{\Delta'}$ est donc un facteur intégrant de l'équation (2). C'est le théorème que nous voulions démontrer.

Quand on connaît une solution quelconque M de l'équation (3) il suffit donc de former $(n-1)$ intégrales premières distinctes de (1) pour que l'intégration s'achève par quadratures. La fonction M est dite un dernier multiplicateur du système (1).

Dans certains cas, on aperçoit immédiatement un dernier multiplicateur. C'est ce qui a lieu notamment si l'expression :

$$\delta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$$

est identiquement nulle : on peut alors faire $M = 1$, et le binôme final admet comme facteur intégrant $\frac{1}{\Delta'}$.

Il convient d'observer à ce sujet, que si dans l'équation (3) on remplace $x_1, x_2, \ldots x_n$ par des fonctions de x qui satisfont au système (1), cette équation devient :

$$\frac{dLM}{dx} + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) \equiv 0.$$

Inversement, si une fonction $U(x, x_1, \ldots x_n)$, (quand on y remplace $x_1 \ldots x_n$ par un système quelconque d'intégrales de (1)) vérifie la relation :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right),$$

$M = e^{-U}$ est un dernier multiplicateur de (1).

D'après cela, si l'expression

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

est fonction de x seulement, un dernier multiplicateur, s'obtiendra par une quadrature. — Plus généralement, si on a

$$\frac{1}{X_i}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)=\psi(x_i)$$

$M = e^{-\int\psi(x_i)\,dx_i}$ est un multiplicateur.

Ajoutons enfin que si $x, x_1, \ldots x_K$ n'entrent dans aucune des fonctions X, tout multiplicateur M de (1), indépendant de $x, x_1, \ldots x_K$ est aussi un multiplicateur du système :

$$\frac{dx_{(K+1)}}{X_{K+1}}=\frac{dx_{(K+2)}}{X_{(K+2)}}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n};$$

en effet, $M(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots x_n)$ vérifie l'équation :

$$X_{K+1}\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x_{K+1}}+X_{K+2}\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x_{K+2}}+\cdots\cdots\cdots+X_n\frac{\partial \operatorname{Log} M}{\partial x_n}=0.$$

Remarque sur le cas où on connaît seulement $(n-K)$ intégrales premières. — Dans ce qui précède, nous avons supposé qu'on avait formé $(n-1)$ intégrales premières ; la connaissance d'un dernier multiplicateur permet alors de trouver par quadratures une dernière intégrale.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où on connaît seulement $(n-K)$ intégrales premières des équations (1) :

$$(1)\qquad \frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\cdots\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

De ces $(n-K)$ intégrales, soient $f_n=\alpha_n$, $f_{(n-1)}=\alpha_{n-1}, \ldots f_{(K+1)}=\alpha_{K+1}$ on peut tirer $(n-K)$ des variables $x, x_1, \ldots x_n$, par exemple $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{K+1}$ en fonction des $(K+1)$ autres, $x, x_1, \ldots x_K$ et des $(n-K)$ constantes α. Désignons par (F) ce que devient une fonction $F(x, x_1, \ldots x_n)$ après cette substitution ; les variables $x, x_1, \ldots x_K$ satisfont aux équations :

$$(1)'\qquad \frac{dx}{(X)}=\frac{dx_1}{(X_1)}=\cdots\cdots=\frac{dx_K}{(X_K)}$$

qu'il faut maintenant intégrer. La connaissance d'un multiplicateur M du système (1) peut-elle servir à l'intégration du système (1)' ? Nous allons montrer que d'un multiplicateur de (1) il est facile de déduire un multiplicateur de (1)'

D'après ce qui précède, un multiplicateur quelconque M de (1) satisfait :

(si nous gardons les notations de la page 166) aux relations :

$$MX = \varphi A, \quad MX_1 = \varphi A_1, \ldots \quad \ldots MX_n = \varphi A_n,$$

où φ désigne une fonction quelconque de $f_1, f_2, \ldots f_n$. Inversement, toute fonction $M(x, x_1, \ldots x_n)$ qui satisfait à une de ces relations, soit à la relation

$$MX = \varphi(f_1, f_2, \cdots f_n) A,$$

est un multiplicateur de (1). Ceci rappelé, admettons qu'on connaisse une intégrale première de (1) (soit $f_n = \alpha_n$) et tirons de cette intégrale une des variables, x_n par exemple, en fonction de $x, x_1, \ldots x_{n-1}$ et α_n. Désignons par F' et $\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ ce que deviennent les fonctions $F(x, x_1, \ldots x_n)$ et $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ quand on y remplace x_n par cette valeur. On a ainsi :

$$f_i(x, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n) = f_i'(x, x_1, \ldots x_{n-1}, \alpha_n),$$

et, par suite :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i'}{\partial \alpha_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots (n-1) \\ j = 1, 2 \ldots (n-1) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = \frac{\partial f_i'}{\partial \alpha_n} \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Si on remplace les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_n}$ par ces valeurs dans le déterminant A, on voit aussitôt que A se réduit à

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1'}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1'}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2'}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2'}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2'}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{n-1}'}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}'}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}'}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,\alpha.$$

On peut donc écrire l'égalité :

$$M'X' \equiv \varphi(f_1', f_2', \cdots f_{(n-1)}', \alpha_n)\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\alpha.$$

Mais d'autre part, les multiplicateurs μ du système

$$(2) \qquad \frac{dx}{X'} = \frac{dx_1}{X_1'} = \cdots\cdots \frac{dx_{n-1}}{X'_{(n-1)}}$$

sont donnés par la relation

$$\mu X' = \psi(f_1', f_2', \cdots f_{n-1}')\alpha,$$

ψ étant une fonction arbitraire de $f_1', f_2', \cdots f'_{(n-1)}$. Donc la fonction $\mu_1(x, x_1, \ldots x_{n-1}, \alpha_n)$ définie par l'égalité :

$$\mu_1 X' = \varphi(f_1', f_2', \cdots f'_{(n-1)})\alpha$$

est un multiplicateur de (2). Comme on a :

$$\mu_1 = \frac{M'}{\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)},$$

on voit que la connaissance d'un multiplicateur de (1) entraîne la connaissance d'un multiplicateur de (2).

Il est clair qu'on peut raisonner sur le système (2) comme sur le système (1) : si on connaît une seconde intégrale première de (1), $f_{(n-1)} = \alpha_{(n-1)}$, à cette intégrale correspond une intégrale de (2), $f'_{(n-1)} = \alpha_{(n-1)}$; en tirant $x_{(n-1)}$ de cette dernière relation, on forme le système

$$(3) \quad \frac{dx}{X''} = \frac{dx_1}{X''_1} = \cdots\cdots = \frac{dx_{(n-2)}}{X''_{(n-2)}}.$$

L'expression $\dfrac{\mu'}{\left(\frac{\partial f'_{(n-1)}}{\partial x_{(n-1)}}\right)}$ est un multiplicateur de (3) : μ' et $\left(\frac{\partial f'_{(n-1)}}{\partial x_{(n-1)}}\right)$ désignent ce que deviennent μ $\left(\frac{\partial f'_{(n-1)}}{\partial x_{(n-1)}}\right)$ et $\frac{\partial f'_{(n-1)}}{\partial x_{(n-1)}}$ quand on exprime x_{n-1} en $x, x_1, \ldots x_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

En poursuivant le raisonnement de la même manière, on arrive à cette conclusion : si nous posons

$$\begin{aligned}
f_n(x, x_1, \ldots x_n) &= \varphi_n(x, x_1, \ldots x_n) = \alpha_n \\
f_{(n-1)}(x, x_1, \ldots x_n) &= \varphi_{(n-1)}(x, x_1, \ldots x_{n-1}, \alpha_n) = \alpha_{(n-1)} \\
f_{(n-2)}(x, x_1, \ldots x_n) &= \varphi_{(n-2)}(x, x_1 \ldots x_{(n-2)}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \alpha_{(n-2)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{(k+1)}(x, x_1, \ldots x_n) &= \varphi_{(k+1)}(x, x_1, \ldots x_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots \alpha_n) = \alpha_{(k+1)},
\end{aligned}$$

l'expression

$$\frac{M}{\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\,\dfrac{\partial \varphi_{(n-1)}}{\partial x_{(n-1)}} \cdots\cdots \dfrac{\partial \varphi_{(k+1)}}{\partial x_{(k+1)}}}$$

où on remplace $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{k+1}$ en fonction de $x, x_1, \ldots x_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots \alpha_n$, est un dernier multiplicateur du système (1').

En particulier, si on fait $k = 1$, on voit que le produit $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}$ coïncide avec le déterminant Δ introduit plus haut, quand on exprime $x_n \ldots x_{k+1}$ en $x, \ldots x_k, \alpha_{k+2}, \ldots \alpha_n$.

Ce qui précède ne suppose rien sur les valeurs des constantes α et subsiste a fortiori si on donne à ces constantes (ou à certaines d'entre elles) des valeurs particulières. D'après cela, soit α_n^0 une certaine valeur de la constante α_n ($\alpha_n^0 = 0$ par exemple) ; admettons que pour cette valeur de α_n on connaisse une intégrale première du système (2) :

$$\varphi_{(n-1)}(x, x_1, \ldots x_{n-1}) = \alpha_{n-1};$$

L'expression $\dfrac{M}{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}}$ est encore un multiplicateur du système (3) pour $\alpha_n = \alpha_n^0$. – Si on connaît de même une intégrale première du système (3) pour $\alpha_n = \alpha_n^0$, $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}^0$,

$$\varphi_{n-2}(x, x_2, \ldots x_{n-2}) = \alpha_{n-2},$$

et ainsi de suite, l'expression (4) définit encore un multiplicateur de (1') pour $\alpha_n = \alpha_n^0$, $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}^0$, ... $\alpha_{k+2} = \alpha_{k+2}^0$.

Nous aurons tout à l'heure l'occasion d'utiliser cette remarque.

Nous allons appliquer maintenant la théorie du dernier multiplicateur aux équations de la dynamique. Le premier problème qui se présente naturellement est le problème du mouvement d'un point libre.

Application au mouvement d'un point libre. —

Les équations du mouvement d'un point libre peuvent s'écrire :

$$(1) \qquad dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{m\,dx'}{X} = \frac{m\,dy'}{Y} = \frac{m\,dz'}{Z},$$

X, Y, Z, étant des fonctions données de x, y, z, x', y', z', t.

Dans le cas général, il faut connaître 6 intégrales premières pour que le système (1) soit intégré.

Si X, Y, Z ne dépendent pas de t, il suffit évidemment d'en connaître 5 indépendantes de t; la 6^e s'obtient par quadrature.

Si X, Y, Z ne dépendent pas de x', y', z', il suffit également de connaître 5 intégrales premières (où peut figurer t); en effet, l'expression $\delta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ considérée plus haut est ici identiquement nulle; $M = 1$ est donc un dernier multiplicateur du système (1) et la 6^e intégrale s'obtient par quadrature.

Enfin, si X, Y, Z, ne dépendent ni de x', y', z' ni de t, d'après une remarque faite ci-dessus, $M = 1$ est aussi un multiplicateur du système

$$(1') \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{m\,dx'}{X} = \frac{m\,dy'}{Y} = \frac{m\,dz'}{Z}.$$

Il suffit donc de connaître 4 intégrales premières de (1'), c'est-à-dire 4 intégrales de (1) indépendantes de t; la $5^{ième}$ intégrale de (1') est alors donnée par quadratures, et t s'obtient également par une quadrature.

Ainsi, quand un point libre M est soumis à une force qui ne dépend que de la position du point, il suffit de connaître quatre intégrales premières du mouvement (où ne figure pas le temps) pour que la détermination du mouvement s'achève par quadratures.

Supposons par exemple que la force soit une force centrale fonction de la seule distance r du point M au centre O de la force. Le théorème des moments fournit trois intégrales premières, le théorème des forces vives une quatrième. Comme t n'entre pas dans ces intégrales, le mouvement peut se calculer par quadratures.

Vérifions-le, en appliquant à ce cas particulier la théorie du dernier multiplicateur. La trajectoire étant plane d'après le théorème des moments, nous prendrons son plan comme plan des x, y. — Les équations du mouvement dans ce plan sont (en faisant $m = 1$) :

$$(1) \qquad dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{F\frac{x}{r}} = \frac{dy'}{F\frac{y}{r}} \; ;$$

F est une fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considérons le système

$$(1)' \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{F\frac{x}{r}} = \frac{dy'}{F\frac{y}{r}} \; ;$$

nous connaissons deux intégrales de ce système

$$(a) \qquad f = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = \alpha \qquad \text{où } U = \int F(r)\,dr \, ,$$

$$(b) \qquad \varphi \equiv x y' - x' y = \beta \, .$$

Si de (a) et de (b) on tire x' et y' et qu'on porte dans l'équation

$$y'\,dx - x'\,dy = 0 \, ,$$

cette équation admet pour facteur intégrant

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} \equiv \frac{1}{x x' + y y'} \, .$$

Pour le constater, exprimons $x x' + y y'$ en x et y ; de (a) et de (b) on déduit, en multipliant (a) par $2(x^2+y^2)$ et en retranchant (b) élevée au carré :

$$(x x' + y y')^2 = 2r^2(U + \alpha) - \beta^2 = R(r) \; .$$

On a donc

$$x x' + y y' = \sqrt{R(r)} \, ,$$
$$x y' - y x' = \beta \, .$$

D'où

$$r^2 x' = -\beta x + x\sqrt{R(r)} \, ,$$
$$r^2 y' = +\beta y + y\sqrt{R(r)} \, .$$

Il vient ainsi

$$(c) \qquad \frac{y'\,dx - x'\,dy}{x x' + y y'} = \frac{1}{\sqrt{R(r)}}\frac{1}{r^2}\Big[\beta(x\,dx + y\,dy) + (y\,dx - x\,dy)\sqrt{R}\Big]$$
$$= \frac{\beta\,dr}{r\sqrt{R(r)}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \, .$$

Si on pose $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, on voit que le premier membre de (c) est la différentielle totale de la fonction :

$$\Psi = \beta\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{R(r)}} + \theta \, .$$

Cette troisième intégrale, $\psi = \gamma$, permet de calculer y (et par suite x', y') en fonction de x ; quant à t, il est donné par la quadrature :

$$dt = \frac{dx}{x'} .$$

D'ailleurs, on peut écrire :

$$dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx' + yy'} = \frac{r\,dr}{\sqrt{R(r)}} .$$

Donc

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{R(r)}} .$$

Nous vérifions ainsi, dans ce cas particulier, les conclusions de la théorie du dernier multiplicateur.

Application au mouvement des systèmes matériels.

I_ Mouvement d'un point sur une surface. —— Soit M un point matériel mobile sans frottement sur la surface :

$$(s) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0 .$$

Si X', Y', Z' sont les composantes de la force active, les équations du mouvement, sous la première forme que leur a donnée Lagrange, s'écrivent (en faisant $m = 1$) :

$$(1) \qquad dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{X' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy'}{Y' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz'}{Z' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}} .$$

Nous savons que λ peut s'exprimer en fonction de x, y, z, x', y', z', t ; en différentiant deux fois l'équation (s) par rapport à t et en tenant compte de (1), il vient :

$$(2)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[X' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left[Y' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left[Z' + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'\right) = 0 .$$

Si nous remplaçons λ dans (1) par sa valeur tirée de (2), les équations (1) ainsi obtenues admettent l'intégrale

$$\varphi(x, y, z, t) = \alpha t + \beta ,$$

ou, ce qui revient au même, les deux intégrales premières

$$(a) \qquad x' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z' \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha$$

$$(b) \qquad \varphi - t\left(x' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z' \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \beta .$$

L'une au moins des dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ n'est pas nulle identiquement, soit $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Tirons z' de (a) en faisant $\alpha = 0$, puis tirons z de (b) qui se réduit alors à $\varphi = \beta$, en faisant $\beta = 0$; enfin portons ces valeurs de z et de z' dans les équations

$$(3) \qquad dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{X' + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy'}{Y' + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y}} .$$

Nous formerons ainsi 4 équations du premier ordre pour déterminer x, y, x', y', en fonction de t, c'est-à-dire pour déterminer le mouvement du point sur la surface $\varphi = 0$. D'autre part, si $M(x, y, z, x', y', z', t)$ est un multiplicateur du système (1) où λ est défini par (2), nous savons, d'après une remarque faite plus haut, que l'expression $\frac{M}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ est aussi un multiplicateur de (3), après qu'on y a remplacé z et z' par leurs valeurs tirées des équations :

$$(c) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z} z' + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 . \end{cases}$$

Ceci posé, je dis que le système (1) admet comme multiplicateur la quantité :

$$R = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 ,$$

quand la force donnée (X', Y', Z') ne dépend pas de la vitesse.

L'équation aux derniers multiplicateurs est ici :

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{Log} M) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z'} = 0 .$$

Or dérivons la relation (3) successivement par rapport à x', y', z', en observant que X', Y', Z', ne dépendent pas de ces variables ; il vient :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} z' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial t}\right] = 0 ,$$

ou bien

$$R \frac{\partial\lambda}{\partial x'} + 2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 ,$$

et de même :

$$R \frac{\partial\lambda}{\partial y'} + 2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

$$R \frac{\partial\lambda}{\partial z'} + 2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 .$$

Si on observe, comme on l'a vérifié à propos des équations de Lagrange, que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

on déduit des relations précédentes l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z'} + \frac{2}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\lambda}{\partial z'} + \frac{\frac{dR}{dt}}{R} = 0 .$$

Cette relation a lieu si on suppose que x, y, z, x', y', z' sont des fonctions quelconques de t qui satisfont aux équations (1). Par conséquent $M = R$ est un multiplicateur de (1).

D'après cela, admettons qu'on connaisse 3 intégrales premières du mouvement du point sur la surface ; ces intégrales se laisseront toujours mettre sous la forme :

$$(d)\left\{\begin{array}{l} \psi_1(t, x, y, x', y') = \gamma_1 \\ \psi_2(t, x, y, x', y') = \gamma_2 \\ \psi_3(t, x, y, x', y') = \gamma_3 . \end{array}\right.$$

De ces relation, on peut tirer x', y', y, par exemple, en fonction de x et t et porter dans l'équation

$$x'dt - dx = 0 .$$

Cette équation admet comme facteur intégrant la quantité :

$$\frac{R}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \Delta},$$

où Δ représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x'} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x'} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y'} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y} & \frac{\partial\psi_3}{\partial x'} & \frac{\partial\psi_3}{\partial y'} \end{vmatrix}$$

et où on suppose x', y', z', y et z exprimées en x et t d'après (c) et (d).

Quand la surface et la force active ne dépendent pas du temps, t ne figure ni dans φ ni dans l'équation (2), non plus par suite que dans R et λ. Le multiplicateur $\frac{R}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ du système (3) est donc aussi multiplicateur du système

$$(3)' \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy'}{Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

où t n'entre pas. Il suffit, par conséquent, de connaître 2 intégrales premières de (3) pour que le problème s'achève par quadratures.

Nous arrivons donc à ces conclusions : quand un point mobile sans frottement sur une surface est soumis à une force donnée qui ne dépend pas de la vitesse du point, 1° si la surface varie avec le temps, il suffit de connaître trois intégrales premières du mouvement pour que le mouvement se détermine par quadratures, 2° si ni la surface ni la force donnée ne dépendent du temps, il suffit de connaître deux intégrales premières où t ne figure pas.

II – Mouvement d'un système quelconque.

— . Soit Σ un système de n points matériels assujettis à p liaisons sans frottement. Les coordonnées (x_i, y_i, z_i) de ces points sont astreintes à vérifier les p équations de liaison :

$$(A)\quad \begin{cases} \varphi(x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ \psi(x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ \chi(x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots x_i, y_i, z_i \ldots\ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De ces p équations on peut tirer p des $3n$ quantités x_i, y_i, z_i, par exemple $x_n, y_n, z_n, z_{n-1}, \ldots$, en fonction des $3n-p$ autres $x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots$ et de t. Supposons, pour plus de clarté, cette résolution effectuée, et écrivons les équations de liaison sous la forme :

$$(A')\quad \begin{cases} \varphi \equiv z_n - \varphi_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots t) = 0 \\ \psi \equiv y_n - \psi_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots t) = 0 \\ \chi \equiv x_n - \chi_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les fonctions $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \ldots$ dépendant seulement des $(3n-p)$ variables $x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots$ et de t.

Si X_i, Y_i, Z_i sont les composantes de la force active qui s'exerce sur le point M_i, le mouvement du système est déterminé par les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = X'_i + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} + \nu \dfrac{\partial \chi}{\partial x_i} + \ldots\ldots = X_i \\ m_i \dfrac{d^2y_i}{dt^2} = Y'_i + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i} + \nu \dfrac{\partial \chi}{\partial y_i} + \ldots\ldots = Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \\ m_i \dfrac{d^2z_i}{dt^2} = Z'_i + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i} + \nu \dfrac{\partial \chi}{\partial z_i} + \ldots\ldots = Z_i \end{cases}$$

On sait qu'on peut exprimer les coefficients $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots$ en fonction des $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ et de t ; il suffit de différentier deux fois par rapport à t les équations de liaison ; on obtient ainsi, en tenant compte des équations (1), p équations telles que la suivante

$$(B)\left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(X_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\cdots\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\left(Y_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\cdots\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\left(Z_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z_i}+\cdots\right)\right]\right.$$

$$+\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x'_i+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}y'_i+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}z'_i\right)\right)\right)_2 = 0$$

Ces p relations sont résolubles, comme nous l'avons démontré, par rapport à $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots$, et si on remplace $\lambda, \mu, \nu \ldots$ par ces valeurs dans les équations (1), le système ainsi obtenu, qui est équivalent au système

$$(2)\quad dt = \frac{dx_i}{x'_i} = \frac{dy_i}{y'_i} = \frac{dz_i}{z'_i} = \frac{m_i\,dx'_i}{X_i} = \frac{m_i\,dy'_i}{Y_i} = \frac{m_i\,dz'_i}{Z_i}$$

admet les $2p$ intégrales premières :

$$(a)\left\{\begin{aligned}
&\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x'_i+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}y'_i+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}z'_i\right)=\alpha' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi - t\varphi' = \alpha \\
&\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}x'_i+\frac{\partial\psi}{\partial y_i}y'_i+\frac{\partial\psi}{\partial z_i}z'_i\right)=\beta' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \psi - t\psi' = \beta,\ \text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Si les équations de liaison ont été mises sous la forme (A'), la première intégrale (a) contient seule z'_n, la 2^e z_n, la 3^e y'_n, etc. Tirons donc $z'_n, z_n, y'_n, \ldots$ des équations (a), en faisant $\alpha' = \alpha = \beta \ldots = 0$, et portons dans les équations (2) où nous supprimons les $2p$ équations qui renferment dz'_n, dz_n, dy'_n, etc. Nous formons ainsi un système (3) de $(6n-2p)$ équations du premier ordre entre t et les $(6n-2p)$ variables x_1, x'_1, y_1, y'_1 etc. Si M est un multiplicateur de (2), l'expression $\dfrac{M}{\frac{\partial\varphi'}{\partial z'_n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\frac{\partial\psi'}{\partial y'_n}\cdots}$, c'est-à-dire ici M, est aussi un multiplicateur du système (3), à condition qu'on y remplace $z'_n, z_n, y'_n \ldots$ par leurs valeurs tirées de (a).

Il est bien clair d'ailleurs que si les relations (a) n'étaient pas résolues par rapport à p des variables, on déduirait encore de M un multiplicateur de (3).

Enfin, si les liaisons et les forces données sont indépendantes du temps, les équations (3)', obtenues en supprimant dans le système (3) la première équation (en dt), ne renferment pas t ; car t ne figure ni dans les $\lambda, \mu, \nu \ldots$ ni dans les X_i, Y_i, Z_i. Tout multiplicateur de (3) indépendant de t est donc un multiplicateur de (3)'.

Ceci posé, nous allons montrer qu'on connaît toujours un multiplicateur des équations (1) quand les forces données ne dépendent pas des vitesses.

L'équation aux multiplicateurs du système (1) peut alors s'écrire :

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\log M + \sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x'_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda}{\partial y'_j}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}+\frac{\partial\lambda}{\partial z'_j}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)+\sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x'_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\frac{\partial\mu}{\partial y'_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}+\frac{\partial\mu}{\partial z'_j}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right)+\ldots\ldots=0$$

Il faut remplacer dans cette équation $\frac{\partial\lambda}{\partial x'_j}, \frac{\partial\lambda}{\partial y'_j}, \ldots$ par leurs valeurs déduites des équations (B). Différentions donc ces équations par rapport à x'_j, y'_j, z'_j, en posant pour abréger

$$(\varphi,\varphi) = \sum_{i=n}^{i=n}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right) \text{ etc}$$

il vient :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'_j}(\varphi,\varphi)+\frac{\partial\lambda}{\partial x'_j}(\varphi,\psi)+\frac{\partial r}{\partial x'_j}(\varphi,\chi)+\ldots\ldots\ldots\ldots+2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=0,$$

ou, en observant que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ et en posant $\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'$:

$$(5)\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_j}(\varphi,\varphi)+\dfrac{\partial\mu}{\partial x'_j}(\varphi,\psi)+\dfrac{\partial r}{\partial x'_j}(\varphi,\chi)+\ldots\ldots+2\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x_j}=0. \\ \text{De même,} \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x'_j}(\psi,\varphi)+\dfrac{\partial\lambda}{\partial x_j}(\psi,\varphi)+\dfrac{\partial r}{\partial x'_j}(\psi,\chi)+\ldots\ldots+2\dfrac{\partial\psi'}{\partial x_j}=0.\end{cases}$$

Considérons le déterminant

$$R = \begin{vmatrix}(\varphi,\varphi) & (\varphi,\psi) & (\varphi,\chi) & \ldots\ldots \\ (\psi,\varphi) & (\psi,\psi) & (\psi,\chi) & \ldots\ldots \\ (\chi,\varphi) & (\chi,\psi) & (\chi,\chi) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}.$$

Je dis que ce déterminant satisfait à l'équation (4), c'est-à-dire qu'il est un multiplicateur de (1). Pour le vérifier, résolvons les relations (5) ; on trouve :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'_j} = -\frac{2}{R}\left[\frac{\partial\varphi'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial R}{\partial(\varphi,\varphi)}+\frac{\partial\psi'}{\partial x_j}\frac{\partial R}{\partial(\psi,\varphi)}+\frac{\partial\chi'}{\partial x_j}\frac{\partial R}{\partial(\chi,\varphi)}+\ldots\right]$$

De même

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y_j'} = -\frac{2}{R}\left[\frac{\partial\varphi'}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial R}{\partial(\varphi,\varphi)} + \frac{\partial\psi'}{\partial y_j}\frac{\partial R}{\partial(\psi,\varphi)} + \frac{\partial\chi'}{\partial y_j}\frac{\partial R}{\partial(\chi,\varphi)} + \cdots\right]$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z_j'} = -\frac{2}{R}\left[\frac{\partial\varphi'}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial R}{\partial(\varphi,\varphi)} + \frac{\partial\psi'}{\partial z_j}\frac{\partial R}{\partial(\psi,\varphi)} + \frac{\partial\chi'}{\partial z_j}\frac{\partial R}{\partial(\chi,\varphi)} + \cdots\right]$$

Par suite, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_j'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial\lambda}{\partial y_j'}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j} + \frac{\partial\lambda}{\partial z_j'}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right) + \sum_{j=1}^{j=n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_j'}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \frac{\partial\mu}{\partial y_j'}\frac{\partial\psi}{\partial y_j} + \frac{\partial\mu}{\partial z_j'}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\right) + \cdots\cdots$$

$$= -\frac{2}{R}\left[\frac{\partial R}{\partial(\varphi,\varphi)}\sum\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z_j}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)\right.$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial(\psi,\varphi)}\sum\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi'}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j} + \frac{\partial\psi'}{\partial z_j}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

c'est-à-dire

$$= -\frac{1}{R}\left[\frac{\partial R}{\partial(\varphi,\varphi)}\frac{d(\varphi,\varphi)}{dt} + \frac{\partial R}{\partial(\psi,\psi)}\frac{d(\psi,\psi)}{dt} + \cdots\cdots + \frac{2\,\partial R}{\partial(\varphi,\psi)}\frac{d(\varphi,\psi)}{dt} + \cdots\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{R}\frac{dR}{dt},$$

si on observe que $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$.

On peut donc mettre l'équation (4) sous la forme :

$$\frac{dLM}{dt} - \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = 0;$$

c'est-à-dire que $M = R$ est un multiplicateur de (1).

Si les liaisons ne dépendent pas du temps non plus que les forces données, t ne figure pas dans R qui est aussi un multiplicateur des équations (3).

D'où ce théorème : quand les forces données qui s'exercent sur un système de n points matériels assujettis à p liaisons sans frottement, ne dépendent pas des vitesses, il suffit de connaître $(6n-2p-1)$ intégrales premières du mouvement pour que la détermination du mouvement s'achève par quadratures. — Quand de plus, les liaisons et les forces données sont indépendantes du temps, il suffit de connaître $(6n-2p-2)$ intégrales premières, où t n'entre pas.

La démonstration de ce théorème est beaucoup plus rapide si on applique la théorie du dernier multiplicateur aux équations canoniques. Cette nouvelle démonstration permet en outre d'étendre le théorème aux systèmes continus dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres, comme nous allons le voir immédiatement.

14ème Leçon

Application de la théorie du dernier multiplicateur aux équations canoniques

Considérons un système quelconque d'équations canoniques :

$$(1) \qquad dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial K}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial K}{\partial q_1} + Q_1} = \frac{dq_2}{\frac{\partial K}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dp_k}{-\frac{\partial K}{\partial q_k} + Q_k}$$

L'équation aux derniers multiplicateurs M relative à ce système peut s'écrire, puisque $\frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial q_i} \equiv 0$,

$$\frac{d L M}{dt} + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial Q_k}{\partial p_k} = 0$$

Si la quantité $\sum \frac{\partial Q_i}{\partial p_i}$ est identiquement nulle, $M = 1$ est un multiplicateur des équations (1). C'est ce qui a lieu lorsque le système matériel $\sum$ dont les équations (1) déterminent le mouvement est sans frottement et que les forces données ne dépendent pas des vitesses.

Si donc on connaît dans ce cas $(2k-1)$ intégrales premières distinctes de (1) la dernière équation s'intègre par quadratures.

Quand de plus, ni les liaisons ni les forces données ne dépendent du temps, t ne figure ni dans K ni dans les Q_i ; il suffit de connaître $(2k-2)$ intégrales premières où t n'entre pas pour que l'intégration s'achève par quadratures.

Appliquons ces généralités aux systèmes sans frottement à liaisons indépendantes du temps, dont la position est définie par deux paramètres. Si les forces données qui s'exercent sur un tel système ne dépendent ni des vitesses ni du temps, il suffit de connaître deux intégrales où t ne figure pas pour que le mouvement se calcule par quadratures.

En particulier, si les forces données admettent une fonction de force $U(q_1, q_2)$, il suffit de connaître une seconde intégrale distincte de celle des forces vives, qui ne renferme pas t. L'application de la théorie du dernier multiplicateur conduit dans ce dernier cas à des conclusions remarquables que nous allons développer.

Ecrivons les équations canoniques (abstraction faite de la première)

$$(1)' \quad \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}}$$

où

$$H = T - U .$$

Soit

$$(2) \qquad f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha$$

une intégrale première de $(1)'$ distincte de l'intégrale des forces vives

$$(3) \qquad H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h .$$

Tirons des équations (2) et (3) p_1 et p_2 en fonction de q_1, q_2 :

$$p_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \alpha, h) \qquad p_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \alpha, h)$$

Si nous remplaçons partout p_1 et p_2 par ces valeurs, l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} dq_2 - \frac{\partial H}{\partial p_2} dq_1 = 0$$

admet comme facteur intégrant $\dfrac{1}{\delta} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}}$;

autrement dit, on a :

$$(4) \qquad \frac{\frac{\partial H}{\partial p_1} dq_2 - \frac{\partial H}{\partial p_2} dq_1}{\delta} = d.F(q_1, q_2, \alpha, h)$$

Je dis que le premier membre de (4) coïncide avec

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2 .$$

En effet, d'après la théorie des déterminants fonctionnels, on sait que

$$\delta = \frac{1}{\frac{\partial p_1}{\partial h}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial h}} .$$

D'autre part, si on remplace p_1, p_2 par φ_1, φ_2 dans (2) et (3), ces équations sont vérifiées identiquement ; en différentiant (3) par rapport à h et α on trouve :

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial H} = 1$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = 0$$

D'où

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \delta \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_2} = -\delta \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}.$$

L'équation qui reste à intégrer peut donc s'écrire :

$$(4)' \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2 = 0,$$

et on est assuré que son premier membre est une différentielle totale $dF(q_1, q_2, \alpha, h)$.

Il est bien facile d'ailleurs de vérifier par un calcul direct la conclusion à laquelle nous venons de parvenir en montrant que $(p_1 dq_1 + p_2 dq_2)$ est une différentielle totale exacte.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}$$

Calculons $\frac{\partial p_1}{\partial q_2}$ et $\frac{\partial p_2}{\partial q_1}$ d'après les équations (2) et (3); il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0$$

D'où l'on tire

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) - \delta \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0$$

On trouverait de même

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \delta \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = 0.$$

D'ailleurs la fonction f satisfait identiquement à la relation

$$(7) \qquad \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} \equiv 0$$

Si donc nous additionnons (5) et (6) membre à membre, il vient :

$$\delta\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right) \equiv 0.$$

Dans tout ce qui précède, nous avons admis que δ n'était pas nul identiquement. Sous cette condition (qui est toujours réalisée, comme nous le montrerons tout à l'heure), on voit que l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ est une différentielle totale exacte.

$$\int p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = W(q_1, q_2, \alpha, h)$$

L'intégrale de l'équation (4) est donnée par l'égalité $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$.

Inversement, si une relation $f = \alpha$, jointe à l'équation $H = h$, détermine des fonctions p_1, p_2 de (q_1, q_2, α, h) telles que $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ soit une différentielle exacte, la fonction f vérifie l'équation (7) et par suite est une intégrale première de (1)'.

D'après cela, considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \qquad H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = h$$

et une seconde relation

$$f\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = \alpha;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations admettent, pour chaque valeur de α et de h, une intégrale commune $W(q_1, q_2, \alpha, h)$, c'est que f et H soient liées par l'équation (7), autrement dit que f soit une intégrale première de (1)'.

En définitive, si on connaît une intégrale première $f = \alpha$ de (1)', distincte de celle des forces vives $H = h$, et qu'on tire p_1, p_2 de ces deux équations en fonction de q_1, q_2, α, h, l'expression $p_1 \partial q_1 + p_2 \partial q_2$ est une différentielle totale exacte

$$\int p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = W(q_1, q_2, \alpha, h)$$

et le mouvement du système est déterminé par l'égalité

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

qui définit q_2 en fonction de q_1 et de 3 constantes h, α, β.

Quant au temps t, il est défini en fonction de q_1, par exemple, à l'aide d'une quadrature, quand on exprime q_2 en q_1. Mais d'une façon plus symétrique, remarquons que t satisfait aux deux égalités

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}.$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h} = 0;$$

d'où

$$\frac{\partial p_1}{\partial h} = \frac{\dfrac{df}{dp_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} \qquad \frac{\partial p_2}{\partial h} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}}.$$

On peut donc écrire :

$$dt = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}dq_1 - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{\partial p_1}{\partial h}dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h}dq_2\,;$$

c'est-à-dire :

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Nous verrons dans la leçon prochaine que ce théorème est un cas particulier d'un théorème de Jacobi.

Remarque. – Tout le raisonnement qui précède suppose essentiellement qu'on peut résoudre les deux équations $f = \alpha$, $H = h$, par rapport à p_1, p_2. Montrons qu'il en est toujours ainsi. Dans le cas contraire, le déterminant fonctionnel $\delta = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)$ serait identiquement nul, et il existerait entre f et H une relation de la forme :

$$\Phi(H, f, q_1, q_2) = 0.$$

On peut tirer f de cette équation ; sinon H serait une simple fonction de q_1, q_2, ou encore q_2 s'exprimerait en fonction de q_1 sans constantes arbitraires. Écrivons donc la relation ainsi :

$$f = \Psi(H, q_1, q_2)\,;$$

Ψ dépend au moins d'une des variables q_1, q_2, puisque, par hypothèse, l'intégrale $f = \alpha$ est distincte de celle des forces vives.

D'autre part, $\Psi = \alpha$ étant une intégrale, la fonction Ψ doit vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial H}(H, H) + \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} \equiv 0$$

ou

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} \equiv 0$$

ou enfin :

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{\partial \Psi}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial \Psi}{\partial q_2}} \equiv -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}\,;$$

$\frac{\partial H}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial H}{\partial p_2}$ sont des formes linéaires et homogènes en p_1, p_2, dont le déterminant, comme on sait, n'est pas nul. Le second membre de (9) est donc une fonction de $\frac{p_1}{p_2}$, $\chi\left(\frac{p_1}{p_2}, q_1, q_2\right)$. Quant au premier membre, il ne saurait coïncider avec χ que s'il dépend de $p_1 p_2$ par suite de H. De l'équation (9), on tire donc :

$$H = F\left(\frac{p_1}{p_2}, q_1, q_2\right),$$

égalité absurde puisque H est du second degré en p_1, p_2. Nous arrivons ainsi à cette conclusion qu'on peut toujours résoudre les intégrales distinctes $H = h$, $f = \alpha$ par rapport à $p_1 p_2$.

Nous allons maintenant appliquer les théories précédentes à quelques exemples particuliers.

I. Mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur un paraboloïde d'axe vertical.

Appliquons d'abord la théorie du dernier multiplicateur aux équations du mouvement sous la première forme que leur a donnée Lagrange.

Si le paraboloïde est défini par la relation :

$$(A) \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 2z = 0,$$

les équations du mouvement sont :

$$(B) \qquad \begin{cases} x'' = \lambda \dfrac{x}{\alpha} \\ y'' = \lambda \dfrac{y}{\beta} \\ z'' = -\lambda + g. \end{cases}$$

Différentions deux fois la relation (A) ; il vient, en tenant compte de (B) :

$$\lambda\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1\right) + \frac{x'^2}{\alpha} + \frac{y'^2}{\beta} - g = 0$$

Si on porte cette valeur de λ dans les deux premières équations (B) et qu'on élimine z et z' d'après (A), les deux équations ainsi obtenues admettent comme dernier multiplicateur l'expression $\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1\right)$. Comme z et z' ne figurent pas dans λ, l'élimination se trouve faite d'elle-même, et on obtient immédiatement.

$$(B') \qquad \begin{cases} \dfrac{x''}{\dfrac{x'^2}{\alpha} + \dfrac{y'^2}{\beta} - g} = -\dfrac{x}{\alpha} \dfrac{1}{\left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + 1\right)} \\[2ex] \dfrac{y''}{\dfrac{x'^2}{\alpha} + \dfrac{y'^2}{\beta} - g} = -\dfrac{y}{\beta} \dfrac{1}{\left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + 1\right)} \end{cases}$$

On connaît d'autre part une intégrale première de ces équations à savoir l'intégrale des forces vives :

(a) $$2T \equiv x'^2\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)+y'^2\left(1+\frac{y^2}{\beta^2}\right)+\frac{2xy}{\alpha\beta}x'y'=g\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)+h.$$

Multiplions maintenant la première équation (B') par $\frac{x'}{\alpha}$, la seconde par $\frac{y'}{\beta}$ et faisons la somme il vient, en intégrant :

(b) $$f=\left(\frac{x'^2}{\alpha}+\frac{y'^2}{\beta}-g\right)\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)=C.$$

Appelons δ le déterminant fonctionnel de T et de f par rapport aux variables x', y' ; si nous tirons x', y' des équations (a) et (b), l'expression

(c) $$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+1\right)\ \frac{y'dx-x'dy}{\delta}$$

est une différentielle totale exacte $d.F(x,y,h,C)$; le mouvement est défini par l'égalité $F = C^{te}$.

Si nous appelons μ et ν les deux valeurs de la fonction

$$-\left(\alpha+\beta+\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)\pm\sqrt{\left(\alpha+\beta+\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)^2-4\left(\frac{\beta x^2}{\alpha}+\frac{\alpha y^2}{\beta}+\alpha\beta\right)},$$

un calcul pénible vérifie que l'expression (C) est effectivement égale à :

$$\sqrt{\frac{\mu}{(\alpha+\mu)(\beta+\mu)(g\mu^2+h\mu+C)}}\,d\mu+\sqrt{\frac{\nu}{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(g\nu^2+h\nu+C)}}\,d\nu=dF.$$

Mais c'est là un résultat auquel nous parviendrons plus facilement par la suite en nous servant d'autres coordonnées.

Voici donc un cas où la théorie de Jacobi nous montre que le mouvement doit se calculer sûrement par quadratures, alors qu'il serait bien difficile de s'en rendre compte directement du moins avec les variables employées. On serait arrivé d'ailleurs au même résultat en se servant des équations canoniques. Si aux variables x', y' on substitue dans (a) et (b) les variables p_1 et p_2 définies par les égalités :

$$p_1=x'\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)+y'\frac{xy}{\alpha\beta}$$

$$p_2=x'\frac{xy}{\alpha\beta}+y'\left(1+\frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

on voit sans peine que l'expression $\left(\frac{\partial p_1}{\partial C}dx+\frac{\partial p_2}{\partial C}dy\right)$ coïncide avec l'expression (c).

Proposons-nous de même d'étudier le mouvement d'un point M mobile sans frottement sur un ellipsoïde et attiré par le centre de l'ellipsoïde proportionnellement à la distance.

Si l'ellipsoïde est défini par la relation
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
les équations du mouvement peuvent s'écrire :
$$(B)\qquad \begin{cases} x''=-kx+\lambda\dfrac{x}{b^2}\\ y''=-ky+\lambda\dfrac{y}{b^2}\\ z''=-kz+\lambda\dfrac{z}{c^2}. \end{cases}$$

En outre de l'intégrale des forces vives, on forme une seconde intégrale de la manière suivante : Ajoutons membre à membre les équations (B) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{x'}{a^2}, \frac{y'}{b^2}, \frac{z'}{c^2}$, et en second lieu par $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$. Nous trouvons, en tenant compte des relations
$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=0,\quad \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}+\frac{z''z}{c^2}+\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=0\ :$$
$$\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}=\lambda\left[\frac{xx'}{a^4}+\frac{yy'}{b^4}+\frac{zz'}{c^4}\right]$$
et
$$-\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)=-k+\lambda\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right];$$
d'où on déduit aussitôt :
$$\frac{-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{z'^2}{c^2}-k\right)}{\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}+\dfrac{z'^2}{c^2}-k}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)}{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}},$$
et enfin :
$$\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left[\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-k\right]=C.$$

Nous sommes donc certains que le problème doit s'achever par quadratures. Mais ces quadratures ne s'effectuent commodément qu'à l'aide de coordonnées convenablement choisies ; les coordonnées elliptiques, que nous introduirons plus tard.

II – Deux points M et M_1 sont assujettis à glisser, sans frottement, sur les deux hélices :
$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,\ z=K\theta$ et $x_1=R_1\cos\theta_1,\ y_1=R_1\sin\theta_1,\ z_1=K\theta_1$.
Les deux points se repoussent proportionnellement à leur distance. Mouvement du système.

Nous savons former (voir page 99) deux intégrales premières du mouvement :

$$2T = m\left[R^2 + K^2\right]\theta'^2 + m_1\left[R_1^2 + K^2\right]\theta_1'^2 = -2\mu R R_1 \cos(\theta - \theta_1) + \mu K^2(\theta_1 - \theta)^2 + h,$$

et $$m\left[R^2 + K^2\right]\theta' + m_1\left[R_1^2 + K^2\right]\theta_1' = C.$$

Substituons à θ', θ'_1 les variables canoniques

$$p = m\left(R^2 + K^2\right)\theta', \qquad p_1 = m_1\left(R_1^2 + K^2\right)\theta_1'.$$

En posant

$$\alpha = \frac{1}{m(R^2 + K^2)} + \frac{1}{m_1(R_1^2 + K^2)}, \quad \beta = m\, m_1 \left(R^2 + K^2\right)\left(R_1^2 + K^2\right),$$

et $$U = -2\mu R R_1 \cos(\theta - \theta_1) + \mu K^2 (\theta_1 - \theta)^2,$$

nous tirons des deux intégrales les valeurs suivantes de p et p_1 :

$$\alpha p_1 = \frac{C}{m(R^2 + K^2)} + \sqrt{\alpha\left(U + 2h\right) - \frac{C^2}{\beta}}$$

$$\alpha p = \frac{C}{m_1(R_1^2 + K^2)} - \sqrt{\alpha\left(U + 2h\right) - \frac{C^2}{\beta}}$$

L'expression $(p\, d\theta + p_1\, d\theta_1)$ est bien une différentielle totale exacte dW ; si on introduit la variable $(\theta_1 - \theta) = \varphi$, on a :

$$\alpha W = C\left[\frac{\theta}{m_1(R_1^2 + K^2)} + \frac{\theta}{m(R^2 + K^2)}\right] + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\alpha\left[U(\varphi) + 2h\right] - \frac{C^2}{\beta}}\; d\varphi$$

Les égalités $\frac{\partial W}{\partial C} = C^{te}$, $t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}$, qui déterminent le mouvement, sont ici :

$$\frac{\theta}{m_1(R_1^2 + K^2)} + \frac{\theta_1}{m(R^2 + K^2)} - \frac{C}{\beta}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha\left(U + 2h\right) - \frac{C^2}{\beta}}} = C^{te}$$

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha\left(U + 2h\right) - \frac{C^2}{\beta}}},$$

égalités qui peuvent s'écrire encore :

$$\left[m\left(R^2 + K^2\right) + m_2\left(R_1^2 + K^2\right)\right]\theta = Ct - m_1\left(R_1^2 + K^2\right)\varphi + C^{te}$$

$$\left[m\left(R^2 + K^2\right) + m_1\left(R_1^2 + K^2\right)\right]\theta = Ct + m\left(R^2 + K^2\right)\varphi + C^{te}.$$

Le problème ne dépend que de la seule quadrature qui donne t. Nous retrouvons bien ainsi les résultats déjà obtenus à la page 99.

III. — Un point M, attiré par l'origine O, est abandonné sans vitesse dans le plan xoy. Mouvement du point, quand la loi d'attraction est de la forme :

$$F = \mu r x^m y^m \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}).$$

Les équations du mouvement sont ici :

$$x'' = \mu x^{m+1} y^m$$
$$y'' = \mu x^m y^{m+1}$$

Multiplions la première par y', la seconde par x', et faisons la somme ; il vient :

$$d.x'y' = \mu x^m y^m [x\,dy + y\,dx], \qquad \text{ou}$$

$$x'y' = \frac{\mu}{m+1} x^{m+1} y^{m+1} + \alpha.$$

L'intégrale des aires donne d'autre part :

$$xy' - yx' = C.$$

On tire de là :

$$x' = \frac{-C + \sqrt{R}}{2y}, \qquad y' = \frac{C + \sqrt{R}}{2x},$$

en posant $\qquad R = C^2 + 4xy\left[\frac{\mu}{m+1} x^{m+1} y^{m+1} + \alpha\right].$

D'après la théorie du dernier multiplicateur, l'expression :

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial C}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} - \frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial y'}{\partial C}\right)(y'dx - x'dy) \equiv \frac{y'dx - x'dy}{\sqrt{R}}$$

est une différentielle totale exacte. On le vérifie bien aisément, car on a :

$$2\frac{(y'dx - x'dy)}{\sqrt{R}} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{C}{\sqrt{R}}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right)$$

$$= d.L\frac{y}{x} + \frac{C\,du}{u\sqrt{C^2 + 4u\left(\frac{\mu}{m+1}u^{m+1} + \alpha\right)}} = d\,L\,\frac{y}{x} + dF(u),$$

en posant $u = xy$. Le mouvement est déterminé par l'égalité :

$$y = \beta x e^{-F(xy)},$$

à laquelle il faut joindre les relations :

$$dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{y\,dx + x\,dy}{x'y + y'x} = \frac{du}{\sqrt{R(u)}},$$

qui équivalent à la relation unique :

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{R(u)}} + C^{te}.$$

Voilà donc une application de la théorie à un cas où le théorème des forces vives ne donne pas d'intégrale.

IV. - Deux points pesants M et M_1 de masse m et m_1 sont assujettis à glisser sans frottement l'un sur la verticale Oz, l'autre sur un cylindre de révolution autour de Oz. Les deux points s'attirent suivant une fonction quelconque de la distance. Mouvement du système.

Soit θ l'angle du plan MOz avec le plan xOz ; la position du système dépend des trois paramètres z, θ et z_1. Il suffit de connaître 4 intégrales premières où t ne figure pas, ou encore 5 intégrales dépendant de t, pour que le problème s'achève par quadratures.

Le théorème des moments relatifs à Oz donne :

$$\theta = Ct + C',$$

égalité qui équivaut à deux intégrales. D'autre part d'après le théorème sur le mouvement du centre de gravité, on a :

$$m z + m_1 z_1 = \frac{gt^2}{2} + \alpha t + \beta.$$

Si on joint à ces intégrales celle des forces vives :

$$m_1 z_1'^2 + m(R^2\theta'^2 + z'^2) = 2g(mz + m_1 z_1) + 2U(z - z_1) + C^{te},$$

on voit qu'on connaît cinq intégrales où t figure ; le mouvement se calculera donc à l'aide de quadratures.

Considérons à part les quatre équations :

$$(A) \qquad \frac{dz}{z'} = \frac{dz_1}{z_1'} = \frac{dz'}{mg + \frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{dz_1'}{m_1 g + \frac{\partial U}{\partial z_1}} ;$$

ces équations sont les équations du mouvement d'un système dont la force vive est $(mz'^2 + m_1 z_1'^2)$ et soumis à des forces qui admettent la fonction de forces $(g(mz + m_1 z_1) + U)$. En outre de l'intégrale :

$$(B) \qquad m z'^2 + m_1 z_1'^2 = 2g(mz + m_1 z_1) + 2U(z - z_1) + 2h,$$

nous connaissons une intégrale des équations (A), à savoir :

$$(C) \qquad \frac{(m z' + m_1 z_1')^2}{m + m_1} = 2g(mz + m_1 z_1) + \alpha,$$

intégrale qui se déduit aussitôt des précédentes. (C'est l'intégrale des forces vives appliquée au mouvement de la projection sur Oz

du centre de gravité des points M, M_1.)

Si d'autre part nous remarquons que pour les équations (A) les variables canoniques sont $p_1 = m z'$, $p_2 = m_1 z_1'$, la théorie développée plus haut nous montre que l'expression

$$m z' dz + m_1 z_1' dz_1,$$

où l'on remplace z' et z_1' par leurs valeurs tirées de (B) et (C), doit être une différentielle totale exacte dW. Un calcul bien simple donne en effet

$$m z' dz + m_1 z_1' dz_1 = \frac{1}{\sqrt{m+m_1}}\left[\sqrt{m m_1 (2U + 2h - \alpha)}\,(dz - dz_1) + \sqrt{2g(m z + m_1 z_1) + \alpha}\,(m\,dz + m_1 dz_1)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m+m_1}}\left[\sqrt{m m_1 [2U(\eta) + 2h - \alpha]}\,d\eta + \sqrt{(2g\zeta + \alpha)}\,d\zeta\right] = dW,$$

si on pose $(z - z_1) = \eta$ et $m z + m_1 z_1 = \zeta$.

Le mouvement est donc déterminé par les deux équations :

$$t = \frac{\partial W}{\partial h} + C^{te} = \sqrt{\frac{m m_1}{m+m_1}} \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{2U(\eta) + 2h - \alpha}} + C^{te}, \text{ et}$$

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{2g\zeta + \alpha}} = \sqrt{\frac{m m_1}{2U(\eta) + 2h - \alpha}}\, d\eta, \text{ ou encore}$$

$$\frac{1}{m+m_1}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = 2g\zeta + \alpha.$$

Cette dernière équation n'est autre que l'intégrale (C).

On serait arrivé plus rapidement au résultat en introduisant immédiatement les variables η et ζ. La force vive du système (M, M_1) est en effet égale à :

$$\frac{1}{m_1 + m}\left[\eta'^2 + m m_1 \zeta'^2\right] + m R^2 \theta'^2 ;$$

Comme on a : $\theta' = \theta_0'$, et $\frac{\zeta'^2}{m_1 + m} = 2g\zeta$, le théorème des forces vives entraîne l'égalité :

$$\frac{m m_1}{m + m_1}\, \eta'^2 = 2U + C^{te}.$$

Le mouvement est donc déterminé par les trois égalités :

$$\theta = Ct + C', \quad \frac{\zeta}{m + m_1} = \frac{g t^2}{2} + \alpha t + \beta,$$

et

$$\sqrt{\frac{m + m_1}{m m_1}}\cdot dt = \frac{d\eta}{\sqrt{2U(\eta) + 2h - \alpha}}$$

Il serait facile d'appliquer la théorie du dernier multiplicateur aux exemples traités dans les chapitres précédents. Mais ces quelques exercices suffisent à montrer l'utilité de cette théorie : elle permet de prévoir, dans un grand nombre de cas, que le problème étudié s'achève à coup sûr par quadratures, alors que les variables employées ne mettent pas le fait en évidence.

Il convient alors de rechercher les variables qui donnent à ces quadratures la forme la plus simple.

15ème Leçon

Théorème de Jacobi – Théorème de Liouville.

Nous avons démontré, dans la leçon précédente, que si on connait, en outre de l'intégrale des forces vives, une seconde intégrale d'un problème de mécanique à deux paramètres, le problème s'achève par quadratures. Ce théorème n'est qu'une conséquence d'une proposition générale de Jacobi que nous allons maintenant développer.

Soit S un système matériel sans frottement, dont les liaisons peuvent dépendre du temps et dont la position est définie par les paramètres $q_1, q_2, \dots q_K$. Si les forces données qui s'exercent sur le système admettent une fonction de forces $U(t, q_1, q_2, \dots q_K)$ les équations canoniques du mouvement du système s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots k),$$

avec

$$H = \mathbf{K}(t, q_1, \dots q_K, p_1, \dots p_K) - U(t, q_1, \dots q_K).$$

Remplaçons dans H les p_i par $\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots q_K, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \dots \frac{\partial V}{\partial q_K}\right) = 0.$$

C'est une équation du premier ordre portant sur la fonction V des $(k+1)$ variables $t, q_1, \dots q_K$, et où V ne figure pas explicitement.

Jacobi a fait voir que d'une intégrale complète de (2) on peut déduire l'intégrale générale des équations canoniques (1).

Painleve Agr. N° 25

Une intégrale complète V de (2) c'est par définition une intégrale $V(t, q_1, \dots q_K, \alpha_1, \dots \alpha_K)$ dépendant de k constantes arbitraires $\alpha_1, \dots \alpha_k$ qui permettent, pour des valeurs quelconques t_0, q_i^0 de t et des q_i, d'attribuer aux $(k+1)$ dérivées de V des valeurs arbitraires assujetties seulement à vérifier la relation (2).

Ici la relation (2) se trouvant résolue par rapport à $\frac{\partial V}{\partial t}$, l'intégrale $V(t, q_1, \dots q_K, \alpha_1, \dots \alpha_K)$ sera une intégrale complète si on peut disposer de $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_K$ de manière à donner aux dérivées $\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0, \dots \left(\frac{\partial V}{\partial q_K}\right)_0$ des valeurs arbitraires; $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$ prendra alors la valeur assignée par l'équation (2).

Si donc on considère les équations:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = A_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial V}{\partial q_K} = A_K \end{cases}$$

où $A_1, \dots A_K$ sont des constantes quelconques, on peut résoudre ce système (3) par rapport à $\alpha_1, \dots \alpha_K$. Analytiquement, cela revient à dire que le déterminant fonctionnel des k fonctions $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ de $\alpha_1, \dots \alpha_K$ n'est pas identiquement nul. Ce déterminant n'est autre que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_K \partial \alpha_K} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_K \partial \alpha_K} \end{vmatrix}.$$

Ainsi une intégrale complète est une intégrale qui dépend de k constantes arbitraires telles que Δ soit différent de zéro.

Cette définition rappelée, je dis que si on connaît une intégrale complète (2), le système canonique (1) se trouve intégré par le fait même.

En effet, posons:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_K} = \beta_K \end{cases} \qquad (5) \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial V}{\partial q_1} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ p_K = \dfrac{\partial V}{\partial q_K} \end{cases};$$

le système (4-5) ainsi formé où on considère les α et les β comme $2k$ constantes arbitraires définit l'intégrale générale $p_1(t), \dots p_K(t), q_1(t), \dots q_K(t)$ des équations (1).

Tout d'abord, les relations (4-5) déterminent les p_i, q_i en fonction de t et de $2k$ constantes arbitraires distinctes.

En effet, d'une part les équations (4) peuvent être résolues par rapport à $q_1, q_2, \dots q_K$, car le déterminant fonctionnel de ces équations en $q_1, q_2 \dots q_K$ n'est autre que Δ ; $q_1, q_2, \dots q_K$ s'obtiennent ainsi en fonction de $t, \alpha_1, \dots \alpha_K, \beta_1, \dots \beta_K$. Si d'autre part on porte ces valeurs des q_i dans (5), on obtient $p_1, \dots p_K$ en fonction des mêmes quantités.

D'autre part, ces $2k$ constantes α_i, β_i sont distinctes ; autrement dit, on peut en disposer de manière à donner pour $t = t_0$, des valeurs arbitraires q_i^0, p_i^0 aux q_i, p_i. En effet, faisons dans les équations (5) $t = t_0$, $q_i = q_i^0$; nous pouvons disposer des α de façon à donner aux p_i des valeurs arbitraires p_i^0. Les α étant ainsi déterminés, $\alpha_i = \alpha_i^0$, les valeurs des β s'obtiennent aussitôt en faisant, dans (4), $t = t_0$, $q_i = q_i^0$, $\alpha_i = \alpha_i^0$.

D'après cela, si on démontre que tout système de fonctions $p_i(t)$, $q_i(t)$, vérifiant les relations (4-5), vérifie aussi les équations (1), il est clair que les relations (4-5) définissent l'intégrale générale du système canonique.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, calculons d'après (4-5) les dérivées $\frac{dp_i}{dt}$, $\frac{dq_i}{dt}$. Il vient :

$$(4')\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_K}\dfrac{dq_K}{dt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(5')\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_K}\dfrac{dq_K}{dt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

De (4') on peut tirer $\frac{dq_i}{dt}$ et de (5') $\frac{dp_i}{dt}$. Il faudrait porter ces valeurs dans (1) et constater que les relations ainsi obtenues sont vérifiées pour tout système $p_i(t), q_i(t)$ qui satisfait aux relations (4-5) (si V est une intégrale complète de (2)). Au lieu de cela, il nous est loisible de remplacer dans (4') et (5') les $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$ par leurs valeurs tirées de (1) et de voir si les conditions ainsi calculées sont des conséquences des équations (4-5).

Faisons d'abord cette substitution dans (4'). On trouve

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_1}\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_2}\dfrac{\partial H}{\partial p_2} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_K}\dfrac{\partial H}{\partial q_K} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

L'équation que nous venons d'écrire doit être une conséquence des relations (4-5). Par hypothèse, V satisfait à l'équation (2) quels que soient $t, q_1, \ldots q_k, \alpha_1, \ldots \alpha_k$; V satisfait donc identiquement à l'équation obtenue en différentiant (2) par rapport à α_1, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial\alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial\alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial\alpha_1} + \cdots\cdots \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\,\partial\alpha_1} \equiv 0$$

D'autre part, si on remplace dans la première équation (6), les p_i par leurs valeurs tirées de (5), elle coïncide avec l'identité précédente ; c'est donc bien une conséquence des relations (4-5). On vérifierait de même les autres équations (6).

Ceci nous montre que le premier groupe d'équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

est vérifié par les solutions $p_i(t)$, $q_i(t)$ de (4-5). Si maintenant dans les équations (5') nous remplaçons $\frac{dp_i}{dt}$ par $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\frac{dq_i}{dt}$ par $\frac{\partial H}{\partial p_i}$, il vient :

$$(7)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\dfrac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots\cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

D'autre part, V satisfait identiquement à la relation obtenue en différentiant (2) par rapport à q_1, relation qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\,\partial q_1} = 0.$$

Si on tient compte des équations (5), la première équation (7) ne diffère pas de cette identité. On vérifierait de même les autres équations (7).

La démonstration est donc terminée et on arrive à cette conclusion :

Quand on connait une intégrale complète de l'équation (2), l'intégration du système (1) est achevée, et les équations qui résolvent le problème de mécanique sont :

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1} = \beta_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_k} = \beta_k \; .$$

Elles déterminent $q_1, q_2, \dots q_k$ en fonction de t et des $2k$ constantes arbitraires α_i, β_i.

Nous allons indiquer un certain nombre de cas où l'équation de Jacobi peut être remplacée par une équation plus simple.

Cas où H ne dépend pas du temps. — Supposons que les liaisons ne dépendent pas du temps non plus que la fonction des forces U; t ne figure pas dans H.

Il existe alors des intégrales complètes de l'équation (2) de la forme

$$V = -ht + W(q_1, q_2, \dots q_k, \alpha_1, \dots \alpha_{k-1}, h)$$

h étant une constante.

En effet, remplaçons V par $-ht + W(q_1, \dots q_k)$ dans l'équation (2); W doit satisfaire à l'équation :

$$(2') \qquad H\left(q_1, \dots q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h.$$

Si $W(q_1, \dots q_k, \alpha_1, \dots \alpha_{k-1}, h)$ est, pour chaque valeur de h, une intégrale complète de (2'), on peut disposer de $\alpha_1, \dots \alpha_{k-1}$ de manière à donner, pour h quelconque, des valeurs arbitraires à $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_{(k-1)}}$ par exemple. Il suit de là que la fonction $V = -ht + W$ est une intégrale complète de l'équation (2); en effet, si on veut que $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}$ prennent pour $t_0, q_1^0, \dots q_k^0$ des valeurs arbitraires $p_1^0, \dots p_k^0$, on commence par faire $h = H_0$, H_0 étant la valeur de H quand on y remplace $q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}$ par q_i^0, p_i^0, et on dispose ensuite de $\alpha_1, \dots \alpha_{(k-1)}$ de façon à donner à $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_{(k-1)}}$ les valeurs $p_1^0, \dots p_{(k-1)}^0$.

Le mouvement est, dans ce cas, défini par les égalités :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h} = \beta, \text{ ou } t = \frac{\partial W}{\partial h} + \beta,$$

et

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots (k-1)).$$

En particulier, si $k = 2$, nous retrouvons le théorème démontré au chapitre précédent. Supposons en effet qu'on connaisse une intégrale complète $V = -ht + W(q_1, q_2, \alpha, h)$ de l'équation (2); les deux équations

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = A_1 \qquad \frac{\partial W}{\partial q_2} = A_2$$

pouvant être résolues par rapport à h et α, W satisfait aux deux équations

$$(8) \quad H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = h \qquad f\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = \alpha.$$

Pour que les équations (8) soient compatibles, il faut et il suffit, comme nous le savons, que $f=\alpha$ soit une intégrale du système canonique (1). Donc toute intégrale complète $W(q_1, q_2, \alpha, h)$ de l'équation $H=h$ peut être regardée comme une intégrale commune des deux équations (8) où $f=\alpha$ est une certaine intégrale première de (1). D'autre part la fonction W satisfaisant aux deux équations (8), nous avons démontré que le mouvement du système est déterminé par les égalités

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta, \qquad t = \frac{\partial W}{\partial h} + \beta'$$

Ce sont précisément les égalités auxquelles conduit le théorème de Jacobi.

La connaissance d'une intégrale première $f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha$ de (1) permet ainsi, dans ce cas particulier, de déterminer une intégrale complète de l'équation de Jacobi à l'aide d'une simple quadrature portant sur une différentielle totale. Nous verrons dans une leçon prochaine quel est l'analogue de ce théorème pour les équations (8) où le nombre k des variables est quelconque.

Cas où plusieurs paramètres q ne figurent pas dans H. — Supposons que H soit de la forme :

$$H = H(t, q_{i+1}, q_{i+2}, \cdots q_k \,;\, p_1, p_2 \cdots p_k)$$

On pourra chercher une intégrale de l'équation de Jacobi de la forme

$$V = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_i q_i + W(t, q_{i+1}, \cdots q_k)$$

La fonction W doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_{i+1}, \cdots q_k, \alpha_1, \cdots \alpha_i, \frac{\partial W}{\partial q_{i+1}}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 0$$

Si, pour des valeurs quelconques données aux constantes $\alpha_1, \dots \alpha_k$, on connait une intégrale complète $W(t, q_{i+1}, \dots q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_k)$ de cette dernière équation, la fonction $V = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_i q_i + W$ est une intégrale complète de l'équation de Jacobi, ainsi qu'on le voit bien aisément. Le mouvement du système est déterminé par les équations

$$q_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \cdots\cdots\cdots q_i + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{i+1}} = \beta_{i+1} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k .$$

Lorsque H est indépendant de t en même temps que de $q_1, q_2, \dots q_i$, on pose :

$$V = -ht + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots\dots + \alpha_i q_i + W(q_{i+1}, \dots\dots q_K),$$

et on cherche une intégrale complète W de l'équation :

$$H\left(q_{i+1}, \dots q_K, \alpha_1, \dots \alpha_i, \frac{\partial W}{\partial q_{i+1}}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_K}\right) = h.$$

Les égalités qui définissent le mouvement sont alors :

$$t = \frac{\partial W}{\partial h} + \gamma, \quad q_1 = \beta_1 - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \dots\dots\dots\dots q_i = \beta_i - \frac{\partial W}{\partial \alpha_i},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{i+1}} = \beta_{i+1}, \dots\dots\dots\dots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{K-1}} = \beta_{K-1}.$$

En particulier, si $i = k-1$, W (fonction de la seule variable q_K) est définie par une quadrature :

$$H\left(q_K, \alpha_1, \dots \alpha_{K-1}, \frac{\partial W}{d q_K}\right) = h.$$

Ce cas se présente souvent dans les problèmes à deux paramètres : t et q_1 sont alors donnés en fonction de q_2 par les équations

$$t = \gamma + \frac{\partial W}{\partial h}(q_2, \alpha, h), \qquad q_1 = \beta - \frac{\partial W}{\partial \alpha}(q_2, \alpha, h).$$

Dans ce cas particulier les équations canoniques admettent l'intégrale $p_1 = \alpha$ qui jointe à l'égalité $H = h$, détermine précisément la fonction

$$\int p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 \equiv \alpha q_1 + W(q_2, \alpha, h).$$

Applications. — . Indiquons immédiatement quelques exemples auxquels s'appliquent ces remarques. Soit d'abord à étudier le mouvement d'un point matériel M sous l'action d'une force centrale fonction de la seule distance $r = OM$ du point M au centre O de la force.

Si nous rapportons le point aux coordonnées polaires r et θ du plan de la trajectoire, on a :

$$T = \frac{m}{2}\left[r'^2 + r^2\theta'^2\right] = \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right]$$

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{p^2}\right] - U(r).$$

L'équation de Jacobi admet une intégrale de la forme $V = -ht + \alpha\theta + W(r, \alpha, h)$;

W est donné par la quadrature :

$$W = \int \frac{\sqrt{2mr^2(U+h)-\alpha^2}}{r}\, dr\,,$$

et t et θ par les égalités :

$$t = \int \frac{mr\,dr}{\sqrt{2mr^2(U+h)-\alpha^2}} + C^{te}, \qquad \theta = \int \frac{\alpha\, dr}{r\sqrt{2mr^2(U+h)-\alpha^2}} + C''^{te}.$$

Ces quadratures coïncident avec celles que nous avons obtenues précédemment par d'autres méthodes. Mais il convient de remarquer que ces deux quadratures se trouvent effectuées par le fait même si on sait effectuer la quadrature unique qui donne W. C'est là un fait que la méthode de Jacobi met en évidence.

Soit de même à calculer le mouvement d'un point M sur une surface de révolution, quand la force donnée admet une fonction de force $U(r)$: r désigne la distance du point M à l'axe de révolution, θ l'angle des deux plans zoM et xoz. On a, si $z=\varphi(r)$ est l'équation de la surface :

$$T = \frac{m}{2}\left[r'^2\,[1+\varphi'^2] + r^2\theta'^2 \right] = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_1^2}{1+\varphi'^2} + \frac{p_2^2}{r^2}\right)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_1^2}{1+\varphi'^2} + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - U(r).$$

Les fonctions $W(r,\alpha,h)$ et $t(r)$, $\theta(r)$ sont déterminées ici par les égalités :

$$W = \int \frac{\sqrt{(1+\varphi'^2)\,[2mr^2(U+h)-\alpha^2]}}{r}\, dr,$$

$$t = \int \frac{mr\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{2mr^2(U+h)-\alpha^2}}\, dr, \qquad \theta = \int \frac{\alpha\sqrt{1+\varphi'^2}}{r\sqrt{2mr^2(U+h)-\alpha^2}}\, dr.$$

Il convient de faire au sujet de ces deux intégrales la même remarque que plus haut. Cette remarque peut d'ailleurs se répéter dans tous les cas analogues.

Il serait facile d'appliquer la méthode de Jacobi à tous les exemples traités précédemment où H, par un choix convenable de variables, peut être ramené à ne dépendre que de q_k et des variables p_i. Bornons-nous à reprendre l'exemple traité aux pages 106-107.

Un corps solide de révolution pesant et homogène est traversé suivant son axe par une aiguille qui lui est assujettie et dont les extrémités glissent sans frottement, l'une sur une verticale OZ, l'autre sur le plan horizontal xoy. Étudier le mouvement.

La force vive du système $2T$ (voir page 108) est égale à :

$$(A+Md^2)\sin^2\theta\,\psi'^2+\left[A+M\{d^2\cos^2\theta+(l-d)^2\sin^2\theta\}\right]\theta'^2+\left[C\cos\theta\,\psi'+\varphi'\right]^2,$$

et la fonction de forces U est $Mg\,(l-d)\cos\theta$. Si on pose :

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\theta'},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial\varphi'},\quad p_3=\frac{\partial T}{\partial\psi'},\quad \text{il vient :}$$

$$H=\frac{(p_3-C\cos\theta\,p_2)^2}{2(A+Md^2)\sin^2\theta}+\frac{p_1^2}{2\left[A+M\{d^2\cos^2\theta+(l-d)^2\sin^2\theta\}\right]}+\frac{p_2^2}{2}-Mg\,(l-d)\cos\theta.$$

On peut prendre pour fonction W la fonction définie ainsi :

$$W=\alpha\varphi+\alpha'\psi+W_1(\theta),\ \text{avec}$$

$$W_1=\int d\theta\sqrt{\left[A+M\{d^2\cos^2\theta+(l-d)^2\sin^2\theta\}\right]\left[2Mg(l-d)\cos\theta+2h-\alpha^2-\frac{(\alpha'-C\alpha\cos\theta)^2}{(A+Md^2)\sin^2\theta}\right]}$$

et le mouvement est alors déterminé par les égalités :

$$t=\frac{\partial W_1}{\partial h}+C^{te},\qquad \varphi=\beta-\frac{\partial W_1}{\partial\alpha},\ \psi=\beta'-\frac{\partial W_1}{\partial\alpha'},$$

où $\alpha,\beta,\alpha',\beta',h$ sont des constantes arbitraires. On retrouve ainsi les équations de la page 108. Les trois quadratures qui donnent t, φ et ψ s'effectueront dès qu'on saura effectuer celle qui donne W_1.

Théorèmes de Liouville et de M. Stæckel.

Supposons maintenant, que la force vive du système soit de la forme :

$$T=\frac{\varphi_1(q_1)+\varphi_2(q_2)+\dots+\varphi_k(q_k)}{2}\left[A_1(q_1)q_1'^2+A_2(q_2)q_2'^2+\dots+A_k(q_k)q_k'^2\right],$$

et que les forces dérivent du potentiel

$$U=\frac{\psi_1(q_1)+\psi_2(q_2)+\dots+\psi_k(q_k)}{\varphi_1(q_1)+\varphi_2(q_2)+\dots+\varphi_k(q_k)}.$$

On a pour H l'expression :

$$H=\frac{1}{2(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_k)}\left[\frac{p_1^2}{A_1}+\frac{p_2^2}{A_2}+\dots+\frac{p_k^2}{A_k}\right]-\frac{\psi_1+\psi_2+\dots\psi_k}{\varphi_1+\varphi_2+\dots\varphi_k}.$$

Inversement si H est de cette forme, T et U sont de la forme indiquée (voir p. 144).

L'équation aux dérivées partielles en W, à savoir :

$$(2)'\qquad \sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{A_i}\left(\frac{dW}{dq_i}\right)^2=2\sum_{i=1}^{i=k}(\psi_i+h\,\varphi_i),$$

admet alors une intégrale complète de la forme :

$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)+\dots+W_k(q_k);$$

il suffit en effet de prendre pour $W_i(q_i)$ la fonction donnée par l'égalité :

$$W_i(q_i) = \int dq_i \sqrt{2A_i(\psi_i + h\varphi_i + \alpha_i)}$$

les α_i étant des constantes astreintes à la seule condition :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0.$$

La fonction $W = \Sigma W_i$ satisfera alors identiquement à l'équation (2).

Si on pose $F_i = \sqrt{\psi_i + h\varphi_i + \alpha_i}$, le mouvement sera défini par les égalités :

$$\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial W_k}{\partial \alpha_k} = C^{te} \quad [i = 1, 2, \dots (k-1)] \quad \left(\text{puisque } \alpha_k = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})\right) \text{ et } t + C^{te} = \frac{\partial W}{\partial h},$$

égalités qui s'écrivent :

$$\int \sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\, dq_1 + \beta_1 = \int \sqrt{\frac{A_2}{F_2}}\, dq_2 + \beta_2 = \dots\dots = \int \sqrt{\frac{A_k}{F_k}}\, dq_k + \beta_k,$$

$$\text{et} \quad t\sqrt{2} + C^{te} = \int \varphi_1 \sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\, dq_1 + \varphi_2 \sqrt{\frac{A_2}{F_2}}\, dq_2 + \dots + \varphi_k \sqrt{\frac{A_k}{F_k}}\, dq_k;$$

on retrouve ainsi les mêmes égalités qu'en partant des équations de Lagrange (voir pages 109-112). Mais d'une part ces égalités découlent plus directement du théorème de Jacobi ; d'autre part, nous voyons que les $2k$ intégrales qui définissent le mouvement peuvent s'effectuer si on sait effectuer les quadratures qui définissent les W_i.

Dans une autre leçon nous donnerons quelques applications nouvelles du théorème de Liouville. J'indiquerai ici immédiatement une généralisation de ce théorème. Cette généralisation, qui est due à M. P. Stæckel s'étend à un nombre quelconques de paramètres. Pour ne pas compliquer la notation, nous nous placerons dans le cas de trois paramètres.

Soit Δ le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(q_1) & \varphi_2(q_2) & \varphi_3(q_3) \\ \psi_1(q_1) & \psi_2(q_2) & \psi_3(q_3) \\ \chi_1(q_1) & \chi_2(q_2) & \chi_3(q_3) \end{vmatrix}$$

et Φ_1, Φ_2, Φ_3 les mineurs de Δ par rapport aux éléments de la première ligne, Ψ_1, etc, X_1, etc. les mineurs relatifs à ψ_1, etc, χ_1 etc.

Supposons que la force vive $2T$ d'un système et la fonction de forces U soient de la forme suivante :

$$\text{(A)} \qquad 2T = \Delta\left(\frac{q_1'^2}{\Phi_1} + \frac{q_2'^2}{\Phi_2} + \frac{q_3'^2}{\Phi_3}\right), \qquad U = \frac{f_1(q_1)\Phi_1 + f_2(q_2)\Phi_2 + f_3(q_3)\Phi_3}{\Delta}.$$

La méthode de Jacobi va permettre de déterminer le mouvement par quadratures.

Nous avons en effet ici :

$$H = \frac{1}{2\Delta}\left[p_1^2\Phi_1 + p_2^2\Phi_2 + p_3^2\Phi_3\right] - \frac{f_1\Phi_1 + f_2\Phi_2 + f_3\Phi_3}{\Delta}$$

et l'équation (2) en W s'écrit :

$$(2)' \quad \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 \Phi_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 \Phi_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 \Phi_3 = 2\left(f_1\Phi_1 + f_2\Phi_2 + f_3\Phi_3 + h\Delta\right).$$

Cherchons s'il existe une intégrale complète de la forme :

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + W_3(q_3).$$

Si nous observons qu'on a :

$$\sum_{1,2,3} \varphi \Phi \equiv \Delta, \quad \sum_{1,2,3} \psi \Phi \equiv 0, \quad \sum_{1,2,3} \chi \Phi \equiv 0,$$

on voit qu'en prenant :

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 = 2\left[f_1 + h\varphi_1 + \alpha\psi_1 + \alpha'\chi_1\right] = F_1(q_1),$$

$$\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 = 2\left[f_2 + h\varphi_2 + \alpha\psi_2 + \alpha'\chi_2\right] = F_2(q_2),$$

$$\left(\frac{dW_3}{dq_3}\right)^2 = 2\left[f_3 + h\varphi_3 + \alpha\psi_3 + \alpha'\chi_3\right] = F_3(q_3),$$

l'équation (2) est vérifiée identiquement : h, α, α', désignent des constantes arbitraires.

Le mouvement est défini par les égalités :

$$\beta = \int \frac{\psi_1\, dq_1}{\sqrt{F_1(q_1)}} + \int \frac{\psi_2\, dq_2}{\sqrt{F_2(q_2)}} + \int \frac{\psi_3\, dq_3}{\sqrt{F_3(q_3)}}$$

$$\gamma = \int \frac{\chi_1\, dq_1}{\sqrt{F_1(q_1)}} + \int \frac{\chi_2\, dq_2}{\sqrt{F_2(q_2)}} + \int \frac{\chi_3\, dq_3}{\sqrt{F_3(q_3)}}$$

$$\text{et } \sqrt{2}\, t + C^{te} = \int \frac{\varphi_1\, dq_1}{\sqrt{F_1(q_1)}} + \int \frac{\varphi_2\, dq_2}{\sqrt{F_2(q_2)}} + \int \frac{\varphi_3\, dq_3}{\sqrt{F_3(q_3)}}$$

Le théorème précédent renferme le théorème de Liouville comme cas particulier. Car si T et U sont de la forme qu'exige le théorème de Liouville, on voit aussitôt qu'on peut toujours les mettre sous la forme (A).

16e Leçon

Étude des trajectoires réelles. — Équations des trajectoires quand les forces sont nulles ou dérivent d'un potentiel.

Nombre des constantes arbitraires dont dépendent les trajectoires. —— Considérons un système S, où ni les liaisons ni les forces ne dépendent du temps. Le mouvement de ce système est déterminé par les équations de Lagrange :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2 \cdots q_k, q'_1, \dots q'_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \quad (i = 1, 2, \dots k),$$

$$\text{où } 2T \equiv \sum_{i,j} q'_i q'_j A_{ij}(q_1 q_2 \cdots q_k), \qquad (A_{ij} \equiv A_{ji}).$$

Si $t_0, q_2^0, \dots q_k^0, q_1'^0, q_2'^0 \dots q_k'^0$ sont les valeurs de $t, q_2 \dots q_k, q_1', \dots q_k'$ pour une valeur donnée de q_1, soit $q_1 = 0$, ces équations définissent $q_1, q_2, \dots q_k$ en fonction de $t - t_0$ et des $(2k-1)$ constantes arbitraires $q_2^0, \dots q_k^0, q_1'^0, \dots q_k'^0$; par suite $q_2, q_3 \dots q_k$ sont des fonctions de q_1 qui dépendent au plus de $2k-1$ constantes arbitraires (1) ; d'autre part, elles dépendent au moins de $(2k-2)$ constantes, car pour q_1 donné, $q_2, q_3, \dots q_k$ et $\frac{dq_2}{dq_1}$ $\left(\text{ou } \frac{q'_2}{q'_1}\right)$, ... $\frac{dq_k}{dq_1}$ $\left(\text{ou } \frac{q'_k}{q'_1}\right)$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. Nous allons voir qu'en général le nombre ν des constantes dont dépendent les trajectoires du système est bien égal à $2k-1$, et trouver à quelles conditions ce nombre se réduit à $2k-2$.

Résolvons les équations (1) par rapport aux q_i''. Si Δ désigne le discriminant de la forme quadratique T, α_i ce que devient Δ quand on y remplace les éléments de la i^e colonne par $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \dots \mathcal{Q}_k$, enfin si P_i représente une forme quadratique par rapport aux q', on peut écrire :

$$(2) \qquad q_i'' = P_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = P_i + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots k).$$

Nous avons d'autre part :

$$q_i'' = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} q_1'^2 + \frac{dq_i}{dq_1} q_1'' ,$$

d'où en remplaçant q_1'' et q_i'' par leurs valeurs tirées de (2) :

$$(3) \quad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = \frac{\left[P_i - \frac{dq_i}{dq_1} P_1\right] + \left[\beta_i - \frac{dq_i}{dq_1}\beta_1\right]}{q_1'^2} \qquad (i = 2, 3, \dots k).$$

Dans ce qui va suivre, représentons par $q'(i)$, $q''(i)$ .... les dérivées $\frac{dq_i}{dq_1}, \frac{d^2q_i}{dq_1^2}, \dots$ et par ... Π_i ce que devient P_i quand on y remplace q_1' par 1, q_2' par $q'_{(2)}, \dots,$ q_k' par $q'_{(k)}$.

L'équation (3) devient alors :

$$(4) \quad q''_{(i)} = \Pi_i - q'_{(i)}\Pi_1 + \frac{\beta_i - q'_{(i)}\beta_1}{q_1'^2} \qquad (i = 2, 3, \dots k),$$

les β étant des fonctions de $q_1, q_2, \dots q_k, q_1', q'_{(2)} \dots q'_{(k)}$. Deux cas sont alors à distinguer : si le second membre des équations (4) est indépendant de q_1', le système (4) forme un système de $(k-1)$ équations du second ordre portant sur les k variables $q_1, q_2, \dots q_k$, et ces équations définissent q_2, q_3, q_k en fonction de q_1 et de $(2k-2)$ constantes arbitraires $q_2^0, \dots q_k^0, q'^0_{(2)}, q'^0_k$. — Si au contraire q_1' figure dans une au moins des équations (4), [soit dans l'équation $i = 2$], on peut, pour q_1 donné, prendre :

$$q_2, \dots q_k, q'_{(2)} \dots q'_{(k)},$$

arbitrairement, et de plus disposer de $q_1'^0$ pour que $q''_{(2)}$ ait une valeur arbitraire ; les fonctions $q_2, q_3 \dots q_k$ de q_1 dépendent donc de $(2k-1)$ constantes distinctes.

---

(1) Dans ce qui va suivre, je dirai que tout système de telles fonctions $q_2, q_3 \dots q_k$ de q_1, définit une trajectoire de S.

Pour que les seconds membres de toutes les équations (4) soit indépendantes de q'_1, il faut et il suffit que les $(k-1)$ expressions $\frac{\beta_i - \frac{q'_i}{q'_1}\beta_1}{q'^2_1}$ soient homogènes et de degré zéro par rapport aux q'_i. En sorte que le résultat auquel nous arrivons peut s'énoncer ainsi :

« Le nombre ν des constantes distinctes dont dépendent les trajectoires du système est égal à $(2k-1)$ ou à $(2k-2)$. Pour qu'il se réduise à $(2k-2)$, il faut et il suffit que les $(k-1)$ expressions $(\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i)$ soient homogènes et du 3ᵉ degré par rapport aux q'_i.

Si on désigne par α_{ij}, le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij}, on a :

$$(5) = \beta_i = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_{i1} Q_1 + \alpha_{i2} Q_2 + \cdots + \alpha_{ik} Q_k\right].$$

Le nombre ν sera donc en particulier égal à $(2-k-2)$ chaque fois que les forces Q_i seront homogènes et du second degré par rapport aux $q'_1, q'_2, \dots q'_k$.

Quand les Q_i ne dépendent pas des vitesses, il en est de même des β_i ; pour que ν soit égal à $(2k-2)$ il faut alors et il suffit que les expressions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i$, soient identiquement nulles, autrement dit, qu'on ait :

$$(6) \quad \frac{\beta_1}{q'_1} = \frac{\beta_2}{q'_2} \cdots = \frac{\beta_k}{q'_k} ;$$

ce qui n'est possible, les β ne dépendant pas des q'_i, que si on a :

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \cdots \equiv \beta_k \equiv 0,$$

et par suite

$$Q_1 \equiv Q_2 \cdots \equiv Q_k \equiv 0. \quad (1)-$$

Les trajectoires d'un système pour lequel les Q_i sont nuls, dépendent donc de $(2k-2)$ paramètres ; nous donnerons à ces trajectoires le nom de géodésiques du ds^2 de T, en posant :

$$ds^2 = \sum A_{ij}\, dq_i\, dq_j .$$

C'est le cas d'un système sans frottement et qui n'est soumis à aucune force donnée. – Quand les forces Q_i, fonctions seulement de $q_1, q_2, \dots q_k$, ne sont pas toutes nulles, les trajectoires dépendent toujours de $(2k-1)$ paramètres.

Un cas remarquable est celui où, les forces dépendant des vitesses, les trajectoires des systèmes coïncident avec les géodésiques du ds^2. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les équations (6) soient vérifiées, autrement dit, qu'on ait :

$$\beta_1 = \lambda q'_1, \quad \beta_2 = \lambda q'_2, \dots\dots \beta_k = \lambda q'_k,$$

et par suite d'après (5) :

$$(7) \quad \lambda q'_i = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_{i1} Q_2 + \alpha_{i2} Q_2 + \dots + \alpha_{ik} Q_k\right], \; (i = 1, 2, \dots k),$$

Mais d'autre part, soit $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$, on sait qu'on a :

$$q'_i = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_{i1} p_1 + \alpha_{i2} p_2 + \dots + \alpha_{ik} p_k\right].$$

---

(1) – Les équations (5) où on annule les β_i n'ont d'autre solution que : $Q_1 \equiv Q_2 \cdots \equiv Q_k \equiv 0$, car leur déterminant, est une puissance de Δ et par suite n'est pas nul.

Les équations (7) équivalent donc aux suivantes :

$$(8) \quad \mathcal{Q}_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \; \mathcal{Q}_2 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \; \ldots\ldots\ldots \; \mathcal{Q}_k = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_k}.$$

Pour que les trajectoires de (1) soient les mêmes que quand toutes les forces $(\mathcal{Q}_i)$ sont nulles, il faut donc et il suffit que $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots \mathcal{Q}_k$, soient proportionnels à $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots \frac{\partial T}{\partial q'_k}$.

Exemples — Interprétons dans certains cas particuliers ces conditions (8). Tout d'abord, si T est la surface vive d'un point matériel libre, on a : $T = \frac{m}{2}[x'^2+y'^2+z'^2]$ et les conditions (8) expriment que X, Y, Z, sont proportionnels à x', y', z', c'est-à-dire que la force qui s'exerce sur ce point a pour ligne d'action la vitesse. Quand un point libre est soumis à une force dirigée constamment suivant sa vitesse (ou en sens contraire), il décrit une droite, quelles que soient les conditions initiales.

Si maintenant le système est formé de points matériels libres M_i, on a : $T = \Sigma \frac{m_i}{2}[x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]$, et les conditions (8) expriment que la force (F_i) qui s'exerce sur chaque point M_i est dirigée selon la vitesse V_i de M_i (dans le même sens ou en sens contraire), et que de plus $\frac{F_i}{m_i v_i} = \frac{F_1}{m_1 v_1}$ $(i = 2, 3 \ldots k)$.

Enfin, traitons le cas d'un point M mobile sur une surface S. Les conditions (8) expriment alors que la force donnée est constamment dans le plan normal à la surface et tangent à la trajectoire. En effet, soient $x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)$ les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface. La force totale qui s'exerce sur M est, comme on sait, la résultante de la réaction normale et de la force donnée (F') [force active et force de frottement, s'il y a frottement]. Représentons par (F_1) ou (X_1, Y_1, Z_1) la projection de la force donnée (F') sur le plan tangent à S ; on a entre $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, X_1, Y_1, Z_1$ les relations :

$$(9) \quad \mathcal{Q}_1 = X_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z_1 \frac{\partial z}{\partial q_1}, \; \mathcal{Q}_2 = X_1 \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y_1 \frac{\partial y}{\partial q_2} + Z_1 \frac{\partial z}{\partial q_2};$$

inversement, si (F_1) désigne un segment tangent à S et dont les projections satisfont aux équations (9), c'est la composante tangente à S de (F'). Pour que ce segment (F_1) soit tangent à la trajectoire, il faut qu'on ait :

$$\frac{X_1}{\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2} = \frac{Y_1}{\frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2} = \frac{Z_1}{\frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2},$$

et par suite en appelant μ, la valeur commune de ces rapports :

$$\mathcal{Q}_1 = \mu \left[q'_1 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 \right) + q'_2 \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \right] = \frac{\mu}{m} \frac{\partial T}{\partial q'_1}$$

et de même $\mathcal{Q}_2 = \frac{\mu}{m} \frac{\partial T}{\partial q'_2}$.

Inversement, si $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont de cette forme, le segment :

$$X_1 = \mu \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 \right), \; Y_1 = \mu \left[\frac{\partial y}{\partial y_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 \right], \; Z_1 = \mu \left[\frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 \right]$$

est un segment tangent à la trajectoire, donc à la surface, qui satisfait aux équations (9), et représente par suite la composante de (F') tangente à S. Les conditions (8) expriment donc bien que (F') se projette sur le plan tangent à S suivant la tangente à la trajectoire. Ce sera le cas par exemple d'un point mobile avec frottement sur une surface dans un milieu résistant, aucune autre force n'agissant sur lui.

Nous allons maintenant étudier exclusivement les systèmes soumis à des forces indépendantes des vitesses.

Étude des trajectoires dans le cas où les forces ne dépendent pas des vitesses.

——— . Il convient d'après ce qui précède de distinguer ce cas en deux autres, suivant que toutes les forces sont nulles ou non.

I. Tous les coefficients Q_i sont nuls. — Les trajectoires (géodésiques de ds^2) dépendent alors de $(2k-2)$ constantes et sont définies [voir page 204] par $(k-1)$ équations de la forme:

$$(4)' \quad q''(i) = \Pi_i - q'(i)\,\Pi_1 \qquad (i = 2, 3 \ldots k).$$

Ces équations une fois intégrées, le mouvement du système est donné par l'égalité:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{h}} = \frac{dq_1}{\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\Sigma A_{ij}\, q'(i)\, q'(j)},$$

où $q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}$, $q'_{(1)} = 1$, et où h représente, pour chaque géodésique, une constante arbitraire. Si donc on exprime $q_2, q_3 \ldots q_k$ en fonction de q_1 et des $(2k-2)$ constantes arbitraires $c_1, c_2 \ldots c_{2k-2}$, on aura:

$$t = C \int f\left[q_1, c_1, c_2, \ldots c_{2k-2}\right] dq_1 + C',$$

C représentant une constante quelconque. Plus généralement soit:

$$\varphi\left[q_1, q_2, \cdots q_k, q'(2) \cdots q'(k), c\right] = \alpha,$$

une intégrale première des équations (4)' dépendant d'un paramètre arbitraire C, on pourra écrire:

$$dt = \varphi \sqrt{\Sigma A_{ij}\, q'(i)\, q'(j)}\; dq_1,$$

et cette égalité, jointe aux équations (4)' définira le même mouvement que (1). Inversement, si l'égalité:

$$(a) \qquad dt = \psi\left[q_1, q_2, \cdots q_k, q'(2) \cdots q'(k)\right] \sqrt{\Sigma A_{ij}\, q'(i)\, q'(j)}\; dq_1$$

où ψ est une fonction quelconque, est compatible avec les équations (1), autrement dit, si jointe aux équations (4)' elle définit un mouvement de S, ψ est une intégrale première des géodésiques.

En effet, considérons une géodésique quelconque; tout le long de cette géodésique, on a d'après (1), $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, et par suite, d'après (a), on doit avoir aussi : — $\psi = \frac{1}{\sqrt{h}} = C^{te}$. Donc ψ est une intégrale première de (4)'.

Nous donnerons tout à l'heure une forme explicite des équations (4)'.

Pour l'instant, j'insiste seulement sur ce fait qu'à une même trajectoire correspondent une infinité de mouvements distincts, j'entends de mouvements où, aux mêmes positions, les vitesses sont différentes. Ces mouvements se déduisent d'ailleurs d'un seul d'entre eux en multipliant toutes les vitesses par un même nombre constant.

II. Les coefficients $Q_i(q_1, q_2 \cdots q_k)$ ne sont pas tous nuls. — Équations des trajectoires. — Nous savons que les trajectoires dépendent de $(2k-1)$ paramètres. Pour former les équations différentielles qui définissent ces trajectoires sans l'intermédiaire de t, observons que nous avons d'abord d'après (4): [voir page 204].

$$(10) \qquad \frac{q''_{(i)} + q'_{(i)}\Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)}\beta_1} = \frac{q''_{(2)} + q'_{(2)}\Pi_1 - \Pi_2}{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1}, \quad (i = 3, 4, \ldots k),$$

la valeur commune de ces rapports étant $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$.

D'autre part, différentions l'égalité:

$$q_1'^2 = \frac{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1}{q''_{(2)} + q'_{(2)}\Pi_1 - \Pi_2} \equiv \frac{\psi_2}{\chi_2}$$

par rapport à q_1; il vient, en remarquant que $\frac{d}{dq_1} \cdot q_1'^2 = 2 q_1' q_1'' \frac{dt}{dq_1} = 2 q_1''$, et en remplaçant q_1'' par $(\Pi_1 q_1'^2 + \beta_1) \equiv \Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi_2} + \beta_1$:

$$2\Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi^2} + 2\beta_1 = \frac{d}{dq_1}\frac{\psi_2}{\chi_2},$$

ou encore:

$$(11) \qquad \frac{\frac{d}{dq_1}\left[q''_{(2)} + q'_{(2)}\Pi_1 - \Pi_2\right]}{q''_{(2)} + q'_{(2)}\Pi_1 - \Pi_2} + \Pi_1 = \frac{\frac{d}{dq_1}\left(\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1\right)}{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1} - \frac{2\beta_1\left[q''_{(2)} + q'_{(2)}\Pi_1 - \Pi_2\right]}{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1}$$

équation de la forme:

$$q'''_{(2)} = \frac{-3 q''^2_{(2)} + q''_2 M_3 + M_5}{M_0 - q'_{(2)}},$$

où M_3 et M_5 désignent des polynômes du 3e et du 5e degré en $q'_{(2)}, q'_{(3)} \cdots q'_{(k)}$, et M_0 une fonction des q_i.

Les équations (10) et (11) définissent les trajectoires; il serait facile de leur donner une forme plus symétrique; mais cela importe peu pour notre objet.

Observons que dans les équations (10) et (11) les expressions $\Pi_1 \ldots \Pi_k$ ne dépendent que de la force vive T; seuls les coefficients β_i varient avec les forces Q_i. Observons de plus que les géodésiques de T s'obtiennent en égalant à zéro tous les numérateurs χ_i des rapports (10).

Une première conséquence de ces remarques, c'est que les géodésiques de T font partie des trajectoires quelles que soient les forces $Q_i(q_1, q_2 \cdots q_k)$. En effet, ces géodésiques, satisfaisant aux équations $\chi_i = 0$, satisfont aux équations (10); d'autre part, l'équation (11) peut s'écrire:

$$\frac{d\chi_2}{dq_1} = \chi_2 A;$$

et comme on a, pour une géodésique quelconque, $\chi_2 = 0$, $\frac{d\chi_2}{dq_1} = 0$, elle est aussi vérifiée. Les géodésiques forment donc un faisceau de trajectoires à $(2k-2)$ paramètres.

Détermination du temps. — Quand le système (10), (11) est intégré, on connait $q_2, q_3 \dots q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires, soit, pour q_1^o, les valeurs initiales $q_2^o, \dots q_k^o, q'^o_{(2)}, q'^o_{(3)} \dots q'^o_{(k)}, q''^o_{(2)}$. A ces valeurs initiales prises au hasard correspond une trajectoire et une seule. Le long de cette trajectoire, le mouvement est défini par une quelconque des égalités :

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{\chi_i}{\psi_i}} = dq_1 \sqrt{\frac{q''(i) + q'(i)\,\Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'(i)\,\beta_1}}$$

On voit que t se calcule par une quadrature et que pour une trajectoire donnée, on a :

$$t = \pm f\,(q_1) + C^{te},$$

f désignant une fonction déterminée de q_1 (qui dépend de la trajectoire).

Aux valeurs $q_1^o, q_2^o \dots q_k^o, q_1'^o, \dots q_k'^o$, correspond un système et un seul de valeurs $q_1^o, q_2^o, \dots q_k^o, q'^o_{(2)}, \dots q'^o_{(k)}, q''^o_{(2)}$, et ce système ne change pas quand on change le signe de tous les $q_i'^o$. Les deux trajectoires définies par les conditions initiales $(q_i^o, q_i'^o)$ et $(q_i^o, -q_i'^o)$ coïncident donc. Il suit de là que si, aux instants t_1 et t_2, chaque point du système matériel occupe la même position avec des vitesses égales et directement opposées, on passe du premier mouvement au second en changeant t en $t_1 + t_2 - t$.

On a en effet pour le premier mouvement :

$$t - t_1 = + f(q_1) - f(q_1^o)$$

et pour le second :

$$t - t_2 = -[f(q_1) - f(q_1^o)],$$

si q_1^o est la valeur commune de q_1 aux deux instants t_1 et t_2.

On voit qu'une trajectoire donnée ne peut être parcourue que de deux manières distinctes ; pour chaque position du système sur cette trajectoire, les vitesses $q_1', q_2', \dots q_k'$ sont déterminées au signe près par les égalités :

$$q_1' = \pm \sqrt{\frac{\psi_i}{\chi_i}}, \quad q_2' = q'(2)\, q_1', \quad \dots q_k' = q'(k)\, q_1'.$$

En particulier, si cette trajectoire est une géodésique, on a constamment $q_1' = \infty$, ou si on veut $\frac{dt}{dq_1} = 0$. Inversement, si on prend pour $q_1^o, \dots q_k^o, q'^o_{(2)}, \dots, q'^o_{(k)}, q''^o_{(2)}$ des valeurs quelconques qui annulent χ_2, la trajectoire définie par ces valeurs est unique, et par suite coïncide avec la géodésique qui satisfait à ces conditions initiales, puisque cette géodésique est aussi une trajectoire. Tout le long de cette trajectoire, $\frac{dt}{dq_1}$ sera donc nul. On peut dire encore que le faisceau des géodésiques est le faisceau à $(2k-2)$ paramètres obtenu en assujettissant les $(2k-1)$ paramètres des trajectoires à la condition $\frac{1}{T_0} = 0$. Si notamment il existe une fonction de forces, à chaque valeur h de la constante de l'intégrale des forces vives correspond un faisceau à $(2k-1)$ paramètres ; le faisceau des géodésiques correspond à la valeur $h = \infty$.

Trajectoires remarquables. — Il peut exister toutefois des trajectoires exceptionnelles que nous appellerons trajectoires **remarquables** pour lesquelles les conclusions précédentes sont en défaut : ce sont les trajectoires qui donnent aux rapports $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ la forme $\frac{0}{0}$, autrement dit qui satisfont à la fois à toutes les égalités :

$$q''_{(i)} + \Pi_1 q'_{(i)} - \Pi_i = 0\ ; \quad \beta_i - q'_{(i)}\beta_1 = 0, \quad (i = 2, 3 \dots k).$$

Ces trajectoires sont donc les géodésiques qui satisfont en même temps aux équations :

$$(12) \qquad q'_{(2)} = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \dots \qquad q'_{(k)} = \frac{\beta_k}{\beta_1}.$$

En général, le système (12) et les équations des géodésiques n'ont pas d'intégrale commune : dans tous les cas, ces intégrales communes ne peuvent dépendre, d'après (12), de plus de $(k-1)$ constantes arbitraires.

Sur une de ces trajectoires remarquables, une infinité de mouvements sont possibles. En effet, nous pouvons remplacer les équations du mouvement par les équations (4):

$$(4) \qquad 0 = q''_{(i)} + q'_{(i)}\Pi_1 - \Pi_i + \frac{\beta_1 q'_{(i)} - \beta_i}{q_1'^2} \equiv \chi_i - \frac{\psi_i}{q_1'^2},$$

jointe à une des équations de Lagrange, ou, si on veut, à l'égalité des forces vives :

$$T = \int [Q_1 + Q_2 q'_{(2)} + \dots + Q_k q'_{(k)}]\, dq_1.$$

Par hypothèse, la trajectoire considérée satisfaisant aux équations $\chi_i = 0$, $\psi_i = 0$, satisfait aux équations (4) ; le mouvement sur cette trajectoire sera donc défini par la seule égalité :

$$(13) \qquad \frac{1}{2} q_1'^2 \sum A_{ij}\, q'_{(i)}\, q'_{(j)} = \int [Q_1 + Q_2 q'_{(2)} + \dots + Q_k\, q'_{(k)}]\, dq_1,$$

ou encore :

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{\varphi(q_1)}{2[f(q_1) + h]}}$$

φ et f étant deux fonctions de q_1 déterminées pour la trajectoire considérée.

Observons qu'on peut toujours admettre que le coefficient φ de $\frac{1}{2}q_1'^2$ dans (13) n'est pas nul, si la trajectoire correspond à un mouvement réel du système : en effet, on a $2T = \Sigma\, m_j\, (x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2)$, et il est toujours loisible de prendre pour $(q_1, q_2, \dots q_k)$ k des coordonnées x_j, y_j, z_j, qui soient indépendantes. Dans ces conditions $2T$ ne peut s'annuler dans un mouvement réel du système, que si tous les q' sont nuls [1] ; comme on a : $\varphi = 2T[q_1, q_2 \dots q_k, 1, q'_{(2)}, \dots q'_{(k)}]$, φ ne saurait

---

[1] Ajoutons à ce propos, que les q_i étant ainsi choisis, le discriminant Δ de T ne s'annule pour aucune position réelle du système ; autrement les $\frac{\partial T}{dq'_i}$ et par suite T s'annuleraient pour une position réelle du système et des valeurs réelles de q'_i. L'expression $\Sigma\, m_j\, (x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2)$ s'annulerait donc pour des valeurs réelles de x'_j, y'_j, z'_j qui ne seraient pas toutes nulles.

s'annuler pour une position réelle du système et des valeurs réelles de $q'_{(2)}, q'_{(3)} \cdots q'_{(k)}$. Observons encore qu'à tout mouvement réel de S correspond une trajectoire réelle, mais que la réciproque n'est pas nécessairement vraie ; il peut arriver que $q_1, q_2 \cdot\cdot q_k$ étant réels, certaines coordonnées x_j, y_j, z_j des points M_j de S soient imaginaires.

Le mouvement du système sur une trajectoire remarquable est celui d'un système à liaisons complètes ; les points matériels d'un tel système ne parcourent qu'une trajectoire mais ils peuvent la parcourir d'une infinité de manières.

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un point matériel libre, rapporté aux coordonnées rectangulaires x, y, z et soumis à la force (F) ou X, Y, Z. Les trajectoires remarquables sont les droites D (s'il en existe) telles que tout le long de D la force ait D pour ligne d'action. Si notamment F est une force issue de l'origine O, les trajectoires remarquables se composeront de toutes les droites passant par O, faisceau à $(k-1) = 2$ paramètres.

De même, si M est un point mobile sur une surface Σ, les trajectoires exceptionnelles sont les géodésiques de Σ tangentes en chaque point à la projection de la force sur le plan tangent à Σ.

Etude des trajectoires réelles.

Considérons une trajectoire réelle qui ne soit pas une trajectoire remarquable ; le mouvement sur cette trajectoire est défini par une quelconque des égalités : $\frac{dt}{dq_1} = \sqrt{\frac{X_i}{\Psi_i}}$; il est donc réel si $\frac{X_i}{\Psi_i}$ est positif, imaginaire si $\frac{X_i}{\Psi_i}$ est négatif. Les trajectoires réelles (C) se diviseront donc en deux catégories : les trajectoires (C') le long desquelles le mouvement est réel, et les trajectoires (C'') le long desquelles il est imaginaire. Mais ici une question se pose : la même trajectoire analytique peut-elle appartenir en partie à la classe (C') et en partie à la classe C'' ? Pour répondre nettement à cette question, il est nécessaire de discuter en détail certaines propriétés du mouvement.

Démonstration de quelques propriétés des mouvements.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, les paramètres q_i choisis de façon qu'à toute position réelle du système S correspondent des valeurs réelles des q_i et que Δ, le discriminant de T, ne s'annule pour aucune position réelle de S. Pour tout système de valeurs réelles des q_i auquel correspondent des positions réelles de S, les fonctions A_{ij}, Q_i peuvent avoir plusieurs déterminations réelles ; (1) mais nous admettons que ces déterminations définissent autant de fonctions continues des

---

(1) Pour des conditions initiales données du système S, la force vive T, et les forces sont bien définies ; mais si à un même système de valeurs des q_i correspondent plusieurs positions de S, les A_{ij} et les Q_i auront en général plusieurs déterminations. Pour une position de S prise au hasard, il n'y aura aucune ambiguïté sur celles de ces déterminations qu'il faut choisir.

variables réelles q_i, possédant des dérivées premières et secondes continues, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles que nous appelons valeurs singulières des q_i. A ces valeurs des q_i correspondront les positions singulières du système S.

Considérons maintenant un système de valeurs réelles des q_i, soit $q_1 = a_1$, $q_2 = a_2$.., $q_k = a_k$, dans le voisinage duquel la détermination prise pour chacune des fonctions A_{ij}, Q_i est régulière, j'entends reste bien définie et continue ainsi que ses dérivées premières et secondes. Si nous résolvons par rapport aux q_i'' les équations de Lagrange (1) qui définissent le mouvement de S, nous obtenons les équations :

$$(2) \qquad \frac{dq_i}{dt} = q_i' , \quad \frac{dq_i'}{dt} = P_i + \beta_i ,$$

dont les seconds membres sont bien définis, continus ainsi que leurs dérivées premières, tant que les variables q_i' restent finies et que les q_i restent voisins des valeurs $a_1, a_2, .. a_k$. Il existe donc un système d'intégrales de (2) et un seul, soit $q_1(t), \dots q_k(t), q_1'(t) \dots q_k'(t)$, tel que pour $t = t_0$ les q_i prennent les valeurs a_i et les q_i' des valeurs $q_i^{\prime 0}$ données à l'avance.

Précisons ce théorème ; on peut trouver un nombre δ tel que les fonctions A_{ij}, Q_i soient régulières pour les valeurs des q_i satisfaisant aux égalités :

$$|q_i - a_i| \leqslant \delta , \ (i = 1, 2 .. k).$$

Si L est un nombre quelconque, que nous prenons plus grand que δ, les seconds membres des équations (2) restent, en valeur absolue, inférieurs à une certaine limite M, tant que les inégalités :

$$|q_i - a_i| \leqslant \delta , \quad |q_i'| \leqslant L, (i = 1, 2 \dots k)$$

sont vérifiées. D'après cela, soit q_i^0, $q_i^{\prime 0}$ un système de valeurs satisfaisant aux conditions :

$$|q_i^0 - a_i| \leqslant \frac{\delta}{2}, \ |q_i^{\prime 0}| \leqslant \frac{L}{2} \ ,(i = 1, 2 \dots k) ;$$

pour tout système q_i, q_i' tel qu'on ait :

$$|q_i - q_i^0| \leqslant \frac{\delta}{2}, \quad |q_i' - q_i^{\prime 0}| \leqslant \frac{\delta}{2},$$

les seconds membres de (2) restent, en module moindres que M. D'après le théo-rème fondamental sur les équations différentielles[1], le système d'intégrales $q_i(t)$, $q_i'(t)$ qui pour $t = t_0$ prennent les valeurs q_i^0, $q_i^{\prime 0}$ est un système de fonctions de t bien déterminées et continues au moins dans l'intervalle $t_0 - \frac{\delta}{2M}$ à $t_0 + \frac{\delta}{2M}$.

Etudions ce qui passe pour des vitesses initiales $q_i^{\prime 0}$ très grandes en valeur absolue. Prenons comme variable indépendante un des paramètres q, choisi de façon que sa dérivée $\left(\frac{dq}{dt}\right)$ ne soit en module inférieure à aucune des autres dérivées $q_i^{\prime 0}$: soit q_1 ce paramètre. Si nous posons :

$$\frac{1}{q_1'} = \frac{dt}{dq_1} = r_1 ,$$

---

[1] Voir Picard, Traité d'analyse. Tome II, chapitre XI page 308.

les équations (2) deviennent :

$$(2)' \begin{cases} \dfrac{dt}{dq_1} = r_1 \qquad \dfrac{dr_1}{dq_1} = -r_1 \Pi_1 - r_1^3 \beta_1 \ , \\ \dfrac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)} \ , \dfrac{dq'_{(i)}}{dq_1} = \Pi_1 - q'_{(i)} \Pi_1 + (\beta_i - q'_{(i)} \beta_1) r_1^2 . \end{cases}$$

Soit M_1 le module maximum des seconds membres des équations (2)' quand on a à la fois :

$$|q_i - \alpha_i| \leqslant \delta, \quad r_1 \leqslant L_1, \ |q'_{(i)}| \leqslant 1 + \frac{\delta}{2} \ , \ (i = 1, 2, \dots k),$$

(avec la condition $L_1 > \delta$) ; soit d'autre part des valeurs q_i°, r_1°, $q'^\circ_{(i)}$ satisfaisant aux conditions :

$$|q_i^\circ - \alpha_i| \leqslant \frac{\delta}{2}, \ r_1^\circ \leqslant \frac{L_1}{2}, \ |q'^\circ_{(i)}| \leqslant 1 \quad ;$$

il existe un système d'intégrales de (2)' et un seul, $t(q_1)$, $r_1(q_1)$, $q_i(q_1)$, $q'_{(i)}(q_1)$, qui prennent pour $q_1 = q_1^\circ$ les valeurs t_0, r_1°, q_i°, $q'^\circ_{(i)}$ et ces intégrales sont continues au moins dans l'intervalle $q_1^\circ - \varepsilon_1$ à $q_1^\circ + \varepsilon_1$, en appelant ε_1 la quantité $\frac{\delta}{2M_1}$.

En particulier, si $r_1^\circ = 0$, ce système est de la forme :

$$t \equiv t_0, \ r_1 \equiv 0, \quad q_i = \varphi_i(q_1), \ q'_{(i)} = \varphi'_i(q_1)$$

comme le montrent aussitôt les équations (2)'.(1)

Ceci nous montre que dans l'intervalle $q_1^\circ - \varepsilon_1$ à $q_1^\circ + \varepsilon_1$, r_1 ne s'annule jamais à moins d'être identiquement nul ; t varie donc constamment dans le même sens quand q_1 croît de $q_1^\circ - \varepsilon_1$ à $q_1^\circ + \varepsilon_1$ et passe de la valeur $t_0 - \eta$ à la valeur $t_0 + \eta'$, ou de la valeur $t_0 + \eta'$ à la valeur $t_0 - \eta$. Il suit de là que $q_1(t)$, $q_2(t)$ .... $q_k(t)$ sont des fonctions de t continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle $t_0 - \eta$ à $t_0 + \eta'$, et que q_1 passe d'une des valeurs $q_1^\circ \pm \varepsilon_1$ à l'autre quand t varie dans cet intervalle.

Le même raisonnement peut se répéter si la variable indépendante est un autre paramètre q_j. Aux équations (2)' correspondent des équations analogues : soit M_j le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois :

$$(i = 1, 2 .. k), |q_i - \alpha_i| \leqslant \delta \ , \left|\frac{dt}{dq_j}\right| \leqslant L_1 \ , \left|\frac{dq_i}{dq_j}\right| \leqslant 1 + \frac{\delta}{2} ;$$

à la quantité $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2M}$, correspond la quantité $\varepsilon_j = \frac{\delta}{2M_j}$, j'appellerai ε la plus petite des quantités ε_j.

Ces propositions vont nous permettre de démontrer une importante propriété du mouvement. Considérons le système d'intégrales $q_i(t)$, $q'_i(t)$ des équations (2) telles que pour $t = t_0$, $q_i = q_i^\circ$, $q'_i = q'^\circ_i$, les valeurs q_i° n'étant pas des valeurs singulières des A_{ij}, Q_i. Quand on fait croître t à partir de t_0, plusieurs circonstances peuvent se présenter : ou bien pour toute valeur de t, le mouvement reste régulier ; j'entends que les q_i, q'_i,

---

(1) La trajectoire $q_i = \varphi_i(q_1)$ est une géodésique.

restent finis et continus et que de plus le système S ne passe par aucune position singulière; ou bien quand t tend vers une certaine valeur t_1, un ou plusieurs des paramètres q_i deviennent soit infinis soit indéterminés, ou enfin le système S tend vers une position singulière. Mais peut-il arriver que, t tendant vers t_1, le système S tende vers une position non singulière, et que les vitesses q'_i deviennent indéterminées ou infinies? Nous allons voir que cela ne saurait avoir lieu. D'une façon précise, admettons que, t tendant vers t_1, les paramètres $q_1, q_2, \dots q_k$ tendent respectivement vers les valeurs $a_1, a_2, \dots a_k$ dans le voisinage desquelles les déterminations prises pour les $A_{i,j}$, Q_i restent régulières: dans ces conditions, les q'_i tendent respectivement vers des limites finies, et le mouvement reste régulier au delà de l'instant t_1.

En effet, de deux choses l'une, ou bien, quand t tend vers t_1, les q'_i tendent tous vers zéro (auquel cas le théorème est démontré), ou bien, un au moins des q'_i, pour certaines valeurs de t aussi voisines de t_1 qu'on veut, est supérieur en module à une certaine limite λ. Considérons alors le nombre ε introduit plus haut et qui correspond aux conditions:

$$|q_i - a_i| \leqslant \delta, \quad \left|\frac{dt}{dq_j}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \left|\frac{dq_i}{dq_j}\right| \leqslant 1+\frac{\delta}{2} \quad (i=1,2\dots k);$$

($\frac{1}{\lambda}$ remplace L_1). Nous pouvons, par hypothèse, trouver un instant t' assez voisin de t_1 pour que, t variant de t' à t_1, chaque variable q_i reste comprise entre $a_i-\alpha$ et $a_i+\alpha$; α désigne un nombre quelconque inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant t_0 une valeur de t comprise entre t' et t_1 et pour laquelle le plus grand des modules $|q'_i|$, soit $|q'_1|$, dépasse λ. On a pour $t=t_0$,

$$|q_i^0 - a_i| < \frac{\delta}{2}, \quad \left|\frac{dt}{dq_1}\right|_0 < \frac{1}{\lambda}, \quad \left|\frac{dq_i}{dq_1}\right|_0 \leqslant 1 \quad (i=1,2,\dots k);$$

quand q_1 varie de $q_1^0-\varepsilon$ à $q_1^0+\varepsilon$, t varie de $t_0-\eta$ à $t_0+\eta'$ (ou de $t_0+\eta'$ à $t_0-\eta$); je dis que t_1 est compris entre t_0 et $t_0+\eta'$. Autrement, t variant de t_0 et $t_0+\eta$, par suite entre t' et t_1, q_1 varierait de q_1^0 à $q_1^0 \pm \varepsilon$; mais entre t' et t_1, on a: $|q_1 - a_i| \leqslant \alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, donc deux valeurs de q_1 dans cet intervalle ne peuvent différer de ε. L'instant t_1 est donc compris entre t_0 et $t_0+\eta'$; et comme dans cet intervalle les fonctions $q_i(t)$, $q'_i(t)$ sont continues, le mouvement reste régulier à l'instant t_1 et au delà

C.Q.F.D.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Théorème - quand, t tendant vers t_1, le système S tend vers une position non singulière, ses vitesses tendent vers une limite et le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t_1.

Si pour $t=t_1$ tous les q'_i ne sont pas nuls, soit $q'_1 \neq 0$, les rapports $\frac{q'_i}{q'_1}$ ont une valeur bien déterminée; il en est de même encore quand les q'_i s'annulent tous pour $t=t_1$. En effet, on a dans ce cas:

$$q''_i = \frac{(t-t_1)^2}{1.2}\left[\beta_i(a_1, a_2, \dots a_k)+\delta_i\right] = \frac{(t-t_1)^2}{2}(\beta_i^0+\delta_i) \quad (i=1,2\dots k),$$

les δ_i tendant vers zéro avec $t-t_1$. D'ailleurs tous les β_i° ne sont pas nuls; autrement le système unique d'intégrales répondant aux conditions initiales $q_i = a_i$, $q_i' = 0$ (pour $t = t_1$) serait le système $q_i(t) \equiv a_i$, $q_i'(t) \equiv 0$[1] Soit donc $\beta_1^\circ \neq 0$; le rapports $\frac{q_i'}{q_1'} = \frac{dq_i}{dq_1}$ prennent pour $t = t_1$ les valeurs $\frac{\beta_i^\circ}{\beta_1^\circ}$. Ceci nous montre que t tendant vers t_1, le système S ne peut tendre vers une position (régulière) d'équilibre avec une force vive qui tend vers zéro.

J'ajoute que les intégrales $q_i(t)$ sont alors des fonctions paires de $t-t_1$. Autrement dit, si on pose $t - t_1 = \tau = \theta^2$, on a:

$$q_i = a_i + b_i\theta + c_i\theta^2 + \dots \qquad (i = 1, 2, \dots k) .$$

Si en effet dans les intégrales $q_i(\tau)$, on change τ en $-\tau$, on obtient encore un système d'intégrales: quand le premier système répond aux conditions initiales q_i°, $q_i'^\circ$ pour $t = t_1$, le second répond aux conditions q_i°, $-q_i'^\circ$; ici les $q_i'^\circ$ étant nuls, les conditions initiales restent les mêmes, les deux systèmes d'intégrales coïncident donc: $q_i(\tau) \equiv q_i(-\tau)$. — Quand t dépasse l'instant t_1, le système S rétrograde: à l'instant $t_1 + \tau$, il repasse par la même position qu'à l'instant $t_1 - \tau$, mais toutes les vitesses ont changé de sens.

Supposons maintenant que, t croissant indéfiniment, le système S tende vers une position $(a_1, a_2, \dots a_k)$ non singulière. Je dis que toutes les vitesses tendent nécessairement vers zéro. En effet, admettons qu'il n'en soit pas ainsi, et répétons le raisonnement fait plus haut, en gardant la même notation: par hypothèse, pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite t', on a: $|q_i - a_i| \leqslant \alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, $(i = 1, 2 \dots k)$; mais d'autre part, il existe des valeurs t_0 de t, plus grandes que t', et telles que l'un au moins des paramètres, soit q_1, varie de ε quand t varie de t_0 à $t_0 + \eta'$. Il y a donc contradiction; les q_i' tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

De plus, la position $(a_1, a_2, \dots a_k)$ est une position d'équilibre du système S. Faisons en effet le changement de variable $t = \frac{1}{\theta}$; on a:

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i' = -\theta^2\frac{dq_i}{d\theta}, \quad \frac{dq_i'}{dt} = -\theta^2\frac{dq_i'}{d\theta}, \text{ et par suite:}$$

$$\frac{dq_i}{d\theta} = -\frac{q_i'}{\theta^2}, \quad \frac{dq_i'}{d\theta} = \frac{-\beta_i + \Pi_i}{\theta^2} .$$

Par hypothèse quand θ tend vers zéro, les $q_1 \dots q_k$ tendent vers $a_1 \dots a_k$ et les q_i' vers zéro.

Il suit de là que $\beta_i(a_1, a_2 \dots a_k)$ doit être nul; car soit $\beta_i(a_1 \dots a_k) = \beta_i^\circ$, on aurait:

$$\frac{dq_i'}{d\theta} = \frac{-\beta_i^\circ + \delta_i'}{\theta^2} ,$$

δ_i' tendant vers zéro avec θ, et q_i' croîtrait indéfiniment quand θ tendrait vers zéro. Il faut donc que $\beta_1^\circ, \beta_2^\circ \dots \beta_k^\circ$ soient nuls.

---

[1] Les conditions d'équilibre du système (S) sont évidemment $\beta_i = 0$, et les égalités $q_i = a_i$, définissent l'équilibre.

Nous savons d'ailleurs inversement que le système S ne peut tendre, quand t croît, vers une position (régulière) d'équilibre avec une force vive qui s'annule sans que t croisse au delà de toute limite.

Il convient d'observer ici que les q'_i tendent vers zéro, sans que les rapports $\frac{q'_i}{q'_1} = \frac{dq_i}{dq_1}$ aient nécessairement une limite. Pour nous en convaincre, considérons le mouvement dans un plan d'un point (x, y) soumis à la force $X = 2y$, $Y = -2x$; les équations du mouvement :

$$x'' = 2y \qquad y'' = -2x,$$

admettant la famille d'intégrales :

$$x = e^{-t}[\alpha \cos t - \beta \sin t], \quad y = e^{-t}[\alpha \sin t + \beta \cos t]$$

où α, β sont deux constantes réelles arbitraires; quand t croît indéfiniment, x et y tendent vers zéro ainsi que x', y', mais le rapport $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha \operatorname{tg} t + \beta}{\alpha - \beta \operatorname{tg} t}$ ne tend vers aucune limite.

Dans ce qui précède nous avons supposé que t croissait; mais toutes les conclusions subsistent évidemment si on fait décroître t, puisqu'il est loisible de changer t en $-t$.

Propriétés des trajectoires réelles. – Revenons à l'étude des trajectoires. Pour abréger le langage, convenons de regarder $q_1, q_2, \dots q_k$ comme les k coordonnées rectangulaires d'un point M de l'espace à k dimensions E_k; les trajectoires $q_i = \varphi_i(q_1)$ $[i = 2, \dots k]$ seront des courbes C de cet espace, et les différentielles $dq_1, dq_2, \dots dq_k$ définiront la direction de la tangente en un point d'une telle courbe.

Posons enfin : $d\sigma = \sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + \dots\dots + dq_k^2}$

et appelons arc σ d'une courbe C compris entre deux points M et M' l'intégrale $\int \sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 \dots + dq_k^2}$ étendue à la courbe MM' (tous les éléments étant positifs). Quand une courbe (C) est régulière (j'entends admet en chaque point une tangente continue), on peut supposer $q_1, q_2, \dots q_k$ exprimés en fonction de l'arc σ compté à partir d'un point fixe M_0 positivement dans un sens, négativement dans l'autre : à chaque valeur de σ correspond un point $(q_1, q_2, \dots q_k)$ bien déterminé sur (C).

Nous ne considérons dans l'espace réel E_k que le domaine où aux points $(q_1, q_2, \dots q_k)$ correspondent des positions réelles du système S, et nous étudions exclusivement les trajectoires qui appartiennent à ce domaine. [Ce que nous disons s'appliquerait d'ailleurs aux autres trajectoires réelles]. Nous appelons points singuliers de l'espace E_k les points $(q_1, q_2, \dots q_k)$ où les fonctions A_{ij}, Q_i cessent d'être régulières. Ces points, dans l'hypothèse la plus défavorable, forment une surface à $(k-1)$ dimensions dans E_k, soit la surface $\psi(q_1, q_2, \dots q_k) = 0$; cette surface comprend notamment la limite du domaine E_k considéré quand ce domaine n'embrasse pas tout l'espace.

Nous appelons enfin points d'équilibre N les points $q_1, q_2, \dots q_k$, qui correspondent à une position d'équilibre de S, c'est-à-dire où $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k$ s'annulent. Ces points dans le cas le plus général sont des points isolés.

Trajectoires vraies, trajectoires conjuguées, trajectoires mixtes. – Si dans les équations (1) du mouvement on change t en it, ces équations ne sont pas altérées à cela près que tous les Q_i changent de signe ; les trajectoires définies par le système (1) et par le système obtenu en changeant les Q_i en $-Q_i$, coïncident donc.

Le nouveau mouvement sera dit mouvement **conjugué** du mouvement vrai. Ce mouvement est celui du système S quand on change le sens de toutes les forces données sans changer leur direction ni leur grandeur. Si le long d'une trajectoire réelle C'', le mouvement vrai est imaginaire, le mouvement conjugué, le long de cette même trajectoire est réel, car $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$, qui était négatif dans le premier mouvement, change de signe quand on change t en it. Nous donnerons aux arcs réels (C') de trajectoires le long desquels le mouvement vrai est réel le nom de trajectoires vraies, aux arcs (C'') le long desquels le mouvement conjugué est réel le nom de trajectoires conjuguées. Quand on change t en it, les deux classes de trajectoires (C') et (C'') se permutent.

Ceci posé, plaçons le système S à l'instant t_0 dans les conditions initiales réelles $q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0, q_1'^0, \dots q_k'^0$, et comptons l'arc σ de la trajectoire C à partir du point initial M_0 dans un sens tel que σ commence par croître avec t ; σ continuera de croître avec t tant que t n'atteindra pas soit une valeur t_1 pour laquelle le mouvement cesse d'être régulier, soit une valeur t_1 où $\frac{d\sigma}{dt}$, et par suite tous les q_i', s'annulent.

Plaçons-nous d'abord dans la première hypothèse : quand t tendra vers t_1, ou bien le point $(q_1, q_2, \dots q_k)$ ne tendra vers aucun point M à distance finie de l'espace E_k (auquel cas σ croîtra indéfiniment), ou bien le point $(q_1, q_2 \dots q_k)$ tendra vers un point singulier N de E_k. D'après ce qui précède, il n'y a pas d'autres cas possibles.

Dans la seconde hypothèse où tous les q_i' s'annulent quand t tend vers t_1, σ croît jusqu'à une certaine limite σ_1, puis décroît et reprend pour $t_1 + \alpha$ la même valeur que pour $t_1 - \alpha$; le point $(q_1, q_2, \dots q_k)$ rétrograde sur sa trajectoire.

En effet, le point $(a_1, a_2, \dots a_k)$ ou M_1 qui correspond à la valeur σ_1 de σ ne peut être un point d'équilibre (sinon t_1 serait infini) et dans le voisinage de M_1 la trajectoire est définie par des équations de la forme :

$$q_i = a_i + b_i\,\theta + c_i\,\theta^2 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots k)$$

où $\theta = (t - t_1)^2$, tous les b_i n'étant pas nuls. Ceci nous montre que (C) se prolonge au delà du point M_1 en admettant toujours une tangente continue ; de plus, comme on a :

$$\frac{d\sigma}{dt} = (t - t_1)\left[-\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots b_k^2} + \varepsilon\right] = (t - t_1)(B + \varepsilon)$$

(ε tendant vers zéro avec $t - t_1$), σ passe par un maximum σ_1 pour $t = t_1$. Le point M_1 sera dit **un point d'arrêt** de la trajectoire (C). Sur le segment $M_1 M$ de (C) qui fait suite au segment $M_0 M_1$, le mouvement conjugué est réel. Enfin, si la trajectoire (C) n'est pas une trajectoire remarquable, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ a en chaque point de $M_0 M$ une valeur déterminée $\varphi(\sigma)$: l'égalité $(\sigma - \sigma_1) = (t - t_1)^2\left[\frac{B}{2} + \varepsilon'\right]$, et sa conséquence $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (\sigma - \sigma_1)\left[2B + \varepsilon''\right]$ prouvent que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ reste fonction continue de σ (mais change de signe) quand, faisant varier M de M_0 à M sur (C) on traverse un point d'arrêt.

Nous donnerons le nom de trajectoires **mixtes** à ces trajectoires Γ qui possèdent au moins un point d'arrêt M_1. Elles forment une famille dépendant de k constantes arbitraires, par exemple des coordonnées $a_1, a_2 \dots a_k$ du point d'arrêt. En effet, prenons comme variable indépendante une des dérivées q_i', soit q_1', et étudions $q_1, q_2 \dots q_k$, $q_2' \dots q_k'$ comme fonctions de q_1'; si on considère toutes les trajectoires, on peut se donner arbitrairement, pour $q_1' = 0$, les valeurs $q_1^0, q_2^0 \dots q_k^0, q_2'^0 \dots q_k'^0$; pour avoir les trajectoires mixtes, on fera $q_2'^0 = 0, \dots q_k'^0 = 0$. Le faisceau des trajectoires Γ dépend donc de k constantes arbitraires : par un point donné $(q_1, q_2 \dots q_k)$, il en passe une infinité dépendant d'un paramètre. Il peut se faire toutefois que ces k paramètres $a_1, a_2 \dots a_k$ ne soient pas distincts : pour que cela ait lieu, il faut qu'une trajectoire mixte quelconque Γ corresponde à une infinité de valeurs des constantes $a_1, a_2 \dots a_k$ telles qu'on puisse prendre arbitrairement au moins l'une d'entre elles.

Il faut donc que tous les points d'un segment de Γ soient des points d'arrêts et par suite qu'une infinité de mouvements soient possibles sur Γ. Autrement dit, les trajectoires mixtes doivent être des trajectoires remarquables. Comme d'autre part par un point M_0 ou $[q_1^0, q_2^0 \dots q_k^0]$ quelconque, il passe au moins une trajectoire mixte (à savoir celle qui admet M_0 comme point d'arrêt), le faisceau Γ dépend au moins de $(k-1)$ constantes distinctes ; nous arrivons donc à la conclusion suivante : le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend de k constantes distinctes, sauf dans le cas où il existe un faisceau à $(k-1)$ paramètres de trajectoires remarquables [1], auquel cas ce faisceau se confond avec le faisceau (Γ).

Une trajectoire remarquable (γ) doit être d'ailleurs regardée comme une trajectoire mixte, en ce ce sens qu'un point quelconque $(a_1, a_2, \dots a_k)$ de la trajectoire γ est point d'arrêt pour un des mouvements de S sur γ. En effet tous ces mouvements sont définis par une égalité de la forme (voir page 210) ;

$$(\alpha) \qquad\qquad T = f(q_1) + h,$$

où h est une constante arbitraire. Soit pour $t = t_0$, $q_1 = a_1$, et soit $h = -f(a_1)$: au point $(a_1, a_2, \dots a_k)$ de (γ) la force vive, et par suite $q_1', q_2' \dots q_k'$, s'annulent, et le système S, dans le mouvement en question, rétrograde sur (γ) quand t passe de $t_0 - \varepsilon$ à $t_0 + \varepsilon$. Mais il peut exister des mouvements qui aient lieu sur (γ) toujours dans le même sens : autrement dit, pour d'autres valeurs de h, il arrive que $f(q_1) + h$ ne s'annule jamais, ainsi que nous le vérifierons tout-à-l'heure sur un exemple.

— Supposons maintenant que, t croissant indéfiniment, le mouvement reste régulier et que la force vive ne s'annule pas : deux cas sont possibles, ou bien le point $(q_1, q_2, \dots q_k)$ ne tend vers aucun point de l'espace E_k à distance finie (auquel

---

[1] Nous avons vu (page 210) que les trajectoires remarquables dépendent au plus de $(k-1)$ paramètres.

pas σ croît indéfiniment avec t); ou bien $(q_1\, q_2\, \ldots\, q_k)$ tend vers un point $(a_1\,, a_2 \ldots a_k)$, qui est alors un point d'équilibre N'; la trajectoire n'a pas nécessairement de tangente en ce point, et peut ne pas se prolonger analytiquement au delà.

D'après ce qui précède, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes :

Soit $M_0 M$ un fragment continu de la même trajectoire réelle (C), fragment qui ne passe ni par un point singulier N de E_k, ni par un point d'équilibre N': la courbe (C) admet une tangente continue tout le long de l'arc $M_0 M$, et la longueur totale de cet arc est un certain nombre fini σ.

Si de plus (C) n'est pas une trajectoire mixte (ce qui est le cas général ; les trajectoires mixtes ne dépendant que de k constantes), l'arc $M_0 M$ sera parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini, soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué. Ceci est encore vrai quand la trajectoire (C) étant mixte, elle ne possède pas de point d'arrêt entre M_0 et M. L'arc $M M'$ appartient donc tout entier soit à la classe (C'), soit à la classe (C'').

Si (C) est une trajectoire mixte, (sans être une trajectoire remarquable), en général elle ne possède qu'un point d'arrêt M_1. Quand ce point M_1 fait partie de l'arc $M_0 M$, cet arc est décomposé en deux parties $M_0 M_1$, et $M_1 M$, toutes deux parcourues deux fois en sens inverse (en un temps fini), l'une dans le mouvement vrai, l'autre dans le mouvement conjugué. Il peut arriver pourtant qu'entre M_0 et M, il existe plusieurs points d'arrêt M_1, M_2, etc. (1) Mais il n'en existe jamais qu'un nombre fini ; supposons en effet, que la fonction $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \varphi(\sigma)$ admette entre M_0 et M une infinité de zéros correspondant aux valeurs (croissantes par exemple) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ de σ ; σ_n restant inférieur à σ (longueur de $M_0 M$) tend vers une limite σ' quand n croît indéfiniment ; la fonction $\varphi(\sigma)$ étant continue s'annule pour $\sigma = \sigma'$, et on a (le point M' correspondant n'étant pas un point d'équilibre) :

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \sigma')(2B + \varepsilon) \qquad (B \neq 0),$$

ce qui montre que $\varphi(\sigma)$ n'admet dans le voisinage de σ' d'autres zéros que σ'; l'hypothèse est donc absurde. D'après cela, on pourra toujours décomposer l'arc $M_0 M$ en un nombre fini de segments dont les uns appartiendront tout entiers à la classe (C') et les autres à la classe (C'').

Si (C) est une trajectoire remarquable ; chaque point de $M_0 M$ est un point d'arrêt d'un des mouvements correspondants ; mais on peut toujours dans l'égalité

$$(\alpha) \qquad T = f(q_1) + h = F(\sigma) + h$$

prendre h assez grand pour que $M_0 M$ soit parcouru tout entier dans le même sens. De plus, aucun des mouvements qui ont lieu sur C ne saurait présenter

(1) Il convient d'observer qu'à l'arc de trajectoire $M_1 M_2$ correspond un mouvement réel périodique (soit vrai, soit conjugué)

entre M_0 et M deux points d'arrêt ; admettons en effet que T s'annule en M_1 et M_2 ; d'après l'égalité (α), $F'(\sigma)$ (qui est continue entre M_0 et M) s'annule entre M_1 et M_2, donc entre M_0 et M. Soit σ' le premier zéro de $F'(\sigma)$ qu'on rencontre en partant d'un point μ de M_0M où $F'(\sigma)$ n'est pas nul et en allant vers M (ou vers M_0). Je dis que le point M' ou σ' de (C) est un point d'équilibre N' ; il suffit, pour le voir, de considérer le mouvement défini sur (C) par l'égalité :

$$T = F(\sigma) - F(\sigma') = (\sigma - \sigma')^2 F_1(\sigma) ;$$

comme entre μ et M', $F_1(\sigma)$ s'annule au plus une fois (soit en M_1), le long d'un arc fini M_1M' le signe de $F_1(\sigma)$ est constant. En le supposant positif (ce qu'il est loisible de faire, puisque autrement on changerait t en it), on a :

$$dt = \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma'} G(\sigma),$$

G restant supérieur à un certain nombre positif quand σ varie entre $\sigma' - \alpha$ et σ' ; t croît donc indéfiniment quand σ tend vers σ', ou encore σ tend vers σ' quand t croît indéfiniment. Cela n'est possible que si le point M' est un point d'équilibre.[1] Il suit de là que pour h suffisamment grand ($h > h_1$), le segment M_0M sera parcouru en entier dans le mouvement correspondant ; pour h inférieur à une certaine limite h_2, le même segment sera parcouru en entier dans le mouvement conjugué ; pour h compris entre h_1 et h_2, le segment se décomposera en deux segments continus, dont l'un sera parcouru dans le mouvement vrai, l'autre dans le mouvement conjugué.

Branches de trajectoires singulières. — Admettons maintenant que le segment considéré M_0M renferme des points d'équilibre N' (mais non des points singuliers). Soit N' le premier point d'équilibre qu'on rencontre sur M_0M en partant de M_0 ; étudions le segment M_0N', en supposant d'abord que (C) n'est pas une trajectoire remarquable.

Dans cette hypothèse, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ est une fonction de σ, $\varphi(\sigma)$, continue tant que M reste compris entre M_0 et N', mais qu'arrive-t-il quand on fait tendre M vers N' ? Je dis que $\varphi(\sigma)$ tend vers une limite. Tout d'abord, si $\varphi(\sigma)$ tend vers zéro, la proposition est démontrée ; s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver des points M

---

(1) Il est facile de vérifier cette conclusion ainsi ; on a :

$$F'(\sigma) = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + \dots + Q_k \frac{dq_k}{d\sigma},$$

mais d'autre part, la trajectoire (C) étant remarquable, on sait que $\frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_i}{\beta_i}$; donc $F'(\sigma) = \dfrac{Q_1\beta_1 + \dots + Q_k\beta_k}{\sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_k^2}}$, ou bien, (comme $Q_i = \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij}\beta_j$), d'après les équations (6) de la page 105), $F'(\sigma) = \dfrac{T(q_1, q_2, \dots q_k, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_k)}{\sqrt{\beta_1^2 + \dots\dots + \beta_k^2}}$, expression qui ne peut être nulle que si tous les β_i sont nuls. — Quand tous les points de (C) sont des points d'équilibre, la géodésique (C) est parcourue avec une force vive constante (d'ailleurs arbitraire), comme s'il n'y avait pas de forces données.

sur (C) aussi voisins qu'on veut de N' (1) et tel que $f(\sigma)$ [et par suite un au moins des $q_i'^2$] ait en M une valeur absolue supérieure à un certain nombre fixe λ^2. En répétant alors identiquement le raisonnement de la page 213 (soit sur le mouvement vrai, soit sur le mouvement conjugué), on voit que le système S doit atteindre en un temps fini la position N' avec une force vive déterminée et finie, et par suite le mouvement, comme la trajectoire (C), se prolongent régulièrement au delà de N'. En résumé, $f(\sigma)$ tend vers une limite $f(N')$ quand on fait tendre M vers N' sur l'arc $M_0 N'$, et si cette limite $f(N')$ n'est pas nulle, le point N' est un point ordinaire de (C).

Si au contraire $f(N')=0$, nous disons que l'arc $M_0 N'$ est une branche **singulière** : deux cas sont à distinguer suivant qu'entre M_0 et N', $f(\sigma)$ s'annule ou non un nombre infini de fois. Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas :

1° Il n'existe entre M_0 et N' qu'un nombre fini de zéros de $f(\sigma)$. Il suffit alors de considérer le segment $M_1 N'$ adjacent à N' et où $f(\sigma)$ garde un signe constant qu'il est loisible de supposer positif. Quand t croît, le système, placé entre M_1 et M avec une valeur positive de $\frac{d\sigma}{dt}$, tend vers N' et ne peut atteindre cette position d'équilibre en un temps fini ; le système tend donc vers N' sur (C) quand t croît indéfiniment. Il peut se faire qu'au point N' la courbe réelle (C) n'ait pas de tangente et qu'elle ne se prolonge pas au delà de N' ; quant à l'arc σ ou $M_0 N$, il peut tendre vers une limite finie σ' ou croître indéfiniment quand M tend vers N'. Les équations $x''=2y$, $y''=-2x$, citées plus haut (page 216) offrent un exemple de ce premier cas.

2° $f(\sigma)$ admet une infinité de zéros $M_1, M_2 \dots M_n, \dots$ entre M_0 et N'. — Les points d'arrêt $M_1, M_2, \dots M_n \dots$ tendent vers N' quand n croît indéfiniment. Le segment $M_0 M$ se trouve ainsi décomposé en une infinité de segments $M_1 M_2$, $M_2 M_3 \dots$ qui tendent vers N' et qui correspondent à autant de mouvements périodiques (alternativement vrais ou conjugués), dont l'amplitude tend vers zéro. Comme exemple de ce cas, évidemment exceptionnel, nous citerons les équations :

$$(A)\quad \begin{cases} x'' = \dfrac{xy}{2}\left[\dfrac{7}{4}(x^2+y^2)^2-3\right]+\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)\left[5y^2-x^2\right], \\ y'' = \dfrac{7}{8}y^2(x^2+y^2)^2-\dfrac{3}{2}xy(x^2+y^2)+\dfrac{x^2}{2}-y^2 . \end{cases}$$

Une des trajectoires définies par (A) est la suivante : $x=\frac{\cos\theta}{\theta^{\frac{1}{2}}}$, $y=\frac{\sin\theta}{\theta^{\frac{1}{2}}}$, ou encore, en coordonnées polaires, $\theta=\frac{1}{r^2}$; cette trajectoire passe par l'origine (point asymptote) qui est un point d'équilibre et le mouvement correspondant est défini par l'égalité :

$$dt = \frac{d\theta\,\theta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}} = \frac{-2}{r^3}\,\frac{dr}{\sqrt{r\sin\frac{1}{r^2}}}$$

---

(1) J'entends par là que les coordonnées $q_1, q_2, \dots q_k$ de M diffèrent aussi peu qu'on veut des coordonnées $a_1, a_2, \dots a_k$ de N'.

Sur chaque arc de la courbe $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$, le mouvement est réel et périodique; sur les arcs $(2n+1)\pi < \theta < 2(n+1)\pi$, c'est le mouvement conjugué qui est périodique.

Quand M tend vers N', σ tend vers une limite σ' ou croît indéfiniment. La courbe réelle (C), suivant les cas, se prolonge ou non analytiquement au delà de N'! Enfin, il peut arriver qu'elle renferme une infinité de positions d'équilibre, formant des suites.

Si on considère l'égalité : $dt = \frac{d\sigma}{\sqrt{\varphi(\sigma)}}$, $\varphi(\sigma)$ change de signe pour tous les zéros σ_1, σ_2, .. de $\varphi(\sigma)$, et quand M tend vers N', t satisfait à la relation :

$$t - t_0 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{\varphi(\sigma)}} + i\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{-\varphi(\sigma)}} + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} \frac{d\sigma}{\sqrt{\varphi(\sigma)}} + \dots ;$$

il est toujours loisible de choisir dans chaque intervalle la valeur positive du radical ; la valeur de $t - t_0$ sera alors de la forme :

$$t - t_0 = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) + i\,(a_2 + a_4 + \dots\ ),$$

tous les a étant positifs. Il suit de là que $|t - t_0|$ croît indéfiniment quand M tend vers N' ; autrement t tendrait vers une limite $A + iA'$, et en remplaçant t par $(A + iA') + t$, on voit que t tendant vers zéro (par valeurs imaginaires, mais peu importe), le système tendrait vers une position régulière d'équilibre, la force vive tendant vers zéro, ce qui est impossible.

On obtiendra donc toutes les branches singulières de trajectoires passant par un point d'équilibre N' (ou $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$) en cherchant toutes les intégrales $q_i(\theta)$, $q'_i(\theta)$ du système :

$$\frac{dq_i}{d\theta} = \frac{-q'_i}{\theta^2}, \qquad \frac{dq'_i}{d\theta} = \frac{-\beta_i + \Pi_i}{\theta^2}$$

qui tendent par valeurs réelles, les q_i vers α_i, les q'_i vers zéro, quand θ tend vers zéro suivant un certaine loi.

Il nous reste à discuter le cas que nous avons laissé de côté où la trajectoire $M_0 M'$ serait remarquable. Observons d'abord que tout point M_1 d'une trajectoire remarquable $M_0 M_1$ ou (γ) est un point régulier de cette trajectoire. En effet, on peut placer le point M en un point de $A_0 M_1$ aussi voisin de M_1 qu'on veut et avec une vitesse tangente à (γ) aussi grande qu'on veut ; le raisonnement de la page 213 montre alors que M dépasse M_1 d'un mouvement régulier ; la trajectoire (γ) se prolonge donc régulièrement au delà de M_1.

Ceci posé, soit N' un point d'équilibre situé sur (γ) et considérons l'égalité :

$$T = F(\sigma) + h\ ;$$

pour $\sigma = \sigma'$, $F(\sigma')$ a une valeur finie, soit $F(\sigma') = 0$; si h est nul, le point M tend vers N', quand t croît indéfiniment, (soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué). Pour les autres valeurs de h, N' sera un point ordinaire du mouvement, qui pourra présenter alors deux points d'arrêt comprenant le point N'; si σ' n'est qu'un zéro double de $F(\sigma)$, on aura dans le voisinage de σ' :

$$T = h + (\sigma-\sigma')^2 [A+\varepsilon] ;$$

quand le nombre A est négatif, les mouvements correspondants à de petites valeurs positives de h sont périodiques autour de N' ; si A est positif, la même remarque s'applique au mouvement conjugué.

La trajectoire (γ) pourra d'ailleurs renfermer un nombre infini de points d'équilibre N' formant des suites. C'est ce que montre l'exemple des deux équations :

$$2x'' = x^3 \left[5x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right], \; y'' = 0$$

qui admettent les trajectoires remarquables $y = y_0$, le long desquelles le mouvement est défini par la relation :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x^5 \sin\frac{1}{x} + h ;$$

toutes les racines x_i de l'égalité $\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \frac{x}{5}$ correspondent à des points d'équilibre N', et les racines x_i ont pour limite $x = 0$.

Dans cet exemple, la force X est continue, ainsi que ses dérivées premières $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y} \equiv 0$, dans le voisinage de $x = 0$. Mais il convient de remarquer que la singularité en question ne se présente pas si les coefficients A_{ij}, Q_i sont des fonctions holomorphes de $q_1, q_2 \dots q_k$ dans le domaine de $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ ou N'. En effet, le point N' est alors un point analytique régulier de (γ), et les variables $q_2, \dots q_k$ sont des fonctions holomorphes de σ pour σ voisin de σ' ; la fonction $F'(\sigma) = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} + \dots + Q_k \frac{dq_k}{d\sigma}$ est donc holomorphe dans le voisinage de σ', et le point N' est nécessairement un zéro isolé de $F'(\sigma)$.

Observons enfin que les β_i peuvent être nuls tout le long de (γ) ; la force vive du mouvement sur (γ) est alors constante. Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit qu'une géodésique de T soit un lieu de points d'équilibre N'.

Remarque sur le cas où les forces Q_i dérivent d'un potentiel $U(q_1, q_2 \dots q_k)$. — S'il existe une fonction de forces U, et si de plus les points d'équilibre N' sont isolés, les trajectoires (C) qui passent par un point d'équilibre N' sont nécessairement exceptionnelles.

Tout d'abord les trajectoires (C) pour lesquelles N' est un point ordinaire $[T \neq 0 \text{ en } N']$ dépendent seulement de k paramètres ; quant à celles pour lesquelles N est un point singulier $\left[\begin{smallmatrix} T=0 \\ \text{en } N' \end{smallmatrix}\right]$ elles satisfont à la condition : $U(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k) + h = 0$; ces trajectoires correspondent donc à des valeurs particulières de la constante des forces vives et par suite, ne peuvent dépendre de plus de $2k - 2$ paramètres

Conclusions : Toute la discussion précédente se résume ainsi :

I. — Quand les forces $Q_i(q_1, q_2, \dots q_k)$ ne sont pas toutes nulles, une trajectoire quelconque (C) ne peut être parcourue que de deux manières distinctes,[1] et le second mouvement se déduit du premier en changeant le signe de t.

Il peut y avoir exception toutefois pour certaines trajectoires (γ) dites remarquables, qui comportent une infinité de mouvements (deux à deux de sens contraire) dépendant d'une constante arbitraire. De telles trajectoires, qui n'existent pas en général, sont nécessairement des géodésiques de T et dépendent au plus de (k-1) paramètres.

II — Tout arc continu de trajectoire réelle (C), qui ne passe ni par un point singulier N ni par un point d'équilibre N' de E_k, est régulier (c'est à dire admet en chaque point une tangente et une courbure continue).

Les seuls points qui puissent être des points singuliers ou des <u>extrémités</u> d'une trajectoire, sont donc les points N et N'. Tout arc continu (C) de trajectoire réelle qui ne passe ni par un point N ni par un point N' est parcouru tout entier dans le même sens, soit dans le mouvement réel vrai ; soit dans le mouvement conjugué ; nous disons dans le premier cas que (C) est une trajectoire vraie (C'), dans le second cas que c'est une trajectoire conjuguée (C'').

Il existe toutefois une classe exceptionnelle de trajectoires (Γ) que nous appelons trajectoires mixtes, et sur lesquelles des segments finis qui ne renferment aucun point N ou N', sont formés en partie d'arcs de l'espèce (C') et en partie d'arcs de l'espèce (C''). Tout point M qui sépare deux arcs adjacents (C') et (C'') sur (Γ) est un point d'arrêt, où le mouvement réel change de sens. Les trajectoires remarquables doivent être regardées comme trajectoires mixtes. Le faisceau des trajectoires mixtes dépend exactement de k paramètres, sauf dans le cas particulier où le faisceau des trajectoires remarquables atteint son nombre maximum (k-1) de paramètres, auquel cas les deux faisceaux coïncident.

III. — Par un point quelconque M de l'espace E_k, qui n'est ni un point singulier N, ni un point d'équilibre N', passe une infinité de trajectoires régulières dans le voisinage de M, qui dépendent de k paramètres, valeurs en M de $q_1', q_2' \dots q_k'$, et il ne passe pas par M d'autres trajectoires. Parmi ces trajectoires, les unes sont de l'espèce (C'), les autres de l'espèce (C'') dans le voisinage de M ; il en est une toutefois et une seule qui admet le point M comme point d'arrêt, à savoir la trajectoire mixte (Γ_1) qui correspond à une force vive nulle en M. Cette trajectoire (Γ_1) fait partie du faisceau à un paramètre des trajectoires mixtes (Γ) qui passent par M. Dans le cas toutefois où le faisceau des trajectoires remarquables dépend de (k-1) paramètres et se confond par suite avec le faisceau des trajectoires (Γ), la trajectoire (Γ_1) est la seule trajectoire mixte qui passe par M.

---

(1) On ne regarde pas comme distincts deux mouvements dont l'un se déduit de l'autre en changeant t en t + C^{te}.

Si le point M considéré est un point d'équilibre N', par ce point passe encore une infinité de trajectoires dépendant de k paramètres et régulières dans le voisinage de N'; la trajectoire T_1 se réduit alors au point $N'(q_1 \equiv a_1, \ldots\ldots q_k \equiv a_k)$. Mais le fait le plus important, c'est qu'en dehors de ces trajectoires, il en peut exister d'autres (C) passant par N', ayant en N' des singularités quelconques, et telles que le segment MN' (si petit qu'il soit) ne soit jamais parcouru d'un mouvement réel (vrai ou conjugué) en un temps fini.

Toutes ces trajectoires (C) s'obtiennent en cherchant les intégrales $q_i(\theta), q'_i(\theta)$ du système :

$$\frac{dq_i}{d\theta} = -\frac{q'_i}{\theta^2}, \quad \frac{dq'_i}{d\theta} = -\frac{\beta_i + \Pi_i}{\theta^2},$$

qui tendent par valeurs réelles, les q_i vers $a_1, \ldots a_k$, les q'_i vers zéro, quand θ tend vers zéro suivant une certaine loi.

Quand une trajectoire (C), qui n'est pas une trajectoire remarquable, passe par le point N' sans coïncider avec une de ces branches singulières (C), le point N' est un point ordinaire de (C) et est franchi d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué). Si la trajectoire (C) coïncide avec une de ces branches singulières $N'M$, ou bien le système tend vers N' sur MN' (avec une force vive qui tend vers zéro) quand t croît indéfiniment; ou bien MN' se décompose en une infinité d'arcs (qui tendent vers N') et qui correspondent à autant de mouvements périodiques (vrais ou conjugués). - Quand une trajectoire remarquable (γ) passe par N', N' est toujours au point ordinaire de (γ); il existe toujours une infinité de mouvements périodiques sur (γ) où M oscille autour de N' (mouvements vrais ou conjugués) et des mouvements où, t croissant indéfiniment, M tend soit vers N', soit vers un autre point d'équilibre N'' aussi voisin de N' qu'on le veut.

Enfin lorsque les forces dérivent d'un potentiel et qu'il n'existe que des positions d'équilibre isolées, une trajectoire prise au hasard ne comprend pas d'arcs singuliers (C). Il suit de là que (sauf pour certaines trajectoires exceptionnelles) tout arc continu de trajectoire réelle qui ne renferme pas de points singuliers N de E_k sera parcouru tout entier dans le même sens, soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué.

Remarque.- Dans toute cette discussion nous avons laissé de côté le cas où la trajectoire passe par un point singulier N de E_k. Quand (t tendant vers t_1) le système S tend une position singulière N, il peut se faire que les q' ne tendent vers aucune limite; il arrivera aussi, en général, que, même les q' ayant une limite, la connaissance des vitesses en la position N sera insuffisante pour déterminer le mouvement ultérieur. Il n'y a donc pas lieu de poursuivre l'étude analytique du mouvement.

En définitive, quant t croît à partir de t_0, il peut arriver que, t tendant vers t_1, le système S s'éloigne indéfiniment, ou ne tende vers aucune position limite, ou enfin tende vers une position singulière N. Mais tant qu'il n'en est pas ainsi, nous avons vu que les vitesses pour chaque valeur de t restent bien déterminées, et la discussion précédente est valable.

Avant d'appliquer ces considérations à des exemples, nous ferons encore quelques observations au sujet de la similitude en mécanique.

De la similitude en mécanique. – Mouvements conjugués.

Quand dans un système :

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q(q_1, q_2, \dots q_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad (i = 1, 2, \dots k),$$

on change T en CT et les Q_i en cQ_i, C et c désignant deux constantes, il suffit, pour passer du premier mouvement au second, de changer t en $\sqrt{\frac{c}{C}}\, dt_1$.

Écrivons, en effet, les nouvelles équations ainsi :

$$(1)'\qquad \frac{d}{dt_1}\sum_j A_{ij}\frac{dq_i}{dt_1} - \frac{1}{2}\sum_{j,\ell}\frac{\partial A_{j\ell}}{\partial q_i}\frac{dq_j}{dt_1}\frac{dq_\ell}{dt_1} = \frac{c}{C}\, Q_i\ ;$$

Si on pose $t_1 = \sqrt{\frac{C}{c}}\, t$, on a : $\frac{dq_i}{dt_1} = \sqrt{\frac{c}{C}}\,\frac{dq_i}{dt}$, $dt_1 = \sqrt{\frac{C}{c}}\, dt$, et les équations $(1')$ se transforment dans le système (1).

Il suit de là que les équations (1) et $(1')$ définissent les mêmes trajectoires. Mais le mouvement sur ces trajectoires ne sera le même que si $\frac{C}{c}$ est égal à l'unité. Si $\frac{c}{C}$ est positif, les trajectoires réelles vraies seront les mêmes pour les deux systèmes ; si $\frac{c}{C}$ est négatif, les trajectoires vraies du même système seront les trajectoires conjuguées du second et réciproquement. En particulier, si $C = 1$ et si $c = -1$, on passe du premier mouvement au second en changeant t en it. On retrouve ce résultat déjà indiqué, que le mouvement conjugué du mouvement vrai, c'est le mouvement du système quand on change le signe des Q_i, c'est-à-dire quand on change le sens de toutes les forces données, sans changer leur direction ni leur grandeur.

D'après cela, considérons un système S de points matériels x_i, y_i, z_i, assujettis à certaines liaisons, et un système homothétique Σ, où $\xi_i = \lambda x_i$, $\eta_i = \lambda y_i$, $\zeta_i = \lambda z_i$, assujetti aux liaisons correspondantes. La force vive du nouveau système sera $\lambda^2 T$, si T était celle du premier. Soumettons d'autre part le nouveau système à des forces données (Φ_i) ou Ξ_i, H_i, Z_i homothétiques des forces (F) ou X_i, Y_i, Z_i qui s'exercent sur le premier : $\Xi_i = \mu X_i$, $H_i = \mu Y_i$, $Z_i = \mu Z_i$. Si Q'_j désigne le coefficient Q_j relatif au second système, on a :

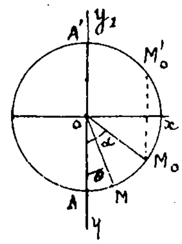
$$Q'_j = \sum \Xi\frac{\partial \xi}{\partial q_j} + H\frac{\partial \eta}{\partial q_j} + Z\frac{\partial \zeta}{\partial q_j} = \lambda\mu\sum X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j} = \lambda\mu Q_j.$$

Il suit de là que les relations entre les q_i seront les mêmes pour les deux mouvements, et qu'on passera du premier mouvement au second en changeant t en $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, t$. Les trajectoires du second système Σ seront donc les homothétiques des trajectoires de S, et s'en déduiront par les formules $\xi_i = \lambda x_i$, $\eta_i = \lambda y_i$, $\zeta_i = \lambda z_i$. Le mouvement de Σ se déduira du mouvement de S à l'aide des formules précédentes et en changeant de plus t en $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, t$. Si la correspondance homothétique entre S et Σ et la correspondance entre les (F) et les (Φ) sont de même sens $[\lambda\mu > 0]$, les trajectoires vraies de Σ sont les transformées des trajectoires vraies de S ; sinon $(\lambda\mu < 0)$, ce sont les transformées des trajectoires conjuguées de S. Si $\mu = \lambda$, c'est-à-dire si on transforme d'ensemble les points S et les forces F, le nouveau mouvement se déduit du premier par les formules $\xi_i = \lambda x_i$, $\eta_i = \lambda y_i$, $\zeta_i = \lambda z_i$. Si $\lambda = -\mu$, le nouveau mouvement se déduit, par les mêmes formules, du mouvement conjugué du premier.

On voit qu'en définitive deux systèmes semblables étant soumis à des forces semblables, les trajectoires sont aussi semblables. Ce principe de la similitude en mécanique a été introduit pour la première fois par M. Bertrand.

Nous avons dit d'autre part que les équations du mouvement ne changent pas quand on change t en $-t$. Autrement dit, quand un système S sans frottement, à liaisons indépendantes du temps, est soumis à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps, les mouvements de ce système sont réversibles.

J'ajoute que M. Appell a tiré de la considération des mouvements conjugués une interprétation du temps imaginaire en mécanique, qui s'applique à beaucoup de cas particuliers intéressants. Bornons-nous à citer comme exemple le cas du pendule simple.



Soit un cercle O dans le plan vertical xoy, et oy la direction de la pesanteur. La position M d'un point mobile sans frottement sur le cercle étant déterminée par l'angle $\theta = Moy$, si on abandonne le point M sans vitesse, en M_0 $(\theta = \alpha)$, le mouvement sera défini par l'égalité :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

ou encore, en posant $\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\frac{\alpha}{2}$,

$$(\alpha) \qquad \sqrt{\frac{g}{l}}\; t = \int_1^u \frac{du}{-\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \qquad \left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

c'est-à-dire $u = sn\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + K\right)$; la fonction sn admet comme périodes les expressions $4K$ et $2iK'$

$$K = \int_0^1 \frac{du}{+\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \qquad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{+\sqrt{(1-u^2)(k^2u^2-1)}}.$$

Le temps employé par M pour aller de M_0 en A est égal à $\sqrt{\frac{l}{g}}\,K$. Si maintenant on change le sens de la pesanteur (sans changer sa direction ni sa grandeur), l'équation du nouveau mouvement s'obtiendra en changeant

t en it, et on aura :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \int_1^u \frac{du}{+\sqrt{(1-u^2)(k^2u^2-1)}}\ ;$$

θ croîtra alors de α à π, et le temps employé par M pour aller de M_0 (où $u=1$) au point A' (où $u = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{k}$) sera égal à $\sqrt{\frac{l}{g}}\, K'$.

On peut dire encore que si $4K$ et $2iK'$ sont des périodes de la fonction sn qui correspond au module $k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$, le temps employé par le mobile abandonné sans vitesse en M_0 ($\theta = \alpha$) ou en M'_0 ($\theta = \pi - \alpha$) pour atteindre A, est égal $\sqrt{\frac{l}{g}}\, K$ dans la première hypothèse, à $\sqrt{\frac{l}{g}}\, K'$ dans la seconde.

Remarque. — Nous venons de voir que, si on substitue aux forces Q_i des forces $Q'_i = cQ_i$ (c étant une constante), les trajectoires ne sont pas modifiées. Il convient de remarquer que ces forces cQ_i sont les seules forces $Q'_i(q_1, q_2, \dots q_k)$ qui, substituées aux forces Q_i dans le système (1), engendrent les mêmes trajectoires.

En effet, écrivons les équations différentielles des trajectoires (voir page 208) :

$$(10)\qquad \frac{q''_{(i)} + q'_{(i)}\,\Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)}\beta_1} = \frac{q''_{(2)} + q'_{(2)}\,\Pi_1 - \Pi_2}{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1} \qquad (i = 3, 4, \dots k),$$

$$\text{et } (11)\qquad \frac{\dfrac{d}{dq_1}\left[q''_{(2)} + q'_{(2)}\,\Pi_1 - \Pi_2\right]}{q''_{(2)} + q'_{(2)}\,\Pi_1 - \Pi_2} + 2\,\Pi_1 = \frac{\dfrac{d}{dq_1}\left(\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1\right) - 2\beta_1\left(q''_{(2)} + q'_{(2)}\,\Pi_1 - \Pi_2\right)}{\beta_2 - q'_{(2)}\beta_1},$$

système différentiel qui est de la forme :

$$(10)'\qquad \frac{d^2q_i}{dq_1^2} = \frac{d^2q_2}{dq_1^2}\;\frac{\beta_i - \beta_1\frac{dq_i}{dq_1}}{\beta_2 - \beta_2\frac{dq_2}{dq_1}} + L_i \qquad (i = 3, 4, \dots k),$$

$$\text{et } (11)'\qquad \frac{d^3q_2}{dq_1^3} = \chi_2\,\frac{d}{dq_1}\log\beta_1 + L'_2\ ,$$

les L_i ne renfermant que des dérivées premières et L'_2 étant définie à l'aide des coefficients de T et des rapports $\frac{\beta_i}{\beta_1}$,

Ceci posé, admettons qu'aux forces Q_i on substitue d'autres forces $Q'_i(q_1, q_2, \dots q_k)$; les coëfficients $\beta_i(q_1, q_2, \dots q_k)$ deviennent $\beta'_i(q_1, q_2, \dots q_k)$. Pour que les équations (10) et (11) ne soient pas altérées par cette substitution, il faut d'abord que l'on ait identiquement :

$$\frac{\beta_i - \beta_1\frac{dq_i}{dq_1}}{\beta_1 - \beta_1\frac{dq_2}{dq_1}} \equiv \frac{\beta'_i - \beta'_1\frac{dq_i}{dq_1}}{\beta'_2 - \beta'_1\frac{dq_2}{dq_1}},$$

et par suite

$$(12) \qquad \frac{\beta'_1}{\beta_1} \equiv \frac{\beta'_2}{\beta_2} \equiv \cdots\cdots \equiv \frac{\beta'_k}{\beta_k} \,;$$

il faut ensuite (d'après (11') que

$$\frac{d}{dq_1} \log \beta_1 \equiv \frac{d}{dq_1} \log \beta'_1 \,,$$

ou bien que :

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \log \beta_1 \equiv \frac{\partial}{\partial q_1} \log \beta'_1 \,, \ldots\ldots \frac{\partial}{\partial q_k} \log \beta_1 \equiv \frac{\partial}{\partial q_k} \log \beta'_1 \,,$$

ce qui entraîne la conséquence :

$$\beta'_1 \equiv c\beta_1 \,,$$

d'où, d'après (12),

$$\beta'_1 = c\beta_1 \,,\ \beta'_2 = c\beta_2 \,, \ldots\ldots \ \beta'_k = c\beta_k \,,$$

égalités dont on déduit aussitôt :

$$Q'_1 = cQ_1 \,,\ Q'_2 = cQ_2 \,, \ldots\ldots \ Q'_k = cQ_k \,.$$

C.Q.F.D.

Plus généralement, si on remplace T par CT et les Q_i par $Q'_i(q_1, q_2 \ldots q_k)$, C désignant une constante, il faut et il suffit, pour que les trajectoires restent les mêmes, qu'on ait $Q'_i \equiv c\,Q_i$.

Applications des généralités précédentes à quelques exemples.

Considérons un point matériel libre (x, y, z) soumis à une force F, dont les projections X, Y, Z sont des fonctions analytiques de x, y, z, holomorphes pour toutes les valeurs réelles de ces variables.

Les géodésiques sont ici les droites de l'espace : les trajectoires remarquables, s'il en existe, seront donc des droites D et, si elles forment un faisceau, elles dépendront au plus de deux paramètres. Dans quels cas, ces droites trajectoires dépendront-elles précisément de deux paramètres ? Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer qu'en chaque point (x, y, z) d'une droite D, la ligne d'action de (F) doit coïncider avec D ; si par tout point (x, y, z) passe une droite (D), l'ensemble des lignes d'action de la force (F) doit se confondre avec la congruence des droites D. Inversement, si les lignes d'action de (F), qui en général forment un complexe, forment une congruence, chaque droite de cette congruence est une trajectoire remarquable. Le seul cas où les trajectoires remarquables dépendent de deux paramètres est donc le cas où le complexe des forces (F) se réduit à une congruence. — Quand il existe notamment une fonction de forces $U(x, y, z)$, les forces (F) forment un complexe, à moins que les surfaces de niveau $U = C^{te}$ ne soient parallèles ; les normales à ces surfaces forment alors une congruence.

Quant aux trajectoires singulières, elles s'obtiennent dans tous les cas, (a, b, c) étant un point d'équilibre, en cherchant toutes les intégrales du système :

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y} = \frac{dz'}{Z}.$$

qui répondent aux conditions initiales : $x = a$, $y = b$, $z = c$, $x' = y' = z' = 0$.

Tout arc continu de trajectoire est nécessairement régulier, sauf peut être en un point d'équilibre (a, b, c), et est prolongeable indéfiniment, d'une façon régulière [1] à moins qu'on ne rencontre un point d'équilibre. Mais les branches singulières qui passent par un point d'équilibre (a, b, c) peuvent présenter en ce point des singularités quelconques et notamment s'y terminer.

Admettons maintenant que les forces dérivent d'un potentiel U et que de plus les points d'équilibre soient isolés, c'est-à-dire que les trois dérivées de U ne s'annulent simultanément qu'en des points isolés. Une trajectoire prise au hasard ne comprendra aucune branche singulière ; tout arc continu d'une telle trajectoire sera parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement régulier, vrai ou conjugué. Il n'y aura d'exception que pour des trajectoires particulières, à savoir les trajectoires mixtes et les trajectoires singulières. Les premières dépendent de trois paramètres, à moins que les surfaces de niveau ne soient parallèles, auquel cas les trajectoires mixtes se confondent avec la congruence des trajectoires remarquables. — Pour ce qui est des trajectoires singulières telles que MN' (N' étant un point d'équilibre), nous savons seulement que l'arc MN' n'est jamais parcouru par le mobile, en un temps fini, d'un mouvement réel (vrai ou conjugué) : le mobile tend vers N' quand t croît indéfiniment, ou bien MN' se décompose en une infinité d'arcs correspondant à des mouvements périodiques.

Quand les surfaces de niveau sont parallèles, tout point d'équilibre N' est un point multiple de la surface de niveau qui le contient, et par ce point passent une infinité de normales, formant un cône, qui sont autant de trajectoires remarquables D. On peut placer le mobile dans des conditions initiales telles qu'il tende vers N' sur D quand t croît indéfiniment (d'un mouvement vrai ou d'un mouvement conjugué suivant les cas).

J'ajouterai quelques observations relatives aux mouvements périodiques.

---

[1] J'entends par là que x, y, z restent des fonctions holomorphes de l'arc σ.

Pour qu'un mouvement vrai quelconque soit périodique, il faut et il suffit qu'une trajectoire vraie quelconque soit une courbe fermée. – En effet, prenons une trajectoire au hasard : en tout point M de cette trajectoire (qui n'est pas un point double) la vitesse du mobile a une valeur bien déterminée ; d'autre part, la trajectoire sera parcourue toute entière dans le même sens d'un mouvement régulier en un temps fini t_1, et au bout du temps t_1 le mobile reviendra au point de départ M avec la même vitesse dirigée dans le même sens, et le même mouvement recommencera.

De même pour que tout mouvement vrai dont les conditions initiales sont assujetties à une certaine inégalité, soit périodique, il faut et il suffit que toutes les trajectoires vraies (dont les $2k-1$ paramètres satisfont à une certaine inégalité) soient des courbes fermées.

Si on veut seulement que des mouvements particuliers soient périodiques, plusieurs cas sont à distinguer :

Pour qu'une trajectoire vraie, qui n'est ni mixte, ni remarquable, corresponde à un mouvement périodique, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et ne comprenne aucune branche singulière.

Pour qu'une trajectoire mixte corresponde à un mouvement périodique, il faut et il suffit qu'elle présente au moins deux points d'arrêt ne comprenant pas de branche singulière et entre lesquels le mouvement vrai soit réel (et non le mouvement conjugué).

Pour qu'une trajectoire remarquable (qui est alors une droite D) corresponde à un mouvement périodique, il faut et il suffit que la droite D passe par un point d'équilibre N', où les valeurs sur la droite de la fonction U présentent un maximum. Il existe dans ce cas une infinité de mouvements périodiques : le mobile oscille sur D autour de N', l'amplitude constante de l'oscillation étant aussi petite qu'on veut.

Exemples : 1°. – Comme application particulières étudions d'abord le mouvement d'un point pesant.

Les forces forment ici une congruence, la congruence des droites verticales. Ces droites seront à la fois les trajectoires remarquables et les trajectoires mixtes du point. Il n'y a pas de position d'équilibre, donc pas de branches singulières.

Si oz définit la direction et le sens de la pesanteur, les trajectoires sont les paraboles :

$$y = \lambda x + \mu$$
$$z = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ désignent des constantes arbitraires. Ces trajectoires sont vraies pour $\alpha > 0$, conjuguées pour $\alpha < 0$; les deux classes se permutent quand on change le sens de la pesanteur. Tout arc de parabole est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué.

Quant au mouvement sur une verticale, il présente nécessairement un point d'arrêt et un seul (le point de culmination) quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Il n'y a pas de mouvements périodiques.

2°. Considérons maintenant un point matériel (de masse 1) attiré par l'origine proportionnellement à la distance : $F = -k^2 r$.

Les forces forment encore une congruence, à savoir la congruence des droites issues de l'origine. Ces droites D sont à la fois les trajectoires remarquables et les trajectoires mixtes du mobile. L'origine O est une position d'équilibre, et c'est la seule.

Les trajectoires réelles sont les coniques réelles ayant l'origine comme centre. Les trajectoires vraies sont les ellipses, les trajectoires conjuguées les hyperboles.

Tous les mouvements vrais sont périodiques. Sur une droite D, la fonction V est maxima à l'origine O. Tous les mouvements sur D présentent deux points d'arrêt équidistants de O ; les oscillations, comme on sait, sont tautochrones.

Si on considère un point repoussé par l'origine proportionnellement à la distance, les trajectoires réelles ne sont pas changées, les trajectoires vraies sont les hyperboles, les trajectoires conjuguées les ellipses. Sur une droite D, le mouvement présente un point d'arrêt et un seul entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$ ou n'en présente aucun, suivant que la valeur absolue V_0 de la vitesse initiale est inférieure ou supérieure à $+kr_0$; r_0 est la distance initiale à l'origine. Si $V_0 = kr_0$, le mobile tend vers O quand t tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$). Aucun mouvement n'est périodique.

Dans ce dernier cas, x, y, z, sont des fonctions rationnelles de e^{kt}, et admettent par suite la période imaginaire $\frac{2i\pi}{k}$. Cette période correspond à la période réelle $\frac{2\pi}{k}$ du mouvement conjugué, et en effet quand la force est attractive, x, y, z, sont des fonctions rationnelles de $tg\,\frac{kt}{2}$.

3° Étudions enfin le mouvement d'un point matériel de masse 1 soumis à la force $X = 2y$, $Y = -2x$, $Z = 0$.

Les forces forment ici un complexe. L'axe des z est un lieu de points d'équilibre et comme c'est aussi une géodésique, ce sera une trajectoire que le mobile pourra parcourir avec une vitesse constante et arbitraire.

Existe-t-il d'autres trajectoires remarquables? Ces trajectoires doivent être des droites et vérifier les équations :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0} \; ;$$

la droite $x=0$, $y=0$ est la seule droite qui satisfait à ces conditions.

Si on observe que les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} + 2i(x+iy) = 0, \qquad z'' = 0,$$

on voit que le mouvement est défini par les égalités :

$$x + iy = (\alpha + i\beta)e^{(1-i)t} + (\gamma + i\delta)e^{(-1+i)t}, \quad z = \lambda t + \mu,$$

ou encore :

$$(C) \quad \begin{cases} x = e^t\left[\alpha\cos t + \beta\sin t\right] + e^{-t}\left(\gamma\cos t - \delta\sin t\right) \\ y = e^t\left(\beta\cos t - \alpha\sin t\right) + e^{-t}\left(\delta\cos t + \gamma\sin t\right) \\ z = \lambda t + \mu, \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ sont des constantes arbitraires. Comme x s'annule toujours un certain nombre de fois (ainsi que y) quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, on peut supposer que, pour $t=0$, x est égal à zéro, ce qui revient à faire $\alpha = -\gamma$ dans les expressions de x, y.

Les trajectoires réelles vraies s'obtiennent en donnant à $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$, et à t des valeurs réelles ; les trajectoires réelles conjuguées s'obtiennent en changeant t en $t'i$ dans l'expression de $x+iy$; x, y, z s'expriment alors en t' sous la forme suivante :

$$(C') \quad \begin{cases} x = e^{t'}\left(\alpha'\cos t' - \beta'\sin t'\right) + e^{-t'}\left(\gamma'\cos t' + \delta'\sin t'\right) \\ y = e^{t'}\left(\beta'\cos t' + \alpha'\sin t'\right) + e^{-t'}\left(\delta'\cos t' - \gamma'\sin t'\right) \\ z = \lambda' t' + \mu' \end{cases}$$

et on voit que si on fait $\alpha' = \alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = \gamma$, $\delta' = -\delta$, et si on change y en $-y$, on retrouve les équations (C). Les trajectoires conjuguées sont donc les symétriques des trajectoires vraies par rapport au plan des zx, (comme aussi par rapport au plan des zy). D'ailleurs la courbe symétrique d'une trajectoire vraie par rapport à un point quelconque de Oz est encore une trajectoire vraie. L'ensemble des trajectoires vraies admet aussi des plans de symétrie faciles à apercevoir.

Parmi les trajectoires réelles (qui dépendent de 5 constantes), les trajectoires mixtes forment un faisceau dépendant de trois constantes. Pour qu'une trajectoire soit mixte, il faut et il suffit qu'elle présente un point (qui ne soit pas un point d'équilibre) où x', y', z', s'annulent simultanément. Il faut donc d'abord que λ soit nul, ensuite que $x'+iy'$ s'annulent pour une valeur réelle de t qu'on peut toujours supposer être nulle. Pour que $x'+iy'$ s'annule avec t, il faut et il suffit que $\alpha+i\beta=\gamma+i\delta$, ou que $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$. Les trajectoires mixtes seront donc données par les égalités :

$$(c)\quad\begin{cases} x = \alpha\cos t\,(e^{t}+e^{-t}) + \beta\sin t\,(e^{t}-e^{-t}) \\ y = \alpha\sin t\,(e^{-t}-e^{t}) + \beta\cos t\,(e^{t}+e^{-t}) \\ z = \mu. \end{cases}$$

Elles présentent un point d'arrêt et un seul, $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\mu$. Pour des valeurs de t égales et de signes contraires, x, y, z reprennent ces mêmes valeurs. Mais si on fait $t=t'i$, on obtient l'autre portion réelle de la trajectoire mixte.

$$(c')\quad\begin{cases} x = \alpha\cos t'\,(e^{t'}+e^{-t'}) - \beta\sin t'\,(e^{t'}-e^{-t'}) \\ y = \alpha\sin t'\,(e^{t'}-e^{-t'}) + \beta\cos t'\,(e^{t'}+e^{-t'}) \\ z = \mu. \end{cases}$$

Si on fait $\theta=t^2=-t'^2$, les fonctions $x(\theta)$, $y(\theta)$ et $z=\mu$ définies par (c) ou par (c') sont les mêmes fonctions analytiques de θ, et quand θ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point (x, y, z) parcourt toute la trajectoire mixte réelle. Cette trajectoire se décompose en deux parties, l'une vraie, l'autre conjuguée, séparée par le point $\theta=0$. La courbe symétrique d'une trajectoire mixte par rapport au plan des zy (ou des zx) est aussi une trajectoire mixte, mais la partie symétrique d'un segment vrai est un segment conjugué et réciproquement.

Cherchons maintenant les trajectoires singulières. Ces trajectoires ne peuvent renfermer un nombre infini de points d'arrêt, puisqu'une trajectoire quelconque possède au plus un point d'arrêt. Les branches singulières vraies s'obtiennent donc en faisant croître (ou décroître) t indéfiniment par valeurs réelles et en cherchant si le mobile tend vers une position limite N'. Ce point N' est nécessairement un point d'équilibre, donc un point de Oz. Pour que, t décroissant indéfiniment, x et y tendent vers zéro, il faut et il suffit que γ et δ soient nuls ; pour que $|z|$ ne croisse pas indéfiniment, λ doit être nul. Comme d'autre part on peut supposer $\alpha=-\gamma$, donc ici $\alpha=0$, on a en définitive les trajectoires :

$$x=\beta e^{t}\sin t,\quad y=\beta e^{t}\cos t,\quad z=\mu,$$

qui dépendent de 2 constantes arbitraires. On aurait les mêmes trajectoires en faisant croître t indéfiniment (il suffit de changer t en $-t$). - Les branches singulières conjuguées s'obtiennent en changeant t en $t'i$, et donnent :

$$x=-\beta' e^{t'}\sin t',\ y'=\beta' e^{t'}\cos t',\ z'=\mu\,;$$

ce sont les symétriques par rapport au plan des yz des branches singulières vraies. Si on élimine t, on trouve, pour les branches vraies $r = Ce^{\theta}$, $z = \mu$, et pour les branches conjuguées $r = Ce^{\theta}$, $z = \mu$; r et θ désignent les coordonnées polaires d'un point du plan des x, y. Ces courbes admettent l'origine comme point asymptote. Quand le mobile décrit une de ces trajectoires singulières, s'il est lancé par exemple dans le sens du point N' il tendra vers ce point sans jamais l'atteindre quand t croîtra indéfiniment.(1)

Toute trajectoire vraie qui ne rentre ni dans les trajectoires mixtes (faisceau à 3 paramètres) ni dans les trajectoires singulières (faisceau à deux paramètres) est parcourue tout entière dans le même sens quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Equations des trajectoires quand les forces sont nulles ou dérivent d'un potentiel.

Quand les forces sont nulles, nous avons vu (p. 205) que les trajectoires dépendent de $(2k-2)$ constantes, et nous avons indiqué le moyen de former les équations différentielles de ces trajectoires. Nous allons donner maintenant une forme explicite de ces équations différentielles :

$$\text{Soit } 2T = \sum A_{ij}\, q_i'\, q_j' \qquad (A_{ij} = A_{ji})$$

la force-vive du système, et considérons les équations de Lagrange :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k);$$

qui définissent le mouvement sans forces.

Ces équations entraînent, comme on sait, la conséquence : $T = h$. Si on appelle T_1 ce que devient T quand on y remplace q_1' par 1, q_2' par $\frac{dq_2}{dq_1} = q'_{(2)}, \ldots\ldots$ q_k' par $\frac{dq_k}{dq_1} = q'_{(k)}$, cette intégrale première s'écrira :

$$q_1'^2\, T_1 = h, \qquad \text{ou encore :}$$

$$(2) \qquad dt = dq_1 \sqrt{\frac{T_1}{h}}$$

Il est loisible de substituer aux équations (1), les $(k-1)$ dernières de ces équations :

$$(1)' \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 2, 3 \ldots k),$$

jointes à l'équation (2). Si maintenant dans (1)' on remplace partout dt par $dq_1\sqrt{\frac{T_1}{h}}$, on formera les équations différentielles des trajectoires. En remarquant

---

(1) Nous avons donné (page 221) un exemple où une branche singulière se décompose en une infinité de segments tendant vers N' et qui correspondent à autant de mouvements périodiques (alternativement vrais ou conjugués.)

que $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ est linéaire par rapport aux q'_i et par suite est égal à $q'_1 \frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}$ ou $\frac{\sqrt{k}}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}$, et que de même $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ est égal à $\frac{k}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial q_i}$, on voit que les équations (1)′ ainsi transformées deviennent :

$$\sqrt{\frac{k}{T_1}}\frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{k}{T_1}}\frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}\right) - \frac{k}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 2, 3 \dots k),$$

ou encore :

$$(3) \quad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1}}\frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}\right) - \frac{1}{\sqrt{T_1}}\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 2, 3 \dots k).$$

Si nous posons :

$$f = \sqrt{T_1} = \sqrt{A_{11} + 2A_{12}\,q'_{(2)} + \dots + 2A_{1k}\,q'_k + \sum_{i>1,\,j>1} A_{ij}\,q'_{(i)}\,q'_{(j)}},$$

le système (3) s'écrit :

$$(4) \quad \frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 2, 3, \dots k)$$

Par exemple, si $k = 2$, les géodésiques de la surface dont le ds^2 est $A_{11}\,dq_1^2 + 2A_{12}\,dq_1\,dq_2 + A_{22}\,dq_2^2$, sont données par l'équation du second ordre :

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(2)}} - \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0,$$

où $f = \sqrt{A_{11} + 2A_{12}\,q'_{(2)} + A_{22}\,q'^2_{(2)}}$ et où $q'_{(2)} = \frac{dq_2}{dq_1}$.

Les équations (4) sont celles qu'on trouve en annulant la variation de l'intégrale $\int f\,dq_1$ prise le long d'une courbe $q_i = \varphi_i\,(q_1)$ quelconque dont les extrémités sont fixes.

On vérifie bien de cette manière que les géodésiques ne dépendent que de $(2k - 2)$ constantes, et on forme explicitement les $(k-1)$ équations différentielles du 2° ordre qui les définissent. Il serait facile de démontrer directement que ces équations, linéaires par rapport aux $q''_{(i)}$, sont résolubles relativement à ces variables, mais ceci résulte de ce qui a été dit au début du chapitre.

Principe de la moindre action. — Le procédé que nous venons d'employer s'applique aussi bien au cas où les forces ne sont pas nulles mais dérivent d'un potentiel U. — Ecrivons en effet dans cette hypothèse les équations de Lagrange :

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \dots k).$$

Ces équations entraînant la conséquence $T - U = h$, il nous est loisible de les remplacer par $(k-1)$ d'entre elles, les dernières, par exemple ;

$$(1)' \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad (i = 2, 3 \dots k),$$

jointes à l'équation :

$$(2) \quad dt = dq_1 \sqrt{\frac{T_1}{U+h}},$$

la notation étant la même que tout à l'heure.

Si dans les équations (1)' on exprime partout dt en dq_1 d'après (2), comme on a ici :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sqrt{\frac{U+h}{T_1}} \frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{U+h}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial q_i},$$

il vient :

$$(3) \quad \sqrt{\frac{U+h}{T_1}} \frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{U+h}{T_1}} \frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}\right) - \frac{U+h}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \ (i=2, \dots k),$$

et ces équations sont les équations différentielles des trajectoires qui correspondent à la valeur h de la constante de l'intégrale des forces vives ; ces trajectoires forment un faisceau à $(2k-2)$ paramètres.

Les équations (3) peuvent s'écrire encore :

$$(4) \quad \frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{\frac{U+h}{T_1}} \frac{\partial T_1}{\partial q'_{(i)}}\right) - \sqrt{\frac{U+h}{T_1}}\frac{\partial T_1}{\partial q_i} - \sqrt{\frac{T_1}{U+h}}\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 (i=2, 3 \dots k);$$

sous cette forme on voit que si on pose :

$$f = \sqrt{(U+h)T_1},$$

elles coïncident avec les équations :

$$(5) \quad \frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}, \ (i = 2, 3 \dots k).$$

Insistons un peu sur ce dernier système. Considérons dans l'espace à k dimensions une courbe C quelconque : $q_2 = \varphi_2(q_1) \dots\dots q_k = \varphi_k(q_1)$, assujettie à avoir ses deux extrémités fixes $a_1, a_2 \dots a_k$ et $b_1, b_2, \dots b_k$. Si on exprime que l'intégrale $\int_C f dq_1$ a une variation nulle quand on passe d'une certaine courbe C_1 aux courbes C voisines, on trouve précisément que la courbe C_1 doit satisfaire aux équations différentielles (5). On démontre d'ailleurs que si les extrémités fixes $(a_1, \dots a_k)$ ou M_1 et $(b_1, b_2 \dots b_k)$ ou M_2 sont suffisamment voisines, l'intégrale prise le long de C_1 est minima.[1] On peut donc dire que l'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} f dq_1$ est minima pour la trajectoire naturelle du système $(q_1, q_2 \dots q_k)$ correspondant à la valeur h de la constante des forces vives et qui passe par les points M_1 et M_2. C'est en cela que consiste

[1] Voir à ce sujet la géométrie supérieure de Mr Darboux (Tome II, chapitres VI, VII et VIII).

le principe de la moindre action.

Principe d'Hamilton.. Quand les forces dérivant d'un potentiel, on laisse les équations de Lagrange sous leur forme primitive :

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots k),$$

on peut les rattacher d'une autre manière au calcul des variations.

Soit en effet k fonctions $q_1\, q_2 \ldots q_k$ de t quelconques, assujetties à la seule condition que pour $t = t_0$ et $t = t_1$, $q_1, q_2 \ldots q_k$ aient respectivement des valeurs fixes $(a_1, a_2 \ldots a_k)$ pour t_0 et $(b_1, b_2 \ldots b_k)$ pour t_1. Considérons maintenant l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$; si on exprime que la variation de cette intégrale est nulle quand on passe d'un certain système de fonctions $q_i = \varphi_i(t)$ à un système voisin, on trouve que ces fonctions $q_i = \varphi_i(t)$ doivent précisément vérifier les équations (1).. Ces équations expriment donc que la variation de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$ est nulle pour le mouvement $q_i = \varphi_i(t)$ du système matériel, mouvement défini par les conditions que pour $t = t_0$ et $t = t_1$, le système occupe deux positions déterminées $(a_1 \ldots a_k)$ et $(b_1 \ldots b_k)$. C'est en cela que consiste le principe d'Hamilton.

Remarques sur le principe de la moindre action.. Le principe de la moindre action ramène la recherche des trajectoires quand les forces dérivent d'un potentiel à la recherche des géodésiques d'un ds^2 qui dépend de la constante arbitraire h. Si on pose en effet :

$$T' = (U+h)\,T, \text{ ou } ds'^2 = (U+h)\,ds^2 = (U+h)\sum A_{ij}\, dq_i\, dq_j,$$

les géodésiques de ds'^2 sont données par les équations :

$$(5)\quad \frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)}, \qquad (i = 2, 3 \ldots k),$$

où $f = \dfrac{ds'}{dq_1} = \sqrt{(U+h)\,T_1}$.

Si on convient d'appeler faisceau naturel de trajectoires tout faisceau (à $2k-2$ paramètres) qui correspond à une valeur déterminée a de la constante h de l'intégrale des forces vives, on voit que le faisceau naturel $h = a$ coïncide avec les géodésiques de $(U+a)\,ds^2$, ou, si on veut encore, avec les géodésiques de $(\lambda U + \mu)\,ds^2$, où $\frac{\mu}{\lambda} = a$. Les géodésiques de ds^2 forment un faisceau naturel correspondant à $\lambda = 0$, donc à $a = \infty$, ce que nous savions déjà.

La recherche des trajectoires, quand il existe une fonction de forces, revient donc à l'intégration du système (5) c'est à dire d'un système explicite de $(k-1)$ équations du second ordre dépendant d'un paramètre arbitraire h. Il importe de remarquer que ces équations sont de l'espèce de celles qui proviennent du calcul des variations et possèdent par suite, comme nous le verrons tout à l'heure, d'importantes propriétés qui en facilitent l'intégration ; on en connaît notamment un dernier multiplicateur.

Une fois connues les trajectoires, le mouvement sera défini à l'aide d'une seule quadrature. Quelles relations existe-t-il entre les mouvements définis d'une part par le premier système d'équations de Lagrange :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots k)$$

et d'autre part par le système sans forces :

$$(1') \qquad \frac{d}{dt_1}\frac{\partial T'}{\partial q'_i} - \frac{\partial T'}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i; \qquad (i = 1, 2 \ldots k)$$

où $T' = (U + h)\,T$?

Nous savons que les trajectoires sont les mêmes pour les deux systèmes ; considérons une de ces trajectoires ; le mouvement sur cette trajectoire, d'après (1) est défini par l'égalité :

$$dt^2 = \frac{ds^2}{U+h},$$

et d'après (1') par :

$$dt_1^2 = \alpha(U+h)\,ds^2,$$

α désignant une constante arbitraire. On passera donc du premier mouvement au second en changeant dt^2 en $\frac{dt_1^2}{\alpha(U+h)^2}$, α étant une constante quelconque.

Transformation de Mr. Darboux.

Nous venons de dire que les trajectoires d'un système, quand les forces dérivent d'un potentiel, coïncident, pour chaque valeur de h, avec les géodésiques de $(U+h)\,ds^2$. D'après cela, considérons un système dont le ds^2 soit égal à $(\alpha U + \beta)\,ds^2$, soumis à des forces dont le potentiel soit $\frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}$. Les trajectoires de ce nouveau système coïncideront avec les géodésiques de $d\sigma^2$, en posant :

$$d\sigma^2 = [\gamma U + \delta + h_1(\alpha U + \beta)]\,ds^2,$$

h_1 désignant la constante de la nouvelle intégrale des forces vives. Si on établit entre h et h_1 la relation :

$$h = \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1}$$

les géodésiques de $d\sigma^2$ et de $(U+h)\,ds^2$, (qui ne diffèrent que par un facteur constant), coïncident. D'où cette conclusion :

Si dans un système $[T, U]$ d'équations de Lagrange, on remplace T par $(\alpha U + \beta)\,T$ et U par $U' = \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}$, les trajectoires ne sont pas changées. Chaque faisceau naturel $h = a$ des premières trajectoires est un faisceau naturel $h_1 = a_1$ des nouvelles trajectoires ; la valeur de h_1 qui correspond à une valeur de h est donnée par l'égalité

$$h_1 = \frac{\delta - \gamma h}{\alpha h - \beta}.$$

Cette transformation a été indiquée pour la première fois par M. Darboux.

Sur la même trajectoire, le mouvement défini par chacun des deux systèmes ne sera pas le même. Représentons en effet le temps par t dans le premier mouvement, par t_1 dans le second ; nous avons les deux égalités :

$$ds^2 = (V + h)\, dt^2 = \left(V + \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1}\right) dt^2,$$

et

$$(\alpha V + \beta)\, ds^2 = \left(\frac{\gamma V + \delta}{\alpha V + \beta} + h_1\right) dt_1^2,$$

d'où on tire, en éliminant h_1,

$$(6) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)\, dt_1^2 = (\alpha V + \beta)^2 \left[\alpha\, ds^2 - (\alpha V + \beta)\, dt^2\right];$$

telle est la relation qui existe entre dt et dt_1.

Comme il est loisible d'augmenter la fonction de forces d'une constante, on peut toujours (α étant différent de zéro), supposer V de la forme $\frac{\delta}{\alpha V}$. La relation (6) devient alors (γ et β étant nuls) :

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\delta} V^2 \left[\frac{ds^2}{dt^2} - V\right] = \frac{\alpha}{\delta} V^2 h,$$

ou encore :

$$\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha V^2}\left[\alpha V \frac{ds^2}{dt_1^2} - \frac{\delta}{\alpha V}\right] = \frac{h_1}{\alpha V^2}.$$

Ces égalités nous montrent que les expressions $\frac{1}{V}\frac{dt_1}{dt}$ et $V\frac{dt}{dt_1}$, sont respectivement des intégrales premières des deux systèmes, à savoir les deux intégrales des forces vives.

A toute intégrale première du premier système correspond une intégrale du second obtenue en remplaçant dt en fonction de dt_1 d'après (6). Les deux systèmes sont d'ailleurs réciproques, c'est à dire qu'inversement le premier se déduit du second par une transformation de M. Darboux. Tous les transformés d'un système transformé coïncident avec les transformés du système primitif.

Propriétés des équations différentielles qui proviennent du calcul des variations.

Soit $x_1, x_2, \ldots x_n$ n fonctions arbitraires d'une variable x, et $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ leurs dérivées. Considérons l'intégrale $\int_a^b f(x, x_1 \ldots x_n\, x'_1, \ldots x'_n)\, dx$, les fonctions x_i étant assujetties à la seule condition de prendre pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données ; f représente une fonction donnée quelconque, sur laquelle nous faisons l'unique hypothèse que son Hessien Δ relatif aux n variables x'_i

n'est pas identiquement nul. Si on annule la variation de l'intégrale en question, on trouve, comme nous l'avons rappelé, que les fonctions $x_i(x)$ doivent vérifier le système différentiel :

$$(A) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x'_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{dx_i}{dx} = x'_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

C'est un système de n équations du second ordre, résolubles par rapport aux x_i'' qui y figurent linéairement, car le déterminant des coefficients des x''_i n'est autre que le Hessien Δ de f. Un tel système (A) jouit de propriétés analogues à celles d'un système de Lagrange où U existe. Plus généralement, tout système :

$$(B) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x'_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_i(x_1, x_2 \ldots x_n), \quad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

jouit de propriétés analogues à celles d'un système de Lagrange où les forces ne dépendent pas des vitesses.

Tout d'abord, on peut ramener un système (B) quelconque à la forme canonique. Il suffit de poser :

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

et

$$K = p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + \cdots p_n x'_n - f.$$

Si dans F on remplace les x_i en fonction des p_i on trouve :

$$(\alpha) \qquad x'_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad -\frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Pour le voir, il suffit de répéter le raisonnement fait pour $f = T$ (page 141), qui ne suppose rien sur la forme de T.

Les équations (B) peuvent donc se remplacer par les suivantes :

$$(C) \qquad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial K}{\partial x_i} + X_i, \quad \frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Si les X_i sont les dérivées partielles d'une fonction $U(x, x_1 x_2 \ldots x_n)$, on aura encore, en posant $H = K - U$,

$$(C)' \qquad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Toute intégrale première de (C), soit : $\varphi(x, x_1 \ldots x_n, p_1, p_2 \cdots p_n) = C^{te}$, doit vérifier la condition :

$$(\mathcal{C}) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\varphi, K) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} X_i \equiv 0.$$

(voir page 155); le symbole (φ, K), représente toujours $\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial x_i} \right)$.

Si notamment x ne figure pas dans f, ni par suite(1) dans K, les intégrales

(1) Inversement d'ailleurs, si K est indépendant de x, il en est de même [d'après (α)] de $f = \sum p_i x'_i -$

premières indépendantes de x sont caractérisées par la condition :

$$(\varphi, K) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} X_i = 0.$$

Quand les X_i dérivent d'une fonction $U(x, x_1, \ldots x_n)$, l'équation (b) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\varphi, H) = 0.$$

Si f et U ne dépendent pas de x, les intégrales premières indépendantes de x vérifient simplement la condition :

$$(\varphi, H) = 0.$$

Dans ce dernier cas, $H \equiv K - U = C^{te}$ est évidemment une intégrale. Cette intégrale se réduit à $K = C^{te}$ si $X_1 \equiv X_2 \equiv \cdots \equiv X_n \equiv 0$.

Enfin les équations (C) admettent comme dernier multiplicateur l'unité, (voir p. 181). Il suffit donc de connaître $(2n-1)$ intégrales premières de (C) pour que l'intégration s'achève par quadratures ; si x ne figure pas dans (C) il suffit de connaître $(2n-2)$ intégrales indépendantes de x.

Quant au système primitif (B), il est aisé de voir qu'il admet comme dernier multiplicateur le hessien Δ de f. En effet, admettons qu'on connaisse $(2n-1)$ intégrales premières de (C), soit :

$$\varphi_j(x, x_1, \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = c_j \quad (j = 1, 2 \ldots 2n-1).$$

Quand on tire de ces intégrales $p_1, p_2, \ldots p_n, x, x_1 \ldots x_{n-2}$ en fonction de x_{n-1} et de x_n par exemple, l'expression :

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial K}{\partial p_n} dx_{n-1} - \frac{\partial K}{\partial p_{n-1}} dx_n\right) \equiv \frac{1}{\delta}\left[x'_n dx_{n-1} - x'_{n-1} dx_n\right],$$

est une différentielle exacte ; δ désigne le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_{2n-1})}{D(x, x_1, \ldots x_{n-2}, p_1, p_2 \ldots p_n)}.$$

Mais d'autre part, si on suppose que les intégrales soient exprimées à l'aide des x'_i, en appelant δ_1 le déterminant :

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_{2n-1})}{D(x, x_1, \ldots x_{n-2}, x'_1, x'_2, \ldots x'_n)},$$

on a :

$$\delta_1 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_{2n-1})}{D(x, x_1, \ldots x_{n-2}, p_1, p_2 \ldots p_n)} \times \frac{D(x, x_1, \ldots x_{n-2}, p_1, p_2 \ldots p_n)}{D(x, x_1, \ldots x_{n-2}, x'_1, x'_2 \ldots x'_n)} = \delta \times \frac{D(p_1, p_2 \ldots p_n)}{D(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)}$$

$$= \delta \Delta$$

Donc l'expression :

$$\frac{\Delta}{\delta_1}\left(x'_n\, dx_{n-1} - x'_{n-1}\, dx_n\right)$$

est une différentielle exacte quand on tient compte des $(2n-1)$ intégrales,

$$\varphi_j\,(x, x_1, \ldots x_n, x'_1, x'_2, \ldots x'_n) = C^{te},$$

du système (3) ; le système admet donc Δ comme dernier multiplicateur.

Si notamment x ne figure explicitement ni dans f, ni dans les X_i, Δ est un multiplicateur du système :

$$\frac{dx_1}{x'_1} = \frac{dx_2}{x'_2} \;\ldots\ldots = \frac{dx_n}{x'_n} = \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial x'_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_1} = \ldots\ldots = \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial x'_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_n} + X_n}.$$

Enfin l'intégration du système canonique (C) peut se ramener à la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Ce que nous avons dit dans la quinzième leçon (p. 193-197) ne suppose rien sur la forme de H.

Cas où f est homogène par rapport aux x'_i.

Supposons en particulier f homogène par rapport aux x'_i ; le degré μ d'homogénéité (qui peut d'ailleurs être quelconque, réel ou imaginaire) ne doit être égal ni à zéro ni à l'unité ; autrement, les identités d'Euler montrent que le Hessien Δ serait identiquement nul.

Si on calcule dans ce cas la fonction canonique K, on a :

$$K = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} - f = \mu\, f - f = (\mu - 1)\, f.$$

Quand μ est égal à 2, K coïncide avec f, à condition de remplacer dans f les x'_i à l'aide des p_i.

Si de plus x ne figure ni dans f ni dans les X_i, le système (B) entraîne la conséquence :

$$(\mu - 1)\, f = \int X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots\ldots + X_n\, dx_n,$$

d'où l'intégrale :

$$(\mu - 1)\, f = U + h,$$

quand les X_i sont les dérivées d'une fonction : $U\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Plaçons-nous exclusivement dans l'hypothèse où x ne figure pas dans (B) ; les relations entre $x_1, x_2, \ldots x_n$ dépendent alors de $(2n-1)$ constantes au plus. Si f est homogène, le nombre des constantes est précisément $2n-1$, à moins que tous les X_i ne soient identiquement nuls, auquel cas ce nombre s'abaisse à $2n-2$.

Il suffit, pour le voir, de raisonner comme à la page 204. Si on observe que dans les équations (B), les coefficients des x''_i sont homogènes et de degré $\mu-2$ par rapport aux x'_i, et que les autres termes du premier membre sont homogènes et de degré μ, on voit que les équations (B) résolues par rapport aux x''_i sont de la forme :

$$(B)' \qquad x''_i = x_1'^2\, \Pi_i + x_1'^{2-\mu}\, \beta_i \qquad (i=1,2,\dots n),$$

les Π_i, β_i étant homogènes et de degré zéro par rapport aux x'_i. Si d'après (B) on calcule $\frac{d^2x_i}{dx_1^2}$, on trouve :

$$(C) \qquad \frac{d^2x_i}{dx_1^2} = \Pi_i - \frac{dx_i}{dx_1}\,\Pi_1 + \frac{\beta_i - \frac{dx_i}{dx_1}\,\beta_1}{x_1'^{\mu}}, \qquad (i=1,2\dots\dots n)$$

Il suit de là, comme pour les équations de la mécanique, que les relations entre $x_1, x_2, \dots x_n$, dépendront de $2n-1$ constantes, à moins que les rapports :

$$\frac{\beta_i - \frac{dx'_i}{dx_1}\,\beta_1}{x_1'^{\mu}}$$

, ne soient indépendants de x_1' ; ceci n'est possible que si ces rapports sont identiquement nuls, ce qui entraine :

$$\frac{\beta_1}{x'_1} \equiv \frac{\beta_2}{x'_2} \dots\dots\dots \equiv \frac{\beta_n}{x'_n} \equiv \lambda,$$

d'où pour les X_i les valeurs (voir p. 205, éq. 5) :

$$(i=1,2,\dots n) \qquad X_i = \lambda\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x'_i\partial x'_1}\,x'_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i\partial x'_2}\,x'_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i\partial x'_n}\,x'_n\right] = (\mu-1)\lambda\frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Ces égalités exigent que λ et les X_i soient identiquement nuls ; autrement les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x'_i}$ considérées comme fonctions des x'_i ne différeraient que par un facteur constant, et leur déterminant fonctionnel Δ serait identiquement nul.

En définitive, quand les fonctions X_i ne sont pas toutes nulles, les relations entre $x_1, x_2, \dots x_n$ dépendent de $(2n-1)$ constantes ; on peut former les équations différentielles qui définissent ces relations de la même manière que dans le cas particulier où f est une forme quadratique T' (voir p. 208) ; ces équations intégrées, x se calcule en fonction de x_1 par une simple quadrature d'après la relation (C) qui donne $\frac{dx}{dx_1}$.

Si, au contraire, toutes les fonctions X_i sont nulles, les relations entre $x_1, x_2, \dots x_n$ dépendent de $(2n-2)$ constantes et sont définies par le système :

$$(D) \qquad \frac{d^2x_i}{dx_i^2} = \Pi_i - \frac{dx_i}{dx_1}\,\Pi_1 \qquad (i=2,3,\dots n),$$

et x est déterminé (une fois ce système intégré) par l'intégrale première $f=h$,

qui peut s'écrire :
$$\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^\mu = \frac{f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, 1, \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right)}{h}$$

Enfin, on peut donner une forme explicite du système (D), qui s'étend au cas où il existe des fonctions X_i dérivées de U $(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Substituons en effet au système (B) les $(n-1)$ dernières équations de ce système :

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x_i'} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dx} = x_i', \quad (i = 2, 3 \ldots n)$$

jointes à l'intégrale première :
$$(\mu - 1) f - U = h,$$

qui peut s'écrire

$$(F) \qquad dx = dx_1 \sqrt[\mu]{\frac{(\mu-1) f_1}{U+h}},$$

en appelant f_1 ce que devient f quand on y remplace x'_1 par 1, x'_2 par $\frac{dx_2}{dx_1} = x'_{(2)}$, ... x'_n par $\frac{dx_n}{dx_1} = x'_{(n)}$.

Si dans les équations (E) on exprime partout dx en fonction de dx_1 d'après (F), comme on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'} = x_1'^{\,\mu-1}\frac{\partial f_1}{\partial x'_{(i)}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = x_1'^{\,\mu}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad (i = 2, 3 \ldots x),$$

il vient (voir page 237) :

$$\left(\frac{U+h}{(\mu-1) f_1}\right)^{\frac{1}{\mu}} \times \frac{d}{dx_1}\left[\left(\frac{U+h}{(\mu-1) f_1}\right)^{1-\frac{1}{\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial x'_{(i)}}\right] - \frac{U+h}{(\mu-1) f_1} \times \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (i = 2, 3, \ldots n),$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx_1}\left[\left(\frac{U+h}{f_1}\right)^{1-\frac{1}{\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial x'_{(i)}}\right] - \left[\frac{U+h}{f_1}\right]^{1-\frac{1}{\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = (\mu - 1)\left(\frac{f_1}{U+h}\right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

ou encore, en posant : $P = (U+h)^{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} f_1^{\frac{1}{\mu}}$,

$$(G) \qquad \frac{d}{dx_1}\frac{\partial P}{\partial x'_{(i)}} - \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 2, 3 \ldots n).$$

Si notamment $X_1 \equiv X_2 \equiv \ldots \equiv X_n \equiv 0$, les équations (I), qui définissent les relations entre $x_1, x_2 \ldots x_n$, se mettent sous la forme (G) où $P \equiv f_1^{\frac{1}{\mu}}$. Appelons géodésiques du $ds^\mu \equiv f\,(x_1, \ldots x_n, dx_1, \ldots dx_n)$ ces relations entre les x_i qui dépendent de $(2n-2)$ constantes ; appelons d'autre part trajectoires d'un système (B), défini par $\left\{ f \equiv \frac{ds^\mu}{dx^\mu}, U \right\}$, les relations entre $x_1, x_2, \ldots x_n$ qu'entraîne ce système. Pour chaque valeur h de la constante de l'intégrale : $(\mu-1) f - U = h$, les trajectoires forment un faisceau à $(2n-2)$ paramètres qui coïncide avec les géodésiques de $(U+h)^{(\mu-1)} ds^\mu$. C'est une généralisation du principe de la moindre action.

Si dans un système (B) défini par $\{f, U\}$, où f est homogène et de degré μ par rapport aux x'_i, on remplace f par $(\alpha U+\beta)^{\mu-1} f$, et U par $\frac{\gamma U+\delta}{\alpha U+\beta}$, les trajectoires ne sont pas changées.

On voit que les propriétés les plus importantes des équations de la mécanique s'étendent aux équations (B) plus générales où f, au lieu d'être une forme quadratique T', est une fonction homogène quelconque des x'_i.

17ème Leçon.

Propriétés des intégrales premières quand les forces dérivent d'un potentiel. — Parenthèses de Poisson. — Retour sur l'Equation de Jacobi.

Nous avons établi antérieurement quelque propriétés des intégrales premières de la Dynamique. Quand il existe une fonction de forces, on peut compléter ces propriétés par une remarquable proposition due à Poisson et dont Jacobi a montré l'importance.

Dans le cas qui nous occupe, le mouvement est défini par le système canonique:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases},$$

où H est une fonction des p_i, q_i, et aussi de t si les liaisons ou les forces dépendent du temps.

Pour que l'égalité:

$$f\,(t, q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2, \dots p_k) = \alpha$$

soit une intégrale première du système (1), il faut et il suffit que f soit une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0,$$

la parenthèse (f, H) représentant d'après la notation de Poisson la somme:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right\}.$$

L'intégration du système (1) équivaut à la recherche de $2k$ intégrales particulières distinctes de l'équation (2).

La théorie du dernier multiplicateur de Jacobi nous apprend qu'il suffit de connaître $(2k-1)$ intégrales de (2) pour que la dernière s'obtienne par quadratures.

(Dans le cas où t ne figure pas dans H les intégrales premières indépendantes de t vérifient l'équation :

$$(3) \qquad (f, H) = 0$$

Il suffit alors de connaître $(2k-3)$ intégrales de l'équation (3) distinctes de l'intégrale $H = h$, pour que l'intégration de (1) s'achève par quadratures.

Le théorème de Poisson qui nous occupe s'énonce ainsi :

Si f_1 et f_2 sont deux intégrales premières du système (1), l'expression (f_1, f_2) est encore une intégrale de (1).

Mais il convient d'observer immédiatement que l'intégrale (f_1, f_2) peut n'être pas distincte de f_1 et de f_2, et en particulier peut se réduire à une constante absolue.

Pour démontrer ce théorème, nous commencerons par établir quelques propriétés des parenthèses de Poisson.

Tout d'abord, de la définition même du symbole (f, φ) résultent immédiatement les identités suivantes :

$$(f, \varphi) \equiv -(\varphi, f).$$
$$(f, f) \equiv 0$$
$$(f, c) \equiv 0 , \quad c \text{ désignant une constante.}$$

En second lieu, soit $f = F(x_1, x_2, \dots x_n)$, $\varphi = \Phi(x_1, x_2 \dots x_n)$, les x_i représentant des fonctions quelconques de $q_1 \dots q_k$, $p_1 \dots p_k$. On a identiquement :

$$(4) \qquad (f, \varphi) \equiv \sum_{ij} (x_i, x_j) \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right],$$

(le nombre des termes du second membre est $\frac{n(n-1)}{2}$).

Pour vérifier cette identité, il suffit d'exprimer dans (f, φ) les dérivées de f et φ par rapport aux p, q en fonction des dérivées de F, Φ par rapport aux x_i et des dérivées des x_i par rapport aux p, q, puis de chercher le coefficient du produit $\frac{\partial x_i}{\partial p_r}\frac{\partial x_j}{\partial q_r}$; ce coefficient coïncide avec son analogue dans le second membre.

En particulier, soit $f = F(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$, $\varphi = x_n$; on a :

$$(f, \varphi) = (x_1, \varphi)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_2, \varphi)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + (x_{n-1}, \varphi)\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$$

Si notamment $f = u+v$, il vient :

$$(u+v, \varphi) = (u, \varphi) + (v,\varphi) ;$$

si $f = uv$, il vient :

$$(uv, \varphi) = v(u, \varphi) + u(v, \varphi).$$

Mais un lemme bien plus important est celui-ci :

Lemme : – Soit A,B,C trois fonctions de $p_1, p_2, \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k$ (pouvant contenir t).(1) Si on pose :

$$(B,C) = A', \quad (C,A) = B', \quad (A,B) = C',$$

on a identiquement :

$$(A,A') + (B,B') + (C,C') = 0.$$

Il s'agit donc de vérifier que la somme :

$$S \equiv (A,(B,C)) + (B,(C,A)) + (C,(A,B))$$

est identiquement nulle.

(B,C) est une expression linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières de B et de C ; par suite $(A, (B,C))$ est une expression linéaire et homogène par rapport aux dérivées secondes de B et de C. La somme S est donc une fonction linéaire et homogène par rapport aux dérivées secondes de A, B, C, et tout revient à démontrer que le coefficient d'une quelconque de ces dérivées est identiquement nul.

Or on a :
$$A' = (B, C) = \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i} \right),$$

$$(A,A') = \sum_{j=1}^{j=k} \left[\frac{\partial A}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_j}\right) - \frac{\partial A}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}\right)\right] + \dots\dots$$

les points ...... représentant les termes qui ne contiennent pas les dérivées secondes de C.

Le coefficient de $\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j}$ $(i, j \leq k)$ est dans (A,A') :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial q_j} \right).$$

Mais $(B, B') \equiv (B, (C,A)) \equiv -(B, (A, C))$ contient aussi un terme en $\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}$, et puisque $(B, (A, C))$ ne diffère de (A, A') que par la permutation de A et de B, le coefficient de ce terme sera, au signe près, le précédent où l'on aura changé B en A et A en B. – Comme ce coefficient ne change pas dans cette permutation, les 2 termes en $\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j}$ se détruisent dans S.

De même, (A, A') fournit les termes : $-\frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i}\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right)$

$$+ \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}\left(\frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\right),$$

(1) Il est clair qu'il importe peu dans tout ceci que t figure ou non dans les expressions considérées.

qui ne changent pas par la permutation de A et B, et qui par suite, sont détruits par les termes correspondants de (B,B') ou $(B,(A,C))$.

Il résulte de là que la somme S est identiquement nulle.

Théorème de Poisson. — Soit :

$$f_1(t,q_1,\dots q_k,p_1,\dots p_k)=\alpha_1, \qquad f_2(t,q_1,\dots q_k,p_1,\dots p_k)=\alpha_2,$$

deux intégrales premières du système canonique. L'expression :

$$(f_1,f_2)\equiv\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right)$$

est aussi une intégrale du même système.

Si le temps t ne figure ni dans H, ni dans f_1, f_2, la démonstration est immédiate. Par hypothèse, on a :

$$(f_1,H)=0, \qquad (f_2,H)=0;$$

donc aussi:

$$(f_1,(f_2,H))=0 \qquad (f_2,(f_1,H))=0.$$

Mais le lemme précédent appliqué aux fonctions f_1, f_2, H donne :

$$(H,(f_1,f_2))+(f_1,(f_2,H))+(f_2,(f_1,H))=0,$$

par suite

$$(H,(f_1,f_2))=0,$$

et l'égalité :

$$(f_1,f_2)=\alpha$$

est une intégrale de (1) indépendante de t.

Supposons maintenant que t figure dans H, f_1, f_2. Par hypothèse, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+(H,f_1)=0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}+(H,f_2)=0$$

et il s'agit de démontrer qu'on a aussi :

$$(5) \qquad \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial t}+(H,(f_1,f_2))=0.$$

Or, d'après le lemme, on peut écrire :

$$(H,(f_1,f_2))+(f_1,(f_2,H))+(f_2,(H,f_1))=0,$$

ou bien :

$$(6) \qquad (H,(f_1,f_2))+\left(f_1,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)-\left(f_2,\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)=0.$$

Mais de la définition de (f_1,f_2) on conclut :

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)-\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)\right]+\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\right].$$

c'est à dire ::

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}.$$

Si donc on tient compte de (6), l'égalité (5) à démontrer se trouve établie.

Remarque. – Il semblerait d'après ce théorème qu'il dût suffire de connaître en général deux intégrales premières f_1 et f_2 pour achever d'intégrer le problème algébriquement. On peut former en effet avec f_1 et f_2, l'intégrale $f_3 = (f_1, f_2)$, puis avec f_1, f_2, f_3 les intégrales $f_4 = (f_1, f_3)$, $f_5 = (f_2, f_3)$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu $2k$ intégrales. En réalité, dans la plupart des applications, ces intégrales ne sont pas distinctes, et on retombe, en répétant le procédé de Poisson, sur des intégrales déjà employées ou qui s'aperçoivent immédiatement.

Pour nous en rendre compte, voyons ce que donne l'application du théorème de Poisson aux intégrales fournies par le théorème du mouvement du centre de gravité et par le théorème des aires, dans le cas d'un système de $\underline{n}$ points libres soumis seulement à des forces intérieures.

Soit M_i ou (x_i, y_i, z_i) l'un de ces points, m_i sa masse;

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{2} \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right).$$

Prenons pour variables canoniques:

$$p_i = m_i x'_i \qquad q_i = m_i y'_i \qquad r_i = m_i z'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

d'où

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2\right) - U(\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots).$$

Le théorème du mouvement du centre de gravité donne les intégrales:

$$\sum p_i = \alpha, \qquad \sum q_i = \beta, \qquad \sum r_i = \gamma \quad .$$

Le théorème des aires donne les intégrales :

$$\sum (y_i r_i - z_i q_i) = A$$
$$\sum (z_i p_i - x_i r_i) = B$$
$$\sum (x_i q_i - y_i p_i) = C$$

Ces intégrales ont lieu toutes les fois que la fonction de forces satisfait aux conditions :

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \qquad \sum \left(y_i \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial U}{\partial y_i}\right) = 0$$
$$\sum \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0 \qquad \sum \left(z_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = 0$$
$$\sum \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0 \qquad \sum \left(x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 0 .$$

Le théorème de Poisson permet-il de déduire de ces six intégrales des intégrales nouvelles ?

D'une manière générale, on a ici [f_1 = Const et f_2 = Const, désignant deux de ces six intégrales] :

$$(f_1,f_2)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}-\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial y_i}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_i}\frac{\partial f_2}{\partial r_i}-\frac{\partial f_1}{\partial r_i}\frac{\partial f_2}{\partial z_i}\right).$$

(1°) Associons :

$$f_1=\Sigma p_i \qquad f_2=\Sigma q_i$$

Il vient évidemment :

$$(f_1,f_2)=0$$

Le théorème de Poisson conduit à une identité.

(2°) Associons :

$$f_1=\Sigma p_i \qquad f_2=\Sigma(y_i r_i-z_i q_i).$$

Il vient encore

$$(f_1,f_2)\equiv 0$$

c'est à dire une identité.

(3°) Associons

$$f_1=\Sigma p_i \qquad f_2=\Sigma(z_i p_i-x_i r_i).$$

Il vient

$$(f_1,f_2)=-\Sigma r_i$$

Le théorème de Poisson redonne la 3e intégrale du mouvement du centre de gravité :

$$\Sigma r_i=\gamma.$$

(4°) Associons :

$$f_1=\Sigma(y_i r_i-z_i q_i),\quad f_2=\Sigma(z_i p_i-x_i r_i).$$

Il vient

$$(f_1,f_2)=\Sigma(q_i x_i-p_i y_i),$$

ce qui redonne la troisième intégrale des aires.

Ainsi, une combinaison quelconque de deux des 6 intégrales connues ne nous conduit qu'à une de ces intégrales ou à une identité.

On pourrait se poser cette question : En formant 2 combinaisons des intégrales connues :

$$F_1(f_1,f_2,\cdots f_6)=\alpha_1 \qquad F_1(f_1,f_2,\cdots f_6)=\alpha_2,$$

n'obtiendrait-on pas une nouvelle intégrale : (F_1,F_2) = Const. ?

La réponse est négative : On arrive à une combinaison des intégrales connues. C'est là une proposition générale.

Soit $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$ .... $f_r = \alpha_r$, r intégrales premières telles que toute combinaison (f_i, f_j) soit une fonction de $f_1, f_2, \dots f_r$ $[i, j \leqslant r]$. La combinaison (F_1, F_2) où F_1 et F_2 sont deux fonctions quelconques de $f_1, f_2, \dots f_r$ est aussi une fonction de $f_1, f_2, \dots f_r$ (On dit alors, d'après M. Lie, que les r intégrales $f_1, \dots f_r$ forment un **groupe**).

Cela résulte immédiatement de l'égalité (4) de la page 247 :

$$(4) \qquad (F_1, F_2) \equiv \sum_{i,j} (f_i, f_j) \left[\frac{\partial F_1}{\partial f_i} \frac{\partial F_2}{\partial f_j} - \frac{\partial F_1}{\partial f_j} \frac{\partial F_2}{\partial f_i} \right].$$

Marche à suivre pour appliquer le théorème de Poisson. Supposons qu'on connaisse r intégrales premières distinctes $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$, ... $f_r = \alpha_r$. On formera toutes les combinaisons $\varphi = (f_i, f_j)$. Si φ est une fonction de $f_1, f_2, \dots f_r$, (quels que soient $i, j \leqslant r$), notamment si φ est identiquement nul ou constant, le théorème de Poisson ne saurait rien donner. Sinon, parmi les $\frac{r(r-1)}{2}$ combinaisons φ, il en existe s, soit $f_{r+1}, \dots f_{r+s}$ (s pouvant être égal à $\frac{r(r-1)}{2}$) telles que les $r+s$ intégrales $f_1, f_2 \dots f_r, f_{r+1} \dots f_{r+s}$ soient distinctes et que toutes les autres combinaisons φ soient des fonctions de $f_1, \dots f_{r+s}$. On procède alors avec le nouveau système d'intégrales $f_1, \dots f_{r+s}$ comme avec le premier, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un système d'intégrales distinctes $f_1, f_2 \dots f_l$, $(l > r)$ telles que toutes les combinaisons (f_i, f_j) soient des fonctions de $f_1, f_2 \dots f_l$. C'est ce qui a lieu nécessairement après un nombre fini de telles opérations ; car chaque opération augmente le nombre des intégrales f_i, et ce nombre ne peut dépasser $2k$. On forme donc ainsi en définitive un système d'intégrales distinctes $f_1\ f_2 \dots f_l$ $(l \leqslant 2k)$ telles qu'aucune intégrale (f_i, f_j) ne soit distincte des premières et qui, par suite, forment un groupe.

On a épuisé ainsi toutes les conséquences du théorème de Poisson ; car les combinaisons φ qu'on a négligées en route sont toutes des fonctions de $f_1, f_2, \dots f_l$, et par suite aussi les combinaisons (f_i, φ), d'après la remarque faite plus haut. Si $l = 2k-1$, le problème s'achève par quadratures.

Par exemple, admettons qu'on connaisse deux intégrales f_1, f_2. On forme la combinaison $\varphi = (f_1, f_2)$. Deux cas sont possibles suivant que φ est ou non une fonction de f_1, f_2. Dans le premier cas, le théorème de Poisson ne saurait rien donner [1] ; dans le second cas, φ est une intégrale

---

[1] C'est ce qui arrive quand on associe deux des intégrales fournies par le théorème du mouvement du centre de gravité, (voir p. 251), soit $f_1 = \Sigma p_i$ et $f_2 = \Sigma q_i$, ou encore l'intégrale $f_1 = \Sigma p_i$ et l'intégrale des aires $f_2 = \Sigma (y_i r_i - z_i q_i)$; on trouve ... $(f_1, f_2) \equiv 0$.

nouvelle f_3 ; on forme (f_1, f_3) et (f_2, f_3) .. Supposons que ces deux combinaisons soient des fonctions de f_1, f_2, le théorème de Poisson ne permet d'ajouter aucune intégrale à f_1, f_2, f_3. (1)

Dans le cas où H est indépendant de t, $H = h$ est une intégrale. Soit $f_1 = \alpha$, une seconde intégrale indépendante de t, on a identiquement $(f_1 H) = 0$. Il n'y a donc lieu d'appliquer le théorème de Poisson que si on connaît au moins deux intégrales f_1, f_2 (indépendantes du temps) distinctes de celle des forces vives. Le théorème de Poisson ne saurait fournir plus de $(2k-2)$ telles intégrales (distinctes de l'intégrale des forces vives); s'il en fournit $2k-3$, l'intégration s'achève par quadratures.

Si f_1 est une intégrale qui dépend de t, l'égalité :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1, H) = 0,$$

montre que $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ est encore une intégrale, par suite toutes les dérivées de f_1 par rapport à t.

Dans les applications, le théorème de Poisson est loin de donner les résultats qu'on en pourrait attendre tout d'abord. Mais ce théorème joue un rôle important, comme nous l'allons voir, dans l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, problème auquel se ramène, comme on sait, l'intégration d'un système canonique.

Retour sur la méthode de Jacobi.

Nous avons dit que le système canonique (1)

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots k)$$

est intégré quand on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles:

(1). Ce cas se présente quand on associe (voir p. 251) les deux intégrales $f_1 = \Sigma p_i$, $f_2 = \Sigma z_i p_i - x_i r_i$; on trouve $(f_1 f_2) = -\Sigma r_i$; d'où une nouvelle intégrale $f_3 = r_i$; mais (f_1, f_3) et (f_2, f_3) sont nuls. De même si on associe les deux intégrales $f_1 = \Sigma (y_i r_i - z_i q_i)$, $f_2 = \Sigma z_i p_i - x_i r_i$, on trouve $(f_1, f_2) = \Sigma (q_i x_i - r_i y_i)$, ce qui définit une troisième intégrale f_3, mais $(f_1, f_3) \equiv -f_2$, $(f_2, f_3) \equiv f_1$.

$$(A) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2 \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0$$

Si $V(t, q_1, q_2 \dots q_k, p_1, p_2 \dots p_k, a_1, a_2 \dots a_k)$ désigne cette intégrale complète, il suffit de poser :

$$(B) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \quad , p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad , \qquad (i = 1, 2, \dots k),$$

les $a_i\, b_i$ désignant des constantes, pour que le mouvement soit défini.

Nous avons indiqué (p. 200 - 202) des cas importants où la substitution au système canonique de l'équation de Jacobi est avantageuse. Mais d'une manière générale, y a-t-il intérêt à remplacer l'intégration du système canonique (1) par la recherche d'une intégrale complète de l'équation (A) ?

Théoriquement, les deux problèmes sont équivalents. Il est en effet bien facile, une fois le système (1) intégré, de former une intégrale complète de (A). — Soit, pour $t = t_0$, $p_i = a_i$ et $q_i = b_i$, et soit :

$$(C) \qquad p_i = \varphi_i(q_1 \dots q_k, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k), q_i = \psi_i(q_1 \dots q_k, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k) \quad (i = 1, 2, \dots k),$$

l'intégrale générale de (1), et $\chi(t)$ la fonction de t définie par l'expression :(1)

$$p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \dots + p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H$$

quand on y remplace les p_i, q_i en fonction de t, d'après (C).

Si on pose $u(t) = \int_{t_0}^{t} \chi(t)\, dt$, et

$$v = a_1 b_1 + \dots + a_k b_k + u(t),$$

la fonction v est une fonction de t et des constantes $a_1 \dots a_k$, $b_1 \dots b_k$. Tirons les $b_1 \dots b_k$ des équations (C) en fonction $t, q_1 \dots q_k, a_1 \dots a_k$ et portons ces valeurs dans v ; la fonction $V(t, q_1, q_2 \dots q_k, a_1, a_2 \dots a_k)$ ainsi obtenue est une intégrale complète de (A). On voit qu'elle se déduit, à l'aide d'une quadrature, de l'intégrale générale du système (1). Je me borne à énoncer ce théorème dont la démonstration est très-simple, mais qui est sans utilité pour notre objet.

La question qui se pose est donc en réalité la suivante : « Y a-t-il avantage à étudier directement l'équation de Jacobi plutôt que le système canonique ? » Pour nous en rendre compte, nous allons comparer les diverses méthodes à l'aide desquelles on peut intégrer le système (1) d'une part, le système (2) d'autre part.

Quand on part du système canonique, il faut intégrer directement

---

(1) Cette expression coïncide avec $T + U$ dans le cas de la Mécanique.

les équations différentielles ordinaires (1), ou, ce qui revient au même, trouver $2k$ intégrales distinctes f de l'équation aux dérivées partielles linéaire et homogène :

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

Nous n'avons pas à revenir sur la recherche de ces intégrales ; nous savons que toute la difficulté revient, dans le cas général, à former $(2k-1)$ intégrales de (2), et dans le cas où t ne figure pas dans H, à former $(2k-3)$ intégrales, autres que H, de l'équation $(f, H) = 0$.

Quand on part de l'équation de Jacobi, de quelle manière peut-on déterminer une intégrale complète ? Une première méthode, d'après une remarque précédente, consiste à intégrer le système canonique (1) correspondant[1] La méthode des caractéristiques de Cauchy, dans le cas qui nous occupe, où V ne figure pas explicitement dans l'équation, conduit au même système d'équations différentielles (1). Il ne saurait donc y avoir intérêt à substituer l'équation (A) au système (1), si on doit intégrer (A) par l'une ou l'autre de ces deux méthodes. Mais Jacobi a indiqué, pour intégrer (A), une méthode toute différente qu'il a remaniée lui-même à plusieurs reprises et que MM. Mayer et S. Lie ont portée au dernier point de perfection. C'est cette méthode que nous allons exposer brièvement, en renvoyant pour de plus amples développements à l'ouvrage bien connu de M. Goursat sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le principe de la méthode est le suivant :

Soit $V(t, q_1, q_2, \ldots q_k, a_1, a_2 \ldots a_k)$ une intégrale complète de l'équation (A). Les égalités :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

sont toujours résolubles par rapport aux k constantes (d'après la définition de l'intégrale complète). Si on effectue cette résolution, on forme k intégrales premières du système (1).

$$(D) \qquad f_i(t, q_1, \cdots q_k, p_1 \cdots p_k) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k),$$

et les équations (D) sont vérifiées identiquement quand on y remplace les p_i

(1) C'est là une première méthode de Jacobi pour intégrer une équation (A) quelconque ; on sait en effet qu'une fois connue une intégrale complète de (A), il est aisé d'en déduire l'intégrale générale. D'autre part, étant donnée une équation (A) du premier ordre où V figure explicitement, on peut toujours la ramener à une équation analogue où V ne figure plus, mais où le nombre des variables est augmenté d'une unité. Il suffit de substituer à la recherche des fonctions V celle des fonctions $F(t, q_1, q_2 \ldots q_k, V)$ qui égalées à une constante définissent une intégrale V, de la première équation.

par les dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ de l'intégrale complète. Comme il existe toujours une infinité d'intégrales complète de (A), on voit qu'il est toujours possible, et cela d'une infinité de manières, de former k intégrales premières $f_i = a_i$ du système (1), résolubles par rapport aux p_i, et telles que l'expression :

$$(E) \qquad -H\,dt + p_1\,dq_1 + \dots + p_k\,dq_k\,,$$

soit une différentielle totale exacte dV quand on y remplace les p_i en fonction de $t, q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_k$. Il est clair que ces k intégrales f_i une fois formées, la fonction $V(t, q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_k)$, donnée par l'intégration de cette différentielle totale, est une intégrale complète de (A), et que par suite le système (1) est intégré.

A la recherche des $2k$ intégrales distinctes f de l'équation (2), la nouvelle méthode de Jacobi substitue donc la recherche de k intégrales seulement, mais ces k intégrales doivent être telles que l'expression (E) soit une différentielle totale exacte. Nous allons indiquer la marche à suivre pour déterminer effectivement un tel système de k intégrales, et nous vérifierons par le fait même que cette détermination est toujours possible; ce que nous savons à l'avance

Quand t ne figure pas dans H, il faut déterminer $(k-1)$ intégrales $f_i = a_i$ indépendantes de t, qui jointes à l'intégrale $H = h$ et résolues par rapport aux p_i, fassent de l'expression $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \dots + p_k\,dp_k$ une différentielle exacte dW. La fonction $-ht + W(q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_{k-1}, h)$ est alors une intégrale complète de (A).

Dans ce dernier cas, quand on part du système canonique, il faut, pour arriver aux quadratures, déterminer $(2k-3)$ intégrales f, distinctes entre elles et de H, mais ces $(2k-3)$ intégrales sont quelconques.

Il est un cas où les deux méthodes se trouvent coïncider, c'est celui où, t ne figurant pas dans H, le nombre k des paramètres est égal à 2. On a alors : $2k-3 = k-1 = 1$. D'autre part, nous avons dit (voir p. 182-185 et p. 197-198) que toute intégrale première $f(q_1, q_2, p_1, p_2) = a$, jointe à $H = h$, fait de $(p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2)$ une différentielle exacte. La méthode de Jacobi, comme celle du dernier multiplicateur, n'exige donc plus que des quadratures dès qu'on connaît une intégrale quelconque f de $(f, H) = 0$; nous avons vu que les calculs auxquels conduisent ces deux méthodes sont les mêmes.

Mais quand k surpasse 2, ou quand t figure dans H, il n'en est plus ainsi. Pour exposer sous une forme générale la méthode de Jacobi, nous ne ferons pas jouer à t un rôle spécial, et nous considérerons une équation (A) quelconque :

$$F\left(q_1, q_2 \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0$$

où le nombre des variables q_i est quelconque et où V ne figure pas explicitement.

Exposé de la méthode de Jacobi et Mayer.

Le théorème sur lequel repose la méthode est le suivant:

"Soit k relations[1]:

$$(\alpha) \qquad f_i\,[q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2, \dots p_k] = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots k)$$

résolubles par rapport à $p_1\ p_2 \dots p_k$ et telles que le déterminant fonctionnel $\frac{D(f_1 . f_2 \dots f_k)}{D(p_1, p_2, \dots p_k)}$ ne s'annule pas identiquement quand on y remplace les p_i par leurs valeurs $\varphi_i(q_1, \dots q_k)$ tirées de (α). Pour que l'expression $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \dots + p_k\,dq_k = \Sigma\,\varphi_i\,dq_i$ soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que toutes les égalités:

$$(f_i . f_j) = 0 \qquad (i, j \leq k)$$

(où les $p_i . q_i$ sont des variables indépendantes) soient des conséquences du système (α). Le théorème suppose seulement que le déterminant fonctionnel $\frac{D(f_1 \dots f_k)}{D(p_1 \dots p_k)}$ ne s'annule pas identiquement quand on y remplace les p_i en fonction des q_i, d'après (α).

Pour que l'expression $\Sigma\,p_i\,dq_i$ soit différentielle totale exacte, il faut et il suffit que les fonctions $p_i = \varphi_i(q_1\,q_2 \dots q_k)$ satisfassent aux $\frac{k(k-1)}{2}$ conditions:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \qquad (i, j = 1, 2 \dots k).$$

Nous allons montrer que ces conditions équivalent aux conditions énoncées, en nous appuyant sur le lemme suivant:

Lemme. – Si deux équations simultanées aux dérivées partielles:

$$(\beta) \qquad f_1\,(q_1, \dots q_k . p_1, \dots p_k) = 0\ ; \quad f_2\,(q_1, \dots q_k . p_1, \dots p_k) = 0,$$

où $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, admettent une intégrale commune $V(q_1\,q_2 \dots q_k)$, cette intégrale vérifie aussi l'équation:

$$(f_1 . f_2) = 0$$

En effet, soit $p_1, \dots p_k$ des fonctions quelconques de $q_1, \dots q_k$, vérifiant les équations (β). On a:

[1] Ces relations peuvent dépendre de constantes.

$$(i=1,2,\dots k)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{j=k} \dfrac{\partial f_1}{\partial p_j}\dfrac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial q_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{j=k} \dfrac{\partial f_1}{\partial p_j}\dfrac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0 . \end{cases}$$

Multiplions la première par $\frac{\partial f_2}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial f_1}{\partial p_i}$, et ajoutons membre à membre ; puis dans le résultat donnons successivement à i les valeurs 1, 2 ..... k, et faisons la somme des équations ainsi obtenues. Il vient :

$$(f_1 f_2) + \sum_{j=1}^{j=k}\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial p_j} - \frac{\partial f_2}{\partial p_j}\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(f_1 . f_2) + \sum_{j=1}^{j=k}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right) = 0 .$$

Si $p_1, \dots p_k$ sont les dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots\dots \frac{\partial V}{\partial q_k}$ d'une fonction V, cette dernière égalité devient :

$$(f_1 . f_2) = 0$$

ce qui démontre le lemme en question.

De ce lemme résulte aussitôt cette conséquence, que toute intégrale $V(q_1, \dots q_k)$ commune aux équations (α) vérifie aussi les équations

$$(f_i , f_j) = 0 \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \dots k) .$$

Si donc on tire de (α) les p_i en fonction des q_i, comme on a $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, les conditions $(f_i , f_j) = 0$ doivent être vérifiées identiquement quand on y remplace les p_i par ces valeurs. Autrement dit, les égalités $(f_i . f_j) = 0$ doivent être des conséquences du système (α.)

Les conditions énoncées apparaissent ainsi comme nécessaires. Il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

Pour cela, rappelons-nous que le système de fonctions $p_i = \varphi_i(q_1, \dots q_k)$, défini par un système (α) quelconque, vérifie les équations :

$$(\gamma)\qquad (f_r , f_s) + \sum_{j=1}^{j=k}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial f_r}{\partial p_j}\frac{\partial f_s}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right) = 0;$$

Remplaçons dans (γ) les variables $p_1, \dots p_k$ par $\varphi_1, \dots \varphi_k$: par hypothèse, les expressions $(f_r . f_s)$ s'annulent alors identiquement, et les équations (γ) deviennent :

$$\sum_{j=1}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) \equiv \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right)$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \xi_j = 0 .$$

Comme le déterminant $\frac{D(f_1, \dots f_k)}{D(p_1, \dots p_k)}$ n'est pas nul identiquement quand on y remplace les p_i par $\varphi_i(q_1, \dots q_k)$, les k égalités linéaires et homogènes par rapport aux ξ_j, qu'on obtient en donnant à r dans la dernière égalité les valeurs $1, 2 \dots k$, entraînent comme conséquences :

$$\xi_1 = 0 , \xi_2 = 0 , \dots\dots \xi_k = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) = 0 , \qquad (s = 1, 2 \dots k)$$

égalités qui, pour la même raison, entraînent les conséquences :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots k),$$

et cela, quel que soit j ($j = 1, 2 \dots k$). L'expression $\Sigma p_i dq_i$, est donc bien une différentielle totale exacte. Les conditions énoncées sont suffisantes. – Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarque sur le théorème précédent. – Si les égalités (α) sont de la forme :

$$(\alpha)' \qquad F_i(p_1, p_2, \dots p_k, q_1, \dots q_k) - \alpha_i = 0,$$

(les α_i désignant des constantes arbitraires et le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, \dots F_k)}{D(p_1, p_2, \dots p_k)}$ n'étant pas identiquement nul), pour que l'expression $\Sigma p_i dq_i$ soit différentielle exacte, il faut et il suffit que les crochets (f_i, f_j) soient identiquement nuls.

Plus généralement, supposons que dans le système (α), les f_i dépendent de n constantes $\underline{\alpha}$, et que les équations (α) soient résolues par rapport à l des variables p_i, à m des variables q_i, à $\underline{n}$ des constantes α, ($l + m + n = k$) : les conditions $(f_i, f_j) = 0$ ne peuvent être conséquences du système (α) sans être vérifiées identiquement.

Avant d'appliquer ce théorème à l'intégration de l'équation de Jacobi, nous établirons quelques propriétés des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes.

Systèmes linéaires complets.

On sait que j fonctions $f_1, f_2 \dots f_j$ de n variables quelconques $(x_1, x_2 \dots x_n)$ $(j < n)$ sont dites indépendantes ou distinctes quand il n'existe aucune relation identique $G(f_1, f_2, \dots f_j) \equiv 0$ entre ces fonctions. Pour que $f_1, f_2, \dots f_j$ ne soient pas distinctes, il faut et il suffit que tous les déterminants fonctionnels $\frac{D(f_1, f_2, \dots f_j)}{D(x_k, x_l, \dots x_r)}$ soient identiquement nuls.

Une équation linéaire quelconque

$$X_1(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

admet $(n-1)$ intégrales indépendantes $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$ et son intégrale générale est de la forme : $f = \varphi(f_1, f_2, \dots f_{n-1})$.

En particulier, soit F une fonction donnée des $2k$ variables :

$$(q_1, q_2 \dots q_k, p_1, p_2 \dots p_k).$$

L'équation :

$$(F, f) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = 0$$

admet $(2k-1)$ intégrales indépendantes.

Ceci rappelé, démontrons cette proposition plus générale :

Théorème. – Soit m équations distinctes $(m \leq k)$

$$(\delta) \qquad (f_1, f) = 0, \quad (f_2, f) = 0, \dots\dots\dots\dots (f_m, f) = 0,$$

où $f_1, f_2 \dots f_m$ sont des fonctions données des q_i, p_i, et vérifient les $\frac{m(m-1)}{2}$ relations :

$$(f_i, f_j) = 0 \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \dots\dots m)$$

Le système (δ) admet $(2k-m)$ intégrales premières distinctes. (Jacobi donne à un tel système le nom de système complet (1)).

Les équations (δ), linéaires et homogènes par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial q_i}, \frac{\partial f}{\partial p_i}$, sont distinctes à moins que tous les déterminants $\frac{D(f_1, f_2, \dots f_m)}{D(x_1, x_2, \dots x_m)}$ (où $x_1, x_2 \dots x_m$ sont m quelconques des variables q_i, p_i) ne soient identiquement nuls. Dire que le équations (γ) sont distinctes, c'est donc dire que les m fonctions $f_1, f_2 \dots f_m$ sont distinctes.

Le nombre μ des intégrales distinctes ne peut alors dépasser $2k-m$, car soit $\varphi_1, \varphi_2 \dots\dots \varphi(2k-m+1)$ $(2k-m+1)$ intégrales indépendantes, telles que, par suite, un au moins des déterminants $\frac{D(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{2k-m+1})}{D(\ ,\ , \dots q_j, \dots)}$

(1) Le nom de systèmes complets s'applique d'ailleurs à des systèmes linéaires beaucoup plus généraux. (Voir Goursat, loc. cit. chapitre II).

soit différent de zéro. La fonction $\psi = \sum a_i \varphi_i$ (où les a_i sont des constantes) est encore une intégrale de (δ), et on peut disposer des constantes a_i de façon que, parmi les dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \psi}{\partial p_i}$, $(2k-m+1)$ prennent des valeurs arbitraires pour des valeurs arbitraires des $p_i\, q_i$: ce qui est absurde, si les équations (δ) sont distinctes. Le théorème exprime que μ est précisément égal à $2k-m$.

Le théorème est vrai pour $m=1$; admettons-le pour m et démontrons-le pour $m+1$. Soit $(\delta)'$ le nouveau système obtenu en adjoignant au système (δ) l'équation :

$$(f_{m+1}, f) = 0,$$

où f_{m+1} désigne une fonction donnée qui vérifie par hypothèse les conditions :

$$(f_1, f_{m+1}) = 0, \quad (f_2, f_{m+1}) = 0 \quad, \ldots\ldots\ldots (f_m, f_{m+1}) = 0,$$

c'est-à-dire une intégrale du premier système (δ) : Soit, de plus, $f_1, f_2, \ldots f_{m+1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{(2k-2m-1)}$ un système de $(2k-m)$ intégrales distinctes de (δ). Toute fonction $f = F(\ldots f_i \ldots \varphi_j \ldots)$ vérifie aussi le système (δ), et toute intégrale de (δ) est de cette forme. Cherchons à déterminer la fonction F de façon que l'équation :

$$0 = (f_{m+1}, f) \equiv \sum_{i=1}^{i=m+1} (f_{m+1}, f_i) \frac{\partial F}{\partial f_i} + \sum_{i=1}^{i=2k-2m-1} (f_{m+1}, \varphi_j) \frac{\partial F}{\partial \varphi_j}$$

soit aussi vérifiée. D'une part, toutes les combinaisons (f_{m+1}, f_i) sont identiquement nulles. D'autre part, d'après le théorème de Poisson, les combinaisons (f_{m+1}, φ_j) sont des intégrales de chaque équation (δ), donc du système (δ), d'où l'identité :

$$(j = 1, 2, \ldots (2k-2m-1)) \quad (f_{m+1}, \varphi_j) \equiv g_j \;(f_2 \ldots f_m, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{2k-2m-1}).$$

Il faut donc et il suffit que la fonction $F(\ldots f_i \ldots \varphi_j \ldots)$ satisfasse à la relation :

$$(d) \qquad g_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + g_2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} + \cdots + g_{2k-2m-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{2k-2m-1}} = 0,$$

où les g sont des fonctions de $\ldots f_i \ldots \varphi_j \ldots$ Ces coefficients d'ailleurs ne sont pas identiquement nuls ; sinon, le système $(\delta)'$ admettrait toutes les intégrales de (δ), c'est-à-dire $(2k-m)$ intégrales distinctes, et les équations $(\delta)'$ ne seraient pas distinctes. Comme l'équation (d) admet $2k-m-1$ intégrales distinctes, il en est de même du système $(\delta)'$. C.Q.F.D.

Si k est égal à m, les m intégrales distinctes de (δ) sont $f_1, f_2 \ldots f_m$; il ne saurait exister plus de k fonctions f_i distinctes, satisfaisant aux conditions $(f_i, f_j) = 0, (i, j = 1, 2 \ldots k)$.

Remarque. – Quand un au moins des déterminants fonctionnels des $f_1, f_2 \ldots f_m$ relatifs à m des variables $p_1, p_2 \ldots p_k$ $(m < k)$ est différent de zéro, soit $\dfrac{D(f_1, f_2 \ldots f_m)}{D(p_1, p_2 \ldots p_m)} \neq 0$, on peut toujours trouver des intégrales f du système (δ) telles que le déterminant $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots f_m, f)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m, p_{m+1})}$ soit différent de zéro.

Autrement, l'égalité :

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots f_m, f)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m, p_{m+1})} \equiv A_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + A_{m+1} \frac{\partial f}{\partial p_{m+1}} = 0, \ (A_{m+1} \neq 0),$$

serait une conséquence du système (δ), c'est-à-dire qu'on pourrait éliminer les $\frac{\partial f}{\partial q_i}$ entre les m équations (δ), ce qui est absurde, puisque le déterminant des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial q_1}$ $\frac{\partial f}{\partial q_2}$ $\ldots\ldots$ $\frac{\partial f}{\partial q_m}$ dans ce système est le déterminant $\dfrac{D(f_1, f_2 \ldots f_m)}{D(p_1, p_2 \ldots p_m)} \equiv A_{m+1}$, qui est différent de zéro.

D'après cela, soient données m fonctions $f_1, f_2 \ldots f_m, (m \leq k)$, dont un déterminant fonctionnel relatif à m des variables p_i n'est pas identiquement nul : si ces fonctions vérifient les conditions

$$(f_i \cdot f_j) \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2 \ldots m),$$

il est toujours possible de trouver $(k-m)$ autres fonctions $f_{m+1} \ldots f_k$ satisfaisant aux conditions :

$$(f_i \cdot f_j) \equiv 0, \qquad (i, j = 1, 2 \ldots k),$$

et telles que le système :

$$f_i = a_i \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

soit résoluble par rapport aux p_i. L'expression $\Sigma p_i \, dq_i$ sera alors une différentielle exacte.

De cette remarque résulte un important théorème qui s'énonce ainsi :

Théorème. – Soit m fonctions $f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$ $(m \leq k)$ qui satisfont identiquement aux conditions $(f_i, f_j) = 0$, $(i\, j = 1, 2 \ldots m)$. Si les égalités :

$$f_i = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

sont résolubles par rapport à m des variables p_i, soit :

$$p_1 - \varphi_1 (p_{m+1}, p_{m+2} \ldots p_k, q_1, q_2 \ldots q_k) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m - \varphi_m (p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_k, q_1, q_2, \ldots q_k) = 0,$$

les fonctions $F_i \equiv p_i - \varphi_i$ satisfont encore identiquement aux conditions $(F_i, F_j)=0$. $(i, j = 1, 2, \dots m)$, pourvu seulement que le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{D(f_1, f_2 \dots f_m)}{D(p_1, p_2 \dots p_m)}$$

ne s'annule pas identiquement quand on y remplace $p_1, p_2, \dots p_m$ par $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$.

Quand cette dernière restriction est satisfaite, les fonctions $\varphi_1, \dots \varphi_m$ ont des dérivées premières continues, sauf pour les valeurs exceptionnelles de $p_{m+1} \dots p_k, q_1 \dots q_k$ qui annulent $\Delta(p_{m+1}, \dots p_k, q_1 \dots q_k)$. Prenons donc au hasard un système de ces variables $(\Delta \neq 0)$ et écrivons les égalités:

$$f_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \dots m).$$

Si on résout ces égalités par rapport à $p_1, p_2 \dots p_m$, soit

$$G_i \equiv p_i - P_i(p_{m+1} \dots p_k, q_1 \dots q_k, a_1 \dots a_m) = 0,$$

la fonction P_i et ses dérivées premières tendent vers φ_i et ses dérivées premières quand $a_1, a_2 \dots a_k$ tendent vers zéro. Les expressions (G_i, G_j) tendent donc vers (F_i, F_j) quand $a_1, a_2 \dots a_k$ tendent vers zéro. Il suffit par suite de démontrer que les crochets (G_i, G_j) sont identiquement nuls pour que le théorème soit démontré.

Or aux égalités:

$$f_i = a_i \qquad (i = 1, 2 \dots m),$$

on peut en adjoindre $(k-m)$ autres

$$f_{m+1} = a_{m+1}, \quad f_{m+2} = a_{m+2} \quad \dots\dots \quad f_k = a_k,$$

telles que toutes les égalités $(f_i, f_j) = 0$ soient vérifiées $(i, j = 1, 2, \dots k)$, et que de plus le système $f_j = a_j$ $(j = 1, 2, \dots k)$ soit résoluble par rapport à $p_1, \dots p_k$. L'expression $\Sigma p_i dq_i$ est alors différentielle exacte. Résolvons maintenant le système $f_j = a_j$ par rapport à $p_1, p_2 \dots p_m, a_{m+1} \dots a_k$.

Il vient:

$$G_1 \equiv p_1 - P_1(p_{m+1}, \dots p_k, q_1 \dots q_k, a_1, \dots a_m) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$G_m \equiv p_m - P_m(p_{m+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_m) = 0$$
$$G_{m+1} \equiv a_{m+1} - P_{m+1}(p_{m+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_m) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$G_k \equiv a_k - P_k(p_{m+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k, a_1, \dots a_m) = 0$$

D'après une remarque antérieure, toutes les conditions $(G_i, G_j) = 0$

doivent être vérifiées identiquement pour que $\Sigma p_i\, dq_i$, soit différentielle exacte; donc en particulier on a :

$$(G_i\,,\, G_j) \equiv 0 \qquad\qquad (i.j = 1,2 \ldots m)$$

C.Q.F.D.(1)

Nous sommes maintenant en état d'exposer les méthodes d'intégration de Jacobi et Mayer.

Méthode de Jacobi.

La première forme que Jacobi a donnée à sa méthode est la suivante.

Soit : $f_0\,(p_1, \ldots p_k\,, q_1, \ldots q_k) = 0$ une équation aux dérivées partielles du premier ordre, qu'on peut toujours supposer résolue par rapport à l'une des dérivées, p_1 par exemple, ou par rapport à une constante si f_0 dépend de constantes. Pour former une intégrale complète de cette équation, il suffit de déterminer $(k-1)$ intégrales premières $f_1, \ldots f_{k-1}$ de l'équation :

$$(1) \qquad\qquad (f_0\,, f) = 0$$

telles que toutes les conditions $(f_i\,, f_j) \equiv 0$ soient identiquement vérifiées et que de plus le déterminant $\dfrac{D(f_0, \ldots f_{k-1})}{D(p_1, \ldots p_k)}$ soit différent de zéro.

On commence par déterminer une intégrale f_1 de l'équation (1) qu'on adjoint à f_0, puis on cherche une intégrale commune du système :

$$(2) \qquad (f_0 , f) = 0 \qquad\qquad (f_1 , f) = 0\,,$$

système qui admet $(2k-2)$ intégrales distinctes. Pour cela, on détermine d'abord une intégrale f_2 de l'équation (1), et on forme la combinaison $(f_1 f_2)$ qui est encore intégrale de (1) ; si cette parenthèse est identiquement nulle, f_2 est l'intégrale cherchée ; sinon on pose $(f_1, f_2) = f_3$, on forme (f_1, f_3), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale f_h telle que (f_1, f_h) soit une fonction de $f_0, f_1 \ldots f_h$. On pose alors $f = \varphi(f_0\, f_1 \ldots f_h)$, et on

---

(1) Plus généralement, (les conditions du théorème étant remplies) si $f_1 f_2 \ldots f_m$ dépendent de h constantes $b_1, b_2 \ldots b_h$, et si on résout les équations $f_i = 0$ par rapport à j variables p_i, r variables q_i, s constantes b_i $(j+r+s = m)$, les égalités $(F_i\,, F_j) \equiv 0$ sont vérifiées identiquement, $F_i = 0$ représentant une quelconque des nouvelles équations. C'est ce qui résulte aussitôt du raisonnement précédent.

cherche à déterminer φ de façon que la parenthèse (f_1, φ) soit nulle. Or on a :

$$(f_1, \varphi) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}(f_1, f_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}(f_1, f_3) + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_k}(f_1, f_k)$$

$$\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3} f_4 + \cdots \qquad + \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} F(f_0, f_1, f_2, \dots f_k) = 0$$

On voit que φ doit satisfaire à une équation linéaire qui équivaut à un système de $k-2$ équations différentielles ordinaires du premier ordre (en regardant f_0, f_1 comme des paramètres).

Il y a toutefois un cas d'exception, celui de $k = 2$, c'est à dire le cas où on a : $(f_1, f_2) \equiv F(f_0, f_1, f_2)$, F n'étant pas identiquement nul. L'équation en φ devient alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot F(f_0, f_1, f_2) = 0,$$

et donne $f = \varphi(f_0, f_1)$, c'est à dire une intégrale qui n'est pas distincte de f_0, f_1. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer une troisième intégrale f_3 de l'équation (1) ; si le nombre k relatif à f_2 n'est pas égal à 2, on peut former avec f_3 une intégrale de (2) d'après le procédé qu'on vient d'indiquer ; sinon, on pose $f = \varphi(f_0, f_1, f_2\ f_3)$, et on détermine φ de façon que (f_1, φ) soit nul : cette détermination n'exige que des quadratures ; en effet, φ doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f_2} F(f_0, f_1, f_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial f_3} F'(f_0, f_1, f_3) = 0,$$

et il suffit, par suite, de prendre pour φ la fonction :

$$\varphi = \int \frac{df_2}{F(f_0, f_1, f_2)} - \int \frac{df_3}{F'(f_0, f_1, f_3)},$$

f_0 et f_1 étant regardés comme des paramètres.

Admettons donc qu'on ait calculé une intégrale du système (2), intégrale que nous représenterons maintenant par f_2, et cherchons une intégrale du système :

$$(3) \qquad (f_0, f) = 0, \qquad (f_1, f) = 0, \qquad (f_2, f) = 0.$$

Pour cela, on calcule d'abord une nouvelle intégrale, soit f_3, du système (2), et on forme la combinaison (f_2, f_3) qui est encore, d'après le théorème de Poisson, une intégrale de (2). Si cette parenthèse est identiquement nulle, f_3 est l'intégrale cherchée ; sinon, on pose $(f_2, f_3) = f_4$, on forme $(f_2, f_4) \equiv f_5$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale f_k telle que (f_2, f_k) soit une fonction F de $(f_0, f_1, \dots f_k)$. On peut alors déterminer $\varphi(f_0, f_1, f_2, \dots f_k)$ de façon que φ soit une intégrale du système (3); il suffit que φ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial f_3} f_4 + \frac{\partial\varphi}{\partial f_4} f_5 + \dots\dots + \frac{\partial\varphi}{\partial f_k} F \quad (f_1, f_2 \dots\dots f_k) = 0 .$$

Il y a toutefois un cas d'exception, celui où f_k se confond avec f_3, sans que F soit identiquement nul ; il faut alors déterminer une nouvelle intégrale, soit f_4, de (2); si on n'a pas $(f_2, f_4) \equiv F'(f_0, f_1, f_2, f_4)$, le procédé précédent permet de déduire de f_4 une intégrale de (3) ; si, au contraire, cette identité est satisfaite, on pose $f = \varphi(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$, et la fonction :

$$\varphi = \int \frac{d f_3}{F(f_0, f_1, f_2, f_3)} - \int \frac{d f_4}{F'(f_0, f_1, f_2, f_4)}$$

est une intégrale de (3).

Il est clair que le raisonnement que nous venons de faire pour les systèmes (2) et (3) peut se répéter jusqu'à ce qu'on arrive à un système de k équations. D'une façon précise, admettons qu'on ait appris à trouver une intégrale quelconque d'un système

(4) $\qquad (f_0, f) = 0, \quad (f_1, f) = 0, \dots \quad (f_{i-1}, f) = 0, \quad (i \leq k-1),$

où toutes les conditions $(f_i, f_j) \equiv 0$ sont vérifiées, $(i, j = 0, 1, 2, \dots i-1)$.

Soit f_i une intégrale de ce système, distincte de $f_0, f_1, \dots f_{i-1}$, et considérons les équations :

(5) $\qquad (f_0, f) = 0 ; \quad (f_1, f) = 0, \dots\dots (f_{i-1}, f) = 0, (f_i, f) = 0$

Si i est inférieur à $k-1$, on peut toujours déterminer une intégrale de (5), distincte de $f_0\ f_1 \dots\dots f_i$, de la manière suivante : on détermine une nouvelle intégrale f_{i+1} de (4), on forme $(f_i ; f_{i+1}) = f_{i+2}$, etc, jusqu'à ce qu'on obtienne une intégrale f_k telle que $(f_i, f_k) \equiv F(f_0, f_1, \dots f_i, f_{i+1}, \dots f_k)$.

En posant alors $f = \varphi(f_0, f_1, f_2 \dots f_i, \dots f_k)$, on peut déterminer φ de façon que φ soit une intégrale de (5), distincte de $f_0, f_1, \dots\dots f_i$; cela n'est impossible que si on a $(f_1, f_{i+1}) \equiv F(f_0, f_1 \dots f_i, f_{i+1})$, sans que F soit identiquement nul ; il faut alors introduire une nouvelle intégrale du système (4).

En suivant cette méthode, on parviendra ainsi à un système de k équations :

(6) $\qquad (f_0, f) = 0, \quad (f_1, f) = 0 \dots\dots\dots\dots (f_{k-1}, f) = 0,$

telles que toutes les conditions $(f_i, f_j) = 0$ soient vérifiées.

Si on suppose en outre remplie la condition[1] que les intégrales, $f_0, f_1, \dots f_{k-1}$, considérées comme fonctions des seuls p_i, soient distinctes, le système (6) définit (à une constante d'addition près) une intégrale complète de l'équation donnée $f_0 = 0$. Il suffit en effet d'écrire :

$$(7) \qquad f_0 = 0, \quad f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \dots \quad f_{k-1} = C_{k-1};$$

l'expression $p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \dots + p_k\, dq_k$, où on remplace les p_i par leurs valeurs tirées de (6), est la différentielle exacte d'une fonction :

$$V\ (q_1, \dots q_k, C_1, C_2, \dots C_{k-1}),$$

qui est une intégrale complète de $f_0 = 0$.

On voit que pour appliquer la méthode précédente, il faut connaître au moins $(m-1)$, intégrales distinctes de l'équation $(f_0, f) = 0$, en outre de l'intégrale f_0 et calculer des intégrales des équations en φ intermédiaires.

Observons que ces équations en φ portent sur un nombre de variables d'autant plus grand, et par suite équivalent à un système différentiel ordinaire d'ordre d'autant plus élevé que le théorème de Poisson est d'un emploi plus avantageux. Or la méthode de Jacobi ne tient aucun compte de la simplification qui peut résulter de la connaissance de nouvelles intégrales de (1). Cette lacune a été comblée par Mr Sophus Lie. —— La méthode de M. Sophus Lie est la plus parfaite de toutes ; elle n'exige que le nombre minimum d'intégrations nécessaires, elle complète et étend la théorie du dernier multiplicateur (dans le cas où les forces dérivent d'un potentiel). Mais l'exposé de cette méthode demanderait un trop grand développement. Nous nous bornerons à indiquer les perfectionnements que Jacobi lui-même a fait subir à sa méthode, ainsi que ceux qu'a introduits M. Mayer. Pour ce qui est des résultats de M. Sophus Lie, nous renverrons aux travaux de l'auteur ainsi qu'à l'ouvrage déjà cité de M. Goursat. (Chapitres X, XI et XII).

Méthode de Jacobi et Mayer.

Marche du Calcul. — La marche indiquée en second lieu par Jacobi est la suivante : résolvons l'équation aux dérivées partielles donnée par rapport à une des dérivées, p_1 par exemple, et soit :

$$(1) \qquad f_0 \equiv p_1 - F_1\ (p_2, p_3, \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k) = 0$$

(1) Nous verrons que cette condition n'est pas nécessaire.

cette équation. Formons l'équation :

$$(2) \qquad 0 = (f_0, f) \equiv \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \sum_{i=2}^{i=k} \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Comme p_1 ne figure pas explicitement dans (2), calculons une intégrale f de (2) indépendante de p_1 ; autrement dit, cherchons une intégrale $f(p_2 \dots p_k, q_1 \dots q_k)$ de l'équation obtenue en supprimant dans (2) le terme en $\frac{\partial f}{\partial p_1}$, intégrale que nous supposons dépendre d'une au moins des variables p_i, soit p_2. Seules des intégrales exceptionnelles de (2) pourraient ne pas répondre à cette condition. Écrivons alors les égalités :

$$p_1 - F_1(p_2, \dots p_k, q_1, \dots q_k) = 0, \qquad f_1(p_2, \dots p_k, q_1, \dots q_k) = C_1$$

et résolvons-les par rapport à p_1, p_2 : il vient :

$$(1)' \quad \begin{cases} f_0' \equiv p_1 - F_1'(p_3, p_4 \dots p_k, q_1, q_2 \dots q_k) = 0, \\ f_1' \equiv p_2 - F_2'(p_3, p_4 \dots p_k, q_1, q_2 \dots q_k) = 0, \end{cases}$$

et d'après le théorème III de cette leçon, la condition $(f_0', f_1') \equiv 0$ est vérifiée, puisque la condition $(f_0, f_1) \equiv 0$ l'est elle-même.[1]

Formons maintenant les équations :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = -(f_0', f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} + \displaystyle\sum_{i=3}^{i=k} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F_1}{\partial p_i}\dfrac{\partial f}{\partial q_i}, \\ 0 = -(f_1', f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial F_2}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial p_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial p_2} + \displaystyle\sum_{i=3}^{i=k} \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F_2}{\partial p_i}\dfrac{\partial f}{\partial q_i}; \end{cases}$$

nous savons que ce système, où p_1, p_2 ne figurent pas explicitement, admet $(2k-2)$ intégrales distinctes. Admettons qu'on ait déterminé (nous verrons tout à l'heure par quels moyens) une intégrale $f(p_3, p_4, \dots p_k, q_1, \dots q_k)$ dépendant explicitement de p_3 ; écrivons les égalités :

$$f_0' = 0, \quad f_1' = 0, \quad f(p_3, p_4, \dots p_k, q_1 \dots q_k) = C_2;$$

résolvons la dernière égalité par rapport à p_3, portons dans les premières, nous formons ainsi un système :

$$(1)'' \quad \begin{cases} f_0'' \equiv p_1 - F_1''(p_4 \dots p_k, q_1, \dots q_k) = 0 \\ f_1'' \equiv p_2 - F_2''(p_4, \dots p_k, q_1 \dots q_k) = 0 \\ f_2'' \equiv p_3 - F_3''(p_4 \dots p_k, q_1 \dots q_k) = 0 \end{cases},$$

[1] Observons que pour former le système (1)', il suffit de trouver une intégrale $f_1(p_1, p_2 \dots p_k, q_1, \dots q_k)$ de l'équation $(f_0, f) = 0$, sans

qui satisfait, d'après le théorème déjà rappelé, aux conditions :

$$(f_0'', f_1'') \equiv 0, \quad (f_0'', f_2'') \equiv 0, \quad (f_1'', f_2'') \equiv 0$$

On cherche alors une intégrale $f\,(p_4, \dots p_k, q_1, \dots q_k)$ du système :

$$(2)'' \quad (f_0'', f) = 0, \quad (f_1'', f) = 0, \quad (f_2'', f) = 0\,;$$

on résout l'égalité $f = C_4$ par rapport à p_4, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à avoir k équations résolues par rapport à $p_1, \dots p_k$, soit :

$$(A) \quad \varphi \equiv p_i - P_i\,(q_1, q_2, \dots q_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots k)$$

qui satisfont à toutes les conditions $(\varphi_i, \varphi_j) \equiv 0$.

Comme les P_i dépendent de $(k-1)$ constantes $C_1, C_2 \dots C_{k-1}$ (qui inversement s'expriment, d'après ce qui précède, en fonction de $p_2, \dots p_k, q_1, \dots q_k$)), les égalités (A) définissent la différentielle $\Sigma\, p_i\, dq_i$ d'une intégrale complète $V(q_1, \dots q_k)$ de l'équation donnée (1).

Intégrations à effectuer. Toute la difficulté revient donc à déterminer une intégrale $f\,(p_{r+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k)$ de chaque système intermédiaire soit :

$$(r)\left\{\begin{array}{l}
0 = -(f_0, f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{j=r+1}^{j=k}\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial q_j}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} - \dfrac{\partial F_1}{\partial p_j}\dfrac{\partial f}{\partial q_j}\right) \\
0 = -(f_1, f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{j=r+1}^{j=k}\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial q_j}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} - \dfrac{\partial F_2}{\partial p_j}\dfrac{\partial f}{\partial q_j}\right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = -(f_{r-1}, f) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q_r} + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=r} \dfrac{\partial F_r}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{j=r+1}^{j=k}\left(\dfrac{\partial F_r}{\partial q_j}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} - \dfrac{\partial F_r}{\partial p_j}\dfrac{\partial f}{\partial q_j}\right)
\end{array}\right.$$

où les fonctions [1] $f_l \equiv p_l - F_l\,(p_{r+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k)$ satisfont à toutes les conditions $(f_l, f_m) \equiv 0$ $(l, m = 0, 1, 2, \dots r-1)$.

Observons d'abord que chaque système (r) (où r est égal au plus à $k-1$)

---

même avoir résolu f_0 par rapport à un des p_i. En résolvant alors le système $f_0 = 0$, $f_1 = c_1$, par rapport à p_1, p_2, on forme un système $(1)'$ pour lequel la condition $(f_0', f_1') \equiv 0$ est encore vérifiée : il faut toutefois que la résolution soit possible.

(1) Nous supprimons, pour simplifier la notation, les indices supérieurs des lettres f et F.

admet $2(k-r)$ intégrales distinctes où $p_1, p_2, \dots p_r$ ne figurent pas. Autrement dit, le système :

$$(r)' \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{j=k} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} - \dfrac{\partial F_1}{\partial p_j}\dfrac{\partial f}{\partial q_j} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_r} + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{j=k} \dfrac{\partial F_r}{\partial q_j}\dfrac{\partial f}{\partial p_j} - \dfrac{\partial F_r}{\partial p_j}\dfrac{\partial f}{\partial q_j} = 0, \end{cases}$$

admet $2(k-r)$ intégrales distinctes $f(p_{r+1}, \dots p_k, q_1, \dots q_k)$. Pour le voir en toute rigueur, il suffit de reprendre le raisonnement de la page 261. Tout d'abord, la première équation (r) admet $2k-r-1$ intégrales distinctes de la forme $f(p_{r+1} \dots p_k, q_1, \dots q_k)$. Admettons que les l premières équations (r), $[f<r]$, possèdent $2k-r-l$ intégrales communes distinctes de la même forme, et démontrons qu'un théorème analogue est vrai pour $l+1$. Si on pose $f = \Phi(\varphi_1, \dots \varphi_{2k-r-l})$, on voit, comme à la page citée, que pour vérifier la $(l+1)^e$ équation (r), F doit satisfaire à la condition :

$$G_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \dots\dots + G_{(2k-r-l)} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{(2k-r-l)}} = 0$$

où $G_i \equiv [f_l, \varphi_i] \equiv g_i(\varphi_1, \dots \varphi_{2k-r-l})$. Ces coefficients G_i d'ailleurs ne sont pas tous nuls ; autrement la $(j+1)^e$ équation (r) serait une conséquence des j premières, ce qui est impossible. (voir p.260).

On arrive bien ainsi à la conclusion que le système $(r)'$ admet $2(k-r)$ intégrales distinctes, soit $\varphi_i(q_1, q_2, \dots q_k, p_{r+1}, p_{r+2}, \dots p_k)$, $[i = 1, 2, \dots 2(k-r)]$

J'ajoute que l'intégrale générale $f = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{2(k-r)})$ du système $(r)'$ dépend explicitement de p_{r+1}. En effet, un au moins des déterminants fonctionnels de $\varphi_1, \dots \varphi_{2(k-r)}$ relatifs à $2(k-r)$ des variables p_j, q_i est différent de zéro ; or si le déterminant :

$$\frac{D(\varphi_1, \dots \varphi_{2(k-r)})}{D(p_{r+1}, \dots p_k, q_{r+1}, \dots q_k)}$$

était nul, tous les autres le seraient d'après les équations $(r)'$. Il suit de là que toutes les dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{r+1}}$ ne peuvent être nulles, et qu'un au moins des φ_i dépend de p_{r+1}, donc f.

Enfin, soit $q_i^0, q_k^0, p_{r+1}^0, \dots p_k^0$ un système de valeurs numériques des q_i, p_i prises au hasard et dans le voisinage desquelles, par suite, les fonctions f_i, F_j sont holomorphes. Toute intégrale de $(r)'$ holomorphe dans le voisinage de ces valeurs, s'obtient en prenant pour f une fonction $\Phi(\varphi_1, \dots \varphi_{2(k-r)})$ holomorphe dans le voisinage des valeurs correspondantes des φ_i. Je dis qu'on peut disposer de Φ de façon que, pour $q_1^o \dots q_r^o$, f coïncide avec une fonction donnée $A(q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1} \dots p_k)$ holomorphe dans le voisinage de $q_{r+1}^o \dots q_k^o, p_{r+1}^o \dots p_k^o$. Posons en effet :

$$\varphi_i(q_1^o \dots q_k^o, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1} \dots p_k) = \xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots 2(k-r)),$$

et résolvons (ce qui est possible) ces égalités par rapport aux p_{r+j}, q_{r+j} ; il vient ($q_1^o, \dots q_r^o$ étant des nombres) :

$$(j=1,2,\dots(k-r)), \quad q_{r+j} = u_j(\xi_1, \dots \xi_{2(k-r)}), \quad p_{r+j} = v_j(\xi_1, \dots \xi_{2(k-2)}).$$

Si on porte ces valeurs dans $A(\dots q_{r+j} \dots p_{r+j} \dots)$, on obtient une fonction $\alpha(\xi_1, \dots \xi_{2(k-r)})$ qui doit coïncider avec $\Phi(\xi_1, \dots \xi_{2(k-r)})$:

$$\Phi(\xi_1, \dots \xi_{2(k-r)}) \equiv \alpha(\xi_1, \dots \xi_{2(k-r)}),$$

ce qui détermine F sans ambiguité. Il existe donc une intégrale du système (r) et une seule qui pour $q_1^o, \dots q_r^o$ coïncide avec $A(q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1} \dots p_k)$.

En particulier, il existe $2(k-r)$ intégrales distinctes qui se réduisent respectivement à $q_{r+1} \dots q_k, p_{r+1} \dots p_k$, pour $q_1^o \dots q_r^o$.

Ceci posé, nous allons indiquer le procédé d'intégration de Jacobi, puis celui de Mayer.

Procédé d'intégration de Jacobi.

Pour trouver une intégrale $f(p_{r+1} \dots p_k, q_1 \dots q_k)$ du système $(r)'$, Jacobi emploie un procédé analogue à celui qui a été exposé dans la première méthode (voir p. 264). — On détermine d'abord une intégrale, soit $f = \varphi_1$, de la première équation $(r)'$ à savoir

$$(s) \quad \frac{\partial f}{\partial q_1} + \sum_{i=r+1}^{i=k} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 .$$

Comme, dans cette équation, on peut regarder $q_1, \dots q_r$ comme des paramètres, l'équation (1) porte sur $2(k-r)+1$ variables, et la recherche d'une intégrale f équivaut à celle d'une intégrale première d'un système de $2(k-r)$ équations du premier ordre.

On déduit ensuite de l'intégrale $f = \varphi_1$ de (s) une intégrale commune aux deux premières équations $(r)'$. A cet effet on forme $(f_1, \varphi_1) = \varphi_2$, $(f_1, \varphi_2) = \varphi_3 \dots$ qui sont autant d'intégrales de (1), jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale φ_k telle que (f_1, φ_k) s'exprime en fonction de $\varphi_1, \dots \varphi_k$ et de $q_2, \dots q_r$. On pose alors $f = \Phi(q_2 \dots q_r, \varphi_1 \dots \varphi_k)$, et on détermine Φ

de façon que l'égalité :

$$(\alpha) \qquad 0 = (f_1 , f) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \varphi_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} F \,(q_2 \cdots q_r , q_1 \cdots q_k)$$

soit vérifiée. Comme h est au plus égal à $2(k-r)$, on voit qu'il suffit de déterminer une intégrale première Φ d'un système de h équations du premier ordre $(h \leqslant 2(k-r))$[1]

Il est clair que le raisonnement peut se poursuivre. Admettons qu'on ait déterminé une intégrale commune aux l premières équations $(r)'$, soit $f = \psi_1 (p_{r+1} , \dots p_k , q_1 , \dots q_k)$. Pour en déduire une intégrale des $(l+1)$ premières équations $(r)'$, on forme $(f_l \cdot \psi_1) = \psi_2$, $(f_l \cdot \psi_2) = \psi_3$, etc, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale ψ_h telle que $(f_l \cdot \psi_h)$ s'exprime en fonction de $\psi_1 , \dots \psi_h$ et des variables $q_{l+1} \cdots q_r \cdots$ qu'on peut regarder comme des paramètres dans les l premières équations (r) ou $(r)'$. On pose alors :

$f = \Psi (q_{l+1} , q_r , \psi_1 , \dots \psi_h)$. Pour que f, qui est une intégrale commune aux l premières équations (r), satisfasse à la $(l+1)^{e}$, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(\beta) \qquad 0 = (f_l , f) \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial_{l+1}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_1} \psi_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_h} F (q_{l+1} \cdots q_r , \psi_1 , \cdots \psi_h) .$$

Comme h est au plus égal à $2k - r - l - (r - l) = 2(k-r)$, on a encore à trouver une intégrale première d'un système différentiel ordinaire d'ordre $2(k-r)$. —— Ajoutons que l'intégrale f correspondant à une intégrale quelconque Ψ de (β), dépend de p_{r+1} si ψ_1 en dépend, comme le montre la note ci-dessous.

On voit que le cas exceptionnel qui se présentait dans la première méthode se trouve ainsi éliminé : d'une intégrale quelconque (dépendant de p_{r+1}) de la première équation (s), on déduira une intégrale f_r du système $(r)'$, dépendant aussi de p_{r+1}, indépendante de $p_1 , \dots p_r$, distincte par

---

(1) Il suffit que l'intégrale φ_1 dont on part dépende de p_{r+1} (ce qui est toujours possible) pour qu'on puisse en déduire une intégrale $f = \Phi$ qui dépende aussi de p_{r+1}. En effet, $\frac{\partial f}{\partial p_{r+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{r+1}} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{r+1}}$, et d'autre part, on peut se donner arbitrairement pour $q_1^0 , \dots q_r^0 , \varphi_1^0 , \dots \varphi_k^0$, les valeurs des dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} , \dots \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k}$ d'une intégrale Φ de l'équation auxiliaire (α) ; si donc $\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{r+1}}$ n'est pas nul, $\frac{\partial f}{\partial p_{r+1}}$ ne sera pas nul pour une intégrale Φ quelconque.

suite de $f_1, \dots f_{r-1}$. On pourra résoudre le système

$$f_0 \equiv p_1 - F_1 = 0, \quad f_1 = p_2 - F_2 \equiv 0, \dots \qquad f_r \equiv c_r,$$

par rapport à $p_1 \dots p_r, p_{r+1}$.

En définitive, pour trouver une intégrale $f(p_{r+1} \dots p_k, q_1 \dots q_k)$ du système (r), il faut trouver une intégrale de la première équation $(1)'$, équivalente à un système différentiel d'ordre $2(k-r)$, puis une intégrale de $(r-1)$ autres équations successives, $(\beta), \dots (\lambda), \dots$ équivalentes chacune à un système différentiel d'ordre au plus égal à $2(k-r)$.

Pour trouver une intégrale complète de l'équation primitive donnée, il faut trouver une intégrale de $(k-1)$ systèmes (r) successifs, qui correspondent aux valeurs de r : $r=1$, $r=2$, $\dots r=k-1$.

Procédé d'intégration de Mayer.

Le procédé de Mayer présente sur le précédent un grand avantage : il permet d'obtenir une intégrale du système (r) en calculant seulement une intégrale première d'un système unique d'équations différentielles d'ordre $2(k-r)$.

Nous savons que le système $(r)'$:

$$(r')\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + (F_1, f) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_r} + (F_r, f) = 0 \end{array} \right. ,$$

(où les parenthèses s'étendent aux variables $p_{r+1}, q_{r+1}, \dots p_k, q_k$) admet une intégrale $f(q_1, \dots q_r, q_{r+1} \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k)$, soit $f = \varphi_1$, qui se réduit à $A(q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k)$ pour $q_1^0, q_2^0, \dots q_r^0$. Les $q_1^0 \dots q_r^0$ étant pris au hasard, les fonctions $F_1, \dots F_r$ seront holomorphes pour des valeurs arbitraires des :

$$q_{r+j}, p_{r+j}, \text{ soit } q_{r+1}^0, \dots q_k^0, p_{r+1}^0 \dots p_k^0,$$

(ainsi que A par hypothèse).

Ceci posé, faisons le changement de variables :

$$q_1 = q_1^0 + u_1, \quad q_2 = q_2^0 + u_1 u_2, \dots \quad q_r = q_r^0 + u_1 u_r;$$

les égalités : $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dots + u_r \dfrac{\partial f}{\partial q_r}$,

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = u_1 \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots\dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_r},$$

montrent que la fonction f des nouvelles variables satisfait au système :

$$(R)' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} + (F_1', f) + u_2 (F_2', f) + \dots + u_r (F_r', f) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial u_2} + u_1 (F_2', f) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial u_r} + u_1 (F_r', f) = 0 \end{cases}$$

où F_i' désigne ce que devient F_i après le changement de variables, les parenthèses s'étendant toujours aux variables $p_{r+1}, q_{r+1}, \dots p_k, q_k$.

L'intégrale $f = \varphi_1$ de $(r)'$ devient une fonction :

$\Psi_1 (u_1, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k)$, qui pour $u_1 = 0$, ($u_2, \dots u_r$ ayant des valeurs quelconques) se réduit à $A (q_{r+1}, \dots q_k\, p_{r+1}, p_k)$. Mais les fonctions F_i' étant holomorphes dans le domaine :

$$u_1 = 0, u_2^0, \dots u_r^0, q_{r+1}^0, \dots q_k^0, p_{r+1}^0, \dots p_k^0,$$

la première équation $(R)'$ (où $u_2, \dots u_r$ sont des paramètres qui reçoivent des valeurs quelconques) admet une intégrale et une seule qui pour $u_1 = 0$ se réduit à $A (q_{r+1}, q_k, p_{r+1}, \dots p_k)$. Cette intégrale coïncide donc avec Ψ_1.

Il suit de là que pour intégrer le système $(r)'$, il suffit d'intégrer la première équation $(R)'$. En effet, il suffit de déterminer les $2(k-r)$ intégrales de cette dernière équation qui pour $u_1 = 0$ se réduisent respectivement à $q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k$. En revenant aux anciennes variables, on a $2(k-r)$ intégrales distinctes de $(r)'$.

Cette première équation $(R)'$ peut s'écrire :

$$(S) \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p_{r+1}} + \dots + \lambda_{k-r} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \mu_1 \frac{\partial f}{\partial q_{r+1}} \dots\dots - \mu_{(k-r)} \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0$$

les λ_i étant des fonctions de $u_1, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k$, où on regarde $u_2, \dots u_r$ comme des paramètres. Pour intégrer cette équation, il faut trouver $2(k-r)$ intégrales distinctes du système :

$$\frac{du_1}{1} = \frac{dp_{r+1}}{\lambda_1} = \dots = \frac{dp_k}{\lambda_{k-r}} = -\frac{dq_{r+1}}{\mu_1} = -\frac{dq_k}{\mu_{k-r}}$$

Admettons qu'on ait calculé effectivement $2(k-r)$ intégrales distinctes de (S), soit $\chi_1, \dots \chi_{2(k-r)}$. Comment en déduire les $2(k-r)$ intégrales $\psi_1, \dots \psi_{2(k-r)}$, qui pour $u_1 = 0$, quels que soient $u_2, \dots u_r$, se réduisent respectivement à $\dots q_{r+j} \dots p_{r+j} \dots\dots$? Pour cela, observons que toute intégrale de (S), soit :

$$\chi\ (u_1, u_2, \dots\dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k)$$

s'exprime en fonction de $\psi_1, \dots \psi_{2(k-r)}$ et de $u_2, \dots u_r$:

$$\chi(u_1, u_2, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k) \equiv F(u_2, \dots u_r, \psi_1, \dots \psi_{2(k-r)})$$

mais pour $u_1 = 0$, ψ_1 coïncide avec q_{r+1}, etc, $\psi_{2(k-r)}$ avec p_k, on a donc :

$$\chi(0, u_2, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k) \equiv F(u_2, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k);$$

on peut donc écrire les égalités :

$$\chi_i = \chi_i\ (0, u_2, \dots u_r, \psi_1, \dots \psi_{2(k-r)}) \qquad (i = 1, 2, \dots 2(k-r)),$$

et en les résolvant(1) par rapport à $\psi_1, \dots \psi_{2(k-r)}$, on obtient les intégrales cherchées de (S) ; il suffit d'y remplacer $u_1, \dots\dots u_r$ en fonction de $q_1, \dots q_r$ pour obtenir $2(k-r)$ intégrales distinctes de $(r)'$.

L'intégration du système $(r)'$ est donc entièrement ramenée à celle de l'équation unique (S) qui équivaut à un système de $2(k-r)$ équations différentielles du premier ordre. Mais nous n'avons besoin que d'une intégrale particulière de $(r)'$. La méthode de Mayer permet de calculer une telle intégrale quand on connaît une seule intégrale de (S).

Soit en effet $\chi(u_1, u_2, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1} \dots p_k)$ une intégrale de l'équation (S), que nous supposons, bien entendu, n'être pas une simple fonctions de $u_2, \dots\dots u_r$. Pour $u_1 = 0$, cette intégrale dépend au moins d'une des variables $q_{r+1} \dots\dots p_k$, soit q_{r+1} : car si elle se réduisait (pour $u_1 = 0$) à la forme $\varpi(u_2, \dots\dots u_r)$, elle se confondrait identiquement avec l'intégrale $\varpi(u_2, \dots u_r)$ de (S). Nous avons, d'autre part, l'égalité :

$$(l) \qquad \chi(u_1, u_2, \dots u_r, q_{r+1}, \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k) \equiv \chi(0, u_2, \dots u_r, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{2(k-r)})$$

Les ψ_i satisfont, par hypothèse, non seulement à l'équation S, mais à toutes les équations $(R)'$, puisque ce sont des intégrales de $(r)'$ quand on revient aux premières variables. Il s'agit de déduire de l'intégrale χ une de ces intégrales ψ_i.

Tout d'abord, si pour $u_1 = 0$ la fonction χ est indépendante de $u_2, \dots\dots u_r$, l'intégrale χ est l'intégrale cherchée ; s'il n'en est pas ainsi,

(1) Voir feuillet suivant (276)

résolvons l'équation (l) par rapport à Ψ_1 :

$$\Psi_1 = g_1 (u_1, u_2, \ldots u_r, q_{r+1} \ldots q_k, p_{r+1} \ldots p_k, \Psi_2, \ldots \Psi_{2(k-r)}).$$

Si g_1 est indépendant de $\Psi_1, \ldots \Psi_{2(k-r)}$, g_1 définit l'intégrale Ψ_1 cherchée (2). Sinon, exprimons que Ψ_1 satisfait à toutes les équations (r)', en tenant compte de ce fait que $\Psi_2, \ldots \Psi_{2(k-r)}$ sont aussi des intégrales de ce système. A chaque équation (r)' correspond une relation de la forme :

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_i} + v_{r+1} \frac{\partial g_1}{\partial p_{r+1}} + \cdots + v_{k-r} \frac{\partial g_1}{\partial p_k} - \varpi_{r+1} \frac{\partial g_1}{\partial q_{r+1}} \cdots - \varpi_k \frac{\partial g_1}{\partial q_k} = 0,$$

où les v, ϖ sont des fonctions de $u_1 \ldots u_r, \ldots q_{r+j} \ldots p_{r+j} \ldots$ Si tous les premiers membres de ces r équations sont identiquement nuls (quels que soient les u, p, q, Ψ), la fonction g_1, où on donne à $\Psi_2 \ldots \Psi_{2(k+r)}$ des valeurs numériques quelconques (fonction qui, d'après ce qui précède, ne saurait se réduire à une constante), est l'intégrale cherchée. Sinon, un au moins de ces premiers membres différents de zéro, contient les variables $\Psi_2, \ldots \Psi_{2(k-r)}$, et on peut résoudre l'équation correspondante par rapport à Ψ_2 par exemple ; autrement, il existerait une relation entre les variables indépendantes u, p, q. Effectuons donc cette résolution :

$$\Psi_2 = g_2 (u_1, \ldots u_r, q_{r+1} \ldots q_k, p_{r+1} \ldots p_k, \Psi_3 \ldots \Psi_{2(k-r)})$$

et raisonnons sur g_2 comme sur g_1. En continuant de la sorte, ou bien on tombera sur une fonction g_l $[l < 2(k-r)]$ qui satisfera identiquement aux r relations :

$$\frac{\partial g_l}{\partial u_i} + v_{r+1} \frac{\partial g_l}{\partial p_{r+1}} + \cdots - \varpi_{r+1} \frac{\partial g_l}{\partial q_{r+1}} \cdots = 0,$$

et cette fontion, où on donnera à $\Psi_{l+1} \ldots \Psi_{2(k-r)}$ des valeurs numériques

---

(1) (Page 275). Pour que cette résolution soit possible, il faut et il suffit que le déterminant fonctionnel : $\dfrac{D(X_1, \ldots X_{2(k-r)})}{D(q_{r+1} \ldots q_k, p_{r+1} \ldots p_k)}$ ne s'annule pas identiquement pour $u_1 = 0$; si ce déterminant était nul, une des intégrales, soit X_1, serait égale, pour $u_1 = 0$ à $F(X_2, \ldots X_{2(k-r)}, u_2, \ldots u_r)$ et par suite se confondrait avec cette intégrale F ; les intégrales X_i ne seraient donc pas distinctes.

(2) g_1 ne se réduit jamais à une constante absolue A ; autrement, l'identité (l), où on fait $\Psi_1 = A$ et où on donne à $\Psi_2, \ldots \Psi_{2(k-r)}$ des valeurs

quelconques, sera une intégrale Ψ cherchée ; ou bien on arrivera à une égalité :

$$\Psi_{2(k-r)} = g_{2(k-r)}(u_1, \dots u_r, q_{r+1} \dots q_k, p_{r+1}, \dots p_k),$$

qui donnera une intégrale Ψ cherchée. Observons que, dans ce dernier cas, la relation précédente : $\Psi_{2(k-r)-1} = g_{2(k-r)-1}$, donne $\Psi_{2(k-r)-1}$ en fonction de $\Psi^r_{2(k-r)}$ et des variables indépendantes, donc en fonction de ces dernières variables ; en remontant la série des relations $\Psi_l = g_l$, on déduit ainsi de l'intégrale χ toutes les intégrales $\Psi_1, \dots \Psi^r_{2(k-r)}$.

Mais le point essentiel est le suivant : « Pour obtenir une intégrale du système (r)', il suffit de former une intégrale de l'équation (S) qui équivaut à un système de 2 (k - r) équations du premier ordre. »

Conclusion. – En définitive, pour intégrer l'équation aux dérivées partielles donnée

$$f_0 \equiv p_1 - F_1 (p \dots p_k, q_1 \dots q_k) = 0,$$

il faut, quand on emploie le procédé de Mayer, calculer successivement une intégrale première d'un système différentiel ordinaire d'ordre 2 (k-1), puis d'un système d'ordre 2 (k-2), etc, enfin d'un système d'ordre 2. – A chaque intégration intermédiaire, l'ordre du système différentiel auxiliaire diminue de deux unités.

Au contraire quand on cherche à intégrer directement le système canonique :

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial f_0}{\partial p_1}} = \dots\dots = \frac{dq_k}{\frac{\partial f_0}{\partial p_k}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial f_0}{\partial q_1}} = \dots\dots = \frac{dp_k}{\frac{\partial f_0}{\partial q_k}},$$

(dont $f_0 = C^{te}$ est une première intégrale), la recherche d'une intégrale (distincte de f_0) est encore une opération d'ordre différentiel égal à 2k-2 ; cette intégrale une fois calculée, la recherche d'une nouvelle intégrale se ramène à celle d'une intégrale d'un système de 2k - 3 équations du premier ordre, et ainsi de suite. La détermination d'une intégrale intermédiaire permet d'abaisser, chaque fois, d'une unité l'ordre du système différentiel. On est donc amené ainsi à chercher successivement une intégrale particulière d'un système différentiel d'ordre 2k - 2, puis d'un système d'ordre 2k - 3, etc d'un système d'ordre 3, enfin d'un système d'ordre 2. Le calcul s'achève alors par quadratures d'après la théorie du dernier multiplicateur.

---

numériques quelconques, exigerait que χ fût un simple fonction de $u_2, \dots u_r$.

Cette comparaison suffit à établir la supériorité de la méthode de Jacobi et Mayer (en tant que méthode générale) pour l'intégration d'un système canonique, au moins dès que k surpasse 2. Mais il convient de ne pas oublier que cette méthode suppose essentiellement que H existe, c'est-à-dire que les forces dérivent d'un potentiel.

Remarque sur la méthode de Jacobi et Mayer.

Quand on emploie le procédé de Jacobi pour intégrer un système intermédiaire (r), l'intégration est d'autant plus compliquée que l'application du théorème de Poisson est avantageuse et on ne semble nullement profiter des simplifications qui peuvent résulter de là pour l'intégration. Quand on emploie le procédé de Mayer, l'intégration ne se complique pas quand les parenthèses de Poisson donnent des résultats qui ne sont pas illusoires, mais on n'emploie pas ces résultats. Il y a là, comme pour la première méthode de Jacobi (voir p. 267) une lacune qu'a comblée M. Sophus Lie. Nous renverrons sur ce point aux travaux déjà cités.

Exemples. — I. Mouvement d'un point matériel libre x, y, z de masse 1, soumis à la force qui dérive du potentiel $U = yz + zx + xy$.

1° Application du théorème de Poisson.

Les équations canoniques du mouvement sont ici, H étant égal à $\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (yz + zx + xy)$.

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p_1, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = p_2, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = p_3 \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = y+z \\[2mm] \dfrac{dp_2}{dt} = z+x \\[2mm] \dfrac{dp_3}{dt} = x+y. \end{cases}$$

Il suffit de connaître 5 intégrales premières du mouvement indépendantes du temps. On a déjà :

$$f_0 \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2(yz + zx + xy) = h.$$

Si on additionne membre à membre les trois équations (B), on trouve :

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + p_3) = 2(x + y + z),$$

d'où en multipliant les deux membres par $p_1+p_2+p_3 \equiv \frac{d(x+y+z)}{dt}$, l'intégrale

$$f \equiv (p_1+p_2+p_3)^2 - 2(x+y+z)^2 = C .$$

En retranchant les deux premières équations (B), on trouve de la même manière :

$$f_1 \equiv (p_1-p_2)^2 + (x-y)^2 = c_1 ,$$

intégrale qui en entraine deux autres analogues par permutation, soit f_2 et f_3. Ces trois intégrales f_1, f_2, f_3 sont distinctes, mais l'intégrale f en est une conséquence, car on a :

$$f \equiv 3f_1 - f_1 - f_2 - f_3 .$$

Voyons si le théorème de Poisson va nous donner de nouvelles intégrales. Associons d'abord f et f_1 ; si on remarque que p_3 et z ne figurent pas dans f_1, et que de plus les dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial p_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial p_2}$ d'une part, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ d'autre part, sont égales et de signes contraires, tandis que p_1, p_2 et x, y entrent dans f symétriquement, on aperçoit que (f, f_1) est identiquement nul. Associons donc (f_1, f_2) :

$$\varphi \equiv (f_1, f_2) \equiv p_1(z-y) + p_2(x-z) + p_3(y-x).$$

Cette intégrale (qui aurait pu s'obtenir directement en faisant la somme des trois égalités des aires) est-elle distincte des précédentes? Il est facile de voir que non ; écrivons en effet les intégrales f_1, f_2, f_3 ainsi :

$$p_2 - p_3 = \sqrt{c_1-(y-z)^2}, \quad (p_3-p_1) = \sqrt{c_2-(z-x)^2}, \quad (p_1-p_2) = \sqrt{c_3-(x-y)^2} ;$$

si on les ajoute membre à membre, on trouve :

$$0 = \sqrt{c_1-(y-z)^2} + \sqrt{c_2-(z-x)^2} + \sqrt{c_3-(x-y)^2} ,$$

relation indépendante des p_i. D'autre part, remplaçons, dans φ, p_1 et p_2 par $p_3 - \sqrt{c_2-(z-x)^2}$ et $p_3 + \sqrt{c_1-(y-z)^2}$; il vient :

$$G = -(z-y)\sqrt{c_2-(z-x)^2} + (x-z)\sqrt{c_1-(y-z)^2} ,$$

relation qui doit se confondre avec la précédente, puisque autrement y et z seraient définis en fonction de x et de 4 constantes arbitraires seulement c_1, c_2, c_3, G. D'ailleurs, on voit aussitôt que ces deux relations ne dépendent que des différences des variables, soit $x-y$, $y-z$; en éliminant une de ces différences, l'autre disparait, et on arrive sans peine à la condition :

$$4C^2 = 2c_2c_3 + 2c_3c_1 + 2c_1c_2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 ,$$

ou bien

$$4\varphi^2 = 2f_2f_3 + 2f_3f_1 + 2f_1f_2 - f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 .$$

L'intégrale φ étant symétrique par rapport aux 3 variables p et aux trois variables x, y, z, on aurait obtenu la même intégrale, en formant les combinaisons (f_2, f_3) et (f_3, f_1). Le théorème de Poisson ne fournit donc aucune intégrale nouvelle : les trois intégrales $f_1 . f_2 . f_3$ forment un groupe.

Observons toutefois que si on regarde seulement comme connues les deux intégrales f_1, f_2, (jointes à f_0) le théorème de Poisson fournit une nouvelle intégrale φ, mais une seule.

Nous obtenons donc en définitive 4 intégrales distinctes f_0, f_1, f_2, f_3 (ou φ) ; la théorie du dernier multiplicateur nous apprend que le problème peut s'achever par quadratures.

2° Application de la méthode de Jacobi.

Il s'agit de trouver une intégrale complète de l'équation :

$$(C) \qquad f_0 \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2(yz + zx + xy) = h.$$

Pour cela, employons la méthode de Jacobi sous sa première forme et déterminons d'abord une intégrale du système canonique (A), (B), soit l'intégrale :

$$(D) \qquad f \equiv (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(x + y + z)^2 = c \quad .$$

Calculons maintenant une intégrale nouvelle f_1 du système (A), (B), et cherchons à en déduire une intégrale Ψ qui satisfasse à la condition $(f, \Psi) \equiv 0$. Prenons :

$$(E) \qquad f_1 \equiv (p_1 - p_2)^2 + (x - y)^2 = c_1 ;$$

il se trouve que (f, f_1) est identiquement nul. Donc les équations (C), (D), (E) définissent une intégrale complète de (C). De l'équation (E) on tire p_2 en fonction p_1, on porte dans (D) et on en tire p_3 en fonction de p_1 ; on porte enfin dans (C), et on obtient p_1, p_2, p_3 en fonction de x, y, z, et de h, c, c_1. L'intégrale complète $V = \int p_1\, dx + p_2\, dy + p_3\, dz$, est donnée par des quadratures qu'on peut mener jusqu'au bout à l'aide du changement de variables $x + y + z = u$, $y - z = v$, $z - x = w$.

Au lieu de l'intégrale f_1, on aurait pu adjoindre à f_0 et f l'intégrale φ :

$$(E)' \qquad \varphi \equiv p_1(z - y) + p_2(x - z) + p_3(y - x) = C ;$$

un calcul immédiat montre en effet que (f, φ) est identiquement nul. Les trois équations (C), (D), (E)', sont alors symétriques par rapport aux variables.

Enfin, supposons qu'on soit parti de l'intégrale f_1 et non de f, et qu'on essaie ensuite de déduire de la seconde intégrale f_2 une intégrale ψ telle que (f_1, ψ) soit identiquement nul. Pour cela, on forme $(f_1, f_2) = \varphi$, puis (f_1, φ) qui doit s'exprimer, d'après ce qui précède, en fonction de f_1, f_2, φ; et en effet, il vient:

$$(f_1, \varphi) = f_2 - f_3 = - f_1 - 2\sqrt{f_1 f_2 - \varphi^2}.$$

On posera donc $\psi = F(f_1, f_2, \varphi)$, et F devra satisfaire à l'équation:

$$\frac{\partial F}{\partial f_2}\varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\left(f_1 + 2\sqrt{f_1 f_2 - \varphi^2}\right),$$

équation dont on trouverait aisément une intégrale F_1. En remplaçant, dans F_1, f_1 par c_1, f_2 et φ par leurs expressions en p_i, x, y, z, on obtient une relation $\psi = c'$ qui, jointe à $f_0 = h$, $f_1 = c_1$, détermine une intégrale complète de (C).

Remarque. — Si on avait étudié directement le système d'équations de Lagrange

$$x'' = y + z, \quad y'' = z + x, \quad z'' = x + y,$$

qui définit le mouvement du point, on aurait eu à intégrer des équations linéaires et homogènes à coefficients constants, ce qui nous montre que, dans le cas actuel, toutes les intégrations peuvent être poussées jusqu'au bout, résultat que la méthode précédente ne met pas en évidence avec les variables x, y, z. D'une manière générale, il importe, avant d'employer la méthode de Jacobi, de changer de variables si on aperçoit le moyen, dans les nouvelles équations, de séparer, au moins partiellement, les variables, ainsi qu'il arrivait dans les exemples traités jusqu'ici. Par exemple, ici, un changement orthogonal des variables x, y, z conserve T et ramène U à la forme $\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2$. Chaque fois que U est un polynôme du second degré (homogène ou non) par rapport à x, y, z, un changement orthogonal des variables ramène U à la forme:

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + lx + my + nz + d,$$

et l'intégration est alors immédiate.

II. — Mouvement d'un point matériel mobile dans un plan et soumis à la force qui dérive du potentiel $U = \lambda\,[x + y + t(x-y)]$.

Pour éviter les coefficients numériques nous supposerons le point de masse $\frac{1}{2}$ et λ égal à $\frac{1}{4}$.

On a alors: $H = \frac{1}{4}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{4}\,[x + y + t(x-y)] = p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{4}\,[x + y + t(x-y)]$, et il faut trouver une intégrale complète de l'équation :

$$(1) \qquad p + p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{4}\left[x + y + t(x-y)\right],$$

où p, p_1, p_2 sont les dérivées $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ d'une fonction $V(t, x, y)$.

Employons la méthode de Jacobi et Mayer, et cherchons d'abord une intégrale première $f(p_1, p_2, t, x, y)$ du système :

$$\frac{4\,dp_1}{1+t} = \frac{dx}{2p_1} = \frac{4\,dp_2}{1-t} = \frac{dy}{2p_2}.$$

La combinaison :

$$\frac{2(dp_1 + dp_2)}{1} = \frac{dx + dy}{2(p_1 + p_2)}$$

donne aussitôt l'intégrale :

$$(2) \qquad (p_1 + p_2)^2 - \frac{x+y}{2} = c_1 .$$

Résolvons les équations (1) et (2) par rapport à p et p_1 ; il vient :

$$(3) \begin{cases} p = -2p_2^2 + 2p_2\sqrt{\frac{x+y}{2} + c_1} + \frac{1}{4}\left[t(x-y) - (x+y)\right] - c_1 . \\ p_1 = -p_2 + \sqrt{\frac{x+y}{2} + c_1} . \end{cases}$$

Cherchons maintenant une intégrale $f(p_2, t, x, y)$ commune aux deux équations :

$$(4) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_2}\left[\frac{p_2}{\sqrt{\frac{x+y}{2} + c_1}} - \frac{1}{2}(1+t)\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[4p_2 - 2\sqrt{\frac{x+y}{2} + c_1}\right] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+y}{2} + c_1}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 . \end{cases}$$

Appliquons le procédé de M. Mayer ; comme pour $t = 0$, (p_2, x, y étant quelconques) les coefficients des équations (4) sont holomorphes, nous posons : $t = t$, $x = t\xi$. Si F désigne ce que devient f dans ce changement de variables, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi\frac{\partial f}{\partial x},$$

et il faut déterminer une intégrale F de l'équation unique :

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p_2}\left[\frac{2p_2 - \xi}{\sqrt{\frac{t\xi + y}{2} + c_1}} - (1+t)\right] + \frac{\partial F}{\partial y}\left[4p_2 + \xi - 2\sqrt{\frac{t\xi + y}{2} + c_1}\right] = 0,$$

ou encore une intégrale première du système :

$$dt = \frac{4\,dp_2}{\frac{2p_2 - \xi}{\sqrt{\frac{t\xi + y}{2} + c_1}} - (1+t)} = \frac{dy}{4p_2 + \xi - 2\sqrt{\frac{t\xi + y}{2} + c_2}}$$

Le changement de variable $F = -2p_2 + \sqrt{\frac{t\xi+y}{2}+c_1}$ met aussitôt en évidence l'intégrale de (5) :

$$F = -\frac{t^2}{4} - 2p_2 + \sqrt{\frac{t\xi+y}{2}} + c_1.$$

Pour $t=0$, cette intégrale se réduit à $2p_2 + \sqrt{\frac{y}{2}+c_1}$, expression qui ne dépend pas de la variable ξ ; c'est par suite une intégrale du système (4) quand on y remplace ξ par $\frac{x}{t}$. Écrivons donc l'équation :

$$(6) \qquad 2p_2 + \frac{t^2}{4} - \sqrt{\frac{x+y}{2}+c_1} = c_2,$$

et résolvons les équations (3), (6) par rapport à p, p_1, p_2 : il vient :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= -\frac{c_1}{2} + \frac{1}{4}t(x+y) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4} - c_2\right)^2 \\ p_1 &= -\frac{c_2}{2} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}+c_1} \\ p_2 &= \frac{c_2}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}+c_1} \quad ; \end{aligned} \right.$$

et ces équations doivent définir les dérivées partielles d'une fonction $V(t,x,y)$. On voit immédiatement en effet que la fonction :

$$V = \frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}+c_1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{x+y}{2}\left(\frac{t^2}{4} - c_2\right) - \frac{t^5}{2^5 . 5} + \frac{c_2}{12}t^3 - \frac{c_1+c_2^2}{2}t + C^{te}$$

admet comme dérivées p, p_1, p_2.

Le problème est dès lors achevé. Le mouvement est défini par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = b_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial c_2} = b_2,$$

c'est à dire ici :

$$(8) \quad \left(\frac{x+y}{2}+c_1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{2} = b_1, \qquad -\frac{(x-y)}{2} + \frac{t^3}{12} - \frac{c_2}{2}t = b_2.$$

égalités qui peuvent s'écrire :

$$(9) \quad x+y = \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta, \qquad x - y = \frac{t^3}{6} + \alpha' t + \beta',$$

en posant :

$$b_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad c_1 = \frac{\alpha^2 - 2\beta}{4}, \quad b_2 = -\beta', \; c_2 = -\alpha'.$$

Remarque. – Si au lieu d'employer la méthode de Jacobi et Mayer on s'était servi des équations ordinaires du mouvement, on aurait eu à intégrer le système bien simple :

$$x'' = \frac{1}{2}(1+t), \quad y'' = \frac{1}{2}(1-t),$$

qui par addition et soustraction redonne immédiatement les égalités (9), et qui d'ailleurs se simplifie encore quand on fait le changement de variables $x+y=x_1$, $x-y=y_1$. Si on employait la méthode de Jacobi après ce dernier changement de variables, l'équation aux dérivées partielles s'intégrerait aussitôt par séparation des variables.

Il convient d'observer à ce propos que si la méthode de Jacobi et Mayer est théoriquement la méthode générale la plus avantageuse, elle présente dans les applications de graves inconvénients. La résolution par rapport aux p_i entraîne de rapides complications, quand les variables ne se distinguent pas les unes des autres par quelque caractère spécial. De plus, l'équation unique à laquelle conduit le procédé de Mayer dépend de paramètres, et surtout elle résulte d'une combinaison de plusieurs équations distinctes, circonstance qui masque en général les simplifications et notamment la séparation possible des variables.

Il convient donc de n'employer la méthode de Jacobi et Mayer qu'après avoir choisi les variables de la manière la plus judicieuse et s'être rendu compte de toutes les simplifications que révèlent des procédés plus directs. L'exemple si élémentaire que nous venons de traiter montre combien les complications s'introduisent vite quand on ne prend pas les précautions préalables.

Remarque sur les systèmes canoniques qui se déduisent d'une intégrale première.

Considérons un système canonique quelconque :

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{dp_k}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}} ;$$

et soit $f(q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k)$ une intégrale première de ce système. Nous savons qu'on peut déterminer une intégrale complète V de l'équation :

$$H\left(q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = h$$

qui satisfasse à l'équation :

$$f\left(q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = \alpha.$$

D'après cela, l'intégrale du système canonique :

$$(2)\qquad \frac{dq_1}{\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial f}{\partial q_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{dp_k}{-\dfrac{\partial f}{\partial q_k}}$$

pourra se déduire de cette même fonction $V(q_1 \ldots q_k, h, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-2})$. L'intégrale du système (1) sera définie par les égalités :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = b, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = b_1 \; \ldots \; \frac{\partial V}{\partial \alpha_{k-2}} = b_{k-2}, \quad \text{et } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

l'intégrale du système (2) sera définie par les égalités analogues

$$\frac{\partial V}{\partial h} = c, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = b_1 \; \ldots\ldots \; \frac{\partial V}{\partial \alpha_{k-2}} = b_{k-2}, \quad \text{et } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

On voit que les relations entre les q_i, déterminées par les systèmes (1) et (2), admettent le système commun d'intégrales :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = b_2, \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{k-2}} = b_{k-2},$$

entre lesquelles on peut en général éliminer $(k-3)$ des variables q_i, ce qui donne $k-2$ relations

$$\varphi_1(q_1, q_2, q_3, h, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{k-2}) = , \quad \varphi_2(q_1, q_2, q_4, h, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{k-2}) = 0, \ldots\ldots$$

$$\varphi_{k-2}(q_1, q_2, q_k, h, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-2}) = 0$$

communes à (1) et à (2).

En particulier, admettons que le système (1) corresponde à un problème de Dynamique ($H \equiv T - U$), et que f soit également de la forme $\mathcal{T} - V$ où $\mathcal{T}$ est homogène et du second degré par rapport aux p_i, qui ne figurent pas dans V ; on résoudra du même coup le problème de dynamique donné et le problème pour lequel la fonction canonique serait $\mathcal{T} - V + C\,(T - U)$, C désignant une constante, en cherchant une intégrale complète V commune au système $H = h$, $f = \alpha$.

D'après cela, si on considère un système (1) quelconque et une intégrale f quelconque, on peut dire qu'en général l'intégration du système (1) et l'intégration du système (2) sont deux problèmes équivalents. Mais il n'en faut pas conclure qu'ayant déterminé une certaine intégrale f d'un système particulier, il suffit d'intégrer le système (2) pour savoir intégrer le premier. De l'intégrale générale de (2) obtenue d'une manière quelconque, on peut bien déduire une intégrale complète de l'équation :

$$f\left(q_1 \cdots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = \alpha,$$

mais cette intégrale ne satisfera pas en général à l'équation $H = h$, et la connaissance de l'intégrale générale du système (2) pourra n'être d'aucune utilité pour la détermination d'une intégrale V commune aux équations, $H = h$, $f = \alpha$.

Par exemple, supposons que H ne dépende pas de q_1, le système (1) admet l'intégrale $f = p_1$, et le système (2) déduit de f se réduit au suivant :

$$\frac{dp_1}{dq_1} = 0, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = 0, \ldots\ldots \frac{dp_k}{dq_1} = 0 \quad ,$$

dont l'intégrale générale est :

$$p_1 = C^{te}, \; q_2 = C^{te}, \; \ldots\ldots\ldots \; p_k = C^{te}.$$

Mais de cette intégrale on ne peut déduire une fonction V vérifiant à la fois les équations :

$$H\left(q_2, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = h, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = a,$$

on est ramené seulement à trouver une intégrale complète $W(q_2, \ldots q_k)$ de l'équation :

$$H\left(q_2, \ldots q_k, a, \frac{\partial W}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h.$$

Intégrales premières particularisées.

Quand une fonction $f(t, q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k)$ est une intégrale première du système canonique :

$$(1) \qquad dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \qquad = \frac{dq_k}{\frac{\partial H}{\partial p_k}} = \frac{-dp_k}{\frac{\partial H}{\partial q_k}},$$

elle satisfait identiquement à la condition :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

Admettons maintenant que la relation précédente n'ait pas lieu identiquement, mais soit une conséquence de l'équation $f = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = M f.$$

Tout mouvement $q_i(t)$, $p_i(t)$ correspondant à des conditions initiales t_0, q_i^0, p_i^0 qui satisfont à la condition $f(t^0, \ldots q_i^0 \ldots p_i^0) = 0$, satisfait à cette condition quel que soit t. En effet, remplaçons dans f les p_i, q_i en fonction de t, il vient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = M_1(t) f;$$

comme l'équation différentielle $\frac{df}{dt} = M_1 f$ n'admet d'autre intégrale que $f \equiv 0$ qui s'annule pour $t = t_0$, la fonction $f(t, \ldots q_i(t) \ldots p_i(t) \ldots)$ est identiquement nul, si elle est nulle pour $t = t_0$.

Inversement, si la relation $f=0$ ne peut être vérifiée à l'instant t_0 sans être vérifiée pendant toute la durée du mouvement, on a nécessairement :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = Mf.$$

En effet, tout mouvement qui satisfait à la condition :

$$f(t^\circ, \dots q_i^\circ \dots p_i^\circ \dots) = 0,$$

doit satisfaire pour les mêmes valeurs $t^\circ, \dots q_i^\circ \dots p_i^\circ$ à la condition

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0,$$

c'est à dire que cette relation doit être une conséquence de la relation $f=0$.

Une telle relation $f=0$ est dite intégrale première particularisée. On peut en effet la regarder comme provenant d'une intégrale première où on a donné à la constante une valeur particulière. Pour le voir supposons formées les $2k$ intégrales premières :

$$p_i^\circ = \varphi_i(t_0, t, \dots p_i \dots q_i \dots),$$

$$q_i^\circ = \psi_i(t_0, t, \dots p_i \dots q_i \dots)$$

et considérons l'intégrale première :

$$f(t_0 \dots p_i^\circ \dots q_i^\circ \dots) = f(t_0, \dots \varphi_i \dots \psi_i \dots) = F(t, \dots p_i \dots q_i),$$

où t_0 est un nombre qui figure en général dans F. Un mouvement quelconque vérifie la condition : $F = C^{te}$, et comme la constante s'annule avec $f(t_0, \dots p^\circ \dots q^\circ \ )$, tout mouvement dont les conditions initiales annulent f satisfait à la condition

$$F(t, \dots p_i \dots q_i \dots) = 0$$

mais par hypothèse, il vérifie aussi l'égalité :

$$f(t, \dots p_i \dots q_i \dots) = 0$$

Il suit de là que ces deux égalités ne peuvent être distinctes, puisque les mouvements assujettis à la condition $f(t_0, p_i^\circ \ \ q_i^\circ \ ) = 0$, dépendent encore de $2k-1$ constantes. On peut donc remplacer l'égalité $f=0$ par l'égalité $F=0$; si on veut encore F contient f en facteur.

Ces remarques faites, supposons qu'on ait déterminé une intégrale première particularisée $f=0$. D'après le théorème de la page 257, les deux équations :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1 \cdots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0 \\ & f\left(t, q_1 \cdots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

admettent une infinité d'intégrales communes et notamment une infinité d'intégrales complètes (intégrales dépendant de $k-1$ constantes arbitraires qui permettent de donner à $k-1$ des dérivées $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ des valeurs arbitraires). La connaissance d'une telle intégrale peut servir à la détermination des mouvements qui satisfont à la condition $f=0$.

Soit en effet $F=c$ une intégrale première qui pour $c=0$ donne l'intégrale particularisée $f=0$. Ecrivons les équations :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1 \cdots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0 \\ & F\left(t, q_1 \cdots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = c \end{aligned} \right.$$

et soit $V_1(t, q_1 \cdots q_k, c, c_1, \ldots c_{k-1})$ une intégrale complète de ce système. Toutes les intégrales complètes V de (2) s'obtiendront en faisant $c=0$ dans les intégrales complètes V_1 de (3). D'autre part, le mouvement général est défini par les égalités :

$$\frac{\partial V_1}{\partial a} = b, \quad \frac{\partial V_1}{\partial a_1} = b_1 \ldots \frac{\partial V_1}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1} \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\partial V_1}{\partial q_i}.$$

Si on fait $c=0$, ces égalités deviennent (abstraction faite de la première) :

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1 \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_{k-1}} = b_{k-1}, \text{ et } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Lors donc qu'on a déterminé une intégrale complète du système (2) soit $V(t, q_1 \ldots q_k, a_1, \ldots a_{k-1})$, on peut écrire les égalités (4), qui déterminent $q_2, \ldots q_k$ par exemple et les p_i en fonction de t et de q_1 (et de $2(k-1)$ constantes arbitrai[res]). Il reste à déterminer q_1 en fonction de t, problème qui dépend d'une équation du second ordre. Quand on connaît une intégrale complète de (2), la détermination des mouvements qui satisfont à la condition $f=0$ se ramène ainsi à l'intégration d'une équation du second ordre.

Application de la transformation de Legendre à l'équation de Jacobi.

Je terminerai cette étude de la méthode de Jacobi par une remarque sur la manière dont figurent les paramètres q_i, p_i dans un système canonique quelconque et dans l'équation aux dérivées partielles correspondantes.

Il est clair que dans le système canonique (1):

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2 \ldots k).$$

les variables p_i, q_i jouent un rôle symétrique puisqu'il suffit de changer H en $-H$ pour substituer les p_i aux q_i et réciproquement. D'après cela, il est loisible de substituer à l'équation de Jacobi:

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0,$$

la suivante:

$$(3) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} - H\left(t, \frac{\partial W}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial W}{\partial p_k}, p_1, \ldots p_k\right) = 0$$

Si on connait une intégrale complète $W(t, p_1, \ldots p_k, \alpha_1, \ldots \alpha_k)$ de cette dernière équation, on posera:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \ldots\ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2 \ldots k),$$

et ces égalités définiront l'intégrale générale de (1).

Il est bien facile d'ailleurs de passer de l'équation (2) à l'équation (3) en substituant aux variables q_i et à la fonction V, les nouvelles variables p_i et la nouvelle fonction W liées aux premières par les égalités:

$$(4) \qquad \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial V}{\partial q_i} \\ W = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} - V \end{cases}$$

En répétant le calcul tout élémentaire à l'aide duquel nous avons ramené les équations de Lagrange à la forme canonique (voir page 141), on voit que ces formules entraînent les suivantes:

$$(5) \qquad \begin{cases} q_i = \dfrac{\partial W}{\partial p_i} \\ V = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W. \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = -\dfrac{\partial W}{\partial t} \end{cases}$$

Le changement de variables (4) transforme donc l'équation (2) en l'équation (3). A une intégrale complète $V(t, q_1, \dots q_k, \alpha_1, \dots \alpha_k)$ de (2) correspond une intégrale complète $W(t, p_1, \dots p_k, \alpha_1, \dots \alpha_k)$ de (3), et on a les relations :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}.$$

Les équations $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = b_i$, $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, $(i = 1, 2, \dots k)$ entraînent donc bien les équations :

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = - b_i, \quad q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}.$$

La transformation (4) est appelée transformation de Legendre. C'est la plus simple des <u>transformations</u> de contact. On peut résumer ce qui précède en disant que le changement de variables $q_i = \varpi_i$, $p_i = x_i$, conserve au système (1) la forme canonique.

Plus généralement, on peut étudier tous les changements de variables :

$$\varpi_i = \varphi_i(t, p_1, \dots p_k, q_1, \dots q_k), \quad x_i = \psi_i(t, p_1, \dots p_k, q_1, \dots q_k), \quad (i = 1, 2 \dots k)$$

qui conservent à un système canonique quelconque la forme canonique, ou (sous une autre forme) étudier toutes les transformations :

$$\varpi_i = \varphi_i\left(t, q_1 \dots q_k, V, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) \qquad (i = 1, 2 \dots k)$$

$$W = F\left(t, q_1 \dots q_k, V, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right)$$

qui transforme une équation (2) quelconque (où V ne figure pas) en une autre équation du premier ordre où W ne figure pas. Ces transformations, qui constituent précisément les transformations de contact, ont fait l'objet des travaux considérables de Jacobi et de M. Sophus Lie, qu'on trouve exposés dans le second volume de la théorie des groupes de transformation de Mr. Lie et dans l'ouvrage déjà cité de M. Goursat. (Chapitre XI).

Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où H est de la forme $T - U$, T désignant une forme quadratique et homogène par rapport aux p_i dont les coefficients ainsi que U sont des polynomes du second degré par rapport aux q_i, indépendants de t et sans termes du premier degré. La fonction H peut être regardée comme la fonction canonique de deux problèmes de mécanique distincts, suivant qu'on prend les q_i ou les p_i comme paramètres définissant la position du système.

Ces deux problèmes se résoudront simultanément ; car les équations canoniques du premier se confondent avec celles du second quand on y change t en $-t$. Par exemple, soit

$$H = L p_1^2 + 2 M p_1 p_2 + N p_2^2,$$

avec $L = A q_1^2 + 2 B q_1 q_2 + C q_2^2$, $M = A' q_1^2 + 2 B' q_1 q_2 + C' q_2^2$, $N = A'' q_1^2 + 2 B'' q_1 q_2 + C'' q_2^2$.
Cette fonction H est la forme canonique qui correspond au ds^2:

$$(a) \qquad ds^2 = \frac{N\, dq_1^2 - 2M\, dq_1\, dq_2 + L\, dq_2^2}{LN - M^2}$$

Permutons maintenant les variables p et q; H devient:

$$H' = L_1 p_1^2 + 2 M_1 p_1 p_2 + N_1 p_2^2,$$

avec:

$$L_1 = A q_1^2 + 2 A' q_1 q_2 + A'' q_2^2,\ M_1 = B q_1^2 + 2 B' q_1 q_2 + B'' q_2^2.\ N_1 = C q_1^2 + 2 C' q_1 q_2 + C'' q_2^2,$$

et c'est la fonction canonique qui correspond au ds^2.

$$(b) \qquad ds_1^2 = \frac{N_1\, dq_1^2 - 2 M_1\, dq_1\, dq_2 + L_1\, dq_2^2}{L_1 N_1 - M_1^2}.$$

Chaque fois donc qu'on saura déterminer les géodésiques du premier ds^2, on saura déterminer celles du second (et réciproquement). En effet les géodésiques de ds^2, une fois calculées, le système canonique correspondant à H se trouve intégré; on connaît p_1 et p_2 en fonction de t; quand on élimine t entre p_1 et p_2, la relation dépend seulement de deux constantes arbitraires, $p_2 = F(p_1, a, b)$, et si on y remplace p_1 par q_1 et p_2 par q_2, la relation nouvelle $q_2 = F_1(q_1, a, b)$ définit les géodésiques de ds_1^2.

Fin de la 17ème Leçon.

Paris. Impie Hermet, 70, rue de Rennes, Paris.

Errata.

Page 40, 9ème Ligne (à partir du bas):

Après les mots « n'est pas nul » ajouter : « quel que soit t, pour toute position du système ».

Page 40, 2ème Ligne (à partir du bas):

Au lieu de « quel que soit t » lire : « quel que soit t_0 ».

Pages 53, 54, ... 60, le facteur $\frac{1}{m}$ a été oublié à plusieurs reprises; on doit remplacer:

Page 53, ligne 11, « $(\rho)\,\delta t$ » par « $\frac{(\rho)}{m}\,\delta t$, » ;

Page 53, lignes 12, 16, 17, ligne 20 [éq. (β)], ligne 3 (à partir du bas),

Page 54, lignes 3, 4, 5, 6, et lignes 5, 7, 8 (à partir du bas);

Page 55, ligne 4; Page 56, lignes 13, 16 (à partir du bas);

Page 58, ligne 18; Page 59, lignes 8, 9, 10,

On doit remplacer $\rho_x, \rho_y, \rho_z, (\rho)\,\delta t, \Sigma\rho^2, \Sigma\rho'^2, \Sigma R'^2, \Sigma(R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z)$ par:

$$\frac{\rho_x}{m}, \frac{\rho_y}{m}, \frac{\rho_z}{m}, \frac{(\rho)\,\delta t}{m}, \Sigma\frac{\rho^2}{m}, \Sigma\frac{\rho'^2}{m}\ \Sigma\frac{R'^2}{m}\ \Sigma\frac{1}{m}(R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z).$$

Page 55, lignes 5, 7, 8, 9 (à partir du bas),

Page 57 ligne 15, (à partir du bas),

Page 59, lignes 9, 10, 11 (à partir du bas), [éq. (δ)],

On doit remplacer $(\rho_1)\,\delta t, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, par:

$$\frac{(\rho_1)}{m}\,\delta t, \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y},$$

et $\mu_1, \dots \mu_k$ par $m\mu_1, m\mu_2, \dots m\mu_k$

Page 58, ligne 11, au lieu de : « $E=\Sigma m^2 d^2$ », lire : « $E=\Sigma m\, d^2$ ».

ligne 13, l'égalité doit être modifiée ainsi:

$$E = \Sigma\, m d^2 = \frac{dt^4}{4}\Sigma\ \frac{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2}{m} = \frac{dt^4}{4}\Sigma\frac{R^2}{m}\ ;$$

Page 60; la ligne 4 doit être remplacée par la suivante:

$$\mu_1\Sigma m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) + \dots + \mu_k\,\Sigma m\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

Page 202, ligne 6, au lieu de « $F_i = \sqrt{\psi_i + h\varphi_i + \alpha_i}$ » lire « $F_i = \psi_i + h\varphi_i + \alpha_i$ ».

A la même Librairie

ACTA MATHEMATICA. — Rédacteur en chef **M. Mittag-Leffler.** — Tomes I à X ; le vol. . 25 fr. »
Tome XI et suivants, le vol. . . . . 18 fr. 75

HERMITE. — **Cours professé à la Faculté des Sciences.** — 4e édition, revue par M. Hermite ; in-4, 1891. . . . . 15 fr.

DUCLAUX (M.-E.). — **Cours de Physique et de Météorologie professé à l'Institut agronomique**, gr. in-8, 504 p., 175 fig. dont 44 en deux couleurs, 1891. . . . . 14 fr. 50

DESPEYROUS. — **Cours de Mécanique rationnelle**, avec des notes par M. G Darboux, de l'Institut. — 2 forts vol. gr. in-8, 1884-86. . . . . 25 fr.

TANNERY, maître de conférences et sous-directeur à l'École normale supérieure. — **Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.** — Gr. in-8 de VIII-401 p., 1886. . . . . . . 12 fr.

TERQUEM (A.) et DAMIEN (B.-C.), professeurs à la Faculté des Sciences de Lille. — **Introduction à la physique expérimentale** : *Unités*. — *Calcul des erreurs*. — *Mesures des quantités primitives : longueurs, masses : temps*. — 1 vol. grand in-8, 300 pages compactes, 68 fig. grav., 1888. 4 fr.

BOIS-REYMOND (Paul du). — Traduction G. Milhaud et A. Girot. — **Théorie générale de fonctions**, in-8, 221 pages, 1887. . . . . 8 fr.

GOURSAT (E.) — **Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre**, gr. in-8, 1891. . . . . 12 fr.

GRUEY. — **Exercices d'Astronomie**, à l'usage des élèves des Facultés et des Observatoires. — Un beau vol. gr. in-8, 346 p. 22 planches gravées, 1889. . . . . 15 fr.

KŒNIGS (G.), maître de conférences à l'École normale supérieure. — **Leçons de l'agrégation classique de mathématiques**, in-4, 1892, lith. . . . . 10 fr.

DUHEM (P.). — **Cours de physique mathématique.** — *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* 2 vol. in-4, lith., 1891-92, environ 750 p. . . . . 28 fr.

DEMARTRES. — **Cours d'analyse.** — *Première partie : Fonctions de variables réelles.* In-4, 1892. 10 fr.
— *Deuxième partie : Propriétés des fonctions analytiques.* In-4. lith. VIII-168 p. 1892. . . . 8 fr.
— *Troisième partie : Équations différentielles, (pour les souscripteurs).* . . . . 8 fr.

FITZ PATRICK et CHEVREL. — **Exercices d'Arithmétique** — *Énoncés et solutions*, avec une préface de J. Tannery, S.-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure ; gr. in-8 500 p., caract. compacts . . . . 10 fr.

TUMLIRZ (Dr O.), professeur à l'Université Allemande de Prague. — **Théorie Electro-magnétique de la lumière**, trad G. van der Mensbrugghe, professeur à l'Université de Gand ; gr. in-8, XVI-157 p. 1892. . . . . 5 fr.
Nombr. fig. grav.

KŒNIGS (G.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France. — **Leçons de Cinématique**, professées à la Faculté des Sciences de Paris ; grand in-8, 1895. (*prix pour les souscripteurs*) . . . . 14 fr.
(1 premier fascicule 240 p. a paru, la fin de l'ouvrage paraîtra prochainement).

LOBATCHEWSKY (N.-I.). — **Recherches géométriques sur la théorie des parallèles**, suivies d'un extrait de la correspondance entre Gauss et Schumacher, trad. Houel. — **HELMHOLTZ.** — **Sur les faits qui servent de base à la géométrie**, trad. Houel. 1 vol in-8. 1895. . . . . 5 fr.

ACHAT DE BIBLIOTHÈQUES & OUVRAGES SCIENTIFIQUES
français et étrangers.

Grande Imprimerie du Centre. — Herbin, à Montluçon.