

Ecole Polytechnique.

---

1<sup>re</sup> Division

---

1906-1907.

---

---

# Cours d'Astronomie Générale

---

M<sup>r</sup> Poincaré.

---

1<sup>ère</sup> Leçon.

---

Les coordonnées astronomiques ressortissent au système polaire dans l'espace.

La considération des rayons vecteurs, c'est-à-dire des distances des astres fait l'objet d'un chapitre à part et l'Astronomie sphérique considère seulement les directions, de sorte que les coordonnées des astres se réduisent à deux angles, comme les coordonnées géographiques, se réduisent ordinairement à la latitude, ou son complé-

2.

ment, la colatitude  $\lambda$ , et à la longitude  $L$ .

Un observateur isolé dans un lieu inconnu n'a d'autre direction terrestre repère que la verticale par le fil à plomb, ou le niveau à bulle d'air, sorte de pendule renversée ou d'aérostak captif. (1) Il rapportera les positions d'objets célestes, ou terrestres, à cette direction par la distance zénithale  $z$  qui se compte théoriquement de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , effectivement, de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  environ. La hauteur  $\frac{\pi}{2} - z$  est une coordonnée équivalente plus usitée en mer.

Par l'observation du mouvement des étoiles il déterminera le plan commun de culmination, ou le méridien du lieu et l'angle  $A$ , azimuth, compté autour de la verticale à partir de la portion sud du plan méridien, dans le sens SONE, qui est la seconde coordonnée du système zénithal ou d'observation (instrument le théodolite). -

Consécutivement l'observateur peut déterminer la direction de l'axe du monde, de l'axe de la rotation diurne, définissant le méridien et faisant avec la verticale l'angle  $\lambda$  colatitude du lieu, l'une des constantes locales.

Lorsqu'on a en vue les phénomènes du mouvement diurne il convient de prendre l'axe du monde pour définir le système de coordonnées approprié, lequel porte le nom de Système horaire et se réfère à l'équatorial, instrument d'observatoire permanent ou temporaire.

Ainsi en effet la distance polaire  $\delta$  d'une étoile, ou son complément la déclinaison, ne subit que de très petites variations de périodes plus ou moins longues, tandis que le plan axial passant par l'étoile, le plan de déclinaison fait avec le méridien un angle  $A$ , l'angle horaire, indéfiniment croissant dans le sens rétrograde c'est-à-dire opposé au sens de la rotation de la Terre autour de son axe, ou à celui de circulation des planètes autour du Soleil, l'observateur étant supposé au dessus dans la région boréale.

L'angle  $A$  se compte en temps, c'est-à-dire en heures, minutes, secondes, unités angulaires utilisées en astronomie au même titre que les unités usuelles, degrés, minutes,

---

(1) Sous des dimensions restreintes, le niveau peut équivaloir à un fil à plomb de 1000<sup>m</sup> de hauteur de sorte que la seconde d'angle en unités sexagésimales est représentée par  $10^6 : 206265$ , soit  $4''^m 85$ . La durée des oscillations est alors de plus d'une demi minute.

secondes d'arc, ou l'unité analytique, le rapport de l'arc au rayon.

On conçoit combien important et usuel le problème du passage d'un système à un autre. Les systèmes zénithal et horaire sont locaux par la verticale et le plan méridien du lieu, c'est-à-dire par les coordonnées géographiques, la latitude  $\pi - \lambda$  et la longitude  $L$ , mais il existe d'autres systèmes purement astronomiques auxquels la méthode générale de transformation s'appliquera également.

Les symboles  $z, \delta, A$  qui figurent dans les formules de transformation représentent le plus souvent non les coordonnées observées  $z_0, \delta_0, A_0$ , mais celles-ci corrigées :

- d'abord de la réfraction proportionnelle à  $\tan z$ , égale à  $1'$  pour  $z = \frac{\pi}{4}$ , très grande et irrégulière quand  $z$  approche de  $\frac{\pi}{2}$  ;
- puis de l'aberration résultant de la vitesse de déplacement dans l'espace de l'observateur et des instruments de mesure, quand le rapport de cette vitesse à celle de la lumière est appréciable ;
- Enfin de la Parallaxe de hauteur si l'astre observé est assez voisin de la Terre, ou seulement situé dans le système solaire ; elle est proportionnelle à  $\sin z$  et peut atteindre  $57'$  pour la Lune,  $8''8$  pour le Soleil.

Ainsi les coordonnées  $z, \delta, A$ , sont vraies et géocentriques, c'est-à-dire ramenées à ce qu'elles seraient vues du centre de la Terre. L'azimut observé  $A$  n'a à subir aucune correction.

Pour représenter les coordonnées angulaires il est d'usage de considérer : au lieu des angles plans, les arcs correspondant de grands cercles tracés sur une sphère de rayon quelconque, infini par exemple, la Sphère céleste ; au lieu des dièdres les angles compris entre les arcs de grands cercles. Ainsi les problèmes d'astronomie sphérique, c'est-à-dire la détermination des positions relatives des astres, les relations entre leurs coordonnées, se résolvent par application des formules de la trigonométrie sphérique.

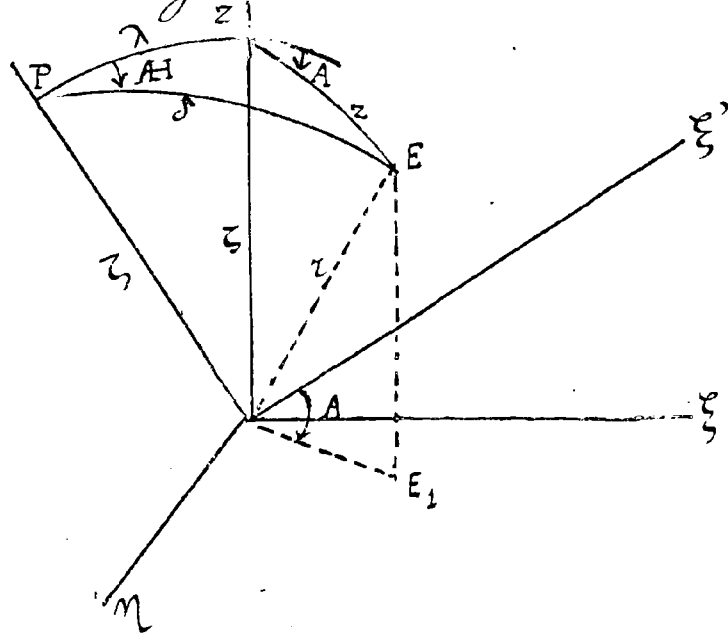
Indiquer celles de ces formules qui sont d'usage constant et les procédés propres à réduire au minimum les efforts de mémoire indispensables, tel est l'objet de cette leçon. -

4.

## Formules de la trigonométrie sphérique.

Les formules à établir doivent être algébriques, comporter la plus grande généralité; il est donc naturel de prendre pour point de départ les formules de transformation des coordonnées rectangulaires.

On considère le triangle de position  $PZE$  formé par le pôle, le zénith et l'étoile. La verticale définit un système d'axes rectangulaires dont les deux autres sont dans le plan de l'horizon: l'un  $O\xi$  est la méridienne dirigée vers le sud; l'autre  $O\eta$  est dirigé vers l'ouest. L'axe du monde définit un autre système rectangulaire ayant deux axes dans l'équateur: l'un  $O\xi'$  dans le méridien; l'autre  $O\eta'$  commun avec le premier système.



Les relations entre les coordonnées sphériques et celles rectangulaires sont:

$$\zeta = r \cos z$$

$$\zeta' = r \cos \delta$$

$$\xi = r \sin z \cos A$$

$$\xi' = r \sin \delta \cos A$$

$$\eta = r \sin z \sin A$$

$$\eta' = r \sin \delta \sin A$$

Les formules de transformation

$$\zeta = \xi' \sin \lambda + \zeta' \cos \lambda$$

$$\xi = \xi' \cos \lambda - \zeta' \sin \lambda$$

$$\eta = \eta'$$

conduisent à

$$\cos z = \cos d \cos \lambda + \sin d \sin \lambda \cos A$$

$$\sin z \cos A = -\cos d \sin \lambda + \sin d \cos \lambda \cos A$$

$$\sin z \sin A = \sin d \sin A.$$

Celles sont les trois formules générales d'usage courant, desquelles on déduit toutes les autres par de simples transformations.

L'application de ces formules n'est pas limitée aux éléments d'un triangle; leur généralité étend l'application aux coordonnées quels que soient la grandeur et les signes des angles dièdres  $A$  et  $A'$ .

Si l'on avait au contraire exprimé les coordonnées  $z', \lambda'$ , en fonction de celles  $z$  et  $\lambda$  on aurait trouvé

$$\cos d = \cos z \cos \lambda - \sin z \sin \lambda \cos A$$

$$\sin d \cos A = \cos z \sin \lambda + \sin z \cos \lambda \cos A$$

$$\sin d \sin A = \sin z \sin A$$

Il convient de remarquer que chacun de ces systèmes permet d'obtenir, le premier les coordonnées zénithales en fonction de celles horaires, le second les coordonnées horaires en fonction de celles zénithales. La première de chaque groupe est résolue relativement à l'une des coordonnées. La seconde et la troisième sont de la forme

$$x \sin y = H$$

$$x \cos y = K$$

et constituent un ensemble qui doit être considéré comme algébriquement résolu, car les transformations usuelles

$$\operatorname{tg} y = \frac{H}{K} \quad x = \sqrt{H^2 + K^2}$$

introduisent une double indétermination, l'angle étant défini par sa  $\operatorname{tg}$ , c'est-à-dire à  $k\pi$  près et l'inconnue

Astronomie générale  
(1<sup>re</sup> division - 1906-1907.)

2<sup>e</sup> feuille.

6.

$x$  par son carré, indéterminations qui n'existent pas en réalité.

Pour la solution numérique, les formules initiales sont d'usage pratique et mises en nombre ainsi qu'il suit:

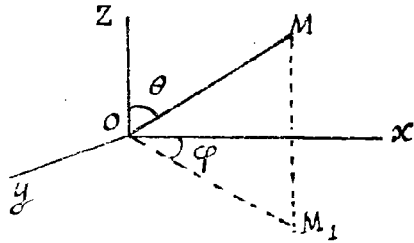
$$\begin{array}{r} \log H \text{-----} \log H \text{-----} \log K \text{-----} \\ \log K \text{-----} \log \sin y \text{-----} \log \cos y \text{-----} \\ \hline \log \operatorname{tg} y \text{-----} \log x \text{-----} \log x \text{-----} \end{array}$$

Les deux valeurs de  $x$  doivent être identiques.

Ce procédé de résolution s'applique au passage des coordonnées rectangulaires dans l'espace aux coordonnées polaires.

$$r \cos \theta = z \quad r \sin \theta \cos \varphi = x \quad r \sin \theta \sin \varphi = y$$

La valeur du produit  $r \sin \theta$  prise comme inconnue auxiliaire est conclue des deux dernières, en même temps que  $\varphi$ , comme ci-dessus; puis combinée avec la première donne  $r$  et  $\theta$ .

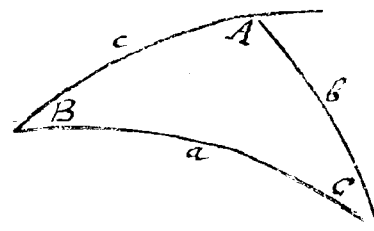


Les formules précédentes appliquées aux éléments d'un triangle sphérique sont :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$



Il convient d'apprendre et de retenir ces formules indépendamment de tout système de notations afin de pouvoir les utiliser quel que soit celui-ci qui change avec le problème à résoudre. On y réussit facilement en habituant l'esprit à formuler les propriétés qu'elles expriment.

L'énoncé de ces propriétés paraît d'abord long, mais

on arrive très vite à le réduire à peu de chose par l'exercice de la mémoire

$$\cos (c-b)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A :$$

éléments opposés

cos, d'un côté égale produit du cos des deux autres plus produit des sin par le cos de l'angle compris.

$$\sin (c-b)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

éléments adjts

éléments opposés

sin d'un côté par le cos de l'un des angles adjacents égale le produit du cos du côté opposé par le sin du troisième moins le produit du sin par le cos des mêmes côtés et par le cos de l'angle compris.

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

les sin des côtés sont entre eux comme les sin des angles opposés.

Ecrire les deux groupes de trois formules relatives au triangle de position PZE par application de ces règles mnémoriques ou de toutes autres équivalentes. Observer que l'azimut est le supplément de l'angle du triangle de sorte que les cos sont de signe contraire.

Formule en cotangentes. Disjoint les deux derniers membre à membre, on obtient sous forme entière

$$\sin A \cotg B = \cotg b \sin c - \cos c \cos A$$

formule souvent utilisée dans laquelle les côtés et les angles entrent symétriquement.

Formules déduites de l'application au triangle polaire ou supplémentaire - les suppléments

ces angles se substituent aux côtés et les suppléments des côtés aux angles ; appliquant les formules ainsi obtenues au triangle considéré d'abord on a les deux relations nouvelles, parfois utiles :

$$- \cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

Considérons l'ensemble des relations de ces six types que l'on peut écrire entre les six éléments d'un triangle ; on observe que celles du 1<sup>er</sup> type, du 3<sup>e</sup>, du 4<sup>e</sup>, du 5<sup>e</sup> ont lieu entre quatre éléments et sont au nombre de 15 qui est celui des produits différents de 6 choses prises 4 à 4 :  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ .  
Celles des 2<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> types sont à 5 éléments et au nombre de 12, double du nombre de produits différents de 6 choses prises 5 à 5. C'est qu'en effet, chaque groupement de 5 éléments donne deux arrangements ; par exemple les formules

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

constituent deux relations différentes entre les trois côtés et les deux mêmes angles du triangle.

**Formules fondamentales.** — Les trois formules générales desquelles nous avons déduit toutes les autres sont celles qui se prêtent le mieux à cet objet. Mais il convient de remarquer qu'un triangle sphérique étant déterminé par trois quelconques de ses éléments, il ne peut exister plus de trois relations distinctes entre ses six éléments. Les trois relations du seul 1<sup>er</sup> type sont distinctes, car chacune contient les trois côtés et un des angles ; donc ces trois formules constituent un groupe fondamental. Il en serait de même des trois formules distinctes d'un autre type quelconque sauf le 3<sup>e</sup>. Celui-ci exprime seulement deux relations distinctes nécessaires mais non caractéristiques des éléments d'un triangle sphérique. Si en effet on considère cinq éléments d'un triangle quelconque et le supplément du 6<sup>e</sup>, ces éléments ne peuvent



en général appartenir à un triangle et cependant ils satisfont à l'analogie des sinus. D'ailleurs on sait qu'en trigonométrie plane on forme un groupe fondamental en joignant à deux des formules :

$$a \sin B = b \sin A \quad \text{celle} \quad A + B + C = \pi$$

Or l'analogie de la seconde n'est pas considérée ici.

## Non exigé.

### Transformations diverses.

L'équation  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$  peut s'écrire :

$$\cos a = \cos (b-c) \cos^2 \frac{A}{2} + \cos (b+c) \sin^2 \frac{A}{2}$$

d'où l'on déduit :

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{b-c}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{b+c}{2} \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$(1) \quad \sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b-c}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{b+c}{2} \sin^2 \frac{A}{2}$$

De même l'équation  $-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$  s'écrira :

$$-\cos A = \cos (B+C) \cos^2 \frac{a}{2} + \cos (B-C) \sin^2 \frac{a}{2},$$

d'où :

$$(2) \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \cos^2 \frac{B+C}{2} \cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} \sin^2 \frac{a}{2},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{B+C}{2} \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{B-C}{2} \sin^2 \frac{a}{2}$$

Considérons maintenant les deux équations :

$$\sin a \cos B = -\sin b \cos c \cos A + \cos b \sin c$$

$$\sin a \cos C = -\sin c \cos b \cos A + \cos c \sin b$$

En en prenant la  $1/2$  somme et la  $1/2$  différence, on trouve :

$$(3) \quad \sin a \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} \sin (b+c)$$

$$\sin a \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{C+B}{2} = \sin (c-b) \cos^2 \frac{A}{2}$$

10.

Opérons de même sur les équations :

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b$$

$$\sin a \sin C = \sin A \sin c$$

Nous trouverons :

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin a \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} &= \sin A \sin \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2} \\ \sin a \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} &= \sin A \sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

Opérons encore de même sur les deux équations :

$$\sin A \cos b = \sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C$$

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B \cos a + \cos C \sin B$$

Nous trouverons :

$$(5) \quad \begin{aligned} \sin A \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2} &= \cos^2 \frac{a}{2} \sin (B+C) \\ \sin A \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b+c}{2} &= \sin^2 \frac{a}{2} \sin (C-B) \end{aligned}$$

### Analogies de Delambre.

Posons :

$$x_1 = \cos \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2} ; \quad y_1 = \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \cos \frac{b+c}{2} \sin \frac{A}{2} ; \quad y_2 = \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$x_3 = \sin \frac{b-c}{2} \cos \frac{A}{2} ; \quad y_3 = \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{a}{2}$$

$$x_4 = \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{A}{2} ; \quad y_4 = \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{a}{2}$$

Les équations (1) (2) (3) (4) (5) s'écrivent alors :

$$(1) \quad y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 ; \quad y_3^2 + y_4^2 = x_3^2 + x_4^2$$

$$(2) \quad x_2^2 + x_4^2 = y_2^2 + y_4^2 ; \quad x_1^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_3^2$$

- (3)  $2y_4 y_2 = 2x_4 x_2 ; \quad -2y_1 y_3 = -2x_1 x_3$
- (4)  $2y_1 y_4 = 2x_1 x_4 ; \quad 2y_2 y_3 = 2x_2 x_3$
- (5)  $2x_1 x_2 = 2y_1 y_2 ; \quad -2x_3 x_4 = -2y_3 y_4.$

La comparaison de ces équations donne :

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, x_4 = y_4.$$

Ce sont les analogies de Delambre.

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \qquad \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \qquad \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c}$$

Formules de Néper - Par division membre à membre des précédentes, on obtient :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} (A+B)}$$

relations contenant 5 éléments, utilisées pour la résolution des triangles sphériques.

### Résolution des Triangles.

Il y a six cas de résolution, deux à deux corrélatifs. Dans ces six cas les données sont :

- A, b, c                    ou                    a, B, C
- B, b, c                    ou                    b, B, C
- a, b, c                    ou                    A, B, C.

On passe d'un cas à son corrélatif en passant d'un triangle sphérique à son supplémentaire; il suffira donc de considérer un des cas de chaque paire.

1<sup>er</sup> cas. - (Données  $A, b, c$ ). - Les analogies de Delambre donnent :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} = \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}$$

$$\frac{y_3}{y_4} = \frac{x_3}{x_4} = \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}$$

ce qui donne  $B+C$  et  $B-C$ .

On a ensuite  $\alpha$  par l'une des analogies de Delambre, par exemple par :

$$\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{b-c}{2}.$$

Toutes ces formules sont calculables par logarithmes.

2<sup>e</sup> cas. - (Données  $a, b, c$ ). - On emploie une méthode tout à fait analogue à la méthode correspondante de la trigonométrie plane.

Nous poserons :

$$2p = a + b + c$$

de l'équation  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ , on

déduit :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

d'où :

$$2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{A}{2} = \sin b \sin c (1 + \cos A) = \cos a - \cos(b+c)$$

$$2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2} = \sin b \sin c (1 - \cos A) = \cos(b+c) - \cos a$$

d'où :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)} = \frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}$$

On a ainsi les angles par des formules calculables par logarithmes.

## Formules relatives aux triangles rectan- gles:

Les formules comprendront seulement cinq éléments; deux quelconques d'entre eux suffisant pour déterminer le triangle, les formules appropriées à la résolution devant contenir trois éléments: les deux donnés et celui inconnu.

Faisant  $A = \frac{\pi}{2}$  dans les trois formules générales, on obtient deux relations à trois éléments et une à quatre qui, mise à part, sera utilisée pour fournir de nouvelles combinaisons.

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c \\ \sin b = \sin a \sin B \\ \sin c = \sin a \sin C \end{cases} \quad \begin{array}{l} \sin a \cos B = \cos b \sin c \\ \text{et la permutation} \end{array}$$

Disant la formule réservée par la première il vient:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \end{cases} \quad \text{et la permutation}$$

Disant la première des deux analogies de sinus par la formule réservée, on a:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \sin b \end{cases} \quad \text{et par permutation}$$

Enfin les formules générales

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \end{aligned}$$

dans lesquelles on fait  $A = \frac{\pi}{2}$  donnent les deux derniers types,

$$\begin{cases} \cos a = \cotg B \cotg C \\ \cos B = \sin a \cos b \\ \cos C = \sin a \cos c \end{cases} \quad \text{et par permutation}$$

Astronomie générale.  
1<sup>re</sup> édition - 1906-1907.

4<sup>e</sup> feuille.

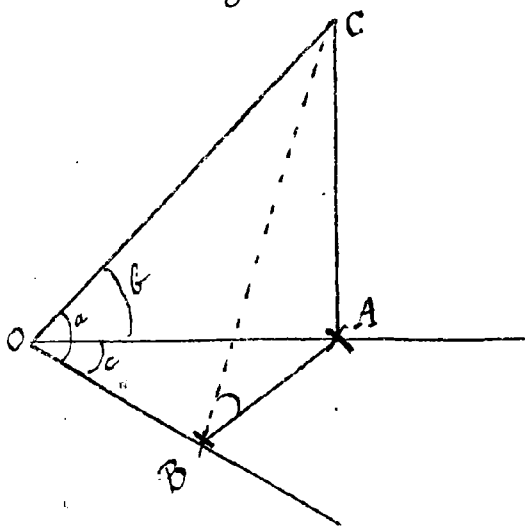
14.

En tout dix formules, le nombre des produits différents de cinq choses prises trois à trois :  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ .

Pour retrouver ces formules dans les cas fréquents d'application aux coordonnées astronomiques, il convient d'être en possession d'un moyen mnémorique, par exemple l'un des deux suivants qui sont de formes très-différentes.

Soit un trièdre rectangle suivant  $OA$  et les perpendiculaires abaissées d'un point de l'arête  $OC$  sur les deux autres.

La figure donne immédiatement



$$\frac{OB}{OC} = \cos \alpha = \frac{OA}{OC} \cos c = \cos b \cos c$$

$$\frac{CA}{OC} = \sin b = \frac{BC}{OC} \sin B = \sin \alpha \sin B$$

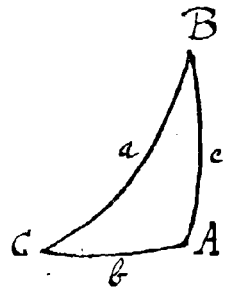
$$\frac{CA}{OA} = \operatorname{tg} b = \frac{BA}{OA} \operatorname{tg} B = \sin c \operatorname{tg} B$$

$$\frac{BA}{OB} = \operatorname{tgc} = \frac{BC}{OB} \cos B = \operatorname{tga} \cos B$$

Ces quatre relations et les permutations auxquelles se prêtent les trois dernières donnent les sept formules contenant un seul angle. Les trois formules contenant deux angles ne peuvent être obtenues ou retrouvées plus simplement qu'en partant de la formule générale contenant trois angles et un côté, comme il a été indiqué ci-dessus. Dans la pratique du procédé mnémorique dont il s'agit, l'usage des lettres est inutile; il suffit d'évoquer le souvenir de la figure et d'imaginer successivement que chacune des arêtes  $OC$ ,  $OA$ ,  $OB$ , ou seulement celle qui convient pour le type cherché, est prise pour unité.

Le second procédé consiste à remarquer que si on substitue aux deux côtés de l'angle droit leurs compléments: le cos d'un élément est égal au produit des cotés des éléments adjacents et au produit des sin des éléments non adjacents, et d'autre fait abstraction de l'angle droit.

Ainsi



$$\begin{aligned} \cos a &= \cotg B \cotg C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \cotg C \cotg\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \sin a \sin B \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) &= \cotg B \cotg\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin C \\ \cos B &= \cotg a \cotg\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \sin C \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \\ \cos C &= \cotg a \cotg\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin B \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \end{aligned}$$

### Formule de Lagrange.-

La formule  $\operatorname{tg} b = \cos C \operatorname{tg} a$  se prête à une transformation très importante qui fournit la différence  $a - b$ , de l'hypothénuse à l'un des côtés adjacents, ces angles étant expressément supposés exprimés en unité analytique, c'est-à-dire en parties du rayon.

$$b = a - \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \sin 2a + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{C}{2} \sin^4 a - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{C}{2} \sin^6 a + \text{etc.} \dots$$

Ce développement s'obtient, par exemple, en substituant aux tangentes  $\operatorname{tg} b$ ,  $\operatorname{tg} a$ , leurs expressions en exponentielles imaginaires empruntées aux formules d'Euler. La convergence évidente quand  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$  est inférieure à l'unité est d'autant plus grande que  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$  est une fraction plus petite, mais pour l'application il n'est pas nécessaire que l'angle  $C$  soit petit, ainsi notamment, la formule est utilement employée dans le cas où  $C$  représente l'obliquité de l'écliptique égale à  $23^\circ$  environ. Pour exprimer la différence des côtés en secondes sexagésimales il faut multiplier tous les termes du second membre qui suivent le premier par  $206265''$  ou diviser chacun d'eux par  $\sin 1''$ , à l'inverse

16

de ce qu'il faut faire dans le cas du développement en série :

$$\sin x'' = x'' \sin 1'' - \frac{(x'')^3}{1.2.3} \sin 1'' + \dots$$

l'angle  $x''$  étant exprimé en secondes sexagésimales.

Ce qui précède constitue l'ensemble, réduit au minimum, des formules indispensables pour l'étude de l'astronomie.

---

---



# Deuxième Leçon

## Notions sur les probabilités et les erreurs. —

Toute science physique est essentiellement une science d'observation ; or une expérience ne peut donner que des résultats d'une certitude relative ; de là découle que la notion de probabilité doit être à la base de toute science physique, et surtout de l'astronomie.

Définitions : La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles, à condition que tous les cas soient considérés comme également probables. La vérification de la réalisation de cette dernière condition est laissée au bon sens.

Par exemple, étant donné un jeu de 52 cartes, supposé bien battu, la probabilité de tirer un roi est de  $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ , parce qu'il n'y a aucune raison de tirer une carte plutôt qu'une autre.

La probabilité est toujours  $< 1$  ; si le nombre des cas favorables devient égal au nombre des cas possibles, la probabilité = 1 et devient la certitude.

Deux événements  $A$  et  $A'$  sont contradictoires quand un des deux se produira nécessairement et un seul des deux.

Soit  $\beta$ , le nombre total des cas possibles,  $\alpha$  le nombre des cas favorables à  $A$ .

La probabilité de  $A$  est  $p = \frac{\alpha}{\beta}$

la probabilité de  $A'$  est  $p' = \frac{\beta - \alpha}{\beta}$

On a  $p + p' = 1$ .

Soient deux événements  $A$  et  $A'$  contradictoires;  $B$  et  $B'$  deux autres également contradictoires; il en résulte pour ces quatre événements 4 combinaisons possibles  $AB, A'B', A'B$  et  $A'B'$ .

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les nombres des cas favorables respectivement à ces 4 combinaisons;

$\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$  nombre total des cas possibles.

La probabilité de  $A$  est  $\frac{\alpha + \beta}{\sigma}$  et celle de  $B$  est  $\frac{\alpha + \gamma}{\sigma}$ .

La probabilité pour que l'un des deux événements se produise est  $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\sigma}$ ; la probabilité pour que tous deux se produisent est  $\frac{\alpha}{\sigma}$ . La probabilité pour que  $A$  se produise en admettant que  $B$  se produise est  $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ , car excluant les 2<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> combinaisons, il n'y a plus que  $(\alpha + \gamma)$  cas possibles. Enfin la probabilité pour que  $A$  se produise, si  $B$  ne se produit pas, c'est-à-dire si  $B'$  se produit est  $\frac{\beta}{\beta + \delta}$ , car il n'y a plus alors que  $(\beta + \delta)$  cas possibles.

Cela posé, voici deux théorèmes sur les probabilités.

### I.- Théorème des probabilités totales.-

Il s'applique au cas où les deux événements sont exclusifs, c'est-à-dire quand ils ne peuvent pas se produire simultanément; alors  $\alpha = 0$ ; la probabilité pour qu'un des deux événements se produise est

$\frac{\beta + \gamma}{\sigma}$ ; la probabilité de  $A$  est  $\frac{\beta}{\sigma}$ , celle de  $B$  est  $\frac{\gamma}{\sigma}$ . On

en conclut que la probabilité pour qu'un des deux événements se produise est égale à la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple: La probabilité pour que la carte tirée dans un jeu de 52 cartes soit un roi ou une dame est  $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$ .

### II.- Théorème des probabilités composées.

Il est soumis aussi à une condition incompatible

d'ailleurs avec la précédente : c'est que les deux événements soient indépendants, ce qui se traduit par :  
 probabilité de A quand B se produit = probabilité de A quand B' se produit, c'est-à-dire par l'une des 3 relations équivalentes

$$\frac{\alpha}{\alpha+\gamma} = \frac{\beta}{\beta+\delta} \quad , \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \quad , \quad \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\sigma}$$

La probabilité pour que les deux événements se produisent est

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \cdot \frac{\alpha+\gamma}{\sigma} = \frac{\alpha+\beta}{\sigma} \cdot \frac{\alpha+\gamma}{\sigma} \quad \text{donc :}$$

Si les événements sont indépendants, la probabilité de leur ensemble est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Définitions - Espérance mathématique :  
Valeur probable d'une quantité :

Un joueur peut faire un gain positif ou négatif  $\alpha$  dont la probabilité est  $p$ .

Par définition, l'espérance mathématique du joueur est  $\alpha p \geq 0$ . Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont ses gains possibles, de probabilités respectives  $p_1, \dots, p_n$ , l'espérance mathématique totale du joueur est de  $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$ .

La valeur probable d'une quantité est l'espérance mathématique d'un joueur dont les gains pourraient prendre les mêmes valeurs que cette quantité avec les probabilités. Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont les valeurs possibles de cette quantité et  $p_1, \dots, p_n$  leurs probabilités respectives, sa valeur probable est  $\sum \alpha p$  - On a toujours  $\sum p = 1$ .

Remarques. - 1° Il ne faut pas confondre la valeur probable avec la valeur la plus probable. Si par exemple les  $\alpha$  sont 0, 2, 10, de probabilités  $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$ , la valeur probable est 3, la valeur la plus probable est 2.  
 2° La valeur probable du carré n'égale pas le carré de la valeur probable; par exemple: une quantité peut prendre les valeurs +1 et -1 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$

20.

pour chacune, la valeur probable est 0, la valeur probable du carré est 1.

Les deux théorèmes précédents peuvent s'appliquer aux variables et aux fonctions continues. Dans certains cas particuliers, la probabilité pour qu'une variable  $x$  soit comprise dans un intervalle donné pourra être proportionnelle à cet intervalle; alors, la loi, grâce pour  $x$ , ne le sera pas pour  $x^2$ . Soit par exemple  $0 < x < 1$

et  $\frac{1}{2}$  la probabilité pour que l'on ait  $0 < x < \frac{1}{2} < x < 1$ .

Pour  $x^2$ , les deux probabilités restent égales à  $\frac{1}{2}$ , pour que  $x^2$  reste dans l'un ou l'autre des deux intervalles  $(0, \frac{1}{4})$   $(\frac{1}{4}, 1)$  qui ne sont plus égaux.

Soit  $\varphi(x) dx$  la probabilité pour que  $x$  soit dans un intervalle  $(x, x + dx)$   $\varphi(x)$  étant une fonction, dépendant des conditions du problème. Étant donné un intervalle  $(x_0, x_1)$ , décomposé en un nombre infini d'intervalles partiels  $dx$ , la probabilité pour que  $x$  soit entre  $x_0$  et  $x_1$  sera, d'après le premier théorème, la somme des probabilités partielles, c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) dx$$

On voit que  $\varphi(x)$  sera assujéti à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Cherchons la valeur probable d'une fonction  $f(x)$  quelconque:  $x$  étant dans l'intervalle  $(x, x + dx)$  avec la probabilité  $\varphi(x) dx$ , l'espérance mathématique partielle sera  $f(x) \varphi(x) dx$ , et l'espérance mathématique totale, c'est-à-dire la valeur probable de  $f(x)$  sera

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

## Théorie des Erreurs.

Il faut distinguer entre les Erreurs systématiques et les Erreurs accidentelles.

Supposons par exemple que l'on veuille mesurer une longueur avec un mètre trop long ; on trouvera toujours un mètre trop petit, quel que soit le nombre des mesures effectuées. De telles erreurs qui se produisent toujours dans le même sens sont dites *systématiques*.

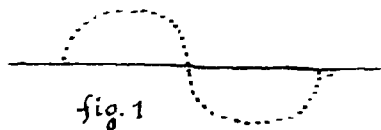
Si on effectue la même mesure avec un mètre exact il y aura encore une erreur dans la mesure, mais due cette fois à ce que les sens de l'observateur ne sont pas parfaits ; mais si le même observateur ou un autre recommencent la même mesure avec le même mètre, il n'y a aucune raison pour que l'erreur nouvelle soit de même sens que la précédente. De telles erreurs qui ne suivent aucune loi sont dites *accidentelles*. Si l'on multiplie les observations et qu'on prenne la moyenne des mesures, on pourra espérer réduire l'erreur accidentelle.

L'erreur systématique n'est pas nécessairement constante ; pour être systématique, il lui suffit d'être une fonction déterminée des conditions d'observation : température, temps, grandeur de l'étoile observée ; il peut arriver par exemple, que toutes les étoiles de première grandeur soient rejetées vers l'Est, et les autres vers l'Ouest ; que l'erreur reste positive pour des mesures faites l'hiver et négative pour des mesures faites l'été.

Pour qu'une erreur ait le caractère systématique, il n'est pas nécessaire qu'elle soit une constante absolue, même quand les circonstances de l'observation restent identiques ; il suffit que la courbe de probabilité ne soit pas symétrique, de telle sorte qu'une erreur positive par exemple soit plus probable qu'une erreur négative.

Si par exemple  $x$  désigne l'erreur, la probabilité pour qu'elle soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$  sera  $q(x) dx$ . La courbe  $y = q(x)$  est la courbe de probabilité ; elle est symétrique par rapport à  $x = 0$  pour les erreurs accidentelles ; il n'y a aucune symétrie si l'erreur est systématique, elle aura tendance à être soit positive soit négative.

À chaque expérience faisons correspondre un point dont l'ordonnée représentera l'erreur et l'abscisse une condition quelconque de l'expérience.



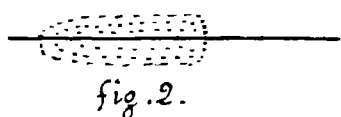


fig. 2.

Pour des erreurs systématiques, les points figuratifs seront distribués suivant une courbe (fig. 1); pour les erreurs accidentelles, au contraire, ils rempliront une aire. (fig. 2) -

## Correction des Erreurs systématiques.

1<sup>o</sup> On peut faire des observations différentielles, c'est-à-dire observer la différence de deux quantités peu différentes: Comme pour chacune d'elles, les mêmes causes donnent sensiblement la même erreur systématique, celle-ci disparaît à peu près dans la différence. En astronomie, par exemple, on déterminera avec autant de précision que possible certains points de repère dans le Ciel et on n'aura plus ensuite qu'à mesurer les différences entre les coordonnées d'un point quelconque, et celles des points de repère.

2<sup>o</sup> On peut procéder par observations croisées: la moitié des observations est faite dans certaines conditions de mesure, l'autre moitié dans les conditions inverses et l'on prendra la moyenne.

Souvent, le seul moyen de corriger l'erreur systématique sera d'étudier les causes d'erreur et de voir pour chacune les corrections correspondantes. Il s'en suivra des expériences longues et par suite peu nombreuses; c'est-à-dire que les erreurs accidentelles ne seront pas éliminées, car le moyen le plus sûr de les éliminer est de multiplier les observations. Donc, suivant les cas, on fera des observations rigoureuses et peu nombreuses: c'est le cas du physicien qui est surtout exposé aux erreurs systématiques; ou bien l'on fera beaucoup d'expériences, sans rechercher une extrême précision; c'est ce que fera l'astronome pour qui la cause d'erreur la plus importante, et essentiellement accidentelle, réside dans les ondulations atmosphériques.

## Erreurs accidentelles. - Loi de Gauss.

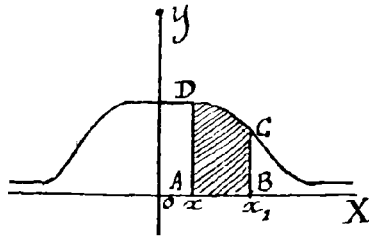
On admet que dans toutes les observations, elles obéissent

à la loi de Gauss : la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est

$$Ke^{-hx^2} dx,$$

$h$  et  $K$  désignant 2 constantes.

D'où la courbe d'erreur  $y = Ke^{-hx^2}$  asymptote à  $Ox$  et symétrique par rapport à  $Oy$  (chapeau de gendarme). La probabilité pour que l'erreur soit entre  $x_0$  et  $x_1$  est



$$\int_{x_0}^{x_1} Ke^{-hx^2} dx = \text{aire}$$

curviligne ABCD. L'aire totale

est égale à 1 d'où la relation entre  $h$  et  $K$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-hx^2} dx = K\sqrt{\frac{\pi}{h}} = 1 \text{ ou } K = \sqrt{\frac{h}{\pi}}.$$

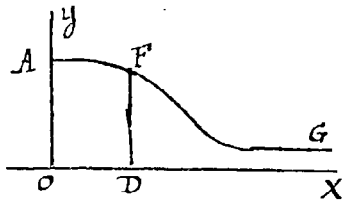
On a donc  $y = \sqrt{\frac{h}{\pi}} e^{-hx^2}$ . Posons  $x\sqrt{h} = x'$  et

$$y\sqrt{h} = y', \text{ on a } y' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-x'^2}$$

C'est une courbe d'erreur. Ces courbes se déduisent donc les unes des autres par transformation homographique.

$h$  est d'autant plus grand que l'erreur est plus petite; ce coefficient mesure le poids ou la précision de l'expérience.

**Définitions.** - A cause de la symétrie, l'aire  $AOC = \frac{1}{2}$ .



Choisissons une ordonnée  $DF(x_0)$  telle que l'on ait  $\text{aire } AODF = \text{aire } FDC = \frac{1}{4}$ . Par définition l'abscisse  $x_0$  représente l'Erreur probable, c'est-à-dire que si on représente par  $|E|$  la valeur absolue de l'erreur, la probabilité

pour qu'on ait  $|E| > x_0$  est égale à la probabilité pour qu'on

24.

ait  $|E| < x_0$ .

Des tables fournissent  $\int_0^{x_0} e^{-x^2} dx$ , et l'on trouve ainsi pour l'erreur probable  $x_0 = \frac{0,47}{\sqrt{h}}$ .

La valeur probable de l'erreur est nulle puisque la courbe est symétrique; mais la valeur probable du module de l'erreur est

$$2 \int_0^{\infty} k x e^{-hx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

C'est par définition l'erreur moyenne.

Enfin l'Erreur moyenne quadratique, c'est la racine carrée de la valeur probable du carré de l'erreur (laquelle n'est pas égale à la valeur probable de l'erreur).

$$(E \text{ moy. quadrat.})^2 = 2 \int_0^{\infty} k x^2 e^{-hx^2} dx = \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{\pi}{h^3}} = \frac{1}{2h}$$

(pour intégrer il suffit de différencier par rapport à  $h$  sous le signe  $\int$  l'expression  $\int_0^{\infty} e^{-hx^2} dx$ ). On voit que la valeur probable du carré de l'erreur est plus grande que le carré de la valeur probable de l'erreur.

$\frac{1}{\sqrt{h}}$  Remarque: Ces trois erreurs sont proportionnelles à

Sur l'application de la loi de Gauss.

La loi de Gauss est généralement admise soit comme un théorème, soit comme un fait d'expérience. En réalité elle n'a pas été démontrée rigoureusement et l'expérience ne la vérifie pas toujours. La loi de Gauss sera applicable chaque fois que l'erreur totale sera la résultante d'erreurs partielles, accidentelles, très nombreuses, très petites et indépendantes.

Les probabilités doivent être indépendantes et pour chacune de ces erreurs partielles, la loi de probabilité peut



être quelconque pourvu qu'elle soit symétrique.

Pour démontrer cette proposition, nous nous appuyerons sur un théorème dû à M<sup>r</sup> d'Ocagne et qui s'énonce ainsi:

Si deux erreurs accidentelles  $x$  et  $y$  supposées indépendantes et obéissant à la loi de Gauss s'ajoutent, l'erreur résultante  $E = x + y$  suivra la même loi.

En effet la probabilité pour que l'erreur  $x$  soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est par hypothèse

$$k e^{-hx^2} dx \text{ où } k = \sqrt{\frac{h}{\pi}}. \text{ De même } k' e^{-h'y^2} dy \text{ où}$$

$k' = \sqrt{\frac{h'}{\pi}}$  est la probabilité pour que la seconde erreur soit comprise entre  $y$  et  $y + dy$  ( $h'$  est en général différent de  $h$ ). Le théorème des probabilités composées est applicable et donne  $kk' e^{-P} dx dy$  comme probabilité pour que  $x$  soit entre  $x$  et  $x + dx$  en même temps que  $y$  entre  $y$  et  $y + dy$ , en posant  $P = hx^2 + h'y^2$ .

Cherchons la probabilité  $\alpha$  pour que les deux erreurs  $x$  et  $y$  satisfassent à des inégalités à termes finis, c'est à dire géométriquement, pour que le point  $(x, y)$  soit intérieur à un contour donné quelconque.

Le problème des probabilités totales donne

$$\alpha = \iint kk' e^{-P} dx dy$$

l'intégrale double étant étendue à tout le contour.

$z$  et  $t$  désignant deux variables indépendantes, posons

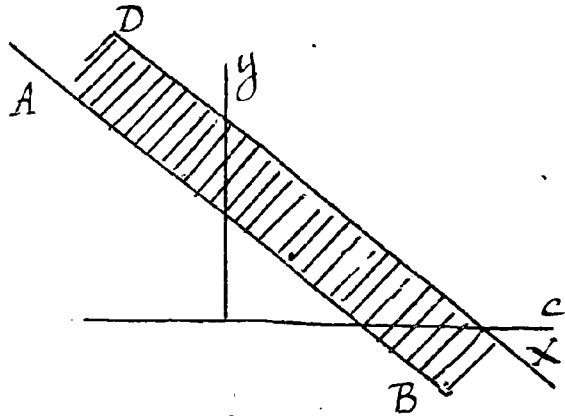
$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{h'z + t}{h + h'} \\ y = \frac{hz - t}{h + h'} \end{cases}$$

Il vient :

$\alpha \iint \frac{kk'}{h+h'} e^{-P} dz dt$ , en effectuant sur l'intégrale le changement de variables défini par les

26.

équations (1) dont le Jacobien est  $\frac{1}{h+h'}$ ; P a la nouvelle valeur  $P = \frac{kk'}{h+h'} z^2 + \frac{t^2}{h+h'}$ .



Si nous voulons par exemple, que l'erreur résultante  $x+y=z$  soit comprise entre  $z_0$  et  $z_1$ , il faut étendre l'intégrale au contour ABCD limitée par les deux parallèles  $x+y=z_0$  et  $x+y=z_1$ ,

$$\alpha = \int_{z_0}^{z_1} \frac{kk'}{h+h'} e^{-h''z^2} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{h+h'}} dt,$$

où  $h'' = \frac{kk'}{h+h'}$ .

Posons  $\frac{kk'}{h+h'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{h+h'}} dt = k''$  une constante

$$\alpha = k'' \int_{z_0}^{z_1} e^{-h''z^2} dz$$

$$\text{Or } k'' = \frac{kk'}{h+h'} \sqrt{\pi(h+h')}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kk'}{h+h'}} = \sqrt{\frac{k''}{\pi}}$$

$$\text{donc } \alpha = \sqrt{\frac{k''}{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-h''z^2} dz.$$

On reconnaît la loi de Gauss, qui s'applique donc à la résultante si elle s'applique à chaque erreur composante. La condition que  $\alpha=1$  pour  $z_0 = -\infty$  et  $z_1 = \infty$  donne encore

$$k'' = \frac{k''}{\pi}$$

Ce lemme étant démontré, considérons un grand nombre d'erreurs accidentelles, très petites et indépendantes.

Pour l'une d'elles, la probabilité est  $e^{-P} dx$ , ou P est une fonction de x paire, la loi de probabilité étant symétrique.

$$P = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \dots$$

De plus l'erreur reste petite ; on peut donc prendre  $P = \alpha_0 + \alpha_2 x^2$  et la probabilité  $\int e^{-\alpha_2 x^2} dx$ .  $e^{-\alpha_0}$  joue le rôle de  $k$  et  $\alpha_2$  celui de  $h$ . Donc, pour de telles erreurs qui resteront petites, et par suite pour leur somme, la loi de Gauss peut être considérée comme vraie.

Conséquence :  $h'' = \frac{hh'}{h+h'}$ , ou  $\frac{1}{h''} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$ .

L'inverse de la précision résultante est la somme des inverses des précisions composantes.

ou encore :

le carré de l'erreur probable résultante est la somme des carrés des erreurs probables composantes.

On a deux énoncés analogues pour l'erreur moyenne résultante et l'erreur moyenne quadratique résultante.

Appliquons à la théorie des moyennes : faisons  $n$  observations successives, l'erreur probable pour chacune d'elles =  $\frac{0,47}{\sqrt{h}}$ .

Le carré de l'erreur probable sur la somme de ces  $n$  mesures sera  $\frac{n(0,47)^2}{h}$ . L'erreur probable sur la somme sera donc  $0,47 \sqrt{\frac{n}{h}}$ , et sur la moyenne  $\frac{0,47}{\sqrt{nh}}$ .

Donc :

L'erreur probable sur la moyenne de  $n$  observations est égale à l'erreur probable sur chacune d'elles multipliée par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Même énoncé pour les deux autres erreurs.

Par application même de la loi de Gauss, qui ne s'applique pas aux erreurs systématiques, une moyenne d'observations n'élimine donc que les erreurs accidentelles, tandis que, quel que soit le nombre des expériences, les erreurs systématiques ne diminuent pas.

## Supplément à la théorie des erreurs.

### Fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Nous allons compléter ce qui a été dit sur la théorie des erreurs par l'introduction d'une notion nouvelle, celle de fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Considérons une variable, et soit  $p$  la probabilité pour qu'elle prenne une valeur  $x$ . La fonction caractéristique est par définition

$$f(\alpha) = \sum p e^{i\alpha x}$$

Dans le cas de deux variables,  $P$  étant la probabilité pour que ces variables prennent respectivement les valeurs  $x$  et  $y$ , on appelle fonction caractéristique la fonction de deux variables auxiliaires

$$F(\alpha, \beta) = \sum e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

Si les deux variables sont indépendantes,  $p$  étant la probabilité que la première prenne une valeur  $x$ ,  $q$  la probabilité que la seconde prenne une valeur  $y$ , on a, d'après le théorème des probabilités composées

$$P = pq$$

et l'on en déduit que  $F(\alpha, \beta)$  est le produit des deux fonctions caractéristiques

$$f(\alpha) = \sum p e^{i\alpha x}$$

$$\text{et } f_2(\beta) = \sum q e^{i\beta y}$$

relatives à chacune des variables.

Si nous faisons  $\beta = \alpha$ , nous voyons que

$$F(\alpha, \alpha) = \sum P e^{i\alpha(x+y)} = f(\alpha) f_1(\alpha)$$

et le premier membre, qui représente évidemment la fonction caractéristique relative à la somme  $x + y$ , peut être calculé par cette formule, quand  $x$  et  $y$  sont indépendants.

Si les variables sont susceptibles de varier d'une manière continue, appelons  $\varphi(x) dx$  la probabilité pour que  $x$  soit compris entre  $x$  et  $x + dx$ , ou, dans le cas de deux variables,  $\varphi(x, y) dx dy$  la probabilité pour que  $x$  et  $y$  soient simultanément compris entre  $x$  et  $x + dx$ ,  $y$  et  $y + dy$ . Les fonctions caractéristiques sont alors

$$f(\alpha) = \int \varphi(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$F(\alpha, \beta) = \iint \Phi(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

et les théorèmes que nous venons de démontrer, relativement au cas où les variables sont indépendantes, s'appliquent encore.

On obtient aisément le développement de ces fonctions en série de Taylor en remplaçant l'exponentielle par son développement. Dans le cas d'une seule variable, il vient, en désignant par  $v_p(\dots)$  la valeur probable de la quantité entre  $(\dots)$ ,

$$f(\alpha) = 1 + \frac{i\alpha}{1} v_p(x) - \frac{\alpha^2}{1.2} v_p(x^2) - \frac{i\alpha^3}{1.2.3} v_p(x^3) + \dots$$

Si  $\varphi(x)$  est une fonction paire, les valeurs probables des puissances impaires de  $x$  sont nulles, et il s'ensuit que  $f(\alpha)$  est également une fonction paire.

### Application à la loi de Gauss.

Cherchons quelle est la fonction caractéristique, dans le cas où la loi de Gauss s'applique.

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> Division. 1906.1907)

8<sup>e</sup> feuille

Il vient dans ce cas

$$f(\alpha) = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2 + i\alpha x} dx = k e^{-\frac{\alpha^2}{4h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(x - \frac{i\alpha}{2h})^2} dx$$

L'intégrale qui figure au dernier membre ne dépend pas de  $\alpha$ , comme on le voit en posant  $x - \frac{i\alpha}{2h} = x'$ , et comme  $f(0) = 1$ , il vient

$$f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{4h}}$$

Considérons maintenant deux erreurs indépendantes pour lesquelles on a respectivement

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= k e^{-hx^2} & f(\alpha) &= e^{-\frac{\alpha^2}{4h}} = e^{-\lambda \alpha^2} \\ \varphi_1(x) &= k_1 e^{-h_1 x^2} & f_1(\alpha) &= e^{-\frac{\alpha^2}{4h_1}} = e^{-\lambda_1 \alpha^2} \end{aligned}$$

pour l'erreur résultante, la fonction caractéristique sera, d'après le théorème établi au début sur la fonction relative à la somme de deux variables

$$f_2(\alpha) = f(\alpha) f_1(\alpha) = e^{-\lambda_2 \alpha^2} = e^{-\frac{\alpha^2}{4h_2}}$$

et cette fonction provient d'une loi de probabilité'

$$\varphi_2(x) = k_2 e^{-h_2 x^2}$$

$h_2$  et  $\lambda_2$  étant définis par les formules

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda_1$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}$$

Ce résultat a déjà été obtenu autrement dans le cours, et on en a déduit que l'erreur probable sur la moyenne de  $n$  observations est égal au quotient par  $\sqrt{n}$  de la valeur probable sur chacune d'elles.

## Justification de la loi de Gauss.

La considération des fonctions caractéristiques permet de démontrer très simplement que la loi de Gauss, s'applique toutes les fois que l'erreur peut être considérée comme la résultante d'erreurs accidentelles indépendantes, très petites et très nombreuses. Pour chacune de ces erreurs, qui sont accidentelles et par suite réparties symétriquement,  $\varphi(x)$  et par conséquent  $f(x)$  sont des fonctions paires. Je puis écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \lambda x^2 + \dots \\ &= e^{-\lambda x^2} + \dots \end{aligned}$$

$\lambda$  étant infiniment petit comme le carré de l'erreur, je puis négliger les termes d'ordre supérieur et prendre  $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ . Pour l'erreur résultante, la fonction caractéristique est égale au produit de ces différentes fonctions, c'est-à-dire

$$e^{-x^2 \sum \lambda}$$

formule qui est la traduction de la loi de Gauss.

### Extension au cas de plusieurs variables.

Quand la loi de Gauss s'applique

$$\varphi(x, y) = k e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} = k e^{-F}$$

on a pour la fonction caractéristique

$$f(\alpha, \beta) = k \iint e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2 - i\alpha x - i\beta y)} dx dy$$

le polynôme entre parenthèse est le premier membre de l'équation d'une conique de centre  $x_0, y_0$ .

Posons

$$x = x_0 + x_1$$

$$y = y_0 + y_1$$

$x_0$  et  $y_0$  étant définis par les équations

$$ax_0 + by_0 = \frac{i\alpha}{2}$$

$$bx_0 + cy_0 = \frac{i\beta}{2}$$

Le polynôme en question prend la forme  $P_1 + P_2$ ,  $P_1$  étant une fonction quadratique en  $x_1$  et  $y_1$ , et  $P_2$  une fonction quadratique en  $\alpha$  et  $\beta$ . Il vient donc

$$f(\alpha, \beta) = k e^{-P_2} \iint e^{-P_1} dx_1 dy_1$$

Le coefficient de  $e^{-P_2}$  ne contient pas  $\alpha$  ni  $\beta$ , et est évidemment égal à 1 pour  $\alpha = \beta = 0$ . Donc

$$f(\alpha, \beta) = e^{-P_2}$$

Cela posé, nous pouvons donner de la loi de Gauss la même justification que dans le cas d'une variable, s'appuyant sur ce fait que la fonction caractéristique, dans le cas d'erreurs accidentelles très petites, est de la même forme que ci-dessus. Les erreurs, étant accidentelles, sont symétriques, et par suite  $f$  est une fonction paire, et l'on peut écrire

$$f(\alpha, \beta) = e^{-\lambda \alpha^2 + 2\mu \alpha \beta + \nu \beta^2} + \dots$$

les termes négligés étant des infiniment petits d'un ordre supérieur à celui de l'une au moins des quantités  $\lambda, \mu, \nu$ .

Remarque. Citons une démonstration fautive qui a été souvent donnée de la loi de Gauss, et qui s'appuie sur le fait suivant.

Supposons que l'on se propose d'atteindre un point d'un plan, et que l'on considère comme indépendantes les erreurs suivant deux axes rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$ . La probabilité pour que l'on atteigne un point d'une certaine région du plan est donnée par la valeur dans cette région de l'intégrale double

$$\iint \varphi(x) \varphi_1(y) dx dy$$

ou en coordonnées polaires

$$\iint \varphi(\rho \cos \omega) \varphi_1(\rho \sin \omega) \rho d\rho d\omega$$



et l'on voit facilement <sup>(1)</sup> que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi(\rho \cos \omega) \varphi_1(\rho \sin \omega)$  ne dépende pas de  $\omega$ , est que l'on ait simultanément

$$\varphi(x) = k e^{-hx^2} \quad \varphi(y) = k_1 e^{-h_1 y^2}$$

Mais ce fait ne peut pas servir à justifier l'emploi de la loi de Gauss. On peut le citer comme une propriété intéressante de la loi de probabilité définie par Gauss; mais rien ne prouve a priori que la loi de probabilité caractérisée par cette propriété, soit celle à laquelle obéissent dans la réalité les erreurs d'observation.

### Applications de la loi de Gauss.

Cette loi permet de prévoir les erreurs systématiques dans les observations. Si, en effet, la courbe représentant les erreurs s'écarte trop de celle qui est définie par la loi de Gauss, (dite courbe en cloche), il est à penser qu'il existe une cause d'erreur systématique.

La courbe en cloche représente les résultats d'un grand nombre de statistiques. Ainsi, en anthropométrie, la courbe obtenue en portant en ordonnée le nombre d'individus observés ayant une taille déterminée, la taille étant portée en abscisse, a généralement la forme de la courbe en cloche. Il arrive aussi que cette courbe présente deux ou trois maxima, au lieu d'un, et cela provient de ce que la race considérée résulte du mélange de plusieurs races.

(1) Cela revient à dire que  $\Psi(x) + \Psi_1(y)$  est fonction de  $x^2 + y^2$ ,  $\Psi$  et  $\Psi_1$  désignant les logarithmes de  $\varphi$  et de  $\varphi_1$ . En annulant le jacobien de ces deux fonctions, il vient

$$\frac{\Psi'(x)}{x} = \frac{\Psi_1'(y)}{y}$$

Ces rapports égaux ne sont donc fonctions ni de  $x$  ni de  $y$ , et sont égaux à une constante arbitraire  $-2h$ . En remontant des fonctions  $\Psi'$  à leurs primitives, puis aux fonctions  $\varphi$ , il vient

$$\varphi(x) = k e^{-hx^2} \quad \varphi_1(y) = k_1 e^{-h_1 y^2}$$

et il faut de plus que  $k = k_1 = \sqrt{\frac{h}{h_1}}$  comme cela résulte des conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = 1$$

Astronomie générale  
(1<sup>re</sup> Division - 1906-1907)

9<sup>e</sup> feuille

## Troisième Leçon.

Dans ce qui précède on s'est donné la valeur vraie, de la quantité à mesurer et l'on a cherché la probabilité pour que l'erreur commise dans la mesure soit comprise entre des limites données, c'est-à-dire, pour qu'on obtienne tel résultat déterminé. Dans la pratique le problème est inverse, et l'on remonte de l'effet (résultat observé) à la cause (valeur vraie); on cherche la probabilité pour que la valeur vraie de la quantité à mesurer soit entre telles limites.

La théorie de la probabilité des causes repose sur le théorème de Bayes, qu'un exemple va faire comprendre:

Soient 100 urnes identiques réparties en  $n$  classes, contenant respectivement  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  urnes; les  $\alpha$  sont des nombres connus vérifiant l'égalité  $\sum \alpha = 100$ . Chaque urne renferme 100 boules, et toutes les urnes d'une même classe de rang  $i$  contiennent un même nombre  $\beta_i$  de boules blanches. On tire une boule dans l'une des urnes; c'est une blanche. Cela posé, distinguons entre 3 sortes de probabilités.

1<sup>o</sup> La probabilité a priori de la cause est la probabilité ayant le tirage, pour que la boule soit tirée dans une urne appartenant à une classe déterminée. Soient  $p_1, \dots, p_n$  ces probabilités pour les  $n$  classes.

2<sup>o</sup> La probabilité de l'effet est la probabilité que l'on a de tirer une boule blanche dans une urne appartenant à une classe déterminée. Soient  $q_1, \dots, q_n$  ces probabilités.

3<sup>o</sup> La probabilité a posteriori de la cause est la probabilité pour que l'urne dans laquelle on a tiré une boule blanche appartienne à une

classe déterminée. Soient  $r_1, \dots, r_n$  ces probabilités.  
 $p_i =$  probabilité ayant tout tirage, pour tirer dans une urne de la classe de rang  $i$ .

Donc

$$p_i = \frac{\alpha_i}{100}$$

$q_i =$  probabilité pour tirer une boule blanche dans une urne qu'on sait appartenir à la classe de rang  $i$ .

Donc

$$q_i = \frac{\beta_i}{100}$$

Enfin  $r_i =$  probabilité pour que, ayant tiré une boule blanche, l'urne où l'on a tiré appartienne à la classe de rang  $i$ .

Donc

$$r_i = \frac{\alpha_i \beta_i}{\sum \alpha \beta}, \text{ car } \alpha_i \beta_i \text{ représente le}$$

nombre des cas favorables (nombre des boules blanches dans les urnes de la classe  $i$ ), et  $\sum \alpha \beta$  représente le nombre des cas possibles (nombre total des boules blanches).

On a  $r_i = K p_i q_i$ ,  $K$  désignant une constante indépendante de l'indice  $i$ .

D'où l'énoncé du théorème de Bayes :

Les probabilités a postériori des causes sont entre elles comme les produits des probabilités a priori des mêmes causes pour les probabilités des effets.

$$r = K p q$$

Appliquons aux erreurs : Supposons faites  $n$  mesures d'une quantité  $q$ , qui ont donné les résultats  $z_1, \dots, z_n$ . Cherchons la probabilité pour que la vraie valeur de  $q$  soit comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Évaluons la probabilité a priori ( $p$ ), la probabilité de l'effet ( $q$ ) nous en déduirons la probabilité a postériori.

1<sup>o</sup> Nous pouvons supposer l'axe des  $x$  partagé en un nombre infini d'intervalles infiniment

petits  $dx$ ; les différentes hypothèses possibles sont que  $x$  soit dans un de ces intervalles qui correspondent aux différentes classes d'urnes.

La probabilité  $p$  sera de la forme  $p = F(x)dx$ ,  $F(x)$  étant une fonction inconnue; il nous suffira de la supposer continue, de sorte que si les observations sont concordantes, et si par suite  $x$  ne peut varier que dans un intervalle restreint, cette fonction pourra être considérée comme constante dans cet intervalle.

2°. Pour calculer la probabilité de l'effet, remarquons que cet effet est que les résultats donnés par les  $n$  mesures soient respectivement compris entre  $Z_1$  et  $Z_1 + dz$  .....  $Z_n$  et  $Z_n + dz_n$ . La quantité  $q$  ayant pour mesure vraie  $x$ , les erreurs sur ces  $n$  observations devront donc être comprises entre  $(Z_1 - x)$  et  $(Z_1 - x + dz_1)$ , .....  $(Z_n - x)$  et  $(Z_n - x + dz_n)$ .

Et si  $h_1$  .....  $h_n$  désignent les poids (en général différents) de ces  $n$  observations, les probabilités pour que, dans chacune d'elles, l'erreur soit comprise dans les limites données, seront:

$$\begin{array}{l} K_1 e^{-h_1 (Z_1 - x)^2} dz_1 \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ K_n e^{-h_n (Z_n - x)^2} dz_n \end{array} \Bigg|$$

La probabilité  $q$  pour que tous ces effets se produisent simultanément, est donnée par le théorème des probabilités composées, car ces effets sont indépendants:

$$q = K_1 \dots K_n e^{-P} dz_1 \dots dz_n$$

en posant  $P = \sum h_i (Z_i - x)^2$ .

Cela suppose que la vraie valeur de  $q$  soit  $x$ , mais cela restera vrai à des infiniment petits près si cette vraie valeur reste comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

La probabilité (a posteriori, c'est-à-dire connaissant les résultats des observations) pour que cette dernière condition soit remplie est donc, en vertu du théorème de Bayes

$$r = K k_1 \dots k_n e^{-P} F(x) dZ_n dx$$

Les  $dZ$  sont des constantes indépendantes de  $x$  et de  $dx$ ; de même  $F(x) = \text{constante}$  par hypothèse.

D'où 
$$r = C e^{-P} dx$$

Cherchons la valeur probable de  $x$ .

$P$  est une fonction de  $x$ , minimum pour  $x = X$ .

Posons  $x = X + \xi$ , on a  $P = \sum h_i (\xi_i - \xi - X)^2$ , polynôme du second degré, car  $P$  est minimum pour  $\xi = 0$ .

D'où la condition

$$\sum h_i (\xi_i - X) = 0 \quad (1)$$

$P$  est un polynôme pair en  $\xi$ . La valeur probable de  $\xi$  est  $\int_{-\infty}^{\infty} \xi r dx = C \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-P} d\xi$ . Le changement de  $\xi$  en  $-\xi$  montre que cette intégrale est nulle, car

$P$  ne change pas. La valeur probable de  $x$  est donc celle  $X$  qui rend  $P$  minimum, et qui est donnée par la relation

$$(1) \quad X = \frac{\sum h_i \xi_i}{\sum h_i}$$

On justifie ainsi la règle de la moyenne en considérant le cas où toutes les observations ont même poids,

$$X = \frac{\sum \xi_i}{n}$$

Les considérations précédentes servent surtout pour le problème plus général où le nombre des

38.

inconnues est  $m$ , et où l'on demande la probabilité pour que la valeur réelle de chacune d'elles soit comprise dans les limites  $(x_1, x_1 + dx_1) \dots \dots (x_m + dx_m)$ .

D'autre part, on observe non pas ces quantités, mais certaines fonctions de ces quantités :

$$\begin{array}{l} f_1(x_1 \dots \dots x_m) = y_1 \\ f_n(x_1 \dots \dots x_m) = y_n \end{array} \quad \Bigg|$$

$y_1 \dots \dots y_n$  désignant les véritables valeurs de ces fonctions fournies par les observations, dont le nombre doit être supérieur au nombre des inconnues  $n > m$ .

La mesure de  $y_i$  est erronée et donne  $Z_i$  compris entre  $Z_i$  et  $Z_i + dZ_i$ .

1<sup>o</sup> La probabilité a priori pour que, ayant toute observation, les quantités à mesurer soient entre  $(x_1$  et  $x_1 + dx_1) \dots \dots$  sera représentée par  $F(x_1, \dots \dots x_m) dx_1 \dots \dots dx_m$ ,  $F$  étant une fonction qu'on sait seulement être continue et qu'on pourra par conséquent supposer constante, tant que les  $x$  varieront dans des limites restreintes, c'est-à-dire tant que les expériences seront suffisamment concordantes.

2<sup>o</sup> La probabilité pour que la première observation donne un résultat compris entre  $Z_1$  et  $Z_1 + dZ_1$ , est

$k_1 e^{-h_1(Z_1 - y_1)^2} dZ_1$ ,  $h_1$  désignant le poids de cette expérience, car l'erreur sera comprise entre  $Z_1 - y_1$  et  $Z_1 - y_1 + dZ_1$ . En vertu du théorème des probabilités composées, la probabilité de l'effet sera donc  $q = k_1 \dots \dots k_n e^{-P} dZ_1 \dots \dots dZ_n$  où  $P = \sum h_i (Z_i - y_i)^2$ .

3<sup>o</sup> La probabilité, les observations étant faites (probabilité a posteriori) pour que les mesures soient dans les limites données  $(x, x + dx)$  sera, en vertu du théorème de Bayes

$$r = k_1 \dots \dots k_n KF(x_1 \dots \dots x_m) e^{-P} dZ_1 \dots \dots dZ_n dx_1 \dots \dots dx_n$$

$r = Ce^{-P} dx_1 \dots \dots dx_m$ ,  $C$  désignant une constante, en vertu des hypothèses faites.

## Méthode des moindres carrés.-

$y_i$  étant la véritable valeur de  $f_i$  et  $z_i$  la valeur donnée par l'expérience,  $P$  est la somme des carrés des erreurs multipliés chacun par le poids de l'observation correspondante.

Supposons cette fonction des  $x$  minimum pour  $x_i = X_i$ , et posons  $x_i = X_i + \xi_i$ .

$P$  devient une fonction des  $\xi_i$ , qu'on peut développer suivant les puissances croissantes, en s'arrêtant aux termes du second degré. Sous les termes du premier degré sont nuls car  $P$  est minimum pour

$$\xi_i = 0 \quad \frac{\delta P}{\delta \xi_k} = 0 \quad \text{pour } \xi_i = 0, \text{ l'indice } k \text{ variant}$$

de 1 à  $m$ .

Donc  $P$  est une fonction paire des  $\xi_i$ . La valeur probable de  $\xi_1$  est

$$\int_{-\infty}^{\infty} C \xi_1 e^{-P} d\xi_1 \dots d\xi_m \quad \text{car } d\xi_i = dx_i.$$

Cette intégrale est étendue à toutes les valeurs possibles de  $\xi_i$ . Cette intégrale est nulle car 2 de ses éléments correspondant à des valeurs = et de signe contraire des  $\xi_i$  sont égaux et de signe contraire,  $P$  étant pair.

Donc les valeurs probables sont  $x_1 = X_1, \dots, x_n = X_n$ .

Les valeurs probables des inconnues sont celles qui rendent minimum la somme des produits des carrés des erreurs par le poids correspondant.

D'où le nom de méthode des moindres carrés.

### Application pratique de la méthode des moindres carrés.-

On a à rendre minimum l'expression

$$P = \sum h_i (z_i - f_i)^2$$

où  $f_i$  est une fonction des inconnues  $x$ . Les observations

40.

sont en général concordantes, condition pour que la méthode des moindres carrés ne soit pas illusoire. On a donc pour les inconnues des valeurs provisoires  $x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0$ .

Posons  $x_i = x_i^0 + \varepsilon_i$  étant petit en général.  $P$  est une fonction des  $\varepsilon$  qui est minimum pour des valeurs convenables de ces  $\varepsilon$ . Ces valeurs sont données par les conditions

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} = 0 \dots \dots \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_m} = 0 \quad (1)$$

Des observations exactes auraient donné les  $n$  équations à  $m$  inconnues

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = Z \\ \dots \\ f_n(x_1 \dots x_m) = Z_n \end{cases}$$

équations qui seraient surabondantes, mais compatibles, et qui deviennent incompatibles si les observations sont erronées. Elles seront alors remplacées par les  $m$  équations (1) à  $m$  inconnues.

Les  $\varepsilon$  étant très petits, on peut écrire

$$y_i = f_i(x_1^0 + \varepsilon_1, \dots, x_m^0 + \varepsilon_m) = y_i^0 + \sum A_{ik} \varepsilon_k \text{ avec } A_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

où l'on a remplacé les  $x$  par les valeurs provisoires. On a donc les  $n$  équations linéaires

$$y_i^0 + \sum A_{ik} \varepsilon_k = Z_i \quad (2)$$

$$P = \sum h_i (Z_i - y_i^0 - \sum A_{ik} \varepsilon_k)^2$$

$$\text{d'où les } m \text{ équations } 0 = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_k} = \sum A_{ik} h_i (Z_i - y_i^0 - \sum A_{ik} \varepsilon_k) \quad (3)$$

$k$  prenant les valeurs  $1, 2, \dots, m$  et  $i$  les valeurs  $1, 2, \dots, n$ .

Pour obtenir ces équations (3) en partant des équations (2) déduites des observations : multiplions chacune



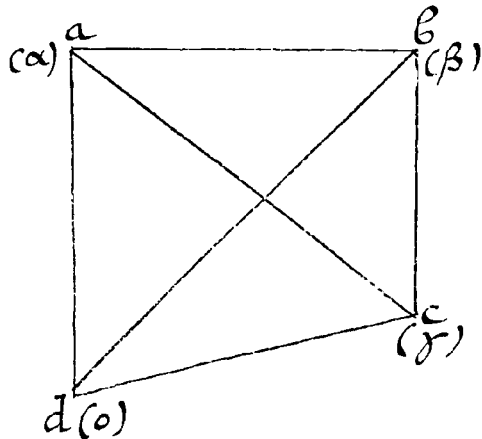
d'elles par  $h_i$  ( $i$  désignant le rang de cette équation) et par  $A_{ik}$ , puis faisons la somme, on a

$$\sum h_i A_{ik} Z_i = \sum h_i A_{ik} (y_i^o + \sum A_{ik} \varepsilon_k)$$

il suffit de donner à  $i$  les valeurs  $1, \dots, m$ .

Cette dernière remarque donne la règle d'application de la méthode des moindres carrés : les observations donnent des équations incompatibles entre les  $m$  inconnues, ainsi que des valeurs provisoires de ces inconnues. La recherche des corrections  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  à effectuer sur ces valeurs provisoires, corrections dont on néglige les carrés, conduit à un système d'équations linéaires incompatibles entre ces corrections. On fait la somme de ces équations multipliées par le poids correspondant et par le coefficient de  $\varepsilon_1$ , on obtient ainsi une première équation linéaire ; de même avec le coefficient de  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ . D'où un système de  $m$  équations linéaires à  $m$  inconnues.

Exemples. - 1<sup>o</sup> Trigonométrie : On a mesuré les différences de niveau entre deux quelconques des sommets d'un quadrilatère  $a b c d$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les côtes inconnues des sommets  $a, b, c$ , rapportées au plan horizontal de  $d$  pris comme zéro.



Les données des observations sont

$$\begin{array}{l} \alpha = Z_1 \\ \beta = Z_2 \\ \gamma = Z_3 \\ \alpha - \beta = Z_4 \\ \beta - \gamma = Z_5 \\ \gamma - \alpha = Z_6 \end{array}$$

Ces équations sont linéaires, on n'a donc pas à négliger les carrés des corrections. Supposons toutes les observations de même poids.

On a l'équation correspondante à  $\alpha$  en mul-

42.

Multipliant les 6 équations respectivement par 1, 0, 0, 1, 0, -1 qui sont les coefficients de  $\alpha$ .

D'où :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta - \gamma = Z_1 + Z_4 - Z_6, \text{ et 2 autres} \\ 3\beta - \gamma - \alpha = Z_2 + Z_5 - Z_4 \\ 3\gamma - \alpha - \beta = Z_3 + Z_6 - Z_5 \end{cases}$$

On résout facilement ce système.

$$\alpha + \beta + \gamma = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

d'où :  $4\alpha = 2Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 - Z_6$

2° Carte du Ciel - On mesure les coordonnées de différentes étoiles rapportées à des axes projoicires tracés sur le cliché photographique, et dont l'un est parallèle au plan méridien du lieu d'observation. Les erreurs systématiques sont dues à ce que :

1° la plaque n'est jamais bien centrée ; 2° les axes tracés sur cette plaque, ne sont pas rigoureusement orientés ; 3° la plaque n'est pas placée rigoureusement au foyer de l'objectif, d'où résulte une modification de l'échelle ; 4° la plaque est inclinée sur l'axe optique.

Supposons que les coordonnées mesurées d'un astre soient  $(x, y)$  et que les coordonnées vraies soient  $(x + \xi, y + \eta)$ . Des corrections  $(\xi, \eta)$  sont données par

$$\begin{cases} \xi = A + Bx + Cy \\ \eta = A' + B'x + C'y \end{cases} \quad \text{ou les coefficients } A, B, C, \dots \text{ sont}$$

des constantes inconnues, petites et dépendant des 4 causes d'erreur énumérées ci-dessus.

Par des observations précises, on a déterminé les coordonnées d'un certain nombre d'étoiles qui se trouvent reproduites sur la plaque. Si ces observations n'étaient pas entachées d'erreurs accidentelles, 3 étoiles suffiraient, chacune d'elles fournissant 2 équations entre les 6 coefficients inconnus. En réalité, ces

équations sont incompatibles ; prenons donc  $n$  étoiles et appliquons la méthode des moindres carrés. Nous aurons pour  $A, B, C$ , les 3 équations linéaires, en supposant que les observations aient même poids :

$$\sum \xi = nA + B\sum x + C\sum y$$

$$\sum \xi x = A\sum x + B\sum x^2 + C\sum xy$$

$$\sum \xi y = A\sum y + B\sum xy + C\sum y^2$$

Remarque. - Il faut appliquer la méthode aux équations mêmes fournies par les observations et rendues linéaires ; l'un des membres contient la quantité observée, l'autre membre celle qu'on aurait dû observer, ou la correction à faire subir à la grandeur observée. La méthode des moindres carrés, appliquée à des combinaisons quelconques de ces équations premières pourraient donner des résultats faux, comme il est facile de s'en assurer sur un exemple.

On peut se poser un autre problème et chercher quelle erreur probable on a commise en observant des valeurs  $Z_1, \dots, Z_m$  pour des quantités dont les vraies valeurs sont  $y_1, \dots, y_m$ . Si toutes les observations sont de même poids, les erreurs étant  $Z_1 - y_1, \dots, Z_m - y_m$ , le carré de l'erreur moyenne quadratique est

$$\sum (Z_i - y_i)^2$$

On en déduit l'erreur probable et l'erreur moyenne, si l'on admet la loi de Gauss.

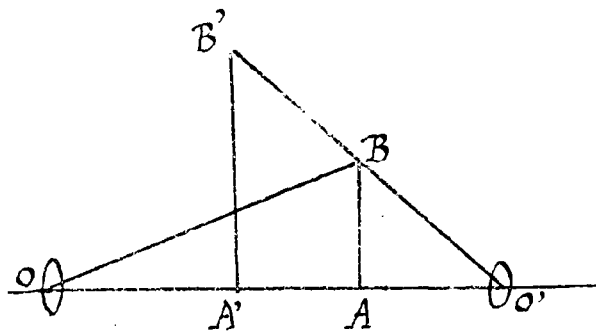
En opérant ainsi, on s'expose à de graves erreurs et les résultats peuvent être très différents avec deux observateurs. Cette divergence des résultats tient à ce que les deux observateurs ont trouvé des erreurs systématiques différentes et qu'aucun d'eux ne les a corrigées.

Les observations les plus concordantes seront celles qui donneront l'erreur probable la plus faible, les erreurs systématiques n'entrant pas dans cette erreur probable. -

# Quatrième Leçon. —

## Notions sur l'emploi des Instruments

### Réfracteurs. —



L'élément essentiel des observations astronomiques est la lunette ; elle se compose de deux lentilles ; l'une O, appelée objectif, donne de l'objet une image réelle AB située dans son plan focal, si l'on suppose l'objet très éloigné ; l'autre O', l'oculaire, fonctionne comme loupe et donne de AB une image virtuelle A'B'.

On place l'œil aussi près que possible de l'oculaire ; supposons le en O' ; O'A' = d distance de vision distincte, OA = F distance focale de l'objectif ; O'A ≤ f distance focale de l'oculaire ; O'A = f sensiblement pour un observateur à vue normale.

Grossissement de l'appareil : C'est le rapport g des diamètres apparents de l'image et de l'objet, ou, sensiblement, le rapport des tangentes de ces

$$\text{angles : } g = \frac{\widehat{A'O'B'}}{\widehat{AOB}} = \frac{F}{f}.$$

L'anneau oculaire est l'image de l'objectif dans l'oculaire ; soit a son rayon et R celui de l'objectif ; cette image se forme en un point O<sub>1</sub> situé à droite de O' et tel que  $\frac{1}{O'O} + \frac{1}{O'O_1} = \frac{1}{f}$ . On a  $\frac{R}{a} = \frac{O'O}{O'O_1}$  ;

Or  $\frac{o'o}{o'o_1} = \frac{o'o-f}{f}$ , et comme  $o'o = F+f$ , sensiblement  $\frac{R}{a} = \frac{F}{f} = g$ .

Les appareils optiques présentent deux causes d'aberration :

1<sup>o</sup> L'aberration de sphéricité ; d'où résulte que les rayons centraux n'ont pas leur foyer à la même distance que les rayons marginaux ; l'image d'un point ne sera donc pas un point ;

2<sup>o</sup> L'aberration d'achromatisme, conséquence de l'inégale dispersion par le verre des différentes radiations du spectre, de sorte que les images données d'un même point par deux couleurs différentes ne coïncident pas. Pour obtenir un objectif achromatique, on le constitue de deux lentilles accolées, l'une bi-concave en flint et l'autre bi-convexe en crown, et l'on détermine les éléments de ce système optique de telle façon que les radiations voisines des raies D et F du spectre y aient même foyer ; la même condition est alors sensiblement réalisée pour le reste du spectre visible.

Mais lorsque l'objectif de la lunette doit servir d'objectif photographique, l'achromatisme n'est plus réalisé pour la région actée du spectre. On peut passer de l'achromatisme visuel à l'achromatisme photographique en écartant un peu les deux lentilles ; mais le plus souvent la lunette qui sert pour la photographie a son objectif propre et ne sert qu'à cet usage.

Le champ d'une lunette est sensiblement l'angle sous lequel on voit l'oculaire du centre de l'objectif ; il est donc sensiblement proportionnel à  $\frac{f}{F}$ , c'est-à-dire à l'inverse du grossissement ; de là  $F$  résulte la nécessité d'adjoindre aux lunettes à fort grossissement une lunette appelée chercheur, à grossissement plus faible et à champ plus grand.

D'après la relation  $g = \frac{F}{f}$ , il semble qu'on puisse faire croître indéfiniment le grossissement, en employant avec un objectif donné, des oculaires de très petite distance focale ; en réalité on est limité dans ce sens

46.

car les images que donnent de tels oculaires tremblent et leur netteté dépend de l'état de l'atmosphère. Si en effet l'atmosphère est agitée, la longueur focale de l'objectif varie constamment de très petites quantités, et cette variation est d'autant plus gênante que le foyer de l'oculaire est plus court.

Dans une lunette supposée achromatique et sans aberration de sphéricité, l'image d'un point ne sera cependant pas un point; mais à cause de la diffraction, elle sera formée, en supposant l'objectif circulaire, d'une tâche centrale circulaire entourée d'anneaux concentriques alternativement clairs et obscurs et dont l'intensité décroît rapidement. Le rayon de

ce cercle central est  $\rho = \frac{F\lambda}{R}$ ,  $\lambda$  désignant la longueur d'onde; il sera d'autant plus petit que l'objectif sera plus grand.

On appelle pouvoir optique d'une lunette, la distance angulaire minimum de deux points que la lunette permet de séparer; pour que deux points soient vus distinctement, il faut que les deux tâches centrales qui constituent leurs images n'empiètent pas trop l'une sur l'autre;  $\alpha$  désignant leur distance angulaire, il faut donc  $F\alpha \gg \frac{F\lambda}{R}$ ;

et  $\mathcal{E} = \frac{R}{F}$  représente le pouvoir optique de la lunette.

C'est là un maximum, car pratiquement, d'autres causes limitent le pouvoir optique (aberrations, agitations atmosphériques).

**Clarté.** - La quantité de lumière qu'un objet envoie sur l'objectif est proportionnelle à  $R^2$  et par unité de surface de l'image, qui est  $g^2$  fois plus grande que l'objet, cette quantité de lumière est proportionnelle à  $\frac{R^2}{g^2} = \underline{a^2}$ , pour un objet qui a un

diamètre apparent sensible. Si  $p$  désigne le rayon de la pupille, la quantité de lumière reçue par l'œil nu par unité de surface est proportionnelle à  $p^2$ .

Par définition, la clarté est donc  $\frac{a^2}{p^2}$ , à la condition toutefois que l'anneau oculaire soit plus petit que la pupille  $a \leq p$ , sinon en effet toute la lumière reçue par l'anneau oculaire n'entre pas dans l'œil.

Dans le cas d'un objet qui a un diamètre apparent sensible, la clarté n'est donc pas augmentée par l'emploi de la lunette.

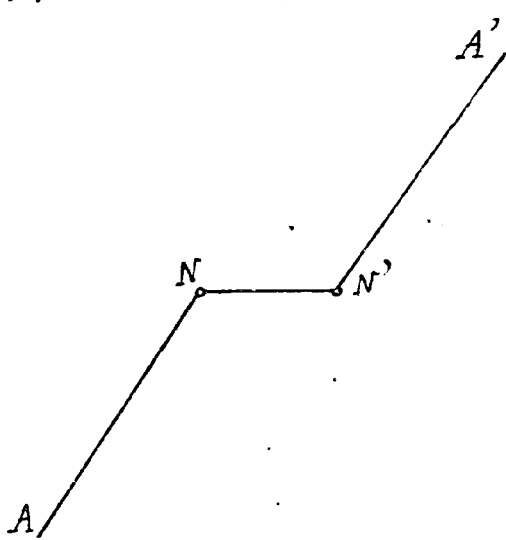
Si l'objet n'a pas de diamètre apparent sensible, la clarté est  $\frac{R^2}{p^2}$ ; elle est augmentée notablement: ce qui explique comment la lunette permet de voir les étoiles en plein jour, car elles n'ont pas de diamètre apparent, tandis que la clarté du fond du ciel, éclairé par la lumière diffuse n'est pas augmentée par l'emploi de la lunette.

**Réfecteurs.** - On remplace quelquefois l'objectif par un miroir concave; on obtient alors un télescope; il n'y a plus de réfraction, donc plus de dispersion et l'achromatisme est parfait. On préfère cependant les réfracteurs aux réflecteurs, d'abord parce que l'observation est plus facile, mais surtout parce que les images qu'ils donnent sont meilleures. Les variations de température en effet, qui font des instruments d'optique, des solides non invariables, sont plus sensibles sur les miroirs; si par exemple on suppose une face d'une lentille plus chaude que l'autre en certains de ses points, cette portion de la lentille va se comporter comme un thermomètre bi métallique de Breguet, l'une des courbures diminue, l'autre augmente, mais la quantité  $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$  qui, au point de vue optique, caractérise une lentille, peut rester constante et il peut y avoir

compensation. Dans un miroir, au contraire, on n'emploie qu'une seule face, et la variation de courbure due à la température y aura tout son effet.

**Mesure des angles.** - Supposons cette mesure effectuée dans un plan horizontal. La lunette peut être employée pour réaliser une visée : ce que l'on faisait autrefois au moyen d'une alidade, en alignant à travers un œilleton le point visé sur la croisée des fils d'un réticule ; mais la difficulté qu'on éprouve à accommoder à la fois sur ce point éloigné et sur le réticule enlevait à cette méthode toute précision.

La lunette permet de déterminer plus rigoureusement une direction ; on place dans le plan focal d'un objectif 2 fils croisés et l'on déplace la lunette jusqu'à ce que l'image du point visé coïncide avec la croisée. La direction de visée (axe optique) est alors celle qui joint le centre optique de l'objectif (supposé mince) à la croisée des fils ; mais pour une



lentille épaisse ou pour deux lentilles accolées, la direction de visée est  $N'A'$  parallèle à  $NA$ ,  $N$  et  $N'$  désignant les deux points nodaux du système.

Le réticule est éclairé soit par derrière soit plutôt par devant. Pour mettre la lunette au point, il faut :

- 1° placer le réticule dans le plan focal de l'objectif ;
- 2° placer son image dans l'oculaire à la distance de vision distincte.

On réalise d'abord cette seconde mise au point, en déplaçant l'oculaire jusqu'à ce qu'on y voit nettement le réticule ; puis on déplace d'un mouvement d'ensemble l'oculaire et le réticule par rapport à l'objectif jusqu'à ce que l'image de l'objet soit nette.



Si cette dernière mise au point n'est pas bien faite, on s'expose à des erreurs de parallaxe, c'est-à-dire qu'un point qui coïncide avec la croisée pour une position de l'œil ne coïncide plus si l'œil se déplace.

Pour mesurer un angle, la lunette est liée à un système mobile autour d'un axe et portant un repère qui se déplace par rapport à un système fixe muni d'un cercle gradué.

La lunette peut recevoir un mouvement rapide qui permet de réaliser une visée approchée et un mouvement lent qui permet d'amener l'image et la croisée rigoureusement en coïncidence; pour cela la lunette est liée à un cadre; ce cadre porte une vis dite de rappel; il y a en outre une mâchoire qui, ressort, portée par le cadre, appuie constamment contre l'extrémité de cette vis. Dans le mouvement rapide, la mâchoire, le cadre et la lunette se déplacent ensemble; quand on veut arrêter ce mouvement, une vis de pression permet de fixer la mâchoire du limbe; la vis de rappel mobile dans un écrou porté par le cadre donne ensuite à la lunette les déplacements lents.

Pour plus de précision, le cercle alidade porte, au lieu d'un simple repère, un vernier.

On peut aussi - dans des instruments plus précis encore - employer un microscope fixe, le cercle divisé est alors mobile et solidaire de la lunette; dans le plan focal de l'objectif de ce microscope se trouve un micromètre formé d'un fil que l'on peut déplacer d'une quantité connue au moyen d'une vis munie d'un tambour divisé. On tourne la vis jusqu'à ce que le fil mobile vienne coïncider avec l'image d'un trait de la division et on fait la lecture sur le tambour.

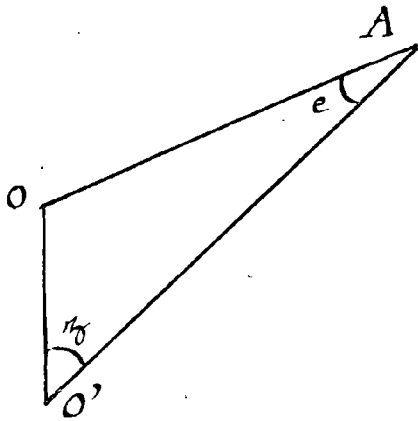
**Correction des erreurs.** - Les conditions théoriques de l'emploi d'un instrument ne sont jamais remplies; par suite des variations de température et des flexions dues à l'élasticité, les diverses parties d'un instrument ne sont pas des solides

invariables. Les conditions géométriques ne sont pas non plus remplies, d'où la nécessité de régler l'instrument.

Une autre cause d'erreur provient des divisions, qui ne sont jamais exactes. Supposons cependant la graduation bien faite : les traits de division sont alors des droites concourantes au centre  $O$  du limbe, mais le cercle qui porte les microscopes tourne autour d'un axe  $O'O$  qui, généralement, ne coïncide pas avec  $O$ .

Il en résulte ce qu'on appelle une erreur d'excentricité.

Soit  $O$  le centre des divisions,  $OA$  un des traits de division. Soit  $O'$  le centre autour duquel tournent les microscopes.



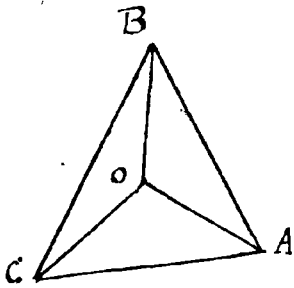
Le microscope étant en  $A$ , on lit la division  $OA$ , la véritable direction serait  $O'A$ ; l'angle  $A$  mesure l'erreur d'excentricité;  $\frac{\sin A}{e} = \frac{\sin z}{r}$ ,  $e = oo'$  dési-

gnant l'excentricité.

En négligeant les puissances supérieures de l'erreur d'excentricité  $A$ , on a  $A = \frac{e}{r} \sin z$ ; on pourra donc corriger cette erreur, en employant deux verniers diamétralement opposés. La moyenne des deux lectures sera corrigée de l'erreur d'excentricité, car elles correspondent à des angles  $z$  et  $\pi + z$ . Si l'on tient compte des puissances supérieures de  $A$ , cette correction n'est plus rigoureuse; mais l'erreur d'excentricité peut se développer suivant une série de Fourier de la forme  $\sum A_n \sin n z$ , si l'on emploie un seul vernier. Avec  $p$  verniers ou microscopes équidistants, on fera ainsi  $p$  lectures affectées des erreurs  $\sum A_n \sin n z, \sum A_n \sin(nz + \frac{2\pi}{p}), \dots, \sum A_n \sin(nz + 2\pi \frac{p-1}{p})$

(1) Nous faisons ici le raisonnement comme si le cercle divisé était fixe et les microscopes mobiles; si c'est l'inverse, les résultats sont les mêmes. La seule chose qui importe, c'est le mouvement relatif des deux systèmes.

La somme des termes de ces  $p$  séries dont le rang  $n$  n'est pas multiple de  $p$  sera nulle ; le  $1^{\text{er}}$  terme de cette somme sera la somme des termes de rang  $p$ . Ces séries sont d'ailleurs très rapidement convergentes. L'erreur devient plus difficile à évaluer si l'excentricité est fluctuante, c'est-à-dire si, par suite d'un certain jeu, l'axe  $O$  est mobile et l'excentricité  $e$  variable. Dans tous les cas, théoriquement du moins, il suffirait de trois microscopes équidistants pour déduire des trois lectures l'orientation du système  $ABC$  ; car connaissant les trois directions  $OA, OB, OC$  rapportées à une



direction fixe, il n'y a qu'une seule manière de placer un triangle équilatéral  $ABC$  ayant des sommets sur ces trois droites.

Si la graduation comporte des erreurs, elles seront toujours petites et développables en séries de Fourier très convergentes ; elles seront donc atténuées par l'emploi de  $p$  microscopes.

On peut, pour atténuer ces erreurs, expérimentalement procéder de deux façons :

1<sup>o</sup> Par répétition : L'appareil est en réalité formé de 3 parties qui peuvent être rendues à volonté solidaires ou indépendantes l'une de l'autre au moyen de vis de pression : un cercle alidade, un cercle limbe, un support. On rend d'abord le limbe solidaire du pied ; on vise le premier point  $A$ , on fait une lecture ; par rotation de l'alidade, on vise le second point  $B$  ; rendant le limbe indépendant du pied, mais solidaire de l'alidade, on vise  $A$  à nouveau ; on rétablit la liaison entre le limbe et le pied, on supprime la liaison entre le limbe et l'alidade, et l'on vise  $B$  ; et ainsi de suite  $n$  fois. A la dernière visée de  $B$  on fait une lecture ; on fait ainsi  $n$  visées de  $A$ ,  $n$  visées de  $B$  et 2 lectures. L'angle total qui résulte de la différence de ces deux lectures et qui est l'angle

dont a tourné l'alidade par rapport au limbe représenté  $n$  fois la distance angulaire des deux points  $A, B$ . L'erreur résultante due à la graduation est alors la  $n^{\text{ième}}$  partie de ce qu'elle aurait été si l'on n'avait fait qu'une observation; l'erreur due aux divisions deviendrait même nulle si l'angle à mesurer était  $\frac{2\pi}{n}$  et que l'on fit  $n$  répétitions de façon à revenir au trait primitif. L'erreur de lecture serait divisée par  $n$ , celle du pointé par  $\sqrt{n}$ , puisqu'on retomberait sur la loi des erreurs accidentelles.

L'erreur ne peut pas être atténuée indéfiniment par ce procédé, car par suite d'un certain jeu, très faible d'ailleurs, des vis de pression, il s'introduit une erreur systématique qui n'est pas éliminée, quel que soit le nombre des observations.

2° Par réitération : On vise  $A$ , puis  $B$  et l'on fait chaque fois une lecture, le limbe restant fixe; on fait tourner ensuite ce limbe d'un certain angle, on le fixe de nouveau et l'on recommence les mêmes opérations et ainsi  $n$  fois; on fait chaque fois 2 lectures, dans des régions différentes du limbe. L'erreur accidentelle résultante est alors  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ ;  $\varepsilon$

indiquant l'erreur faite sur une opération, et toutes les opérations étant supposées du même poids. Cela suppose cependant les rotations faites au hasard et quelconques. Mais en réalité, on fait tourner l'alidade de  $\frac{2\pi}{p}$ ; l'effet est alors le même que

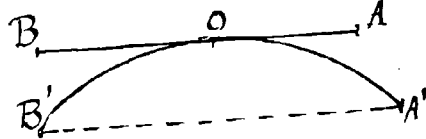
si on employait  $p$  microscopes; la rapidité de décroissance de l'erreur sera donc mesurée par la rapidité de convergence de la série de Fourier que nous envisageons tout à l'heure.

Elle sera donc beaucoup plus grande que celle de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Pour les erreurs de pointé et de lecture, elles seront divisées par  $\sqrt{n}$ .

Ayant toute mesure, il sera donc bon d'étudier la graduation de l'instrument. On ajoute pour cela

un certain nombre de microscopes et l'on fait tourner l'alidade d'un angle quelconque ; on note les lectures et on obtient des équations entre les corrections à apporter aux divisions gisées.

On retrouve toutes ces erreurs quand on fait des mesures dans un plan vertical, la lunette AB étant mobile



autour d'un axe O normal à ce plan ; mais il faut de plus tenir compte des erreurs dues à la flexion ; si A désigne le centre optique de l'objectif, et B la croisée du réticule, l'axe opti-

que est AB. Mais une flexion se produit, surtout pour les grosses lunettes ; la lunette prend la forme A'B' et l'axe optique devient A'B'. L'erreur due à la flexion est mesurée par l'angle de ces deux axes. On pourrait l'amputer en donnant à la lunette une certaine symétrie, impossible à réaliser parfaitement. Cette erreur est nulle pour la position verticale de AB, elle est sensiblement proportionnelle au sinus de la distance zénithale.

## Observations différentielles.

Elles peuvent se faire de deux façons :

1<sup>o</sup> Emploi du micromètre : Deux fils rectangulaires sont mobiles à l'aide de vis sur un réseau de fils fixes ; les déplacements des fils mobiles permettent de mesurer les abscisses et ordonnées relatives de deux points. Pour les abscisses, par exemple, on amènera l'un de ces fils à passer par la 1<sup>re</sup> étoile, on tournera ensuite la vis jusqu'à ce qu'elle vienne en coïncidence avec la 2<sup>e</sup> étoile. On lira sur le tambour divisé de la tête de la vis la quantité dont ce fil s'est déplacé ; on mesure ainsi la distance angulaire de ces 2 étoiles en nombre de tours et fraction de tour de vis. On tare l'appareil en mesurant une distance angulaire connue. On peut enfin vérifier si la vis n'est pas affectée d'une erreur périodique, en mesurant une longueur connue.

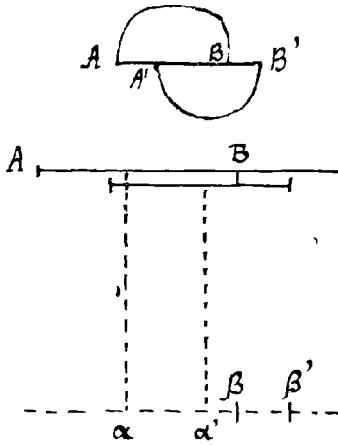
2<sup>o</sup> Emploi de l'héliomètre : C'est une lunette

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> Division - 1906-1907).

11<sup>e</sup> feuille.

54.

formée de deux demi-lentilles dont une est fixe et dont l'autre peut glisser sur la première.



La 1<sup>re</sup> lentille AB donnera des deux étoiles une image  $\alpha, \beta$ ; la seconde lentille donnera  $\alpha', \beta'$ .  $\alpha', \beta'$  et  $\alpha, \beta$  coïncident quand les deux lentilles n'en font qu'une.

On déplace A'B' jusqu'à ce que  $\alpha'$  coïncide avec  $\beta$ . Le déplacement total est connu au moyen d'une règle et mesure la distance  $\alpha, \beta$ . La coïncidence de  $\alpha'$  et  $\beta$  sur la direction  $\alpha\alpha'$  est facile à vérifier, bien que les deux moitiés

de l'objectif ne soient pas rondes et par conséquent ne puissent donner des images circulaires, car la différence donne une image étalée dans le sens perpendiculaire à la plus grande dimension de la moitié d'objectif en visage, perpendiculaire par conséquent à la direction AB, ou encore à la direction  $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ .

---

## Cinquième Leçon.

---

### Astronomie sphérique.

---

La distance de la plupart des étoiles est inconnue et l'on n'observe que leur direction. C'est pourquoi on peut représenter les étoiles par leur projection sur une sphère idéale, de rayon très grand, ayant pour centre l'œil de l'observateur.

Une première observation montre tout d'abord qu'il y a deux sortes d'astres : les étoiles dites fixes, dont les distances mutuelles demeurent invariables, et tous les autres astres qui sont mobiles par rapport à ces étoiles (Soleil, planètes). On constate de plus que les étoiles fixes ont un mouvement de rotation d'ensemble, comme si la sphère céleste tournait autour de la Terre. S'il en était ainsi en réalité, il faudrait admettre qu'une étoile met 24 heures pour parcourir une circonférence alors que la lumière met plusieurs années pour en parcourir le rayon. Aussi, aujourd'hui, admet-on que la terre est mobile par rapport aux astres qui sont fixes.

Le mouvement diurne apparent se fait dans le sens rétrograde, le mouvement vrai de la terre sur elle-même dans le sens direct.

Il importe à ce sujet, de ne pas confondre un mouvement de rotation autour d'un axe fixe avec une translation circulaire (axes se déplaçant parallèlement à eux-mêmes, l'origine des axes décrivant un cercle).

Dans le 1<sup>er</sup> cas, le mouvement apparent sera aussi une rotation, mais en sens inverse; dans le second cas le mouvement apparent autour du centre fixe sera une translation circulaire de même sens. Le mouvement diurne réel de la terre est une rotation de sens direct; le mouvement apparent diurne de la Sphère céleste sera une rotation de sens rétrograde; le mouvement réel annuel de la terre est une translation circulaire de sens direct; donc le mouvement apparent annuel du Soleil sur la sphère céleste sera dans le sens direct.

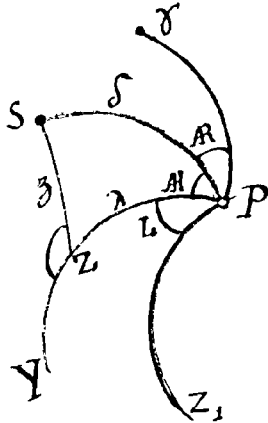
## Position d'un point sur la sphère céleste.

On appelle zénith  $Z$  le point d'intersection de la sphère céleste avec la verticale du lieu, et pôle  $P$  le point d'intersection de cette sphère avec l'axe de rotation diurne. Soit  $S$  la projection de l'astre.

$PS = \delta$  est la distance polaire (complément de la déclinaison).

$PZ = \lambda$  est la colatitude (complément de la latitude géographique du lieu).

$SZ = z$  est la distance zénithale (complément de la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon).



Soit  $\gamma$  un point arbitrairement choisi sur la sphère (et qui sera l'origine des ascensions droites) joignons le à P par un arc de grand cercle.

$$\widehat{ZPS} = A \text{ angle horaire.}$$

$$\widehat{YPS} = R \text{ ascension droite.}$$

$$\widehat{SZY} = A \text{ azimuth.}$$

Soit  $Z_1$  le zénith du lieu origine des longitudes (Paris).

$\widehat{PZ_1} = L$  longitude du lieu.

On peut prendre divers systèmes de coordonnées pour déterminer la position de l'astre :

$\delta$  et  $R$ , ou  $\delta$  et  $A$ , ou  $z$  et  $A$ .

La position du lieu est définie par  $\lambda$  et  $L$ . Les azimuths se comptent de  $0$  à  $360^\circ$  du Sud vers l'ouest, les ascensions droites se comptent dans le sens direct, les angles horaires dans le sens rétrograde, les longitudes de  $0$  à  $180^\circ$  vers l'Est ou l'Ouest. Prenons par exemple les longitudes Ouest comme positives. Dans le cas de la figure, les angles sont alors tous compris entre  $0$  et  $90^\circ$ .

Les points  $\gamma$  et  $S$  sont fixes par rapport à la sphère céleste, mais mobiles par rapport à la sphère et fixes pour l'observateur.

Le point  $P$  est fixe dans les deux mouvements réel et apparent.

Donc  $\delta$  et  $R$  sont invariables pour des astres fixes ;  $z$ ,  $A$ ,  $A$  varient en vertu du mouvement diurne.



## Relations entre les différentes coordonnées.

L'angle horaire de  $\gamma$  est l'heure sidérale  $H$  du lieu; on a donc  $H = R + A$ .

L'heure sidérale  $H_p$  de Paris est  $\widehat{Z_1 P \gamma}$ .

$$H_p = H + L.$$

On peut ainsi passer des coordonnées  $(\delta, A)$  aux coordonnées  $(\delta, R)$ .

Entre les coordonnées zénithales  $(Z, A)$  et les coordonnées horaires  $(\delta, A)$  il existe 3 relations analogues à la suivante :

$$\cos Z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos A.$$

D'où l'on peut déduire l'heure du lever et du coucher d'un astre en faisant dans cette formule  $Z = \frac{\pi}{2}$ .

$$\cotg \delta \cotg \lambda = -\cos A.$$

## Détermination de la verticale.

La longitude et la latitude dépendent des verticales  $Z$  et  $Z_1$ . Si la Terre était rigoureusement sphérique, la verticale en serait un rayon, et le lieu des points de longitude ou latitude constante serait un cercle. Un point de coordonnées  $(\lambda, \mu)$  sera déterminé par la direction de la verticale, c'est-à-dire du plan tangent à la surface des mers. Il importe donc de déterminer la verticale pour mesurer une longitude ou une latitude; toute erreur faite dans cette détermination ne pourra être éliminée par la suite, et tout se passera comme si l'on mesurait la longitude ou latitude d'un autre lieu.

Pour déterminer la verticale, on emploie le niveau ou le bain de mercure.

Le niveau est une fiole de verre creusée d'une cavité en forme de toze; cette cavité est remplie d'un mélange d'alcool et d'éther à l'exception

58.-

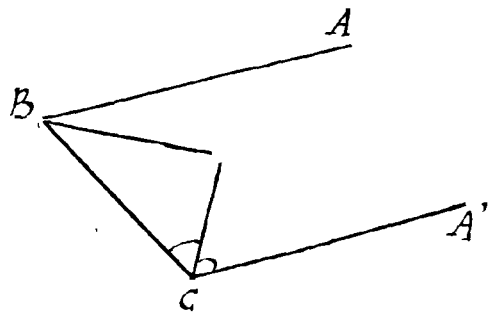
d'une bulle de gazeur d'éther, qui se placera toujours de façon que son centre de gravité soit le plus haut possible. Une graduation permet d'évaluer la position de la bulle.

Pour vérifier si un axe est vertical, à cet axe est lié un niveau : la bulle de celui-ci ne doit pas bouger quand on fait tourner l'appareil.

Pour vérifier qu'une droite est horizontale, on place le niveau suivant cette droite ; la bulle ne doit pas se déplacer si l'on retourne le niveau bout pour bout.

Quant au bain de mercure, il a deux manières de s'en servir :

1<sup>o</sup> Soit par exemple à mettre l'axe optique d'une lunette vertical. Le réticule étant éclairé, un faisceau sort de la lunette parallèlement à l'axe optique ; si cet axe est vertical, ce faisceau se réfléchira sur lui-même et donnera une image qui coïncidera avec la croisée du réticule. C'est ce qu'on appelle faire un nadir.



2<sup>o</sup> On peut aussi viser directement une étoile ; on note la division sur le limbe, puis on vise la même étoile par réflexion sur le mercure. La moyenne des deux lectures donne la direction de l'horizontale.

Un fil à plomb est d'autant plus précis qu'il est plus long. Dans le niveau, la longueur du fil à plomb dont on dispose est le rayon du tore qui peut être très grand. Avec le bain de mercure, c'est la distance du réticule à l'objectif. Mais un niveau de grand rayon sera par cela même très sensible aux causes de perturbations (variations de température par exemple). Aussi, si l'on préfère parfois le niveau au bain de mercure, ce n'est pas pour sa sensibilité, mais c'est parce que la surface du mercure n'est pas parfaitement immobile.

## Mesure des coordonnées ( $Z, A$ ):-

On emploie un théodolite : Cet instrument comprend trois parties :

1<sup>o</sup> Une partie fixe formée d'un pied à vis calantes portant un cercle limbe horizontal.

2<sup>o</sup> Un cercle alidade horizontal, concentrique au précédent, mobile autour d'un axe vertical et portant les verniers, à ce cercle horizontal est invariablement lié un cercle limbe vertical.

3<sup>o</sup> La 3<sup>e</sup> partie peut suivre la précédente dans son mouvement de rotation ; mais elle peut aussi tourner autour d'un axe horizontal. Elle comprend un cercle alidade vertical portant une lunette et des verniers.

On vise une 1<sup>re</sup> étoile, on lit sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical ; on vise une 2<sup>e</sup> étoile et l'on fait les mêmes lectures ; la différence des lectures faites sur le cercle horizontal donne la différence des azimuths. Pour avoir l'azimuth, il faut déterminer le plan méridien ; on procède par la méthode des hauteurs correspondantes ; on vise un astre, on note l'azimuth ; laissant la lunette à la même hauteur, on vise le même astre, quand il repasse par cette même distance zénithale. L'azimuth origine sera la moyenne arithmétique des 2 azimuths observés.

La lecture faite sur le cercle vertical du théodolite ne donne pas la distance zénithale  $Z$  vraie, car la division 0 de ce cercle ne correspond pas rigoureusement à la direction de la verticale. Pour déterminer  $Z$ , on vise d'abord le cercle étant à droite, on lit  $Z + Z_0$ , puis on fait tourner de  $180^\circ$  de manière à placer le cercle à gauche, et on vise de nouveau la même étoile, on lit alors  $Z - Z_0$ . On en déduit la distance zénithale vraie  $Z$  en même temps que la division  $Z_0$  du limbe correspondant à la verticale. La mesure reste entachée de l'erreur de réfraction.

De plus  $Z$  a varié entre les deux observateurs ;

mais on peut supposer que dans cet intervalle de temps le mouvement de l'astre est resté uniforme ; alors  $z$  sera la distance zénithale grâce à l'heure moyenne arithmétique des heures des 2 observations. Elle est  $z + \varepsilon$  au moment de la première observation,  $z - \varepsilon$  au moment de la seconde ; on fait les deux lectures  $z + \varepsilon + z_0$  et  $z - \varepsilon - z_0$  et l'on a encore  $z$  en prenant la moyenne.

Dans les observatoires, on emploie les instruments méridiens qui sont des instruments fixes et qui, par suite, donnent une plus grande précision.

La lunette méridienne est une lunette mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan, méridien et dont l'axe optique décrit ce plan méridien.

On note l'instant des passages des astres dans ce plan, on a donc la différence des ascensions droites.

Le cercle méridien est un cercle vertical solidaire d'une lunette dont l'axe optique décrit le plan méridien. La distance zénithale d'un astre s'obtient en lisant les microscopes et en faisant un nadir.

Nous verrons plus loin comment on règle la lunette méridienne ; contentons-nous, pour le moment, de dire qu'on assure l'horizontalité de l'axe à l'aide du niveau, et qu'on vérifie que le plan vertical décrit par l'axe optique est bien le plan méridien en s'assurant que l'intervalle des passages supérieurs et inférieurs d'une même circumpolaire est bien de 12 heures.

En observant les deux passages d'une même circumpolaire au cercle méridien, on peut avoir à la fois la déclinaison de cet astre et la latitude du lieu.

Au passage supérieur, on a par exemple  $z = \lambda - \delta$ , et au passage inférieur  $z = \lambda + \delta$ . On déduit donc  $\lambda$  et  $\delta$  des deux mesures de  $z$ .

Si l'étoile n'est pas circumpolaire ou si on ne peut pas observer le passage inférieur, on n'a plus qu'une seule équation, mais  $\lambda$  ayant été déterminé à l'aide d'autres circumpolaires, cette

équation nous donnera la déclinaison de l'astre.

Pour éliminer les erreurs de flexion et de réfraction sur la mesure de  $\lambda$ , on observe deux astres dont la distance polaire est parfaitement connue par de nombreuses observations préalables et qui passent au méridien, l'un au Nord, l'autre au Sud, mais sensiblement avec les mêmes distances zénithales ;  $\lambda$  est donné par ces deux mesures. L'erreur de flexion est éliminée, car elle est proportionnelle à  $\sin z$  ; de même les erreurs de réfraction sont égales et de signe contraire pour ces deux passages Nord et Sud.

Cette correction n'est cependant pas rigoureuse.

### Mesure des latitudes à l'aide du théodolite.

Le théodolite est un instrument de campagne. Il arrivera donc en général que les coordonnées universelles des astres seront bien connues par les observations méridiennes faites dans les observatoires et le théodolite nous servira seulement à calculer les coordonnées géographiques du lieu.

On connaît donc  $z$ ,  $A$  mesurés par le théodolite,  $R$  et  $S$  donnés par la connaissance du temps.

Un chronomètre donne l'heure de Paris d'après les observations méridiennes des observatoires.

La considération du triangle sphérique  $SZP$  donne  $\lambda$  et  $A$  ; d'où l'heure sidérale locale par la formule

$$H = R + A$$

et la longitude par la formule

$$H_p = H + L.$$

Supposons que l'on connaisse approximativement  $A$  et qu'on veuille déduire  $\lambda$  de la mesure de la distance zénithale  $z$  d'un astre dont la distance polaire  $\delta$  est connue. On a pour cela la formule

$$\cos z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos A \quad (1)$$

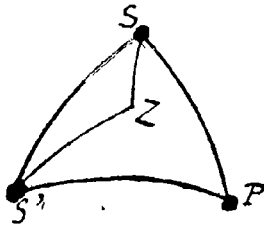
(1) On établit facilement cette formule en différentiant les 3 relations.

62.

Si l'on fait les erreurs  $dz$  et  $dA$ , il en résulte pour  $\lambda$  une erreur  $d\lambda$  donnée par

$$d\lambda \cos A = - dz + dA \sin \lambda \sin A$$

Il y a donc intérêt à faire les observations le plus près possible du plan méridien puisque l'effet de  $dz$  sera divisé par  $\cos A$ . De même l'effet de  $dA$  sera multiplié par  $\sin A$ . Si au contraire, on connaît  $\lambda$  et qu'on veut avoir  $A$  et par conséquent l'heure locale, il faut observer dans un azimut perpendiculaire au méridien.



Pour éliminer cette erreur sur l'heure dans la mesure de  $\lambda$ , on observe un premier astre  $S$ , puis un autre  $S'$ , à un autre moment. L'angle  $\widehat{SPS'}$  est alors connu indépendamment de la longitude et d'un retard ou d'une avance du chronomètre.

On a en effet

$$SPS' = H - H' - (R - R')$$

$R$  et  $R'$  étant les ascensions droites des deux astres et  $H - H'$  la différence des heures sidérales d'observation. La connaissance du temps donne  $SP$  et  $S'P$ . D'où  $SS'$ . On a mesuré les distances zénithales  $ZS$  et  $ZS'$ , de sorte que le triangle sphérique  $ZSS'$  est entièrement connu.

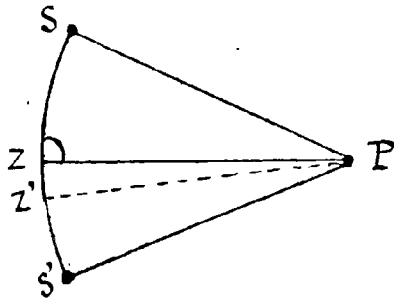
La formule différentielle montrerait que pour obtenir une plus grande précision, il convient d'opérer de part et d'autre du plan méridien et aussi près que possible de ce plan.

### Observations circumméridiennes.

Au lieu de deux astres différents, on peut d'ailleurs opérer sur un même astre à deux instants différents, et c'est ce qu'on fera d'ordinaire. Il n'y a pas à s'inquiéter de la marche du chronomètre puisque l'on n'observe que la différence des heures et que le chronomètre

n'a pu varier sensiblement dans l'intervalle des observations.

Méthode de Bessel. - On peut aussi observer



l'instant des passages des deux astres dans un plan vertical perpendiculaire au méridien (azimuth  $90^\circ$ ). L'angle  $SPS'$  et les distances polaires  $SP$ ,  $S'P$  sont connues comme précédemment; le triangle sphérique  $SPS'$  est donc connu. Les astres  $S$  et  $S'$  ayant même azimuth, le zénith  $Z$  se trouvera sur la base  $SS'$  de ce

triangle sphérique, et si l'azimuth est bien égal à  $90^\circ$ , la colatitute  $PZ$  sera la hauteur du triangle sphérique.

Si le cercle n'est pas bien orienté, l'angle  $Z$  est différent de  $90^\circ$  et au lieu de  $PZ$  on a  $PZ'$  qui n'est pas la hauteur du triangle. Si la différence entre les angles  $Z$  et  $Z'$  est du 1<sup>er</sup> ordre, la différence entre  $PZ$  et  $PZ'$  sera du second ordre, d'où l'avantage de ce genre d'observation.

Ajoutons que l'on n'a pas à tenir compte de l'erreur de réfraction qui n'intervient pas dans les mesures d'azimuths.

Méthode des Hauteurs égales. -

On peut observer l'heure où trois astres  $S, S', S''$  ont une hauteur zénithale déterminée, la même pour les trois. Reportons les positions de ces trois astres sur la sphère céleste (je veux dire sur une sphère supposée immobile par rapport à la terre); cela est possible puisqu'on connaît leurs angles horaires au moment de l'observation et leurs distances au pôle. Le petit cercle qui passera par ces 3 astres, aura pour centre le zénith qui sera ainsi déterminé. On n'a pas besoin de connaître la distance zénithale; il suffit de s'assurer qu'elle est la même pour les trois observations;

64.

il n'y a donc pas à s'inquiéter de l'erreur de réfraction qui les affecte toutes trois de la même manière. On a imaginé pour l'application de cette méthode un instrument spécial appelé astrolabe à prisme.

### Mesure de la Longitude.-

Il faut comparer l'heure locale à l'heure de Paris. L'heure locale est déduite de la mesure d'un angle horaire  $H$  comme il vient d'être expliqué. Pour avoir l'heure de Paris il y a 5 méthodes :

1<sup>o</sup> Emploi du chronomètre : cette méthode est subordonnée à l'excellence de la marche du chronomètre ;

2<sup>o</sup> Emploi des signaux télégraphiques : deux observateurs s'installent avec leurs instruments méridiens dans les 2 lieux, et ils règlent leurs horloges au moyen de ces instruments ; on a ainsi la différence des heures locales.

3<sup>o</sup> Observation de certains phénomènes astronomiques, dont l'heure est fixée en fonction de l'heure de Paris : Ces phénomènes doivent être observables en plusieurs lieux de la terre ; ce sera par exemple une éclipse de lune, une éclipse d'un satellite de Jupiter.

4<sup>o</sup> Emploi des distances lunaires : la distance de telle étoile à la lune a une valeur déterminée à telle heure, par la connaissance du temps en fonction de l'heure de Paris. On mesure cette distance et on en déduit l'heure de Paris.

On choisit la lune de préférence à tout autre astre mobile, parce que c'est celui dont le mouvement, par rapport à la sphère céleste, est le plus rapide.

5<sup>o</sup> Enfin, le procédé le plus précis consiste à observer les occultations d'une étoile par la lune.

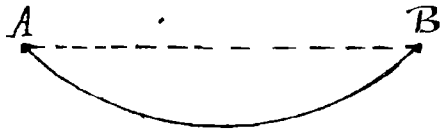
---



# Sixième Leçon

## Observations méridiennes.

La première qualité d'un instrument méridien est la stabilité des supports ; pour réduire les flexions il faut de plus donner à tout l'ensemble de l'appareil, une grande solidité : la forme type d'une lunette méridienne est un cube, de deux des faces opposées de ce cube partent deux troncs de cône portant l'un : l'objectif, l'autre : l'oculaire ; deux autres troncs de cône relient ce tube aux supports et portent à leurs extrémités les tourillons mobiles dans des coussinets en forme de V. Enfin on donne à l'appareil une symétrie aussi parfaite que possible, ce qui a pour but de réduire les erreurs dues à la flexion. En effet l'axe AB des tourillons prend, par le poids de la lunette, la forme AMB. Si tout l'appareil est symétrique, cette



courbe elle-même sera symétrique, et malgré la flexion, l'axe optique restera dans le plan de symétrie et par conséquent perpendiculaire à l'axe de rotation.

On mesurait autrefois les déclinaisons et les ascensions droites à l'aide de deux appareils distincts : le cercle mural et la lunette ; dans le premier, les divisions sont sur la tranche du cercle et les microscopes convergent en son centre. On tend aujourd'hui à réunir ces deux instruments en un seul ; les divisions sont alors tracées sur la face du cercle, les microscopes sont horizontaux et parallèles.

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> division - 1906-1907).

17<sup>e</sup> feuille

## Réglage de la Lunette. - On la place

approximativement dans le plan méridien que l'on a déterminé au théodolite par la méthode des hauteurs correspondantes ou en gisant la polaire au moment de sa plus grande dépression. La connaissance des Temps nous fait connaître en effet la plus grande dépression de la polaire et l'heure de cette dépression maxima.

Cela fait, il faut :

1<sup>o</sup> Rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation, condition pour que cet axe optique décrit un plan. On gise une mire éloignée; puis on retourne la lunette sur ses coussinets bout pour bout et l'on gise la même mire; si, avant le retournement l'axe optique décrivait un cône, après le retournement il décrira le prolongement du cône, l'image de la mire ne coïncidera plus dans la seconde gisee, avec la croisée du réticule; on réduira cet écart de moitié.

2<sup>o</sup> Rendre l'axe de rotation horizontal. On vérifie cette horizontalité soit par le niveau reposant sur les 2 tourillons et dont la bulle ne doit pas bouger quand on le retourne bout pour bout, soit par un nadir; si l'axe de rotation est horizontal, on doit en effet pouvoir placer l'axe optique vertical, c'est-à-dire faire coïncider la croisée du réticule avec son image par réflexion sur le bain de mercure.

La lunette étant ainsi réglée, son axe optique décrit donc un plan vertical.

Pour vérifier si ce plan est le plan méridien il suffit de noter trois passages consécutifs d'une circompolaire: deux supérieurs et un inférieur; l'intervalle du Temps qui sépare les deux premiers doit être le même qu'entre les deux derniers.

Enfin on s'assure de la verticalité du fil du réticule en vérifiant que l'image d'une mire reste sur ce fil quand on fait tourner la lunette.

Ce réglage une fois fait, il ne subsiste pas d'une façon absolue, surtout à cause des dilatations différentes de diverses parties de l'appareil et surtout des deux piliers.

Pour s'assurer que l'axe optique reste bien dans le plan méridien, on vise une mire placée dans ce plan. Au lieu d'une mire éloignée, on peut employer une mire rapprochée constituée par un collimateur : c'est une lentille au foyer de laquelle se trouve une source lumineuse qui donne donc un faisceau parallèle ; viser ce faisceau avec la lunette, cela revient au même que de viser un point très éloigné dans la direction de ce faisceau.

Pour éviter de procéder au retournement de la lunette, on peut placer dans le plan méridien une mire au Nord et une au Sud, et les viser successivement dans la lunette ; quand ces deux visées seront réalisées et que l'on aura vérifié que l'inclinaison de l'axe des touillons est restée nulle, l'axe optique décrira un plan méridien.

Correction des erreurs : Un tel réglage n'est jamais parfait et il faut corriger une première erreur dite de collimation, due à ce que l'axe optique n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation ; autrement dit la trace de cet axe optique sur la sphère céleste décrit un petit cercle B et non le grand cercle A. Ces deux cercles sont d'ailleurs



parallèles, si l'on ne considère que cette seule erreur de réglage. On observe le passage de l'astre en S dans le plan B qu'on croit être le plan méridien A ; d'où une erreur sur l'angle horaire, qui est mesurée par l'angle P des deux grands cercles PS et PA ; fermons le triangle rectangle SPC, on a

$$\sin SC = \sin P \sin SP$$

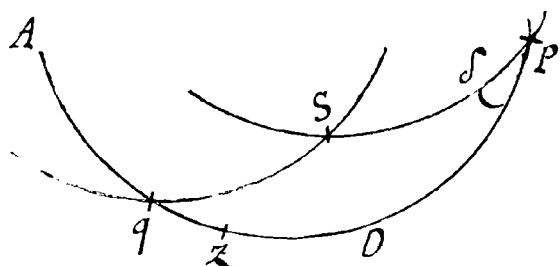
$\sin SC = m$  est une constante instrumentale,  $SP = \delta$

68.-

est la distance polaire ;  $P$  étant petit, on a donc

$$\underline{P = m \cos \epsilon c \delta}$$

Une seconde erreur résulte de ce que le plan perpendiculaire à l'axe des tourillons n'est pas le plan méridien : on observe le passage en  $S$  de l'astre dans ce plan sur le grand cercle  $QS$ , alors qu'on devrait l'observer sur le méridien  $Pq$ .



Il en résulte une erreur  $\hat{P}$  telle que

$$\frac{\sin P}{\sin q} = \frac{\sin qS}{\sin PS} = \frac{\sin (D - \delta)}{\sin \delta}$$

$$\text{d'où } P = \sin q \frac{\sin (D - \delta)}{\sin \delta}$$

$$P = \sin q \sin D \cotg \delta - \sin q \cos D$$

$$P = n \cotg \delta + p \text{ en posant } n = q \sin D$$

et  $p = -q \cos D$ , l'angle  $q$  étant petit.

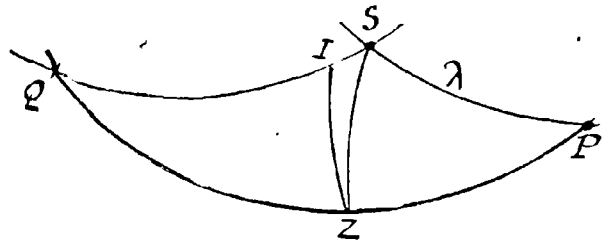
Ces deux erreurs étant petites s'ajoutent, et l'erreur totale due aux constantes instrumentales est

$$\underline{P = m \cos \epsilon c \delta + n \cotg \delta + p.}$$

Pour déterminer ces constantes, on mesure les  $R$  de diverses étoiles fondamentales, de préférence voisines du pôle, pour que les facteurs  $\cos \epsilon c \delta$ ,  $\cotg \delta$  soient grands ; on a ainsi  $m$  et  $n$  ; la constante  $p$  est la même pour toutes les étoiles ; elle comprend l'erreur de la pendule ; il est donc impossible de la déterminer par des observations astronomiques qui ne peuvent donner que des différences d'ascension droite. On la détermine physiquement en mesurant l'inclinaison

de l'axe des boussoles qui est égale à  $n \cos \lambda + p \sin \lambda$  (où  $\lambda = PZ$  est la colatitude).

En effet, supposons que  $S$  soit un astre passant au zénith, ce qui entraîne



$\lambda = \delta$ . Soit  $ZI$  l'arc de grand cercle perpendiculaire à  $QS$ ;  $ZI = i$ , mesure l'inclinaison de l'axe.

D'ailleurs l'extrême petitesse de  $SZI$  fait que l'on peut confondre  $ZI$  avec  $ZS$ . Donc

$$\sin i = \sin \lambda \cdot \sin P$$

$$\text{ou } i = P \sin \lambda$$

et comme  $P = n \cotg \lambda + p$ , il vient

$$i = n \cos \lambda + p \sin \lambda.$$

Pour la détermination de  $m$  et de  $n$  on se sert d'étoiles circumpolaires dites fondamentales dont les différences  $d'A$  sont connues avec une grande précision par des observations méridiennes très nombreuses faites dans différents observatoires.

Si on voulait vérifier en même temps les  $A$  de ces fondamentales, il faudrait observer les deux passages supérieur et inférieur, en ayant soin de s'assurer par une gisée sur la mire que les constantes instrumentales n'ont pas varié dans l'intervalle.

De plus pour éliminer l'erreur de la pendule qui a pu varier entre les passages inférieur et supérieur d'une même étoile, on observe ces passages pour deux étoiles dont les  $A$  diffèrent d'à peu près  $180^\circ$ ; le passage inférieur de l'une a alors lieu presque en même temps que le passage supérieur de l'autre.

Restent encore les erreurs accidentelles sur le passage de quelque façon qu'on note ce passage: pour les réduire on a plusieurs fils verticaux dont le fil central définit l'axe optique; les autres constituent

70.

autant d'axes optiques inclinés sur le précédent, et affectés par conséquent d'une erreur de collimation  $P$ . Mais à deux fils équidistants du fil central, correspondent deux axes optiques, également inclinés sur l'axe optique vrai et par conséquent deux erreurs  $P$  égales et de signe contraire. On note donc, comme avec un seul fil les passages de l'étoile sur les différents fils; les erreurs  $P$  disparaissent dans la somme, qui ne contient plus que les erreurs accidentelles faites sur chaque fil.

Mode d'observation :- à l'œil et à l'oreille:

L'observateur compte les secondes au moyen d'une pendule et il interpose la fraction de seconde qui correspond au passage de l'étoile devant tel fil. Cette méthode est entachée de l'erreur personnelle: un même observateur par exemple notera toujours le passage trop tard, et le retard n'est pas le même pour les différents observateurs. L'erreur personnelle doit être aussi constante que possible pour un même observateur et ne pas dépendre des conditions où se trouve l'observateur, de façon qu'elle s'élimine de la différence des  $R$ .

2° Emploi du chromographe:

À l'instant du passage, l'observateur trace, au moyen d'une transmission électrique, un signe sur une bande de papier animée d'un mouvement uniforme et sur laquelle s'enregistrent également les battements du pendule. Cette méthode ne supprime pas l'erreur personnelle, mais elle permet de rapprocher les fils et d'en observer un plus grand nombre, donc de réduire les erreurs accidentelles.

3° Procédé Repsold:

L'observateur maintient constamment sur l'étoile le fil mobile d'un micromètre. Quand le fil arrive, à une position déterminée, cette position est marquée

par un signal automatique. Ce procédé élimine l'erreur personnelle.

### Règlage de la pendule.

Elle peut se faire par la lunette méridienne: il suffit d'observer le passage d'une même étoile deux jours consécutifs; la pendule doit avoir avancé de 24 heures sidérales entre ces deux passages. On ne peut pas cependant par ce procédé se rendre compte d'une erreur périodique de période = 24 heures. Dans ce dernier cas, on observe parmi les étoiles fondamentales, les étoiles voisines de l'équateur ou étoiles fondamentales horaires, dont le mouvement est par conséquent plus rapide; il suffit de mesurer avec la pendule la différence des Az de deux de ces étoiles, pour vérifier la marche de la pendule, cette différence étant parfaitement connue d'autre part par un très grand nombre d'observations différents.

### Mesure des Longitudes.

Elle peut aussi se faire à l'aide de la lunette méridienne; on établit deux stations, en chacune desquelles l'observateur règle sa pendule d'après ses observations méridiennes. Des signaux télégraphiques permettent de comparer les heures marquées par les deux pendules. Pour éliminer l'erreur égale à la différence des erreurs personnelles on permute les deux observateurs entre les deux stations.

On a avantage pour la mesure des longitudes à observer des étoiles zénithales, car alors l'erreur d'azimut n'existe pas; l'erreur d'inclinaison subsiste, mais elle est inévitable dans tous les cas. Quand il s'agit de la mesure d'une déclinaison, elle sera également plus sûre dans les observatoires où l'étoile passe près du zénith parce qu'on est ainsi affranchi de l'erreur de réfraction.

Tout ce qui précède suppose les tourillons bien tournés, c'est-à-dire que le mouvement de la lunette, est une rotation autour d'un axe idéal.

On peut étudier les variations du diamètre des touillons par une méthode d'interférences ; ces variations ont en général des effets négligeables.

## — Instruments équatoriaux —

Un équatorial est constitué par une lunette entraînée dans le mouvement diurne grâce à un mouvement d'horlogerie ; la lunette yise ainsi constamment le même astre.

L'appareil comporte deux axes de rotation : un axe polaire parallèle à l'axe du monde, et un second axe perpendiculaire au premier, autour duquel la lunette peut prendre un mouvement de déclinaison, ce qui permet de passer d'une étoile à une autre de déclinaison différente.

L'équatorial est enfermé sous une coupole percée d'une ouverture en se reposant sur des galets ou sur un support hydraulique, car cette coupole doit tourner avec la lunette.

Ces instruments sont donc moins précis que les instruments méridiens, qui restent fixes. Ils servent pour des études d'astronomie physique ou pour des mesures différentielles.

Supposons par exemple dans le champ, une étoile, dite de comparaison, qui aura été étudiée à la lunette méridienne ; on mesurera à l'équatorial la différence entre les coordonnées d'un astre voisin que l'on étudie et les coordonnées de cet astre de comparaison : la différence des coordonnées rectangulaires, par exemple, se mesurera à l'aide du micromètre à fils mobiles ; ces coordonnées par rapport à des axes passant par l'astre de comparaison et dont l'un est parallèle et l'autre normal au plan méridien sont  $d\delta$  et  $dR \sin \delta$ .

On a ainsi la différence des déclinaisons et des ascensions droites. On peut aussi, surtout pour les étoiles doubles, mesurer les coordonnées polaires : On

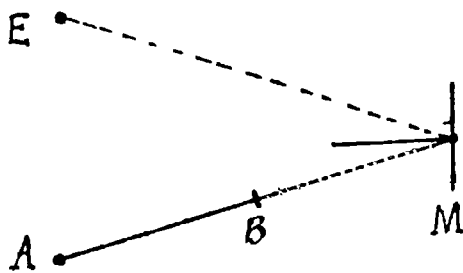


emploie un micromètre dont le fil est mobile au moyen d'une vis et qu'on peut faire tourner d'un angle, mesurable à l'aide d'un limbe et d'un vernier; on peut aussi orienter le fil. On place alors l'astre central sur la croisée et l'on mesure la distance comme précédemment, et l'on fait tourner le micromètre jusqu'à ce que le fil mobile bisecte les deux astres: on a ainsi l'angle polaire ou angle de position.

Les équatoriaux servent aussi à la photographie céleste; la pose doit être plus ou moins longue, suivant que l'astre envoie plus ou moins de lumière.

Avec le Soleil, elle est instantanée; avec la Lune, par exemple, la pose sera d'une fraction notable de minute, pendant laquelle l'astre se déplacera, c'est pourquoi il faut rendre l'instrument mobile; ou mieux, pour éviter les vibrations de la plaque, la lunette est fixe et la plaque tourne seule. Pour photographier une région du Ciel, la pose doit être longue, l'observateur corrige alors les irrégularités du mouvement d'horlogerie qui entraîne la plaque, en maintenant constamment une étoile de cette région au centre du champ d'un chercheur. Une seconde correction sur le mouvement d'horlogerie est nécessaire par suite des déplacements de l'étoile dus à la réfraction.

Pour photographier un astre mobile, une comète par exemple, il faut régler le mouvement de la plaque sur celui de l'astre; les étoiles ont alors un mouvement relatif par rapport à la plaque, et leur image a l'apparence de petites traînées rectilignes.



## Siderostats.

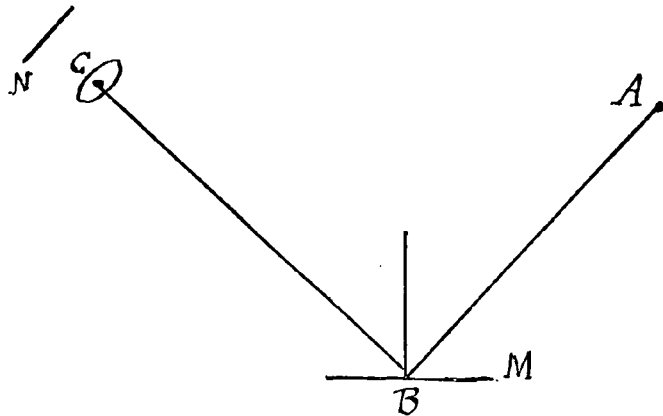
Les observations à l'équatorial sont fatigantes et mal commodes, et on le remplace souvent par les

74

siderostats.

Le siderostat polaire comprend une lunette fixe  $AB$  parallèle à l'axe du monde et un miroir  $M$  entraîné dans le mouvement diurne : un rayon issu d'une étoile  $E$  se réfléchit sur ce miroir et pénètre dans la lunette parallèlement à l'axe optique. Le miroir doit faire un tour en 24 heures autour de l'axe du monde, c'est-à-dire autour de l'axe optique. Pour faire varier la déclinaison ou l' $R$  de l'étoile, il suffit de faire varier l'inclinaison ou l'orientation du miroir. L'image du Ciel semble tourner autour de la croisée du réticule.

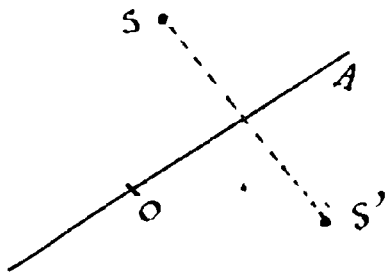
Le Coudé comprend un premier tube  $AB$



portant l'oculaire et mobile sur lui-même autour de son axe parallèle à l'axe du monde, et un second tube  $BC$  perpendiculaire au précédent portant l'objectif et entraîné dans le mouvement diurne. À la rencontre de ces deux tubes se trouve un miroir plan  $M$  à  $45^\circ$  sur chacun des deux axes ; enfin en avant de  $C$  se trouve un second miroir  $N$  dont

on peut faire varier l'inclinaison, de façon à ramener une étoile quelconque dans une direction perpendiculaire à l'axe du monde.

Le Cœlostat comprend un miroir  $OA$  faisant



un tour complet en 48 heures autour du monde  $O$  perpendiculaire au plan de figure ; l'image  $S'$  d'un astre dans ce miroir reste donc fixe.

On peut orienter le cœloststat de façon à placer

la lunette horizontale, ce qui facilite les observations. Malgré les avantages de ces divers appareils, ils ne feront sans doute pas disparaître complètement et définitivement les équatoriaux directs. Les inconvénients des sidérostats résultent de l'emploi de miroirs; ceux-ci ne sont jamais parfaitement dressés, et de plus ils sont sensibles aux variations de température, et pour cette cause, ils peuvent donner des images troubles.

Pour régler le mouvement d'horlogerie on peut employer le régulateur de Foucault; c'est une combinaison du modérateur à ailettes et du régulateur à boules, qui fait varier d'une façon continue la résistance de l'air.

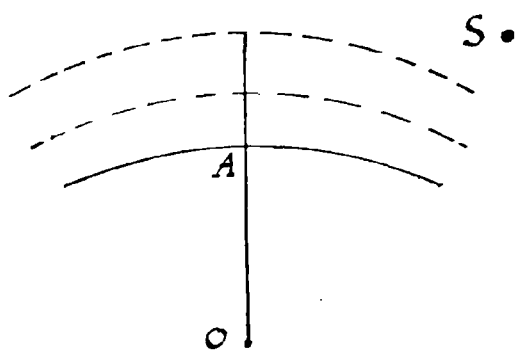
---

## Septième Leçon.

---

### Réfraction atmosphérique.

---



Nous supposerons la terre sphérique et l'atmosphère formée de couches sphériques homogènes, concentriques à la terre.

L'observateur étant en A et l'astre observé en S,

76.

Le plan OAS est un plan vertical pour l'observateur et un plan de symétrie pour les couches atmosphériques : le rayon lumineux issu de S restera donc dans ce plan ; la réfraction n'agit donc pas sur l'azimut, mais seulement sur la distance zénithale ; elle est la même, pour une distance zénithale donnée, pour tous les azimuts au Nord et au Sud. Cependant cette conclusion n'est qu'approchée, la Terre n'étant pas rigoureusement sphérique ni les couches atmosphériques rigoureusement homogènes.

### Détermination de la Réfraction par le calcul.

La théorie de l'émission et celle des ondu-  
lations expliquent toutes deux la loi de Descartes :  
dans la première de ces théories, le rayon lumineux  
résulte de la propagation des corpuscules attirés par  
les corps matériels, la vitesse de propagation augmen-  
tant avec la réfringence du milieu. Le travail de  
ces attractions est  $S dU$ ,  $U$  désignant le potentiel.

Nous devons supposer que ce potentiel est une  
fraction de l'indice de réfraction du milieu  
 $U = \varphi(n)$ . Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Et si ce corpuscule passe d'un point situé  
dans un milieu d'indice  $n$  en un point où l'indice  
est  $n'$ , le théorème des forces vives donne

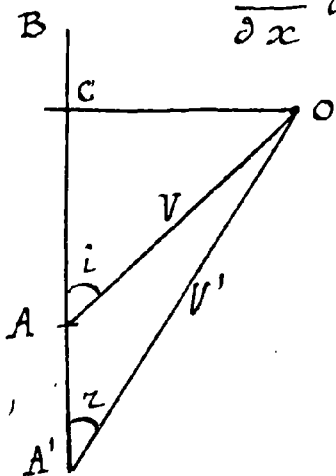
$$\frac{V'^2 - V^2}{2} = U' - U,$$

la masse du corpuscule étant supposée égale  
à l'unité.

Soit  $(OA)$  le vecteur représentant sa vitesse  
à  $t$ , et  $(OA')$  sa vitesse à l'instant  $t + dt$  ; le  
vecteur  $(AA')$  représente en grandeur, direction,  
et sens la variation de vitesse dans le temps  
 $dt$ .

Les projections de  $AA'$  sont

$$\frac{\partial U}{\partial x} dt, \frac{\partial U}{\partial y} dt, \frac{\partial U}{\partial z} dt.$$



La surface de séparation des deux milieux a pour équation  $U = C^te$  et

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

sont les paramètres directeurs d'une normale à cette surface.  $AA'$  est donc normale à cette surface et les angles

en  $A$  et  $A'$  sont les angles d'incidence et de réfraction:

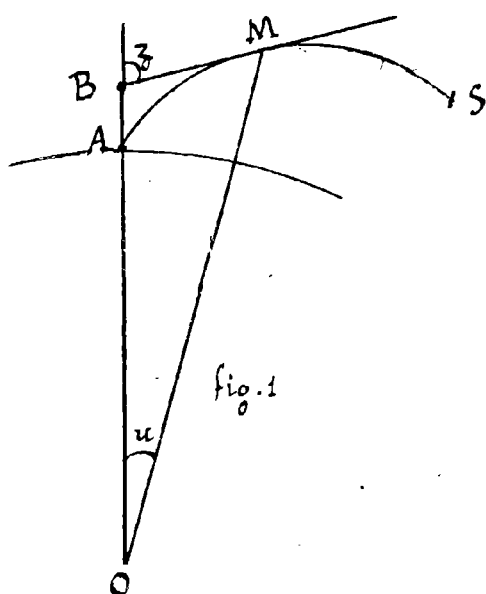
$$OC = V \sin i = V' \sin r.$$

Il suffit donc, pour obtenir la loi de Descartes,  $n \sin i = n' \sin r$ , de supposer la vitesse de propagation proportionnelle à l'indice du milieu.  
On en déduit

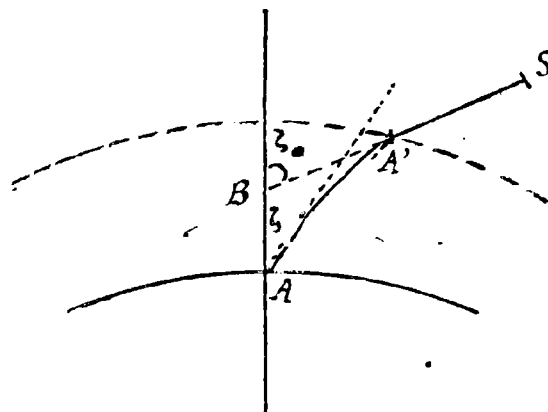
$$V = \frac{n^2}{2}.$$

La théorie des ondulations au contraire arrive à cette conclusion que la vitesse de propagation et l'indice du milieu sont inversement proportionnels et que la trajectoire du rayon lumineux est le chemin d'un point à un autre qui est parcouru dans le temps le plus court. Bien que la théorie de l'émission soit fautive, nous pourrions l'appliquer à la détermination de cette trajectoire en tenant compte de la réfraction atmosphérique; car cette trajectoire est la même que dans la théorie des ondulations.

Si  $AMS$  est cette trajectoire, la tangente  $MB$  en un point  $M$  quelconque fait avec la verticale du



lien d'observation un angle  $z$  tel que  $z = i + v$ ,  $i$  étant l'angle d'incidence (fig. 1). Cette trajectoire comprend une partie rectiligne depuis l'astre jusqu'au point  $A$  où le rayon lumineux pénètre dans l'atmosphère ; à partir de ce point, la trajectoire s'incurve par suite de la réfraction.



L'angle  $z_0$  est la distance zénithale vraie ; c'est la valeur de l'angle  $z$ , au point d'entrée du rayon dans l'atmosphère ; l'angle  $z$  est la distance zénithale observée.

D'autre part, par raison de symétrie, toutes les attractions exercées par l'atmosphère sur le corpuscule lumineux, admettent une résultante unique passant par le centre de la Terre ; le théorème des aires est donc applicable pour un point  $M$  quelconque de la trajectoire et donne :

$$nr \sin i = C \quad (1)$$

$r$  désignant le rayon  $OM$ , nous prendrons pour unité le rayon terrestre. Au point  $A$   $u = n_0$ ,  $i = z$ , ces conditions déterminent la constante et la relation (1) devient

$$nr \sin i = n_0 \sin z \quad (2)$$

ou par différentiation

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \cotg i \cdot di = 0$$

Or

$$\frac{dr}{r} = \cot g i \cdot dv, \text{ d'où } \frac{dn}{n} + \cot g i (dr + di) = \frac{dn}{n} + dz \cot g i = 0$$

d'où

$$dz = - \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i.$$

La correction à faire à  $z$  pour avoir  $z_0$  est la quantité dont  $z$  augmente dans le trajet  $AA'$ , c'est donc

$\int_1^{n_0} \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i$ , correction de réfraction  $n_0$  étant l'indice de réfraction à la surface de la Terre.

On a  $z < z_0$ ; la réfraction rapproche donc l'astre du zénith.

La relation (2) donne  $\sin i = \frac{n_0}{nr} \sin z$

$$\text{d'où } \operatorname{tg} i = \frac{n_0 \sin z}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 \sin^2 z}}$$

$$\text{Or } n^2 r^2 - n_0^2 \sin^2 z = n^2 r^2 (\cos^2 z + \alpha \sin^2 z) \text{ avec}$$

$$\alpha = 1 - \frac{n_0^2}{n^2 r^2}$$

La correction de réfraction est donc

$$\begin{aligned} z_0 - z &= \int_1^{n_0} \frac{dn}{n^2 r} \frac{n_0 \sin z}{\sqrt{\cos^2 z + \alpha \sin^2 z}} \\ &= \int_1^{n_0} dn \frac{n_0}{n^2 r} \operatorname{tg} z (1 + \alpha \operatorname{tg}^2 z)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Posons  $n = 1 + \rho$ ,  $\rho$  étant proportionnel à la densité du gaz; et  $r = \frac{1}{1-s}$  ou

$$s = 1 - \frac{1}{r} \text{ et } ds = \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{n_0^2}{n^2 r^2} = \frac{(1 + \rho_0)^2 (1 - s)^2}{(1 + \rho)^2} = 1 - \alpha$$

$$\frac{n_0}{n^2 r} = \frac{(1 + \rho_0) (1 - s)}{(1 + \rho)^2}$$

80.

La quantité sous le signe  $\int$ , peut se développer suivant les puissances des quantités  $p, p_0, s$  qui sont très petites.

La correction de réfraction s'écrit alors

$$\int_0^{p_0} dp (1+p_0) (1-s) (1+p)^{-2} \operatorname{tg} \zeta (1 + \alpha \operatorname{tg}^2 \zeta)^{-\frac{1}{2}} = A \operatorname{tg} \zeta + B \operatorname{tg}^3 \zeta + \dots$$

où les constantes  $A, B, \dots$  sont des combinaisons linéaires d'intégrales de la forme

$$\int p^p s^q dp,$$

$p$  et  $q$  pouvant être nuls : en effet les quantités

$\frac{(1+p_0)(1-s)}{(1+p)^2}$  et  $\alpha$  sont développables suivant les puis-

sonces croissantes de  $p$  et de  $s$ . Ces intégrales  $\int p^p s^q dp$  seront de l'ordre  $p+q+1$ , si  $p$  et  $s$  sont considérés comme du premier ordre.

Or  $p$  reste petit ;  $s$  dépend du rapport de la hauteur de l'atmosphère au rayon terrestre, cette hauteur est inconnue, mais on a pu constater que pour des hauteurs qui sont de très petites fractions du rayon terrestre, l'indice de réfraction est très voisin de l'indice du vide ( $= 1$ ) ; on peut en conclure que  $s$  est très petit car  $n$  reste voisin de l'unité ; si on néglige les quantités du troisième ordre, on aura pour sa valeur approchée de la correction de réfraction

$$\zeta_0 - \zeta = A_1 \operatorname{tg} \zeta + B_1 \operatorname{tg}^3 \zeta$$

où les constantes  $A_1$  et  $B_1$  seront déterminées si l'on connaît les 3 intégrales

$$\int_0^{p_0} dp, \int_0^{p_0} p dp \text{ et } \int_0^{p_0} s dp.$$

Ces intégrales peuvent être calculées sans rien connaître de la constitution de l'atmosphère, ce qui n'a pas lieu pour les intégrales d'ordre supérieur.



$$\text{En effet } \int_0^{p_0} dp = p_0, \quad \int_0^{p_0} \rho dp = \frac{p_0^2}{2},$$

où  $\rho$  est connu par l'observation du thermomètre et  $p_0$  du baromètre à la surface de la Terre.

Enfin  $p$ , désignant la pression atmosphérique et  $g$  l'intensité de la pesanteur au point  $M$ , la théorie de l'hydrostatique donne

$$\frac{dp}{dz} = -gk\rho,$$

$k\rho$  désignant la densité de l'air; car, d'après les lois de la réfraction  $\rho = m-1$  est proportionnel à cette densité de sorte que  $k$  est une constante connue; mais d'après la loi de l'attraction Newtonienne, si  $g_0$  est l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre, en un point de même latitude que  $M$ , c'est-à-dire en  $A$ , sensiblement on a

$$g = \frac{g_0}{r^2} \quad \text{et} \quad dp = -g_0 k\rho \frac{dz}{r^2} = -g_0 k\rho ds.$$

d'où  $\int_0^{p_0} \rho ds = -\frac{1}{g_0 k} \int_0^{p_0} dp = -\frac{p_0}{g_0 k}$   
 $p_0$  étant la pression au point  $A$ .

$$\text{Or } \int_0^1 s dp = sp - \int \rho ds$$

aux deux limites de l'atmosphère  $sp = 0$  car  $s = 0$  à la surface de la Terre, et  $\rho = 0$  dans le vide. Donc

$$\int_0^1 s dp = \frac{p_0}{g_0 k}.$$

Le thermomètre et le baromètre suffisent pour déterminer les constantes de la formule de réfraction atmosphérique. Cette formule est applicable pour des distances zénithales inférieures à  $75^\circ$ . Au delà, il faudrait connaître la loi de décroissance de la température.

Près de l'horizon la réfraction atteint près de  $30'$ , valeur du diamètre apparent du soleil, de sorte que

82.

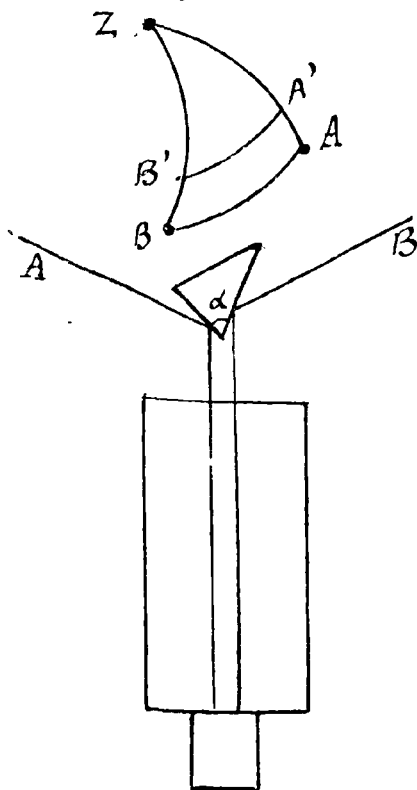
quand le Soleil commence à disparaître, il serait déjà couché s'il n'y avait pas de réfraction.

### Détermination de la réfraction atmosphérique par observations.

On détermine la latitude du lieu; cela peut se faire par une détermination d'azimut; il n'y a donc pas à s'inquiéter de la réfraction. On observe une étoile qui passe au zénith, et pour laquelle par suite la correction de réfraction est nulle; sa déclinaison étant connue, on a donc à chaque instant sa distance zénithale vraie; on mesure sa distance zénithale apparente. Si  $t$  désigne le passage inférieur de cette étoile, on peut ainsi déterminer la loi de réfraction jusqu'à la distance zénithale  $z = ZA$ ; on ira ainsi jusqu'à l'horizon en observant d'autres étoiles et se servant des corrections trouvées antérieurement.

### Méthode de Læssly:

Pratiquement on n'opère pas ainsi; s'il n'y avait pas de réfraction, la distance angulaire de 2 étoiles A et B serait constante; l'angle  $A'B'$  est différent de  $AB$  et n'est pas constant. Pour mesurer ses variations, on place devant la lunette un prisme d'angle  $\alpha$  tel que la distance angulaire  $AB$  soit voisine de  $2\alpha$ .

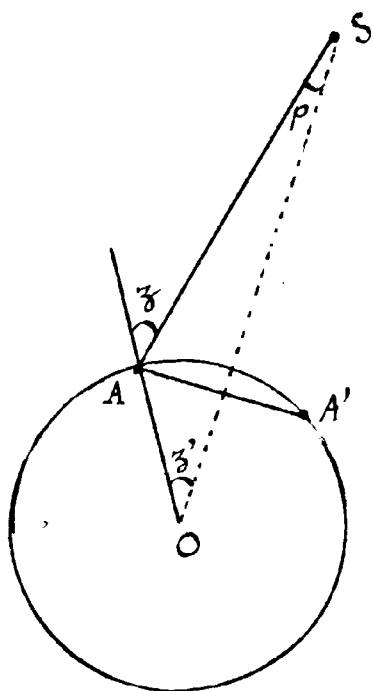


Si  $\widehat{AB} = 2\alpha$ , les rayons issus des deux étoiles sont parallèles après réflexion et leurs images sont confondues: Si  $\widehat{AB} = 2\alpha + \epsilon$ , ces deux images ont une certaine distance angulaire  $\epsilon$  très petite qu'on

mesure au micromètre.

L'orientation du prisme n'importe pas.

### Correction de parallaxe.



Cette correction sur les distances zénithales est nécessaire, parce que l'observateur n'est pas au centre de la Terre; et la distance zénithale  $z$  observée en A est différente, de la distance  $z'$  observée en O. La correction est mesurée par l'angle  $p$  en S, angle sous lequel on voit de l'étoile le rayon terrestre aboutissant au lieu de l'observation. Cet angle porte le nom de parallaxe de hauteur.

$$\frac{\sin p}{\sin z} = \frac{R}{d} \quad \text{ou} \quad p = \frac{R}{d} \sin z$$

$R$  désignant le rayon terrestre; la parallaxe est donc proportionnelle au sinus de la distance zénithale. Pour  $z = 90^\circ$ , on a  $p_0 = \frac{R}{d}$ , c'est la parallaxe horizontale.

Donc la parallaxe de hauteur est égale au produit de la parallaxe horizontale par le sinus de la distance zénithale.

Pour mesurer  $\frac{R}{d}$ , constante de parallaxe, on observe au même instant un même astre de deux lieux différents A et A' ce qui détermine les deux directions AS et A'S par ces deux points, et par suite le point S et la distance OS =  $d$ .

On peut aussi faire des observations en un même lieu: on observe un astre à trois passages consécutifs. Si l'astre était fixe, l'observateur serait en A au moment du premier passage,

84.

par suite du mouvement diurne de la Terre; et les deux premières observations suffiraient à déterminer le point  $S$  par les directions  $AS$  et  $A'S$ . Mais les seuls astres à parallaxe sensible sont: la Lune, les planètes et ces astres ont bougé entre les deux premières observations, au bout de 24 heures l'observateur est revenu au point  $A$ . La moyenne des deux observations extrêmes faites en  $A$  donne la direction de l'astre à l'heure intermédiaire, c'est-à-dire à l'instant où a été faite l'observation en  $A'$ .

Par raison de symétrie, la parallaxe n'agit pas sur l'azimut.

Les coordonnées  $A, z, \delta$  et  $AI$  sont liées par certaines relations qu'on a vues en trigonométrie sphérique; et deux de ces coordonnées étant connues, les deux autres le sont aussi:

$$\delta = f(A, z) \text{ et } AI = f_1(A, z).$$

On aura ainsi la correction de parallaxe en fonction de  $\delta$  ou de  $AI$  par les relations

$$\alpha \delta = \frac{d f}{d z} dz \quad dAI = \frac{\partial f_1}{\partial z} dz$$

---

## Principes de la navigation astronomique.

---

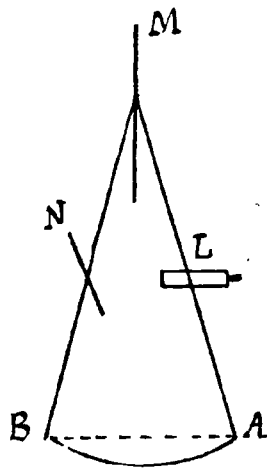
On peut déterminer la position à la mer de deux façons:

1<sup>o</sup> Par l'estime: Connaissant la position exacte du navire à un instant donné, pour avoir cette position à un instant ultérieur, il

faut déterminer la trajectoire du navire et, par suite, sa gîte en grandeur, direction et sens; la direction de cette gîte est donnée par la boussole, et la grandeur par le loch. Ce procédé est peu précis; car ce qu'on détermine ainsi, c'est la gîte relative par rapport à l'eau, et on ne tient pas compte des courants marins.

2°. Par des observations astronomiques;

Ces observations nécessitent des instruments spéciaux, et pour se mettre à l'abri des oscillations du navire, on gise simultanément les deux points dont on veut mesurer la distance angulaire.

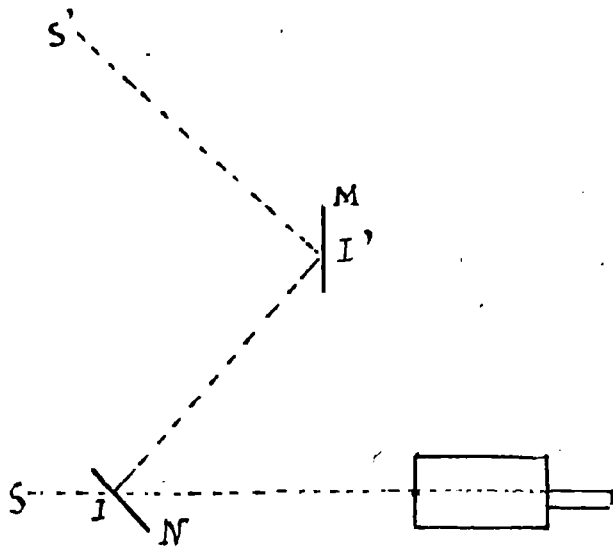


Ces instruments sont des réflecteurs que l'on tient à la main; l'un d'eux est le sextant.

Il comprend un secteur circulaire  $OAB$  dont l'arc est gradué, un miroir  $N$  perpendiculaire au plan du secteur et parallèle à  $OA$ ; et un second miroir  $M$  perpendiculaire au même plan et mobile autour du centre  $O$ , enfin une lunette  $L$  fixe.

Le miroir  $N$  est étamé sur sa moitié la plus rapprochée de  $O$ ; de sorte que dans la lunette on peut observer deux objets, l'un vu directement à travers  $N$ , l'autre qu'après double réflexion sur  $M$  et sur  $N$ .

Soit  $S$  le point gisé directement; ce point est sur l'axe optique de la lunette; si les deux miroirs font entre eux un angle  $\alpha$ , le rayon réfléchi 2 fois  $SI$  est dévié de  $2\alpha$  par rapport au rayon  $S'I'$ .



86.

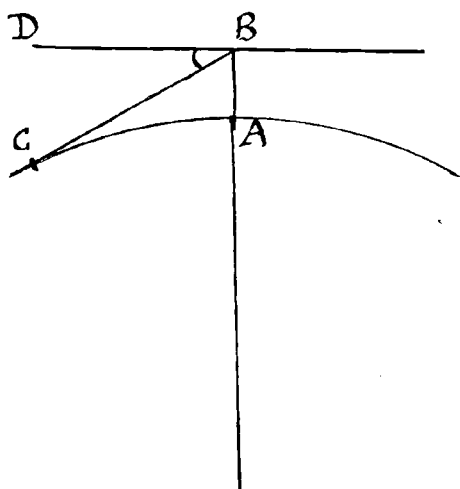
Si donc les deux images de  $S$  et  $S'$  coïncident, le rayon issu de  $S$  et le rayon issu de  $S'$  et réfléchi 2 fois étant parallèles, l'angle des rayons directs est  $2\alpha$ , c'est la distance angulaire cherchée. Cette coïncidence est effectuée par le déplacement d'une alidade qui porte le miroir  $M$ . Pour l'observer commodément, on diminue l'éclat de l'image directe par un écran.

Le sextant n'élimine pas l'erreur d'excentricité.

Un autre réflecteur est le cercle à réflexion, fondé sur le même principe, il est plus lourd que le sextant, mais comme il porte deux verniers, il permet d'éliminer l'erreur d'excentricité.

On peut déterminer, à l'aide du sextant la distance angulaire de deux astres, ou les distances zénithales, mais pas les azimuts.

Pour avoir la hauteur au-dessus de l'horizon d'un astre ayant un diamètre apparent, on amène le bord inférieur de cet astre tangent à l'horizon et l'on corrige du diamètre apparent. Il y a encore à faire une correction due à la dépression du niveau de la mer par rapport



au point d'où l'on observe; ce point  $B$  est en effet à quelques mètres au-dessus du niveau de la mer, et l'horizon est le cône du sommet  $B$  circonscrit à la Terre; il est donc différent de l'horizon vrai  $BD$  qui est le plan perpendiculaire au rayon  $AB$ .

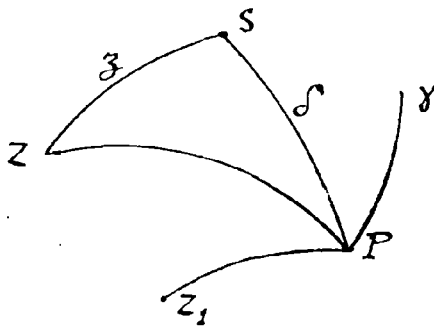
La correction est l'angle  $CBD$  ou dépression de l'horizon. De plus le rayon visuel  $BC$  n'est

pas rectiligne par suite de la réfraction. Des tables donnent l'angle  $B$ .

Pour se servir du sextant à terre, on mesure

la distance entre l'image que directement et l'image que par réflexion sur un miroir horizontal; la moitié de l'angle mesuré est la hauteur au-dessus de l'horizon. Cet horizon artificiel est constitué par un bain de mercure ou un miroir plan muni d'un niveau.

La surface de la mer peut ne pas être très nette; pour repérer la verticale, on se sert d'une toupie tournant rapidement; son axe oscille donc lentement autour de la verticale. Ayant mesuré la distance zénithale  $z$  de l'astre  $S$ , on connaît  $SP = d$ , son  $R$ , et de plus on connaît l'heure de Paris, c'est-à-dire l'angle  $\gamma PZ_1$ , et par suite  $SPZ_1$ .



Joignons les points  $S, Z, Z_1$  au centre de la Terre et soient  $\underline{Z}, \underline{S}, \underline{Z}_1$  les points où ces droites  $OZ, OS, OZ_1$  perceront la surface de la Terre. Le point  $Z_1$  sera

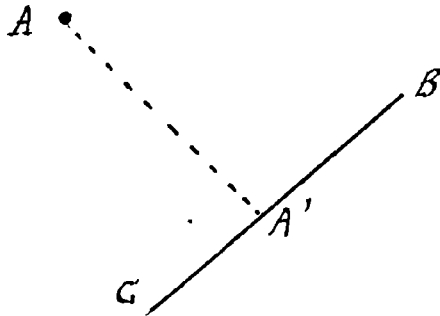
Paris, le point  $\underline{S}$  sera connu puisque l'on connaît  $SP$  et  $SPZ_1$ ; le point  $\underline{Z}$  est le lieu cherché; le lieu des points  $\underline{Z}$  à la surface de la Terre telle que la distance zénithale  $SZ$  soit la distance  $\gamma$  observée et un petit cercle de pôle  $S$ . L'observateur sait donc qu'il se trouve sur ce cercle dit "cercle de hauteur".

Mais il sait toujours à peu près où il se trouve, c'est-à-dire qu'il sait qu'il se trouve sur tel arc de ce petit cercle; il assimile cet arc à une droite, qu'il appelle "droite de hauteur". Il trace sur sa carte la portion utile de la droite de hauteur. 2 droites de hauteur déterminent la position du navire.

Si il s'agit d'entrer dans une passe, le navigateur marchant, suivant l'axe de cette passe, on observe une étoile à droite ou à gauche de sa route; la droite de hauteur correspondante sera sensiblement parallèle à l'axe de la passe.

Pour mesurer une distance parcourue on a

parcourir, on observera au contraire une étoile devant ou derrière le navire dans la direction de sa marche ;



la droite de hauteur est alors perpendiculaire à la marche.

Soit A le point estimé, BG la droite de hauteur que l'on vient de déterminer, le lieu probable est le point A' pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BG.

Le sextant ne donne comme précision que la minute d'arc qui correspond au mille marin (1852 mètres) ; le marin ne connaîtra donc sa position qu'à un mille près.

Au contraire les observations méridiennes donnent une précision beaucoup plus grande, allant au dixième de seconde d'arc pour les étoiles fondamentales.

---

## Huitième Leçon

### Mouvement apparent du Soleil et des planètes.

Mouvement apparent du Soleil. - Le Soleil et les planètes sont entraînés dans le mouvement diurne ; de plus ils ont un déplacement propre sur la Sphère Céleste ;



de sorte que leur gitesse apparente totale est la résultante de deux gites.

La trajectoire apparente du Soleil sur la sphère céleste est un grand cercle qu'on appelle l'Ecliptique.

Les points équinoxiaux sont les points d'intersection de l'équateur et de l'écliptique. De ces deux points l'équinoxe de printemps est le point  $\gamma$ . Le Soleil ayant un diamètre apparent, pour étudier son mouvement au moyen d'observations méridiennes, on observe le passage des deux bords extrêmes; la moyenne donnera l'instant du passage du centre du Soleil et la différence permettra de calculer son diamètre apparent.

De même, pour observer la déclinaison, on pointe sur les bords inférieur et supérieur du Soleil.

Il faut, avant tout, déterminer l'obliquité  $\omega$  de l'écliptique sur l'équateur. C'est la déclinaison maxima du Soleil; elle est atteinte aux solstices, et elle est facile à observer, car la déclinaison varie lentement au voisinage de ce maximum. Ayant ainsi

mesuré l'obliquité de l'écliptique, cherchons l'ascension droite du point  $\gamma$  par rapport à l'origine provisoire adoptée jusqu'ici.

$\gamma P$  étant l'équateur,  $\gamma S$  l'écliptique et  $SP$  un arc de grand cercle mené par le Soleil, perpendiculairement à l'équateur; on a:

$$\text{tg } SP = \cotg \delta = \text{tg } \omega \sin (R - h)$$

$h$  désignant l'ascension droite de  $\gamma$ . Les observations méridiennes donnent  $R$  et  $\delta$ ; on connaît  $\omega$  par l'observation du Soleil au solstice; on déduit donc  $h$ ; différentes observations montrent que  $h$  est constant: la trajectoire du Soleil sur la sphère céleste est donc bien une courbe plane. Nous choisirons comme origine définitive des  $R$  le point  $\gamma$ : une ascension droite sera donc désormais la quantité  $R - h$ .

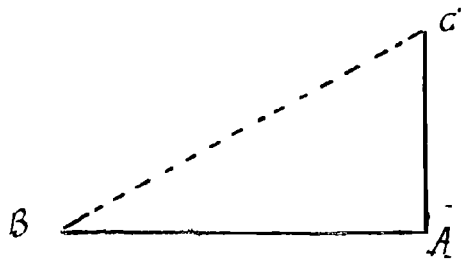
Les anciens observaient la déclinaison du Soleil en mesurant l'ombre  $AB$  sur le plan horizontal

90.

d'une tige verticale  $AG$ ,

$$AB = AG \operatorname{tg} z$$

$z$  désignant la distance zénithale du Soleil.

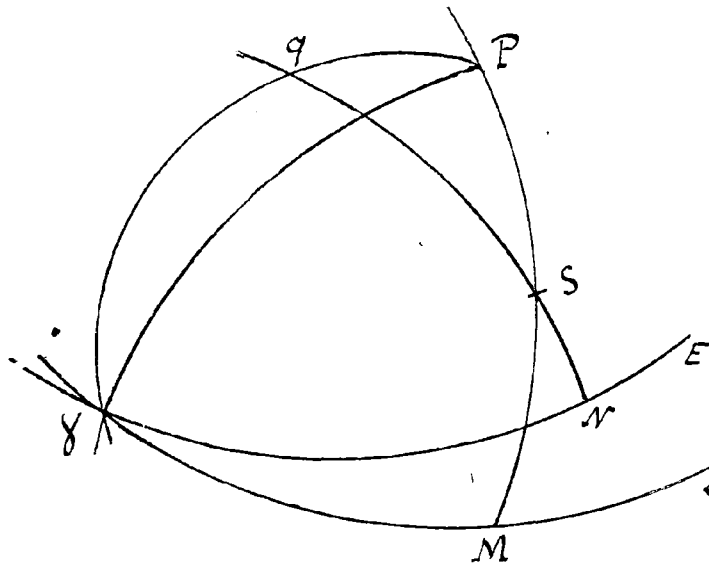


On observerait cette ombre chaque jour au moment du passage du Soleil au méridien; l'observation faite aux jours des deux solstices donnait à la fois la latitude du lieu et l'obliquité de l'écliptique.

### Coordonnées écliptiques.

Nous prendrons pour nouvelles coordonnées la longitude et la latitude astronomiques, elles sont définies

comme la longitude et la latitude géographiques; mais le rôle que joue pour ces dernières l'équateur est joué par l'écliptique dans ce nouveau système de coordonnées. Les nouveaux axes sont invariablement liés à la sphère céleste, et non plus à la sphère terrestre.



Soit  $S$  l'astre observé; soient  $E$  et  $E'$  l'écliptique et l'équateur;  $SN$  un grand cercle perpendiculaire à  $E$  et  $SM$  un grand cercle perpendiculaire à  $E'$ ;  $P$  et  $q$  les pôles de l'équateur et de l'écliptique.

$$\gamma P = \gamma q = \frac{\pi}{2}$$

$SM$  est la déclinaison;  $PS$  est la distance polaire;  $\gamma M$  est l'ascension droite;  $SN$  est la latitude astronomique;

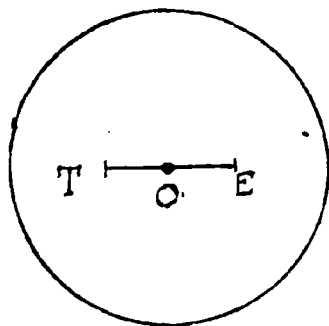
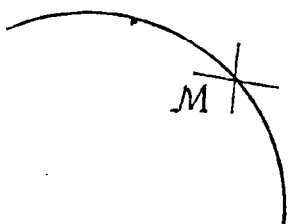
$Sq = \lambda$  est la colatitude ;  $\gamma N = L$  est la longitude astronomique. On passe facilement d'un système de coordonnées à l'autre en résolvant le triangle  $SPq$  ; dans ce triangle, les trois côtés sont  $SP = \delta$ ,  $Sq = \lambda$  et  $qP = \omega$ .  
L'angle  $\hat{P} = \frac{\pi}{2} + R$  et l'angle  $\hat{q} = \frac{\pi}{2} - L$ .

Il faut remarquer que la latitude du Soleil est constamment nulle.

Les premiers astronomes observèrent bientôt que la vitesse angulaire du Soleil sur l'écliptique n'était pas uniforme ; ce qu'ils expliquèrent en admettant que la Terre n'était pas au centre de ce cercle : c'est l'hypothèse de l'excentricité. Ils constatèrent en effet que le diamètre apparent du Soleil variait, et, par suite, sa distance à la Terre. Mais en réalité, ces variations qu'ils étaient incapables de mesurer étaient deux fois plus petites qu'elles n'auraient dû l'être dans cette hypothèse.

### Mouvement apparent des planètes.

Pour les planètes, les anciens supposaient qu'elles décrivait un cercle appelé épicycle dans un mouvement relatif rapporté à des axes mobiles dont l'origine  $M$  décrivait un cercle fixe appelé cercle déférent. Ils auraient pu, pour rendre compte de toutes les irrégularités du mouvement des planètes, superposer un nombre quelconque d'épicycles : celles-ci auraient pu remplir le rôle qui est joué aujourd'hui par les différents termes des séries trigonométriques représentant ce mouvement.



Mais au lieu de cela, les astronomes anciens préférèrent reprendre l'hypothèse de l'excentricité et la combiner

avec celle de l'équant : la Terre  $T$  ne coïncidait pas avec le centre  $O$  du déferent ; mais de plus la vitesse de  $M$  sur ce cercle n'est pas uniforme ; ce qui est uniforme, c'est la vitesse angulaire du point  $M$  ou d'un point  $E$  symétrique de  $T$  par rapport à  $O$ .

On faisait des hypothèses analogues pour le mouvement sur l'épicycle.

Si  $(x, y, z)$  sont les coordonnées du point  $M$  par rapport à la Terre, et  $(x', y', z')$  les coordonnées de la planète par rapport aux axes mobiles  $M$ , les coordonnées de la planète par rapport à des axes fixes seront

$$\begin{aligned} X &= x + x' \\ Y &= y + y' \\ Z &= z + z' \end{aligned}$$

Il résulte de cette symétrie qu'on pourrait intervertir le rôle du déferent et celui de l'épicycle. De plus si l'on multiplie le rayon de ces deux cercles par un même facteur  $\alpha$ ,  $X, Y, Z$  sont multipliées par ce facteur ; donc les rapports de 2 de ces coordonnées à la 3<sup>e</sup> ne sont pas modifiés, et par suite les directions des planètes non plus. Ainsi les observations ne sont pas modifiées par ce facteur  $\alpha$  qui peut ne pas être le même pour toutes les planètes. Les anciens pouvaient donc connaître le rapport des rayons de l'épicycle et du déferent d'une même planète ; mais ils ne pouvaient pas connaître les rapports des distances entre les planètes.

Pour les planètes supérieures, le déferent est décrit en un an ; pour les planètes inférieures, c'est l'épicycle. Invertissons les rôles de ces deux cercles de façon que tous les déferents soient parcourus en un an, et choisissons le multiplicateur  $\alpha$  pour chacune des planètes de façon que tous ces déferents aient même rayon, celui de l'orbite solaire.

Tous les points  $M$  sont sur un même cercle et on constate que tous les points  $M$  coïncident entre eux et avec le Soleil, c'est-à-dire que les planètes tournent autour du Soleil, qui tourne lui-même

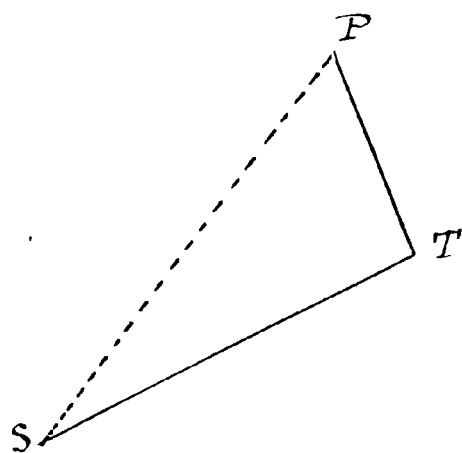
autour de la Terre : c'est là le système de Tycho-Brahé. On peut alors connaître le rapport des rayons des épicycles de 2 planètes différentes.

Copernic, qui avait reçu avant Tycho, avait proposé un système beaucoup plus satisfaisant où les positions relatives des astres étaient les mêmes mais où le Soleil, et non plus la Terre, était regardé comme fixe.

La précision des observations de Tycho-Brahé ne dépassait pas  $8''$  d'arc.

Mais cette précision était déjà trop grande pour que les hypothèses de Copernic (excentricité et équant) suffisent à expliquer les apparences des planètes. Kepler chercha alors à déduire des observations de Tycho-Brahé les lois du mouvement des planètes.

Ayant observé en fonction du temps les directions  $TS$  et  $TP$  qui vont de la Terre au Soleil et à la planète, il s'agit d'avoir en fonction du temps la direction  $SP$ , et les rapports des longueurs des côtés de  $TSP$ . Ce problème est indéterminé et



Kepler fit l'hypothèse complémentaire que les planètes décrivent des courbes fermées. L'observation du Soleil donne la longitude, c'est-à-dire la direction  $TS$ . L'observation de la planète donne la direction  $TP$ . On en déduit la longitude et la latitude géocentrique, coordonnées de  $P$  vues du centre de la Terre.

De même une parallèle à la direction  $S$  menée par le centre de la sphère céleste donne sur cette sphère un point dont les coordonnées sont la latitude et la longitude héliocentriques. Ce sont les coordonnées de  $P$  vues du Soleil; elles définissent la direction  $PS$ , mais ne sont pas observées directement.

Astronomie générale  
(1<sup>re</sup> édition - 1906-1907)

24<sup>e</sup> feuille

Il y a cependant un cas où l'on peut connaître la longitude héliocentrique ; c'est quand la planète est en conjonction, c'est-à-dire quand le plan  $TPS$  est perpendiculaire au plan de l'écliptique. Quand il y a opposition, la longitude du Soleil = la longitude géocentrique de la planète +  $180^\circ$  ; et le plan  $TPS$  étant perpendiculaire à l'écliptique, la longitude héliocentrique = la longitude géocentrique.

Il faut d'abord déterminer la période de la planète sur son orbite ; on observe pour cela plusieurs oppositions ; à la première la longitude de la planète est  $L$ , à la deuxième elle est  $L'$ , et si s'est écoulé  $n$  années dans l'intervalle, la planète a tourné de  $L' - L + 2n\pi$  entre ces deux oppositions. D'une opposition à l'autre, la Terre a pris sur la planète une avance égale à une circonférence. Et si il s'est produit  $p$  conjonctions, en comptant l'une des deux conjonctions extrêmes, la longitude géocentrique de la planète a augmenté de  $L' - L + 2n\pi - 2p\pi$  et il en est de même pour les longitudes héliocentriques qui sont égales aux longitudes géocentriques au moment des oppositions.

On connaît donc la vitesse angulaire moyenne entre les deux observations ; mais le mouvement n'étant pas uniforme, cette vitesse angulaire moyenne n'est pas la même que pendant la révolution toute entière ; seulement, si on observe des oppositions très éloignées, la différence devient négligeable, surtout si  $L'$  diffère peu de  $L$  ; si  $L' = L$ , la planète a tourné de  $2n\pi - 2p\pi$ , c'est-à-dire d'un nombre entier de circonférences, la vitesse angulaire moyenne dans l'intervalle sera bien la vitesse angulaire moyenne de l'astre sur l'orbite.

Pour trouver cette vitesse on peut aussi observer la planète à son passage aux nœuds, c'est-à-dire quand la latitude géocentrique est nulle. À ce moment le plan  $TPS$  coïncide avec l'écliptique et la latitude héliocentrique est également nulle. Celui de ces nœuds où la latitude passe du - au + est appelé nœud ascendant ; l'autre est le nœud descendant. L'intervalle entre deux passages consécutifs

au nœud ascendant par exemple est rigoureusement une révolution. On a donc la période de la planète.

Pour calculer sa longitude héliocentrique en fonction du temps, on la connaît aux oppositions ou aux conjonctions où elle est égale à la longitude géocentrique. On la connaît également aux époques qui diffèrent d'un nombre entier de périodes de celles d'une opposition ou d'une conjonction observée.

Ces oppositions observées étant très nombreuses, on connaît la longitude à des dates suffisamment rapprochées pour pouvoir interpoler.

On a ainsi la longitude héliocentrique en fonction du temps.

Enfin, pour avoir la forme de l'orbite, prenons une observation quelconque. On a alors 2 lieux du point P; la droite TP et un plan passant par le Soleil, perpendiculaire à l'écliptique et qui résulte de la connaissance de la longitude héliocentrique.

On connaîtra donc la latitude héliocentrique et le rapport  $\frac{SP}{ST}$ .

En comparant toutes les observations faites à une même date de l'année, de façon que ST soit constant, on aura les variations de SP d'où la forme de l'orbite de Mars.

En comparant toutes les observations faites à des dates séparées par un nombre entier de périodes de Mars de façon que SP soit constant, on aura les variations de ST d'où la forme de l'orbite terrestre.

Si l'on avait connu d'avance la forme de l'orbite terrestre, on aurait pu utiliser toutes les observations faites à différentes dates, c'est-à-dire en différents points de cet orbite; on aurait eu ST et ST' (longitudes du Soleil aux 2 époques) et le rapport  $\frac{ST'}{ST}$ . L'orbite de la planète étant déterminée, on pourrait inversement en déduire la forme de l'orbite terrestre.

En réalité Kepler a opéré, par approximations successives, sur la planète Mars. Il a déterminé la période et les coordonnées géocentriques de Mars;

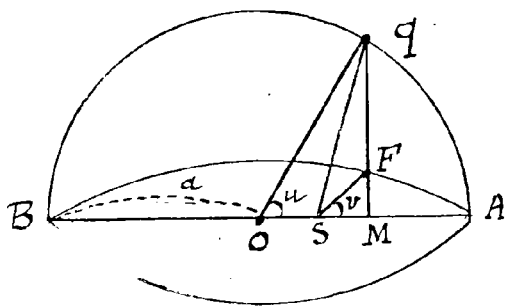
puis il a supposé connue l'orbite de la Terre, hypothèse légitime, car l'excentricité de la Terre est petite, tandis que celle de Mars est grande. Il partit des 2 hypothèses de Copernic. Ce faisant, nous l'avons dit, supposait que Mars suivait la loi de l'excentrique et de l'équant, tandis que la Terre décrivait un cercle excentrique d'un mouvement uniforme. Abandonnant cette dernière hypothèse, Kepler appliqua à la Terre la loi trouvée pour Mars, mais il dut naturellement réduire de moitié l'excentricité admise. Cette hypothèse concordait avec la réalité, au carré de l'excentricité près; elle donnait donc un très bon point de départ pour les approximations successives.

### Lois de Kepler.-

Kepler arriva aux lois suivantes:

- 1<sup>o</sup> Les orbites des planètes sont planes;
- 2<sup>o</sup> Ce sont des ellipsoïdes dont le Soleil occupe un des foyers;
- 3<sup>o</sup> Les aires balayées par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir;
- 4<sup>o</sup> Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes.

### Traduction analytique des lois de Kepler.



A est la périhélie, B l'aphélie,  $\widehat{PSA} = v$  est l'anomalie vraie;  $\widehat{qOA} = u$  est l'anomalie excentrique;  $OS = a, e$ ,  $e$  désignant l'excentricité

$$\frac{PM}{qM} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$$

Soient  $(xy)$  les coordonnées de P par rapport à des axes parallèles à ceux de l'ellipse ayant le point S pour origine:



$$x = r \cos v = OM - OS = a (\cos u - e)$$

$$y = r \sin v = b \sin u.$$

Comptons le temps à partir du passage au périhélie ; la loi des aires donne :

$$\text{sect ASP} = Kt, \quad K = \text{une constante.}$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \text{sect ASP} &= \frac{b}{a} \text{sect. ASQ} \\ &= \frac{b}{a} (\text{sect. AOs} - tr \cdot OQS) \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{a^2 u}{2} - \frac{a^2 e \sin u}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{u - e \sin u = nt.}$$

C'est l'équation de Kepler.

$n$  est une constante qu'on appelle le moyen mouvement : quand  $u$  augmente de  $2\pi$ , il en est de même de  $v$ , et de  $nt$  ;  $n$  est donc la vitesse angulaire moyenne,  $nt$  est l'anomalie moyenne.

Calculons le rayon vecteur.

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &= a^2 (\cos u - e)^2 + b^2 \sin^2 u \\ &= a^2 (\cos u - e)^2 + a^2 (1 - e^2) \sin^2 u \\ &= a^2 (1 - e \cos u)^2 \end{aligned}$$

$$r = a (1 - e \cos u); \quad \text{or } r \cos v = a (\cos u - e)$$

$$\text{d'où: } r(1 + e \cos v) = a(1 - e^2) = \underline{C^2}.$$

$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}$ , équation de l'ellipse en coordonnées polaires.

Cherchons la relation qui existe entre l'anomalie

98.

gracie et l'anomalie excentrique.

On a :

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos u)$$

Changeons  $\cos v$  en  $-\cos v$ ,  $\cos u$  en  $-\cos u$  et  $e$  en  $-e$ .

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos u)$$

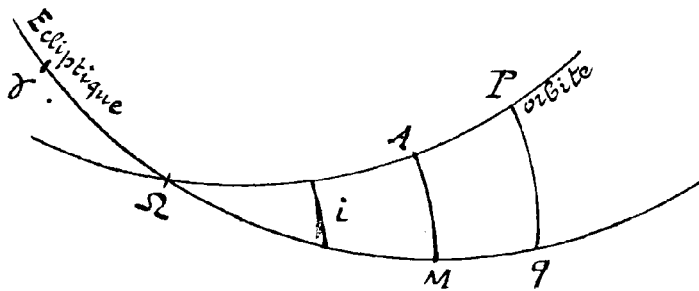
$$\text{d'où : } \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} .$$

Pour calculer les coordonnées en fonction du temps, on aura donc à résoudre l'équation de Kepler par rapport à  $u$ ; puis on calculera  $v, z, x$  et  $y$  en fonction de  $u$ .

Une première approximation consiste à prendre  $u = nt$ ,  $e$  étant petit. On calcule ensuite la valeur approchée de  $u$  par la méthode d'approximation de Newton.

### Éléments d'une planète.

Les éléments nécessaires pour définir l'orbite d'une planète sont d'une part la longitude du nœud et l'inclinaison sur l'écliptique, qui déterminent le plan de l'orbite; et d'autre part la longitude du périhélie, le grand axe et l'excentricité, qui déterminent l'orbite dans son plan. Considérons les grands



cercles d'intersection de la sphère céleste et des plans parallèles à l'orbite et à l'écliptique menés par son

centre :  $\gamma\Omega$  = longitude du nœud,  $i$  = inclinaison de l'orbite. Une parallèle à SA par le centre de la sphère

céleste perce cette sphère en A, défini par

$$\gamma\Omega + \Omega A = \pi \text{ longitude du périhélie.}$$

Pour calculer les coordonnées de l'astre à un instant quelconque, il faut d'abord  $u$ , lequel est lié à l'axe par la loi de Kepler  $u^2 a^3 = \text{cte}$ ; cette constante est la même pour toutes les planètes. L'anomalie moyenne est  $n(t - t_0)$ ,  $t_0$  étant l'époque du passage au périhélie.

L'équation  $n(t - t_0) = u - e \sin u$  donne l'anomalie excentrique; on a ensuite  $r$  et  $\tau$ ; de  $r$  on déduit la longitude dans l'orbite: une parallèle à  $SP$  par le centre de la sphère céleste perce cette sphère en P. L'anomalie vraie de P est  $AP = v$ .

Par définition, la longitude de la planète dans son orbite est la somme de la longitude du périhélie et de l'anomalie vraie:

$$L = \gamma\Omega + \Omega A + v.$$

$\Omega P =$  longitude dans l'orbite - longitude de  $\Omega$ .  
On a donc  $Pq$  et  $\Omega q$ , c'est-à-dire la latitude et la longitude héliocentriques connaissant les éléments de la planète.

Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires: si  $\lambda$  est la colatitude héliocentrique, et  $L$  la longitude héliocentrique, ces coordonnées rectangulaires sont, en prenant l'écliptique comme plan des  $xy$

$$\left. \begin{array}{l} r \cos L \sin \lambda \\ r \sin L \sin \lambda \\ r \cos \lambda \end{array} \right\} \text{ par rapport à des axes } \\ \text{passant par le Soleil.}$$

Par différence avec les coordonnées héliocentriques de la Terre, on a les coordonnées rectangulaires géocentriques des planètes (axes de direction fixe ayant pour origine mobile la Terre).

On passe, par les mêmes relations, aux

100.

coordonnées polaires géocentriques (distance à la Terre, latitude et longitude géocentriques).

On appelle longitude moyenne de la planète la somme de la longitude du périhélie et de l'anomalie moyenne,

$$L_m = \gamma - \Omega + \Omega A + n(t - t_0).$$

---

## Neuvième Leçon.

---

Six éléments sont donc nécessaires pour définir la position d'une planète à un instant  $t$  quelconque : la longitude du nœud ascendant  $\theta$ , l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique  $i$ , la longitude du périhélie  $\pi = \theta + q$ , désignant la longitude  $SP$  de la planète comptée dans le plan de son orbite, à partir du nœud ascendant, le grand axe de l'orbite  $a$  et son excentricité  $e$ ; les valeurs de ces 5 éléments sont celles à l'instant  $t$ ; il faut enfin l'instant  $t_0$  du passage de la planète au périhélie.

De la connaissance de ces six quantités, on déduit les coordonnées héliocentriques polaires, puis rectangulaires de la planète, puis ses coordonnées géocentriques rectangulaires et polaires; enfin on peut passer à l'ascension droite et à la déclinaison à un instant quelconque. Ces dernières

coordonnées peuvent être connues par une observation méridienne. De sorte que si, inversement on découvre une nouvelle planète, il suffit de faire 3 observations méridiennes nous donnant l'ascension droite et la déclinaison géocentrique et par conséquent deux équations.

### Jour solaire.

On n'a employé jusqu'ici pour la mesure du temps que l'heure sidérale  $H$  définie par

$$H = A + R.$$

Ordinairement on se sert du Soleil pour mesurer le temps et on appelle heure vraie l'angle horaire du Soleil.

Le mouvement diurne de la Terre étant uniforme,  $H$  varie proportionnellement au temps; mais il n'en est pas de même de  $R$ , ni par suite de  $A$ ,

d'où l'équation du temps

$$H_m - A = R - L_m.$$

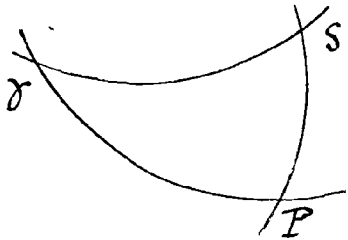
Une année comprend 366 jours sidéraux + une fraction; en une année  $H$  augmente de  $2\pi \times 366$ ,  $R$  et  $L_m$  augmentent de  $2\pi$ . Donc  $H_m$  ou  $H - L_m$  augmente de  $2\pi \times 365$ . Le rapport du jour solaire moyen au jour sidéral est donc  $\frac{365}{366}$ .

Il subsiste encore dans la mesure du temps une anomalie: le jour astronomique commence à midi, et le jour civil à minuit.

L'équation du temps se décompose en deux parties car elle peut s'écrire  $\underbrace{R - L}_1 + \underbrace{L - L_m}_2$ ; la première partie  $R - L$  est la réduction à l'équateur

102.

elle est nulle aux solstices et aux équinoxes ; on peut la calculer à l'aide du triangle sphérique  $\gamma SP$  où  $\gamma P$  est l'équateur,  $\gamma S$  l'écliptique et  $SP$  un arc de grand cercle perpendiculaire à l'équateur : On a en effet :



$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} L \cos i.$$

La seconde partie  $L - L_m$  est l'équation du centre ; elle est nulle au moment du passage à l'aphélie et au périhélie ; les 3 anomalies : vraie, excentrique et moyenne sont alors égales à  $\pi$  ou nulles.

$$L = L_m = v - u + e \sin u$$

$v - u$  se calcule par la formule

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

qui donne en négligeant le carré de l'excentricité

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = (1+e) \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$\text{d'où } \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} = e \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad \sin \frac{v-u}{2} = e \sin \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}$$

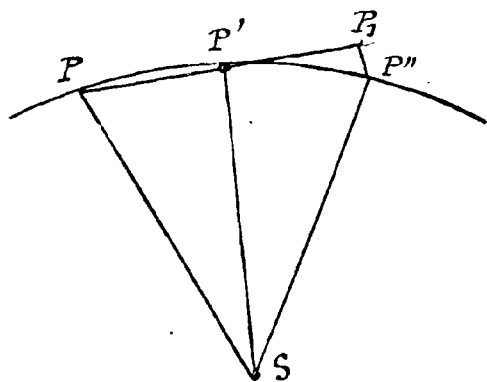
$$\text{d'où } v - u = e \sin u$$

$$\text{donc } L - L_m = 2e \sin u = 2e \sin ut.$$

### Gravitation universelle.

La découverte de la loi de la gravitation universelle fut préparée par les travaux de Galilée et de Huyghens sur les principes fondamentaux de la mécanique. Si, admettant la relation  $F = m \gamma$  qui relie la force à l'accélération, on veut connaître la force qui

agit sur une planète, il suffira d'étudier l'accélération de cette planète, laquelle sera donnée en grandeur et direction par les lois de Képler.



Soit  $P$  la position de la planète sur son orbite à l'instant  $t$ ,  $P'$  et  $P''$  ses positions aux instants  $t + dt$  et  $t + 2 dt$ . En vertu de la loi des aires, les secteurs  $SPP'$  et  $SP'P''$  sont égaux; ces secteurs étant infiniment petits du premier ordre, les segments  $PP'$  et  $P'P''$  sont du troisième ordre et peuvent être négligés. On a

donc, à ces infiniment petits près

$$\text{triangle } SPP' = \text{triangle } SP'P''.$$

aux infiniment petits près du 3<sup>e</sup> ordre  $PP'$  représente en grandeur et direction l'intervalle du temps  $\frac{dt}{2}$  multiplié par la vitesse de  $P$  à l'instant  $t + \frac{dt}{2}$  et  $P'P''$  ce même intervalle multiplié par cette vitesse à l'instant  $t + \frac{3dt}{2}$ .

Si donc on prolonge  $PP'$  d'une longueur égale jusqu'en  $P_1$ , le secteur  $P_1 P$  représente, aux infiniment petits du 3<sup>e</sup> ordre près, l'accélération de la planète multipliée par  $dt^2$ ;  $P_1 P''$  est donc du second ordre.

Mais les deux triangles  $SPP'$  et  $SP'P''$  étant égaux au 3<sup>e</sup> ordre près,  $SP'P_1$  et  $SP'P''$  le sont aussi, et comme ils ont même base  $SP'$ , laquelle est finie, les projections de  $P_1 P$  et de  $P'P''$  sur une direction perpendiculaire à  $SP'$  doivent être égales, aux infiniment petits du 3<sup>e</sup> ordre près;  $P_1 P''$  qui est du second ordre doit donc être perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire parallèle à  $P'S$ .

Donc

10H

La force qui s'exerce sur la planète est dirigée vers le Soleil.

Calculons son intensité. Les coordonnées de P sont

$$x = a (\cos u - e)$$

$$y = b \sin u$$

d'où :  $dx = -a \sin u \cdot du$ ,  $dy = b \cos u \cdot du$ .

$$\text{et } d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = a^2 d\bar{u}^2 (1 - e^2 \cos^2 u)$$

$$\text{Or } r = a (1 - e \cos u)$$

$$\text{et } 2a - r = a (1 + e \cos u)$$

$$\text{Donc } d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = d\bar{u}^2 \cdot r (2a - r)$$

D'autre part l'équation de Hépler différentielle donne  $n dt = du (1 - e \cos u)$

$$n dt = \frac{r}{a} du$$

$$\text{Donc } d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = a^3 n^2 dt^2 \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$$

La force vive de la planète dont la masse est  $m$  est donc  $\frac{1}{2} m V^2 = \frac{m a^3 n^2}{2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$

Le travail élémentaire de l'attraction  $F$  exercée par le Soleil sur la planète est  $-F dz$ , c'est aussi  $d \left( \frac{1}{2} m V^2 \right)$ .

$$\text{Donc } F dz = - \frac{m a^3 n^2}{r^2} dz \text{ ou } F = \frac{m a^3 n^2}{r^2}.$$

La force qui s'exerce sur une planète varie en raison inverse du carré de la distance au Soleil.



En vertu de la dernière loi de Kepler, la quantité  $a^3 n^2$  a la même valeur pour toutes les planètes.

Donc :

Cette force est aussi proportionnelle à la masse de la planète.

Newton a étendu ces deux lois au mouvement de la Lune attirée par la Terre ; et il a comparé cette force à l'attraction terrestre des corps pesants.

La vitesse angulaire  $\omega$  avec laquelle il faudrait lancer horizontalement un projectile pour que ce projectile décrivant une orbite circulaire de rayon  $r$ , ne rencontrât pas la Terre, est donnée par la relation  $\omega^2 r = g$ , qu'on obtient en écrivant que la force centrifuge fait équilibre à la pesanteur. Dans le cas de la Lune attirée par la Terre, on a

$$n^2 a^3 = \omega^2 r^2 ;$$

$$g = \frac{n^2 a^3}{r^2} = \frac{n^2 r}{p^3} , \quad p = \frac{r}{a} \text{ désignant la paral-}$$

axe de la Lune,  $a$  le rayon de l'orbite lunaire.

Newton vérifia cette formule ; un instant, il fut sur le point d'abandonner sa doctrine, car il avait pris pour représenter la minute d'arc terrestre, le mille anglais (1609<sup>m</sup>). Quand il connut la mesure d'un degré de méridien par Picard, il recommença le calcul avec la valeur exacte qui est celle du mille marin de 1852<sup>m</sup> ; et il conclut à l'identité entre la pesanteur et la force qui retient les astres sur leur orbite.

Newton conclut, en vertu du principe de l'action et de la réaction que, si la Terre attirait la Lune, inversement la Lune devait attirer la Terre avec une force égale ; et il étendit cette loi à tous les corps matériels ; de plus, deux corps étant en présence, l'attraction exercée par le premier sur le second est égale à celle du second sur le premier en vertu du principe de

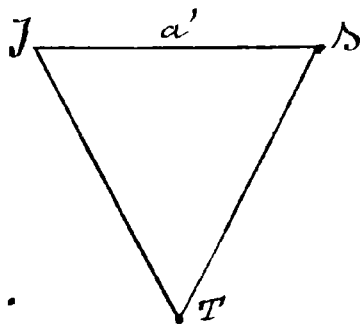
106.

réaction. On vient de constater qu'elle est proportionnelle à la masse du second quand la masse du premier est constante. Elle doit donc, par raison de symétrie être aussi proportionnelle à la masse du premier corps. Newton en conclut que l'attraction mutuelle des deux corps est proportionnelle à la masse du second quand la masse du premier est constante. Elle doit donc, par raison de symétrie, être aussi proportionnelle à la masse du premier corps. Newton en conclut que l'attraction mutuelle des deux corps est proportionnelle au produit de leurs masses.

$$F = \frac{K m M}{r^2}$$

D'où, pour les planètes,  $a^3 n^2 = KM$  où  $M =$  masse du Soleil.

On peut ainsi calculer facilement la masse  $M'$  d'une planète  $J$  qui a un satellite  $D$ . Si  $n'$  est le moyen mouvement du satellite et  $a'$  le demi grand axe de son orbite,



$$a'^3 n'^2 = KM'$$

$$\text{D'où } \frac{M'}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{n'}{n}\right)^2$$

$\frac{n'}{n}$  se calcule comme les

révolutions de la planète

et de son satellite; on calculera  $a'$  en observant le satellite, au moment où sa distance à la planète sera maxima; on observe  $\frac{a'}{JT}$ ;

à une opposition  $JT = a - a''$  où  $a''$  est la distance de la Terre au Soleil.

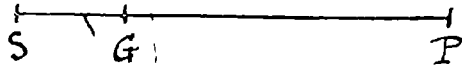
Le rapport  $\frac{a''}{a}$  est donné par la troisième loi de Kepler.

Les lois de Kepler et l'attraction universelle. - Comme les corps s'attirent mutu-

ellement, les lois de Képler, établies en tenant compte de la seule action du Soleil sur la planète, doivent être modifiées par suite des perturbations planétaires.

De plus, une de ces corrections s'impose même si l'on suppose le Soleil seul en présence de la planète. En effet, dans cette hypothèse, l'action qui s'exerce sur P est due à S et =

$$\frac{K m M}{r^2}, M \text{ et } m \text{ étant}$$



les masses du Soleil et de la planète. P agit sur S avec une force égale. Donc le centre de gravité G

du système (Soleil + planète) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, car le système n'est soumis à aucune force extérieure.

Cherchons le mouvement relatif de P par rapport à des axes mobiles d'origine S et restant parallèles à eux-mêmes : la force gravie agissant sur P est  $\frac{K m M}{r^2}$  dirigée de P vers S ; il faut

lui ajouter, pour avoir le mouvement relatif, la force fictive qui imprimerait à P une accélération égale et de sens contraire à celle du Soleil, c'est-à-dire une accélération  $\frac{K m}{r^2}$  dirigée de S vers P ; cette force est donc  $\frac{K m^2}{r^2}$ .

Et la force totale agissant sur P dans le mouvement relatif est  $\frac{K m}{r^2} (M + m)$  : ce mouvement relatif de P par rapport à S sera donc le même que si le soleil restant fixe, sa masse augmentée de la masse de la planète, agissait sur P, conformément aux lois de Képler. Il en résulte pour la 3<sup>e</sup> loi de Képler une correction car on a  $a^3 n^2 = M + m$ , m et par suite  $a^3 n^2$  ne sont plus constants pour toutes

les planètes. Mais pour Jupiter qui est de beaucoup la plus grosse des planètes  $m = \frac{1}{1000} M$ ; de sorte que le mouvement vrai diffère peu du mouvement képlérien. En toute rigueur, il faudrait dire: Le système formé par le Soleil et la Planète tourne autour de son centre de gravité qui est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Pour le Soleil et Jupiter, le centre de gravité est sensiblement sur la surface du Soleil.

Pour le système Terre + Lune par exemple, le centre de gravité n'est pas le centre de la Terre, mais il est intérieur à la Terre. C'est ce centre de gravité du système Terre-Lune qui décrit une ellipse autour de lui. Il en résulte une petite irrégularité pour le mouvement apparent du Soleil, et dont la période est un mois: c'est ce qu'on appelle l'inégalité mensuelle du Soleil.

De plus, la relation

$$g = \frac{n^2 r}{p^3}$$

si nous posons  $g = \omega^2 r$ , nous aurons

$\omega^2 r^2 = KM$ ,  $M$  étant la masse de la Terre seule puis que le corps pesant n'est attiré que par la Terre. Nous avons au contraire, comme nous venons de le voir

$$n^2 a^3 = K(M + m)$$

$m$  étant la masse de la Lune. En réalité

$$\frac{n^2 a^3}{M + m} = \frac{\omega^2 r^3}{M} \text{ et } g = \frac{n^2 r}{p^3} \frac{M}{M + m}, \text{ relation}$$

entre  $M$ , masse de la Terre,  $m$  masse de la Lune et  $p$  parallaxe de la Lune.

Il faudrait de plus, corriger la force centrifuge qui entre dans  $g$ .

## Perturbations planétaires

Pour calculer la masse d'une planète on peut aussi étudier les perturbations qu'elle produit sur les planètes voisines. On peut définir l'orbite d'une planète par les éléments elliptiques;  $a$ , demi grand axe;  $e$  excentricité;  $i$ , inclinaison sur l'écliptique;  $\Theta$ , longitude du nœud;  $\pi$ , longitude du périhélie et  $l$ , anomalie moyenne  $= u - e \sin u = n(t - t_0)$ .

On peut, de là, calculer les coordonnées de  $P$  et les 3 composantes de sa vitesse.

Éléments canoniques. - Mais on utilise de préférence de nouveaux éléments dits éléments canoniques et définis de la façon suivante:

On garde les 3 éléments  $\Theta$ ,  $l$ , et  $g$  et l'on pose  $a^3 n^2 = K(M + m)$ .

$$L = \sqrt{K(M+m)} \sqrt{a};$$

$$G = L \sqrt{1 - l^2} \text{ et } \Theta = G \cos i$$

On a trouvé pour la force vive ou énergie cinétique de la planète

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{K m (M + m)}{2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} m V^2 - \frac{K m (M + m)}{2} = - \frac{K m (M + m)}{2a}$$

La seconde partie du premier membre est l'énergie potentiel de la planète. Son énergie totale ne dépend donc que du grand axe de son orbite c'est-à-dire de  $L$  seul.  $G$  est la constante des aires dans le plan de l'orbite; c'est le moment des quantités de mouvement par rapport à un axe perpendiculaire au plan de cet orbite et passant par le centre d'attraction.  $\Theta$  est la projection de ce moment sur un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique.

Les coordonnées  $(x, y, z)$  de  $P$  et les 3 composantes  $(x', y', z')$  de sa vitesse sont fonctions de  $G$

éléments canoniques  $l, \theta, g, L, \Theta, G$ ; et ces 6 fonctions jouissent de la propriété importante facile à vérifier que

1<sup>re</sup> lemme :  $\underline{x dx' + y dy' + z dz' - L dl - G dg - \Theta d\theta}$  est une différentielle exacte.

Sans le cas où S et P ne sont soumis qu'à leur attraction mutuelle et soustraits à toute action extérieure, l'orbite elliptique est définie par ces 6 éléments, dont 5 sont des constantes, L seul variant, et proportionnellement au temps.

Éléments osculateurs de l'orbite d'une planète troublée.

Mais quand plusieurs astres sont en présence, le mouvement précédent de la planète est troublé et l'on définit son orbite à l'aide de nouveaux éléments de la façon suivante :

Supposons que les planètes troublantes disparaissent subitement : A partir de l'instant de cette disparition, l'orbite relative de P par rapport à S sera une ellipse képlérienne. Cette orbite est dite orbite osculatrice, elle varie à chaque instant. Les éléments osculateurs de la planète troublée P sont les éléments de P sur son orbite osculatrice. Au moment de la disparition des planètes troublantes, P a même position et même vitesse sur les 2 orbites vraie et osculatrice mais les accélérations sont différentes, car P considérée sur l'orbite osculatrice n'est soumise qu'à l'attraction du Soleil et soustraite à l'action des planètes troublantes.

On peut donc exprimer  $(x, y, z), (x', y', z')$  en fonction des éléments canoniques osculateurs; les relations seront les mêmes que dans le cas du mouvement képlérien

Donc  $x dx' + \dots + \Theta d\theta$  reste la différentielle exacte d'une fonction des éléments canoniques osculateurs.

Dans le mouvement képlérien 5 de ces éléments sont constants, et  $e$  varie proportionnellement au temps; dans le mouvement troublé, ces éléments varieront d'une façon un peu plus compliquée avec le temps; mais ces variations seront très faibles, car les masses des planètes sont petites par rapport à celles du Soleil, et le mouvement ne serait pas troublé si ces masses étaient nulles.

2<sup>e</sup> Lemme: Soient  $2n$  variables  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  et une fonction  $F(x, y, t)$  de ces variables et du temps. Supposons vérifiées les équations suivantes dites équations canoniques:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y_i} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta x_i}$$

Effectuons un changement de variables; les nouvelles variables  $x'_1, \dots, y'_n$  étant liées aux anciennes par des relations telles que l'expression

$$\sum x' dy' - \sum x dy$$

soit une différentielle exacte.

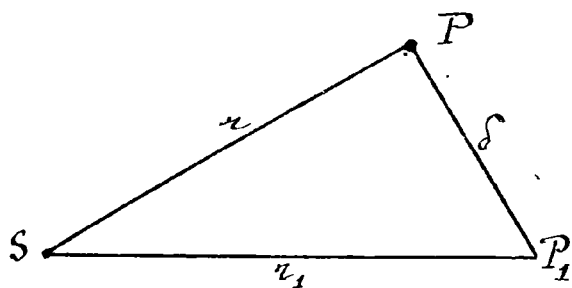
Ce changement de variables n'altérera pas la forme des équations canoniques et l'on aura

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i} \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}$$


---

# Dixième Leçon.

Ces deux lemmes étant admis, nous allons étudier le mouvement d'une planète soumise à l'attraction du Soleil et de diverses autres planètes : les masses de ces dernières étant petites par rapport à la masse du Soleil, l'orbite véritable diffèrera peu de l'ellipse képlérienne.



Soit S le Soleil, P. la planète troublée, P<sub>1</sub> une planète troublante et M, m, m<sub>1</sub> leurs masses respectives.

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées de P par rapport à des axes parallèles à 3 directions fixes et ayant pour origine mobile le Soleil ;  $(x_1, y_1, z_1)$  les coordonnées de P<sub>1</sub> par rapport aux mêmes axes. Soient  $r, r_1, \delta$  les distances SP, SP<sub>1</sub> et PP<sub>1</sub>.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

L'attraction de S sur P est  $\frac{KmM}{r^2}$ , K étant une constante que nous pouvons supposer  $\frac{K}{r^2}$  égale à l'unité pour un choix convenable des unités fondamentales. L'accélération de P est due à l'attraction de S. et à celle de P<sub>1</sub> : l'accélération due à S est  $-\frac{M}{r^2}$ , dirigée de P vers S ; sa projection sur l'axe

des X est  $-\frac{Mx}{r^3}$ ,  $\frac{x}{r}$  étant le cosinus directeur de



la direction positive  $SP$ .

De même l'accélération due à  $P_1$  a pour projection sur le même axe

$$-\frac{m_1(x-x_1)}{f^3}$$

L'accélération totale de  $P$  dans son mouvement absolu est donc

$$-\frac{Mx}{r^3} - \frac{m_1(x-x_1)}{f^3}$$

L'accélération du Soleil suivant  $SX$  étant

$$\frac{mx}{r^3} + \frac{m_1x_1}{r_1^3},$$

l'accélération de  $P$  dans le mouvement relatif rapporté aux axes mobiles  $S$

aura pour composante suivant  $SX$ ,

$$-\frac{(M+m)x}{r^3} - \frac{m_1x_1}{r_1^3} - \frac{m_1(x-x_1)}{f^3}$$

et l'une des 3 équations de ce mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(M+m)x}{r^3} - \frac{m_1x_1}{r_1^3} - \frac{m_1(x-x_1)}{f^3}$$

Considérons la fonction des coordonnées  $(x, y, z)$

$$V = \frac{m+M}{r} + \frac{m_1}{f} - \frac{m_1}{r_1^3} (xx_1 + yy_1 + zz_1).$$

Les 3 équations du mouvement deviennent :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\delta V}{\delta z} \end{array} \right|$$

114.

Appelons fonction perturbatrice l'expression

$$F = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - V$$

où  $(x', y', z')$  désignent les composantes de la vitesse de P.

Les équations (1) prennent la forme

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta x} \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y} \\ \frac{dz'}{dt} = \frac{\delta F}{\delta z} \end{array} \right| \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\delta F}{\delta x'} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\delta F}{\delta y'} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\delta F}{\delta z'} \end{array} \right|$$

Ces équations sont canoniques.

Au lieu de prendre pour variables les quantités  $(x, y, z, x', y', z')$  qui définissent la position et la vitesse de P sur son orbite vraie et sur son orbite osculatrice, nous prendrons les éléments osculateurs dont les variables précédentes sont des fonctions bien déterminées; les éléments osculateurs offrent en effet l'avantage de varier très lentement avec le temps, les masses  $m$  et  $m_1$  étant très petites par rapport à  $M$ .

Les équations (2) prendront la forme, d'après le 2<sup>e</sup> lemme :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta \ell} \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta g} \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta \theta} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\ell}{dt} = \frac{\delta F}{\delta L} \\ \frac{dg}{dt} = \frac{\delta F}{\delta G} \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\delta F}{\delta \theta} \end{array} \right|$$

Cherchons ce que devient la fonction perturbatrice pour ce changement de variables. On a trouvé

$$\frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) = a^3 n^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = K (M+m) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

a désignant le demi grand axe de l'ellipse képlérienne de P et n son moyen mouvement sur cette ellipse.

$$\text{Or } K = 1 \text{ et } L = \sqrt{(M+m)Ka}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{M+m}{r} = -\frac{M+m}{2a} = -\frac{1}{2} \left( \frac{M+m}{L} \right)^2$$

$$\text{et } \dot{F} = -\frac{1}{2} \left( \frac{M+m}{L} \right)^2 - \frac{m_1}{\delta} + \frac{m_1}{r_1^3} (x x_1 + y y_1 + z z_1)$$

où  $\delta, r_1, x, y, z, \dots$  doivent être remplacés en fonction des éléments osculateurs. Mais remarquons que si l'anomalie moyenne  $l$  de P ou celle  $l_1$  de  $P_1$  augmentent de  $2\pi$ , les coordonnées et la vitesse de P reprennent la même valeur. Ces coordonnées sont donc des fonctions de  $l$  et  $l_1$  et par suite développables en série de Fourier  $\sum A \cos(p l + p_1 l_1 + h)$ ;  $p$  et  $p_1$  sont deux entiers positifs ou négatifs;  $h$  est égal à 0 ou  $\frac{\pi}{2}$  suivant que le terme correspondant est un cos ou un sinus; enfin  $A$  est une fonction de 10 éléments osculateurs de P et de  $P_1$  autres que  $l$  et  $l_1$ .

Déterminons par exemple G, par l'équation

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta g}.$$

Or dans  $\frac{\delta F}{\delta g}$  n'entrent que des termes dont le coefficient est  $m_1$ ; ce coefficient étant petit, on peut remplacer dans ces termes les inconnues par leurs valeurs képlériennes: c'est une approximation qui revient à négliger dans chacun

de ces termes les masses des planètes troublantes; la multiplication de ces valeurs par  $m_1$  donne alors une approximation de l'ordre de  $m_1^2$ .  
Posons donc

$$l = nt + \varepsilon$$

$$l_1 = n_1 t + \varepsilon_1$$

$n$  et  $n_1$  étant les moyens mouvements képlériens. On a alors :

$$\frac{dG}{dt} = - \sum \frac{\delta A}{\delta g} \cos (pl + p_1 l_1 + h)$$

$\frac{\delta A}{\delta g}$  est une constante, après substitution des valeurs approchées des inconnues.

$$\text{Posons } pn + p_1 n_1 = \mu$$

$$p\varepsilon + p_1 \varepsilon_1 = \nu$$

$$\frac{dG}{dt} = - \sum \frac{\delta A}{\delta g} \cos (\mu t + \nu + h)$$

$$G = C t^e - \sum \frac{\delta A}{\delta g} \frac{1}{\mu} \sin (\mu t + \nu + h)$$

On a ainsi les éléments osculateurs en série trigonométrique; chaque terme de cette série est ce qu'on appelle une inégalité; les termes proportionnels à un sinus ou un cosinus sont les inégalités périodiques.

Le terme constant  $B$  de  $\frac{dG}{dt}$  correspond à  $p=p_1=0$

d'où  $\mu = 0$ ; et  $G$  contiendra le terme  $Bt$ ; c'est la perturbation séculaire; son importance est bien plus considérable que celle des perturbations périodiques, car elle croît toujours avec le temps. Le rapport  $\frac{n}{n_1}$  des moyens mouvements est toujours

incommensurable ; donc  $p_1 n + p_2 n_1$  ne s'annule que si  $p = p_1 = 0$ , car  $p$  et  $p_1$  sont entiers. Si  $n$  et  $n_1$  sont à peu près commensurables,  $\mu$  peut devenir très petit, le sinus variera alors lentement comme son argument. Le terme correspondant sera donc une inégalité à longue période, et comme elle contient  $\mu$  au dénominateur, elle pourra devenir considérable, bien que périodique.

On a de même  $\frac{dL}{dt} = \sum A p \sin(p t + p_1 t_1 + h)$   
ou  $\frac{dL}{dt} = \sum A p \sin(\mu t + \nu + h)$ , car  $A$  ne dépend pas de  $L$ , comme précédemment  $L$  sera donné par une série trigonométrique qui ne contiendra pas de terme proportionnel au temps, car la condition  $\mu = 0$  exige  $p = 0$ . Donc  $L$  ne subit pas d'inégalité séculaire. Or  $L$  est proportionnel à  $\sqrt{a}$ . Donc les grands axes des orbites ne subissent pas d'inégalité séculaire. Ce fait constitue ce qu'on appelle la stabilité du système solaire.

La seule équation où figure au second membre un terme ne contenant pas  $m_1$  en facteur est celle qui donne  $l$ .

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\delta F}{\delta L} = \frac{(M+m)^2}{L^3} + \sum \frac{\delta A}{\delta L} \cos(\mu t + \nu + h)$$

Le 1<sup>er</sup> terme  $\frac{(M+m)^2}{L^3}$  est égal à  $n$  moyen mouvement de la planète sur son orbite osculatrice

$$\text{car } L = \sqrt{(M+m) a} = a^2 n \text{ et } M+m = a^3 n^2.$$

On ne peut plus, dans le second membre de l'équation précédente remplacer  $L$  par sa valeur képlérienne constante, car  $\frac{1}{L^3}$  y est multiplié par  $M$  et non plus par une masse négligeable. Mais nous y remplacerons  $L$  par sa valeur plus approchée qu'a donnée l'équation

$$\frac{dL}{dt} = \sum A p \sin(\mu t + v + h)$$

On obtient ainsi encore pour  $L$  et par conséquent pour  $\frac{dL}{dt}$  une série trigonométrique à laquelle s'appliqueraient les considérations précédentes.

Remarque. - Les éléments osculateurs qui contiennent une inégalité séculaire ne croîtront cependant pas indéfiniment. Considérons par exemple les équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = m_1 y$$

$$\frac{dy}{dt} = -m_1 x$$

où  $m_1$  est très petit.

Si  $x_0$  et  $y_0$  sont les valeurs initiales de  $x$  et  $y$ , ces équations où l'on a remplacé  $x$  et  $y$  par ces constantes donnent une première approximation

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

si l'on substitue ces valeurs approchées dans les seconds membres il vient  $\dot{x} = m_1 y_0$  et  $\dot{y} = -m_1 x_0$  d'où l'on pourrait conclure que  $x$  va croître au delà de toute limite avec  $t$ . Il n'en est rien, car la solution exacte est  $x = x_0 \cos m_1 t$ ,  $y = y_0 \sin m_1 t$  qui montre que  $x$  et  $y$  restent toujours  $< y_0$ . Il en est de même des excentricités et des inclinaisons des orbites. On sait que les valeurs initiales de ces quantités sont petites, mais leur calcul montre qu'elles sont soumises à des inégalités séculaires et porterait à conclure qu'elles augmentent indéfiniment avec le temps. Mais on peut démontrer qu'elles passent par un maximum et qu'elles restent petites.

Non exigé. - Posons en effet

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = \Psi.$$

Or a dans le mouvement képlérien de la planète P

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{M+m_1}{r_1^3} x_1, \quad \frac{d^2x_1}{dl_1^2} = \frac{1}{n_1^2} \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dl_1^2} = -\frac{1}{m_1^2}, \quad \frac{M+m_1}{r_1^3} \Psi$$

Cela nous montre que le dernier terme de  $F$  est proportionnel à  $\frac{d^2\Psi}{dl_1^2}$  et par conséquent que son développement ne contient pas de terme indépendant de  $\underline{l}$  et de  $\underline{l}_1$ ; ce terme indépendant disparaîtrait en effet par la différentiation. Donc ce dernier terme de  $F$  ne peut donner naissance à une inégalité séculaire et nous pouvons le supprimer dans le calcul de ces inégalités. Nous pouvons négliger de même le premier dont la dérivée par rapport à  $\theta$  est nulle. Il reste donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\delta F}{\delta \theta} = -m_1 \frac{d\frac{1}{\delta}}{d\theta}$$

de même  $\frac{d\theta_1}{dt} = -m \frac{d\frac{1}{\delta}}{d\theta_1}$

$$\text{Or } \frac{d\frac{1}{\delta}}{d\theta} + \frac{d\frac{1}{\delta}}{d\theta_1} = 0$$

Car si je change l'origine des longitudes,  $\theta$  et  $\theta_1$  se changeront en  $\theta + \varepsilon$  et  $\theta_1 + \varepsilon$  et la distance  $\delta$  ne changera pas

ou  $\frac{1}{m_1} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{m} \frac{d\theta_1}{dt} = 0$

$$\text{Donc } m \Theta + m_1 \Theta_1 = \text{Const}^{\text{te}}$$

$$\text{Or : } \Theta = L \sqrt{1 - e^2} \cos i = L \left(1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \dots\right) \left(1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{4} \dots\right)$$

la partie principale de  $\Theta$  est donc  $L \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{i^2}{2}\right)$

Or  $L$  et  $L_1$  sont des constantes, si l'on ne tient compte que des inégalités séculaires

$$m L \frac{e^2 + i^2}{2} + m_1 L_1 \frac{e_1^2 + i_1^2}{2} = \text{Cte},$$

car  $L$  et  $L_1$  sont constants.

Donc les excentricités et les inclinaisons resteront finies car le mouvement des planètes étant direct,  $L$  et  $L_1$  sont essentiellement positifs.

Exigé - Les divergences entre le calcul et

l'observation sont faibles; les observations sont erronées; de plus les calculs sont imparfaits; car, si la série qui représente  $F'$  est convergente, on peut avoir négligé des termes qui ne soient pas négligeables; ce qui peut arriver si  $\frac{1}{\mu}$  est

grand bien que  $\frac{\delta A}{\delta q}$  soit petit. On a en outre négligé  $m \frac{e^2}{1}$ . Enfin les éléments et les masses

des planètes ne sont pas connus avec une certitude absolue.

Considérons par exemple l'action de Jupiter. Sa masse peut être connue soit au moyen de ses satellites soit par son action sur diverses planètes, Saturne par exemple, dans ce dernier cas précisément le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne est à peu près égal à  $\frac{5}{2}$ ; donc à des valeurs de  $p$  et  $p_1$  congrues elles pourraient correspondre une valeur de  $\mu$  très



grande et une inégalité qui ne sera pas négligeable. Enfin, on peut encore déterminer la masse de Jupiter par son action sur les petites planètes ou sur les Comètes. Les valeurs de cette masse qui permettent de représenter le mieux les perturbations dues à Jupiter sont des nombres concordants mais non identiques, le rapport de la masse du Soleil à celle de Jupiter variant entre 1047,17 et 1047,82.

Une autre raison peut expliquer ces divergences : c'est l'existence de masses troublantes inconnues. C'est ainsi que Le Verrier est arrivé à l'hypothèse d'une nouvelle planète, Neptune, pour expliquer les perturbations d'Uranus.

Le calcul lui avait fourni pour la masse de Neptune une valeur deux fois plus grande que la valeur vraie : c'est qu'il avait en effet admis la loi de Bode et qu'il arrivait ainsi, pour l'orbite de Neptune à un demi grand axe 36 fois plus grand que celui de l'orbite terrestre, alors qu'en réalité il n'est que 30 fois plus grand. Supposant Neptune très éloignée, il devait donc trouver pour sa masse une valeur trop grande.

De plus, en vertu de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler, il devait attribuer à la planète un moyen mouvement trop lent ; et comme compensation, il devait donner à l'orbite une excentricité trop grande.

D'autres divergences importantes ont été observées à propos des perturbations séculaires ; celles-ci s'accumulant, c'est en elles qu'on doit retrouver surtout l'influence des masses inconnues. C'est ainsi par exemple qu'on a remarqué que le mouvement séculaire observé du périhélie de Mercure diffère du mouvement calculé. Le Verrier suppose une planète entre Mercure et le Soleil ; mais cette planète, observée, croit-on, une fois, n'a pas été retrouvée. Peut être ces masses inconnues troublantes ne sont-elles pas agglomérées en une planète, mais disséminées en un anneau de matière cosmique, identique à la matière qui entourerait le Soleil et se

192.

régèlerait par la lumière zodiacale. Le mouvement du périhélie de Mars et celui du nœud de Jénus ont également donné lieu à des divergences entre le calcul et l'observation ; et la présence d'un ambeau cosmique est restée insuffisante à expliquer la divergence relative à Mars.

Enfin, on a supposé que la loi de Newton n'était pas rigoureusement exacte et que l'attraction variait non pas comme  $\frac{1}{r^2}$ , mais comme  $\frac{1}{r^n}$  où

$n = 2,000,000,1574$  ; cela paraîtra peu probable. Cela montre que l'hypothèse la plus vraisemblable pour expliquer ces divergences est la présence de matière cosmique, et qu'aucune d'elles ne peut conduire à mettre en doute la loi de Newton qui doit être considérée comme vraie avec une approximation très grande.

La Comète d'Encke a un mouvement accéléré, et cette accélération n'a pu être expliquée en faisant entrer en jeu uniquement les attractions des planètes. On a supposé que la comète rencontre un milieu résistant au voisinage de son périhélie : On a trouvé en effet

$$\frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{M+m}{r} = - \frac{M+m}{2a}.$$

Le premier membre est la force vive totale de la planète ; or elle diminue quand la planète rencontre un milieu résistant ; donc  $a$  diminue aussi ; la vitesse diminue au périhélie, et la planète va donc décrire une seconde ellipse intérieure tangente à la première au périhélie et qui sera parcourue dans un temps plus court.

---

# Onzième Leçon.

## Résumé pour les planètes.

Planètes	Distance au Soleil	Masses par rapport à celle du Soleil	Densité par rapport à l'eau.
Mercure	0.38	$\frac{1}{108}$	6.45
Venus	0.72	$\frac{1}{4 \cdot 10^6}$	4.44
La Terre	1.00	$\frac{1}{3 \cdot 10^5}$	5.5
Mars	1.52	$\frac{1}{3 \cdot 10^6}$	3.9
Jupiter	5.20	$\frac{1}{1047}$	1.33
Saturne	9.53	$\frac{1}{9529}$	0.7
Uranus	19.18	$\frac{1}{2400}$	1.07
Neptune	30.00	$\frac{1}{10000}$	1.65

Les distances des planètes au Soleil sont entr'elles comme les nombres

$H, H+3, H+6, H+12, H+48, H+96, H+192$

sauf cependant pour Neptune.

Au nombre de  $H+24$  ne correspond aucune planète,

124.

à moins qu'on n'y fasse correspondre l'anneau d'astéroïdes compris entre Mars et Jupiter.

La masse d'une planète est connue avec d'autant plus de précision qu'elle est plus grande ; la masse de Mars est cependant connue d'une façon assez certaine, grâce à ses satellites.

La vitesse de rotation de Mercure et de Vénus sur elles-mêmes, semble-t-il, est égale à leur vitesse de rotation autour du Soleil, de sorte que des taches observées sur la planète ont une position relative constante par rapport au dénominateur, c'est-à-dire au cercle qui limite sur le disque la partie éclairée par le Soleil de la partie obscure.

La Terre et Mars effectuent leur rotation sur elles-mêmes en 24 heures, Jupiter et Saturne en 10 heures ; pour les autres planètes, cette vitesse de rotation est inconnue.

Mercury et Vénus n'ont pas de satellite ; la Terre en a un ; Mars en a 2, dont le plus rapproché du Soleil a une vitesse angulaire plus grande que la vitesse de rotation de Mars, de sorte que pour les habitants de cette planète un satellite se lève à l'Est, l'autre à l'Ouest.

Jupiter a 6 satellites, dont 4 sont connus depuis trois siècles ; les deux autres ont été découverts récemment ; l'un d'eux est plus rapproché du Soleil, l'autre plus éloigné.

Saturne a 10 satellites en outre de ses anneaux ; on n'en a connu longtemps que 8 ; un neuvième a été découvert dont le mouvement est rétrograde (tous les autres précédents ont un mouvement direct) ; le 10<sup>e</sup> n'est connu que depuis quelques jours.

Uranus a quatre satellites ; les plans de leurs orbites sont sensiblement perpendiculaires au plan de l'écliptique.

Neptune a un satellite dont le mouvement est rétrograde.

Les excentricités des orbites des planètes sont faibles ( $< 0,2$ ) ; les inclinaisons ne dépassent pas  $3^\circ$ , sauf pour Mercure dont l'inclinaison est de  $7^\circ$ .

Entre Mars et Jupiter se trouvent plus de 500 planètes, et une autre petite planète, Éros, est plus rapprochée que Mars du Soleil; son grand axe = 1,45. Pour toutes ces petites planètes, le grand axe est compris entre 1,9 et 4,22; leur excentricité est inférieure à 0,3, et leur obliquité à 22°.

Ces planètes ont été découvertes par des photographies prises à différentes dates; leurs images sont constituées par un trait et non par un point.

Les inclinaisons précédentes sont rapportées au plan de l'écliptique, qui n'est pas absolument fixe, mais qui subit des variations séculaires. Il faudrait les rapporter au plan invariable, c'est-à-dire au plan perpendiculaire au vecteur des aires, vecteur constant en grandeur, direction et sens en vertu du théorème des aires. D'ailleurs ce plan diffère peu de l'écliptique.

Si  $(x_i, y_i, z_i)$  sont les coordonnées d'un corps céleste de masse  $m_i$  et  $r_{ij}$  sa distance à un corps de coordonnées  $(x_j, y_j, z_j)$  les équations du mouvement de ce corps sont de la forme

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum \frac{K m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3}$$

$K$  étant un coefficient constant.

Si l'on multiplie toutes les masses par un même facteur  $\alpha$ , toutes les longueurs par un même facteur  $\beta$ , les équations seront encore satisfaites, à condition de multiplier  $K$  par un facteur convenable.

Les directions ne sont pas altérées par ces multiplications; les observations qui ne donnent que les directions, ne peuvent donc faire connaître que les rapports des masses entre elles et des longueurs entre elles. Pour avoir ces grandeurs absolues, il faut connaître la parallaxe solaire.

Détermination de la parallaxe du Soleil. —

## 10. Procédés géométriques.

L'un d'eux est fondé sur l'observation des passages de Jénus sur le disque solaire ; ces passages offrent une période qui tient à ce que le rapport des moyens mouvements est sensiblement  $= \frac{243}{395}$  ; c'est-à-dire qu'au

bout de 243 ans se seront accomplis 395 révolutions de Jénus et que le même mouvement relatif recommencera. Dans cet intervalle, Jénus aura dépassé  $395 - 243 = 152$  fois la Terre et il y aura eu 152 conjonctions. Pour qu'il y ait passage, il faut non seulement que le Soleil et la planète aient même longitude, mais aussi que leurs latitudes soient peu différentes, donc que la planète soit voisine d'un nœud, puisque la latitude du Soleil est constamment nulle.

Entre deux conjonctions, le mouvement étant supposé uniforme, la longitude de la Terre aug-

mente de  $2\pi \cdot \frac{243}{152} = 243 \cdot \varepsilon$ , en posant  $\varepsilon = \frac{\pi}{76}$ . à

la 5<sup>e</sup> conjonction, la longitude de la Terre a donc augmenté de  $243 \times 5 \times \varepsilon$ . Or  $8 \times 152 - 5 \cdot 243 = 1$ . Donc à la 5<sup>e</sup> conjonction, c'est-à-dire au bout de 8 ans, la longitude a augmenté de  $-\varepsilon$  à un multiple de  $2\pi$  près.

La longitude du nœud ascendant de Jénus étant prise égale à  $-\frac{\varepsilon}{2}$ , les conjonctions de rang 0 et 5 se feront donc assez près du nœud ascendant pour que le passage soit possible de nœud ascendant à une position telle que la Terre passe en son voisinage au mois de Décembre, tandis qu'elle passe au nœud descendant six mois après, c'est-à-dire en Juin. Les passages auront donc toujours lieu, soit en Décembre, soit en Juin.

Si le mouvement est uniforme à la 71<sup>e</sup> conjonction, la longitude est  $\pi + \varepsilon$ , à la 76<sup>e</sup> elle est  $\pi$  et  $\pi - \varepsilon$  à la 81<sup>e</sup>. Le mouvement n'étant pas rigoureusement uniforme, il faut corriger ces valeurs d'une quantité sensiblement égale

à  $\mathcal{E}$ , de sorte que la longitude de la planète sera le plus voisine de celle du nœud descendant, c'est-à-dire de  $n - \frac{\epsilon}{2}$  entre

la 71<sup>e</sup> et la 76<sup>e</sup> conjonction. Les passages au nœud ascendant ont ou auront lieu en 1761, 1769, 2004, 2012.

Pour déterminer la parallaxe du Soleil, on cherche à déterminer par l'observation des passages de Jénus la différence entre la parallaxe du Soleil et celle de Jénus; une seconde relation entre ces deux parallaxes est fournie par la 3<sup>e</sup> loi de Képler, qui donne le rapport des distances du Soleil et de Jénus à la Terre, donc le rapport de leurs parallaxes.

On observe la trajectoire apparente de Jénus sur le disque solaire; c'est sensiblement une droite. Pour déterminer cette trajectoire, on considère le disque solaire vu du centre de la Terre à l'instant 0 et à l'instant  $t$  et dans chaque position, 2 axes rectangulaires ayant leur origine au centre du Soleil, et coupant l'écliptique sous un angle constant. Deux points correspondants seront deux points qui auront mêmes coordonnées par rapport à ces axes.

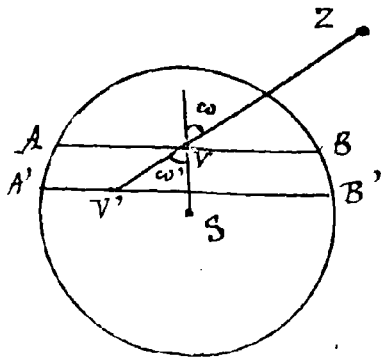
Soit  $x = a$  la corde AB décrite par Jénus sur ce disque.

Nous pouvons supposer en effet que l'angle constant fait par l'axe des  $x$  avec l'écliptique soit tel que cette corde soit parallèle à l'axe des  $y$ .

du milieu du passage la position de la planète est :

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Mais pour un observateur à la surface de la Terre, le disque solaire est déformé



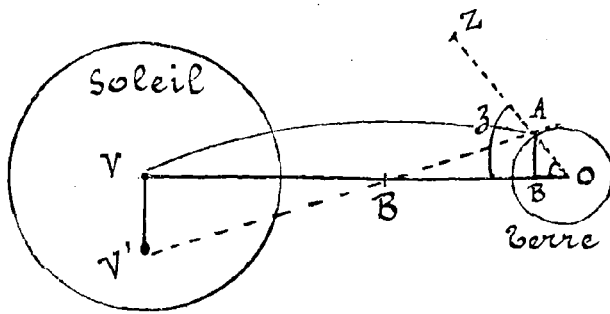
par la parallaxe, et l'équation de la corde apparente  $A'B'$  devient :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = a + \varepsilon$$

$$\text{ou } x + y \varphi = a + \varepsilon$$

en négligeant les puissances de  $\varphi$ , quantité petite.

Si la planète se projète en  $V$ , sur le disque solaire pour un observateur placé au centre de la Terre, elle se projètera en  $V'$  pour le second à la surface de la Terre.



Calculons l'écart  $VV'$ ; soit  $z$  la distance zénithale du Soleil,  $p$  sa parallaxe,  $p'$  celle de Génus. L'angle  $\widehat{VAV'} = \widehat{ABO} - \widehat{OVA}$ .  $\widehat{ABO}$  est égal à  $p' \sin z$ , parallaxe de hauteur de Génus.

De même  $\widehat{OVA} = \text{parallaxe de hauteur du Soleil} = p \sin z$ . Donc  $VV' = (p' - p) \sin z$ . Les coordonnées apparentes de la planète sur sa trajectoire (c'est-à-dire les coordonnées de  $V'$ ) sont donc :

$$x = a + (p' - p) \sin z \cos \omega$$

$$y = (p' - p) \sin z \sin \omega,$$

$\omega$  étant l'angle du plan vertical  $SVZ$  passant par le Soleil avec le plan perpendiculaire à la corde décrite par Génus. La distance de cette corde au centre du Soleil est donc  $a + (p' - p) \sin z \cos \omega$ ; on considère différentes stations pour lesquelles le facteur  $\sin z \cos \omega$  a des valeurs différentes, et l'on déduit la valeur de  $p' - p$ . Pour observer la distance de la corde au centre.



du Soleil, on peut employer le procédé de Halley; on mesure la longueur de cette corde, en mesurant le temps employé à la parcourir; l'on connaît en effet la vitesse relative de la planète et du Soleil; pour plus de précision, on note les contacts extérieurs et intérieurs à l'entrée et à la sortie.

La différence de durée des passages en deux stations différentes peut atteindre  $1800^s$ ; si donc comme Halley l'avait espéré, l'instant des contacts pouvait être évalué à  $1^s$  près, on connaîtrait la parallaxe à  $\frac{1}{1800}$  près. En réalité, cet instant n'est

apprécié qu'à  $20^s$  ou  $30^s$  près à cause du phénomène du ligament; le disque de Vénus ne se détache pas nettement du disque solaire immédiatement après que le contact géométrique a cessé, cela tient à ce qu'on a employé des instruments trop petits.

Un autre procédé consiste à prendre une série de photographies pendant la durée du passage et l'on s'en sert pour construire la corde: on calcule sur le cliché la distance de cette corde au centre, en la rapportant au rayon du disque solaire, mesuré lui-même sur le cliché; mais ce procédé est moins précis, le disque solaire paraît plus ou moins grand suivant la durée de l'exposition (irradiations).

On peut aussi se servir des planètes supérieures.

On a alors directement la parallaxe d'un de ces astres; mais comme nous connaissons les rapports des distances mutuelles de tous les corps du système solaire, nous pouvons en déduire la parallaxe du Soleil. On peut se servir de Mars, par exemple, qui est la plus rapprochée du Soleil. Mais les pointés sur Mars, qui a un diamètre apparent sensible, sont peu précis, car ils ne peuvent être comparés à des pointés faits sur les étoiles.

Eros, au contraire, est une des petites planètes qui n'ont pas de diamètre apparent sensible et qui

est encore plus rapprochée du Soleil ; elle peut en outre se rapprocher plus de la Terre, si le passage a lieu, la Terre étant à l'aphélie et la planète au périhélie. On fait des clichés photographiques des régions que la planète doit parcourir, et dans ces régions, on repère un certain nombre d'étoiles par rapport à d'autres dont la position est parfaitement connue. On fait ensuite les mesures sur la planète, que l'on rapporte aux étoiles de comparaison ainsi déterminées. Mais il s'introduit, dans ces mesures, une erreur systématique due à la dispersion atmosphérique. Dans toutes les mesures relatives à Jénus et du Soleil il n'y avait pas, en effet, à tenir compte de la dispersion, car si un rayon émané du Soleil est intercepté par Jénus, il n'atteindra pas la Terre, et ce fait est également indépendant de l'existence de l'atmosphère terrestre, mais on aurait pu craindre qu'Eros et les étoiles de comparaison n'eussent pas même couleur, et que leurs lumières ne fussent inégalement dispersées. Cette crainte ne paraît pas confirmée par les mesures les plus récentes.

## 2<sup>o</sup> Procédés physiques. -

Ils sont fondés sur la mesure de la vitesse de la lumière. On peut faire cette mesure par des procédés astronomiques (qui donnent cette vitesse en unités astronomiques) ou par des procédés physiques et par comparaison des deux séries de mesures, on a en kilomètres la valeur de l'unité astronomique (distance du Soleil à la Terre). Røemer observa les éclipses des satellites de Jupiter. Si deux éclipses sont observées au moment de deux oppositions, l'intervalle est  $nE$ ,  $E$  étant l'intervalle réel de deux éclipses consécutifs et  $n-1$  le nombre des éclipses intermédiaires. Si l'une des éclipses a lieu au moment d'une opposition et l'autre au moment d'une conjonction, cet intervalle sera  $nE + \frac{2}{V}$ ,  $V$  étant la vitesse de la lumière en unités  $V$ .

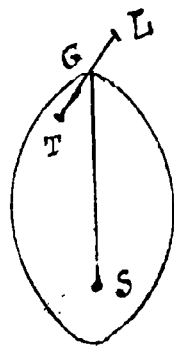
astronomiques, puis que pour l'une des éclipses, la lumière a eu à parcourir un chemin plus grand pour arriver à l'œil, la différence étant 2 fois le rayon de l'orbite terrestre, c'est-à-dire deux unités astronomiques. L'observation de 3 éclipses, 2 en opposition, 1 en conjonction, donnera donc  $E$  et  $V$ ; un autre procédé est fondé sur l'aberration dont nous parlerons plus loin.

### 3<sup>o</sup> Méthodes fondées sur la mécanique céleste.

1<sup>re</sup> Méthode - L'étude des perturbations séculaires exercées par la Terre et la Lune sur une planète inférieure donne le rapport de la masse du système Terre + Lune  $\frac{M}{m} = \frac{n^2 a^3}{n'^2 a'^3}$ .

(On peut négliger dans  $M$  la masse de la Terre en face de celle du Soleil, car la parallaxe est connue avec une approximation bien inférieure à l'erreur ainsi commise). Le rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune ( $\frac{n}{n'}$  est connu; c'est le rapport des révolutions sidérales de la Lune et de la Terre);  $a$  est connue quand on connaît la parallaxe de la Lune. On en déduit donc  $\alpha$ .

2<sup>e</sup> Méthode - Le centre de gravité  $G$  du système Terre + Lune décrit une ellipse de foyer  $S$  et  $T$  et  $L$  décrivent deux cercles concentriques autour de  $G$ . Il en résulte une inégalité périodique dans la longitude de la Terre, donc dans la longitude géocentrique du Soleil, et dont le coefficient est de  $6''5$ . Or l'écart maximum entre  $T$  et  $G$  dépend du rapport



$$\frac{TG}{GS} = 6''5$$

mais  $\frac{TG}{TL} = \frac{\mu}{1+\mu}$ ,  $\mu$  désignant le rapport des masses de la Lune et de la Terre;  $\mu$  est connu par l'observation des nutations;  $TL$  est connu, par suite on a  $TG$  et  $GS$ .

### Résultats.

Passages de Vénus (Halley) .....	8,794 ± 0,018
Passages de Vénus (photographies) .....	8,857 ± 0,023
Passages de Mars .....	8,78 ± 0,020
Mesures kilométriques sur les petites planètes (Victoria) .....	8,807 ± 0,007
Vitesse de la lumière .....	$\left. \begin{array}{l} 8,793 \pm 0,0046 \\ 8,806 \pm 0,0056 \end{array} \right\}$
Masse de la Terre .....	8,759 ± 0,060
Inégalité parallactique de la Lune ...	8,794 ± 0,018
Inégalité mensuelle du Soleil ...	8,825 ± 0,030

La valeur donnée par Eros n'est pas encore connue.

On prend en général pour valeur de la parallaxe du Soleil 8"80; ce qui correspond à une distance du Soleil à la Terre d'environ 150 - 106 kilomètres.

# Douzième Leçon.

---

## La Lune.

---

### Mouvement de la Lune.

Le mouvement de la Lune autour de la Terre s'écarte davantage des lois de Kepler que le mouvement des planètes autour du Soleil. Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ et 2 autres analogues}$$

$$\text{avec } V = + \frac{M+m}{r} + \frac{m_1}{\rho} - \frac{m_1}{r^3} \sum x x_1$$

les notations étant les mêmes que dans la 9<sup>e</sup> leçon. Pour les planètes  $m$  et  $m_1$  sont très petits devant  $M$ , le terme  $\frac{M+m}{r}$  l'emporte et les perturbations sont faibles.

Pour la Lune au contraire, le corps central de masse  $M$  est la Terre et le corps troublant est le Soleil, de masse  $m_1$ . Or  $r r_1 \cos \varphi = \sum x x_1$ ,  $\varphi$  étant l'angle des deux directions de  $r$  et de  $r_1$ . Donc

$$d^2 = \sum (x - x_1)^2 = r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos \varphi.$$

Posons  $r = \alpha r_1$ ,  $r =$  distance de la Terre à la Lune,  
 $r_1 =$  distance de la Terre au Soleil, donc  $\alpha$  est  
 petit et

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_1} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2) - \frac{1}{2}$$

peut être développé en une série de la forme

$$\frac{1}{d} = \sum \alpha^k F_k(\varphi),$$

$k$  étant un nombre entier.

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_1} + \frac{\alpha}{r_1} \cos \varphi + \dots$$

$$\frac{m_1}{r^3} \sum x x_1 = \frac{m_1 \alpha}{r_1} \cos \varphi,$$

$$\text{d'où } \frac{m_2}{d} - \frac{m_1}{r_1^3} \sum x x_1 = \frac{m_2}{r_1} + \frac{m_1}{r_1} \alpha^2 F_2(\varphi)$$

Le premier terme  $\frac{m_2}{r_1}$  est indépendant de

$(x, y, z)$ . On peut donc le supprimer dans l'expression de  $V$  qui doit servir à la formation des équations du mouvement. Le terme principal de cette partie est donc

$$\frac{m_1}{r_1} \alpha^2 F_2(\varphi),$$

comparons le à  $\frac{M+m}{r}$  pour voir le terme principal

de  $V$ : le rapport de ces deux termes est proportionnel à

$$\frac{m_1}{M+m} \alpha^3 = \frac{m_1}{M+m} \frac{a^3}{a_1^3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3$$

Les deux derniers facteurs sont connus et

voisins de 1 ;

$$\text{et } \frac{m_1}{M+m} \frac{a^3}{a_1^3} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \text{ sensiblement.}$$

Donc dans  $V$  le terme  $\frac{M+m}{r}$  est de beaucoup le plus important ; c'est pourquoi l'action de la Terre sur la Lune l'emporte sur celle du Soleil. Ce terme principal ne dépend que de  $\frac{n_1}{n}$  et non des axes  $a$  et  $a_1$  des orbites lunaire et terrestre ; il ne pourrait donc pas donner la parallaxe solaire. C'est le terme suivant :

$$\frac{m_1}{r_1} \alpha^3 F_3 (\varphi)$$

qui dépend de cette parallaxe et permet de la calculer en mesurant le coefficient de "l'inégalité parallactique" comme nous l'avons expliqué dans la leçon précédente.

Les inégalités séculaires sont très considérables ; elles affectent surtout la longitude du périhélie et celle du nœud ; si bien que la Lune décrit une ellipse dont le plan tourne avec une vitesse sensiblement constante et qui tourne elle-même dans ce plan. Le nœud effectue sa révolution en 18 ans et le périhélie en 9 ans. L'obliquité de l'orbite lunaire sur l'équateur est donc variable ; car son obliquité sur l'écliptique peut s'ajouter à celle de l'écliptique sur l'équateur ou s'en retrancher. Elle peut varier entre  $18^\circ$  et  $28^\circ$ . On envisage plusieurs sortes de révolutions pour la Lune :

Révolution sidérale (révolution de la Lune sur son orbite) : Durée : 27 jours, 7 heures.

Révolution synodique (Intervalle de 2 conjonctions) - Durée : 29 jours, 12 heures. C'est la période des phases ou lunaison.

Révolution anomalistique (Intervalle entre deux passages consécutifs au périhélie) : 27 jours, 13 heures.

136.

Révolution draconitique (Intervalle entre deux passages consécutifs au nœud ascendant) - Durée: 27 jours, 5 heures.

Malgré ses grandes difficultés, la théorie de la lune a été amenée à une grande perfection; cependant quelques unes des inégalités de la lune sont encore mal expliquées, en particulier l'accélération séculaire; le mouvement sidéral semble en effet s'accélérer de siècle en siècle. La longitude moyenne de la lune est

$$L = nt + \varepsilon$$

$\varepsilon = -nt_0 + \pi$  est ce qu'on appelle la longitude de l'époque.

Le grand axe et par suite  $n$  ne subissent pas de variations séculaires, mais ne subissent que des variations périodiques très petites. On peut donc supposer  $n$  constant. Mais  $\varepsilon$  qui dépend de  $\pi$ , longitude du périhélie et de  $t_0$  époque du passage au périhélie, n'est pas constant.

Posons  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ ,  $t$  + des termes périodiques que nous négligeons.  $\varepsilon_0 =$  une constante  $L = (n + \varepsilon_1)t + \varepsilon_0$ .  $\varepsilon_1$  dépend des constantes des corps troublants, en particulier de l'excentricité de l'orbite terrestre, laquelle subit des variations séculaires; et l'on peut écrire

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta t$$

$$L = (n + \alpha)t + \beta t^2 + \varepsilon_0$$

qui contient un terme en  $t^2$  représentant l'accélération séculaire.

Par ce calcul Laplace trouvait pour l'accélération  $12''$  conformément à la valeur observée. Mais ce calcul était erroné, il aurait fallu dire

$$\frac{dL}{dt} = n + \varepsilon_1 = n + \alpha + \beta t$$

$$\text{d'où} \quad L = (n + \alpha)t + \frac{\beta t^2}{2} + \varepsilon_0 ;$$

l'accélération théorique n'aurait plus été que de  $6''$ .



Voici comment Delaunay a cherché à expliquer cette différence : les marées occasionnent des frottements qui doivent ralentir la rotation de la Terre ; or c'est cette rotation qui nous sert de mesure du temps ; donc ce n'est pas le mouvement de la Lune qui s'accélère, c'est notre pendule qui retarde. À vrai dire ce frottement existe, mais il est extrêmement faible : Darwin admet alors à l'intérieur de la Terre l'existence de liquides internes très visqueux et donnant lieu par leurs marées à des frottements considérables.

### Rotation de la Lune.

La Lune tourne sur elle-même ; elle présente toujours la même face vers la Terre ; c'est donc que la durée de sa rotation est égale à celle de la révolution sidérale. En réalité, on ne voit pas toujours rigoureusement le même hémisphère de la Lune ; le mouvement de rotation est uniforme ; mais le mouvement de la Lune sur son orbite n'est pas uniforme, il est conforme à la loi des aires. Il en résulte pour la Lune une sorte de balancement qu'on appelle libration en longitude et qui a pour effet de cacher et de découvrir successivement deux petits fuseaux à l'Est et à l'Ouest de l'hémisphère moyen visible.

La libration en latitude est due à ce que l'axe de rotation de la Lune n'est pas rigoureusement perpendiculaire au plan de son orbite.

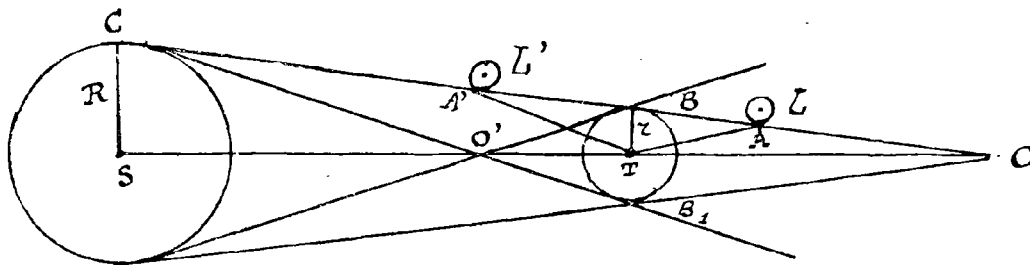
Enfin la libration diurne qui n'est qu'apparente est due à la parallaxe : même si les deux librations précédentes n'avaient pas lieu, la Lune ne présenterait toujours la même face que pour un observateur au Centre de la Terre.

Laplace admet que la Lune n'était pas sphérique, mais qu'elle avait la forme d'un ellipsoïde dont le grand axe était dirigé vers la Terre : si elle s'écarte de cette position d'équilibre, elle tend donc à y revenir ; si à l'origine les périodes des deux mouvements étaient très voisines, l'attraction

de la Terre ramènerait sans cesse la lune à cette position d'équilibre. Cela explique les oscillations de la lune, mais non pourquoi ces oscillations sont presque nulles ; il devrait y avoir une 4<sup>e</sup> vibration résultant des oscillations isochrones de la lune assimilée à un pendule ; or ces oscillations ne sont pas observées, c'est donc qu'elles sont amorties, probablement par des marées internes de liquides visqueux analogues à celles dont nous parlions tout à l'heure à propos de l'accélération séculaire.

### Eclipses.

Il y a éclipse de lune quand la Terre porte ombre sur la lune, donc quand il y a opposition (pleine lune) ; il y a éclipse de soleil quand la lune est interposée entre la terre et le soleil, donc aux conjonctions (nouvelle lune). Il peut y avoir éclipse de lune totale ou partielle.



De même, pour certains points de la terre, il peut y avoir éclipse totale, partielle ou annulaire du soleil.

Pour qu'il y ait éclipse de lune, il faut que la lune soit en tout ou en partie dans le cône d'ombre  $BOB_1$ . Les éclipses de lune se produisent en même temps pour tous les points de la terre qui ont la lune au dessus de l'horizon. La condition d'égalité des longitudes du soleil et de la lune n'est pas suffisante pour qu'il y ait éclipse de lune ou de soleil, car l'orbite lunaire est inclinée sur l'écliptique, il faut donc en outre que la latitude de la lune soit faible, c'est-à-dire que la conjonction ou l'opposition ait lieu au voisinage d'un nœud.

### Condition de possibilité d'une éclipse de Lune.

Soient  $\rho$  et  $\rho'$  les demi diamètres apparents du Soleil et de la Lune,  $\pi$  et  $\pi'$  leurs parallaxes. L'angle au sommet du cône d'ombre

$$\delta = \frac{R}{OS} = \frac{r}{O\pi} = \frac{A-r}{TS} = \rho - \pi.$$

Donc si on figure la Lune  $L$  tangente en  $A$  au cône d'ombre au moment où commence une éclipse,

$$\widehat{ATO} = \pi' - \rho + \pi$$

Pour qu'il y ait éclipse partielle de Lune, il faut

$$d < \rho' + \widehat{ATO}$$

$d$  désignant la distance angulaire du centre de la Lune au point diamétralement opposé au centre du Soleil (point  $O$ ), distance que du centre de la Terre on :

$$d < \pi + \pi' - \rho + \rho' \quad (1)$$

Pour qu'il y ait éclipse totale de la Lune, il faut

$$d < \widehat{ATO} - \rho' \quad \text{ou} \quad d < \pi + \pi' - \rho - \rho'.$$

### Condition de possibilité d'une éclipse de Soleil.

Pour qu'il y ait éclipse de Soleil en un point quelconque de la Terre, il faut et il suffit que la Terre coupe le prolongement du cône d'ombre  $BC$ . A la limite elle touche le prolongement en  $A'$ .

On trouve de même

$$A'TS = \pi' + \rho - \pi$$

d'où la condition

$$d < \rho' + \rho + \pi' - \pi \quad (2)$$

Les éclipses de Soleil sont donc plus fréquentes

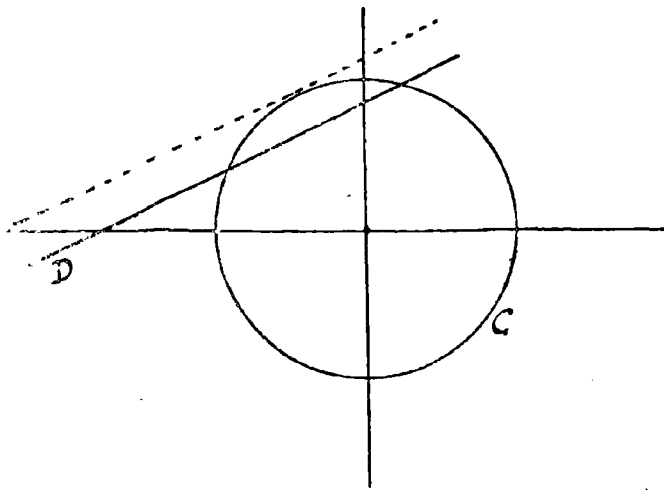
que les éclipses de Lune, car la condition (2) est plus facilement vérifiée que la condition (1). Mais en un même lieu les éclipses du Soleil sont beaucoup moins fréquentes.

### Périodicité des éclipses.

Cette périodicité, qu'on appelle le Saros, comprend 242 révolutions draconitiques et 223 révolutions synodiques. Au bout de cette période, la Lune et le Soleil ont repris la même position relative, c'est-à-dire que leurs longitudes et leurs latitudes ont repris les mêmes valeurs, sensiblement du moins, à cause de l'excentricité; mais la différence est très faible, car cette période comprend à peu près 239 révolutions anomalistiques, de sorte que la longitude

du périhélie reprend aussi à peu près la même valeur. Il se produit dans un Saros, 41 éclipses de Soleil et 29 éclipses de Lune.

On peut prévoir les phases d'une éclipse de Lune: les coordonnées des centres de la Lune et du Soleil sont connues; une première approximation consiste à admettre que le mouvement de ces centres au début de l'éclipse



est rectiligne et uniforme dans le plan tangent à la sphère céleste; on considère le mouvement relatif de la Lune et du Soleil rapporté dans ce plan à deux axes ayant pour origine mobile le centre de l'ombre de la Terre et le centre de la Lune décrit une droite  $D$  d'un mouvement uniforme.

Pour qu'il y ait éclipse partielle de Lune, il faut que la distance  $d$  du centre de la Lune à l'origine mobile, soit  $< \pi + \pi' - \rho + \rho'$ ; il faut donc que le centre de la Lune soit à l'intérieur d'un cercle  $C$  ayant pour centre l'origine

mobile et pour rayon  $\pi + \pi' - \rho + \rho'$ . En construisant l'intersection de la droite  $D$  et du cercle  $C$ , on aura le commencement et la fin de l'éclipse partielle.

Pour le commencement et la fin de l'éclipse totale, il n'y aura qu'à remplacer le rayon  $\pi + \pi' - \rho + \rho'$  par  $\pi + \pi' - \rho - \rho'$ .

On opérera de même pour prédire une éclipse du Soleil en un lieu donné. La connaissance des temps donne les coordonnées de la Lune et du Soleil. Il faut corriger ces coordonnées des effets de la parallaxe. On aura ainsi l'équation de la droite  $D$  décrite par le centre de la Lune dans son mouvement relatif par rapport au centre du Soleil pris pour origine mobile.

Il reste à chercher l'intersection de cette droite  $D$  avec le cercle  $C$  dont le rayon est  $\rho + \rho'$  pour l'éclipse partielle,  $\rho' - \rho$  pour l'éclipse totale,  $\rho - \rho'$  pour l'éclipse annulaire.

Le diamètre apparent du Soleil et celui de la Lune sont sensiblement égaux, mais ils sont variables, puisque les orbites sont elliptiques; quand celui de la Lune est le plus grand, l'éclipse ne peut être annulaire; elle l'est au contraire quand la Lune a le plus petit diamètre apparent.

Pour prévoir les phases d'une éclipse de Soleil en un lieu donné, il faut faire la correction de parallaxe. Il n'y a pas à faire de correction de réfraction, les rayons issus du Soleil et de la Lune étant également réfractés.

On établit des cartes d'éclipse de Soleil; on dit qu'une éclipse est centrale quand les centres du Soleil et de la Lune coïncident. La droite qui joint ces centres décrit une surface réglée connue puisqu'on connaît, en fonctions du temps, les coordonnées de ces centres par rapport à 3 axes invariablement liés au globe terrestre, suivant une courbe appelée ligne de centralité; on arrête cette courbe aux points où la ligne des centres est tangente à la terre.

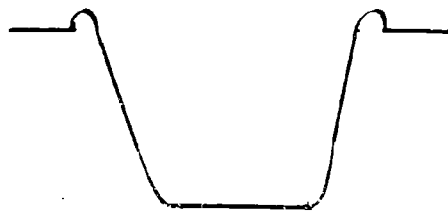
À chaque instant le cône d'ombre de la Lune coupe la terre suivant une petite ellipse et l'enveloppe de ces ellipses donne la limite de la zone de totalité.

Le lieu des points de la Terre où l'éclipse commence ou finit à un instant donné est, l'intersection de la Terre avec le cône de pénombre. L'enveloppe de ces courbes est la limite de l'éclipse. On établit aussi la courbe lieu des points où l'éclipse commence ou finit au lever ou au coucher du Soleil. Ces points sont ceux où une génératrice du cône de pénombre est tangente à la Terre.

Dans l'occultation des étoiles par la Lune, le phénomène de réfraction terrestre n'intervient pas; on voit l'étoile disparaître et réapparaître subitement, elle ne s'éteint pas progressivement; ces observations auraient une précision extrême si le bord de la Lune était un cercle.

Il n'en est malheureusement pas ainsi à cause des montagnes lunaires; on observe plus facilement l'immersion que l'émergence et surtout du côté du bord obscur de la Lune.

De ce phénomène d'occultation on conclut que la Lune n'a pas d'atmosphère et par suite pas d'eau. On observe à sa surface de nombreux cirques qu'on a assimilés aux volcans



( Profil d'un cratère de la Lune.



( Profil d'un cratère de la Terre.

terrestres, mais qui en diffèrent notablement; on observe aussi des "mers" plaines dues à des effondrements probables de la surface et à des fractures qui ont livré passage à des nappes de matières en fusion recouvrant tous les accidents de terrains intérieurs.

Autour du cratère le plus important "Le Bythro" on observe de grandes traînées blanches qu'on attribue à des

éruptions du volcan. Le contraste entre la surface lunaire et la surface terrestre tient surtout à l'absence sur la Lune d'agents atmosphériques, et par suite de toute cause de dégradation. De plus, il semble que les montagnes produites par plissement sur la Terre, se soient produites par fractures de la surface lunaire.

---

## Treizième Leçon.

---

### Figure des corps célestes.

---

La figure des corps célestes est la forme d'équilibre stable résultant de l'action des 2 forces qui agissent sur eux : l'attraction mutuelle (gravitation universelle) et la force centrifuge.

Les composantes de l'attraction sont :

$$\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, \text{ le potentiel } V \text{ étant } V = \int \frac{k \mu d\tau}{r}, \text{ d}\tau \text{ dési-}$$

quant l'élément de volume attractif.

à l'intérieur du corps attractif où la densité est  $\mu$ ,  $V$  satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta V = -4\pi\mu \quad (\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2})$$

et par conséquent, à l'extérieur, à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0$$

Quant à la force centrifuge, si l'on prend pour axe des  $z$  l'axe de rotation, ses composantes sont  $\omega x$ ,  $\omega y$ ,  $\omega$  étant la vitesse de rotation.

Les composantes de la résultante agissant sur une molécule  $(x, y, z)$  sont donc

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

en posant  $U = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$

Cette force résultante est ce qu'on appelle

la pesanteur; sa direction définie par

$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$  est la verticale du lieu et sa

grandeur est l'intensité de la pesanteur en ce lieu.

Étudions le cas d'une masse fluide homogène: il faut pour l'équilibre que la force soit normale à la surface libre. L'équation de la surface du corps est donc  $U = C$ . Le problème est donc de trouver une fonction continue  $V$  qui, à l'intérieur du corps, satisfasse à l'équation de Poisson, et, à l'extérieur, à l'équation de Laplace telle que  $U$  soit constante sur la surface du corps et dont les dérivées premières soient continues. Ce



Ce problème comporte quelques solutions simples.  
Soit  $J$  le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation,  $V$  son volume, l'expression  $\frac{\omega J}{V^{5/3}}$  est indépendante de l'unité de longueur, car

$V$  a pour dimensions  $L^3$  et  $J = \sum m r^2 L^5$ , le choix d'une unité de temps impliquant celui d'une unité de densité, si la constante  $K$  de la gravitation conserve la même valeur.

Faisons croître  $\frac{\omega J}{V^{5/3}}$  indéfiniment à partir de 0, ce qui est réalisé par exemple avec un corps soumis à un couple qui lui communique un mouvement de rotation accéléré, ou bien avec un corps qui se contracte indéfiniment par refroidissement, le produit  $\omega J$  qui représente le moment des quantités de mouvement du corps par rapport à l'axe de rotation étant constant en vertu de la loi des aires.

Pour  $\frac{\omega J}{V^{5/3}} = 0$  la figure d'équilibre est une sphère;  $\frac{\omega J}{V^{5/3}}$  croissant, elle devient un ellipsoïde de révolution (équilibre de Mac Laurin), qui s'aplatit de plus en plus. Pour une certaine valeur de  $\frac{\omega J}{V^{5/3}}$  cet ellipsoïde a 3 axes inégaux (équilibre de Jacobi).

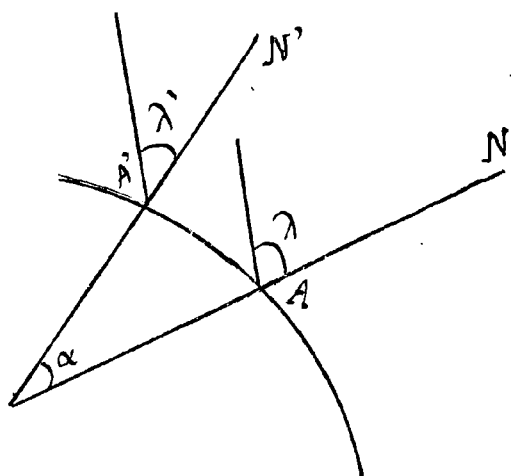
Cet ellipsoïde à son tour,  $\frac{\omega J}{V^{5/3}}$  croissant, devient figure d'équilibre instable, et la figure d'équilibre stable est une figure piriforme, puis il y a séparation et cette figure devient un corps allongé accompagné d'un satellite.



Ces dernières formes ne se trouvent pas dans le système solaire; si  $\omega$  étant petit, on peut

négliger  $\omega^2$ , on trouve encore des ellipsoïdes de révolution comme figures d'équilibre. Clairaut a démontré qu'une planète, dont l'intérieur est supposé fluide, est composée de couches ellipsoïdales de densité croissante; dans chacune d'elles la pression et la densité sont constantes, ainsi que la fonction  $U$ , l'aplatissement est compris entre  $\frac{5}{4} \varphi$  et  $\frac{1}{2} \varphi$ ,  $\varphi$  étant le rapport

de la force centrifuge à l'intensité de la pesanteur à l'équateur. Ces inégalités ont été vérifiées par les planètes dont on connaît l'aplatissement et la vitesse de rotation, donc  $\varphi$ . Elles ont été vérifiées aussi pour la terre: on a mesuré l'aplatissement en mesurant la longueur d'un arc de méridien au voisinage du pôle et de l'équateur; la latitude est définie à l'aide de la verticale du lieu et de l'axe du monde; la différence des



deux latitudes des extrémités de l'arc mesuré  $AA'$  est donc l'angle  $\alpha$  des 2 normales à ces extrémités et le rapport  $\frac{AA'}{\alpha}$  = le rayon de courbure du méridien; ce rayon de courbure est  $\frac{a^2}{b}$  au pôle et  $\frac{b^2}{a}$  à l'équateur.

La véritable figure d'équilibre n'est pas un ellipsoïde de révolution; on appelle géoïde la figure que prendrait la surface des mers prolongée; cette surface est constamment normale à la verticale; elle a pour équation  $V = Cte$  et diffère peu de l'ellipsoïde. Des observations donnent les coordonnées astronomiques du lieu (cos directeurs de la verticale par rapport à des axes invariablement liés au globe terrestre).

La forme du géoïde étant connue, on a une première condition à laquelle doit satisfaire la distribution de la matière à l'intérieur du globe terrestre. Le pendule donne aussi l'intensité de la pesanteur, donc ses 3 composantes et sa direction; mais ce n'est pas là une nouvelle donnée sur la distribution intérieure de la matière, car en vertu du théorème de Stokes, la connaissance de la forme du géoïde suffirait à donner cette intensité.

Supposons en effet que la connaissance de  $\omega$ , de la masse  $M$  de la terre et de la forme du géoïde soit insuffisante pour déterminer la fonction  $V$ ; soient alors 2 solutions  $V$  et  $V'$ , auxquelles correspondent 2 fonctions  $U$  et  $U'$ ;

$$U - U' = V - V'$$

à la surface  $U = K$   $U' = K'$ , donc

$$U - U' = V - V' = K - K'$$

$V$  et  $V'$  s'annulent à l'infini, donc  $U - U'$  aussi.

Assimilons le corps à un conducteur électrique qu'une charge convenable porte au potentiel  $W = 1$ .  $\Delta W = 0$  à l'extérieur de ce corps; posons

$$F = V - V' - (K - K') W$$

$F$  satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta F = 0$ ; sur la surface  $F = 0$ . De plus  $F$  ne peut avoir ni maximum ni minimum; il faut en effet pour qu'il y ait maximum ou minimum:

1° que les dérivées partielles premières de  $F$  s'annulent;

$$2^\circ \text{ que la forme } \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} z^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} z^2 n$$

garde un signe constant; il faut donc que les trois coefficients  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$  soient de même signe,

148.

or leur somme est nulle.

Les conditions ne peuvent donc être réalisées ; il ne peut donc y avoir d'autre maximum ou minimum que zéro, et  $F$  est partout nul.

En un point à la distance  $r$  très éloignée du corps  $W = \frac{\mu}{r}$ ,  $\mu$  étant la charge du conducteur ; d'autre part  $V = \frac{M}{r}$ ,  $V' = \frac{M}{r}$

$M$  étant la masse du corps ; donc comme on peut admettre qu'en ce point  $F = 0$ , il vient  $(K - K') \frac{\mu}{r} = 0$ , on voit donc que les constantes  $K$  et  $K'$  sont égales.

Donc  $V - V' = F = 0$

Donc  $V$  et  $V'$  sont identiques et il n'y a pour  $V$  qu'une solution.

On peut donc avoir l'intensité de la pesanteur, connaissant l'aplatissement de la Terre (formule de Clairaut). Néanmoins les mesures géodésiques étant incomplètes, on peut les compléter utilement par des observations faites avec le pendule.

La principale cause qui semble écarter la forme du géoïde de l'ellipsoïde est l'attraction des continents ; mais les observations sont moins bien représentées quand on introduit la correction due à cette attraction. Il semble qu'il y ait, une compensation dans les couches intérieures du globe. Cette compensation s'explique si l'on se représente la couche solide de la Terre, comme formée de radeaux flottant sur le liquide intérieur ; la couche solide (plus légère puisqu'elle surnage) enfoncerait d'autant plus, en vertu du principe d'Archimède, que la partie au dessous du niveau de la mer serait plus élevée, et par conséquent que le radeau serait plus lourd. C'est ce qui arriverait sur les continents.

L'aplatissement de la Terre peut encore être calculé en mesurant une inégalité de la Lune ; en vertu du théorème de Stokes, cette inégalité ne peut dépendre, en effet, que de la forme extérieure du géoïde,

c'est-à-dire l'aplatissement.

Une autre donnée sur la distribution intérieure est fournie par la précession.

On a démontré qu'il n'existe aucune fonction satisfaisant à la fois à ces deux conditions ; on en a conclu que la Terre était entièrement solide, sans quoi la formule de Clairaut, qui suppose la Terre fluide, sans quoi la formule de la précession qui suppose la Terre solide serait exacte. Nous ne nous arrêterons pas à ces explications opposées. Mais il est plus probable que la valeur de l'aplatissement n'est pas très exactement établie.

Les anneaux de Saturne ne peuvent être solides, et cela pour deux raisons :

1<sup>o</sup> Fbrin a calculé que si ces anneaux étaient solides, l'attraction des satellites serait suffisante pour les rompre, même en les supposant mille fois plus résistants que l'acier.

2<sup>o</sup> Ces anneaux solides, seraient en équilibre instable, en les supposant homogènes et de section constante.

Si cette dernière condition n'était pas remplie, Maxwell a calculé quelles devraient être ces inégalités pour que l'équilibre soit stable, il est arrivé à des inégalités énormes qui auraient été observées.

Ces anneaux ne sont pas non plus fluides, car il faudrait, dans cette hypothèse, que la densité de l'anneau soit au plus les  $\frac{2}{100}$  de celle de la planète.

D'une part, pour que la masse fluide soit en équilibre stable, il faut que la force normale à la surface libre, soit dirigée vers l'intérieur ; donc la dérivée de  $U$  suivant la normale est négative,

$$\frac{dU}{dn} < 0$$

Or la formule de Green donne

$$\iint \frac{dU}{dn} dn = \iiint \Delta U d\tau$$

La 1<sup>re</sup> intégrale étant prise sur la surface, et la seconde à son intérieur.

$$\text{Donc } \Delta U < 0, \text{ or } \Delta U = \Delta V + \Delta \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \\ = 4\pi\mu + 2\omega^2$$

$$\text{Donc } 2\omega^2 < 4\pi\mu,$$

( $\mu$  est la densité moyenne de l'anneau si la masse est hétérogène).

Donc il faudrait  $\mu < \frac{1}{16}$  densité de la planète, condition incompatible avec la première. Donc l'anneau ne peut être fluide. On admet qu'il est formé de petits satellites très nombreux.

---

## Phénomène des Marées

---

Les marées sont des oscillations du niveau des mers sous l'influence des variations périodiques de l'attraction du Soleil et de la Lune. Elles résultent du phénomène de résonance.

Considérons un système dynamique quelconque en équilibre stable; écarté de cette position et abandonné librement à lui-même, il oscille; c'est ce qu'on appelle les oscillations propres du système.

Soit ( $\xi, \eta, \zeta$ ) l'écart supposé petit d'une molécule du système. Si on en néglige le carré, on obtiendra des équations différentielles linéaires;

elles seront de plus, à coefficients constants. Parmi les solutions il y en aura de la forme

$$\xi = A e^{i\beta t}$$

$\beta$  étant une constante ; elles définiront les oscillations propres harmoniques du système ; ces oscillations sont isochrones.

Les équations, étant à coefficients réels, elles admettront aussi la solution imaginaire conjuguée, et on aura ainsi, par l'intermédiaire d'une solution imaginaire, 2 solutions réelles. De sorte qu'une oscillation propre quelconque pourra être considérée comme la résultante de plusieurs harmoniques, conformément au principe de la superposition des petits mouvements.

Supposons maintenant que le système, écarté de sa position d'équilibre, soit abandonné à lui-même sous l'action des forces extérieures petites ; les écarts seront encore petits ; on aura les oscillations forcées du système. Supposons les forces proportionnelles à  $e^{i\omega t}$ , les oscillations des forcés sont isochrones, donc celles des écarts aussi ; parmi ces oscillations forcées isochrones, on distingue les oscillations forcées harmoniques et isochrones

$$\xi = A e^{i\omega t} \text{ où les coefficients}$$

$A$  sont les mêmes que dans une des oscillations propres harmoniques et qui, par conséquent, ne diffèrent des oscillations propres harmoniques qu'en ce qu'elles ont pour période celle de la force perturbatrice, et non pas une des périodes propres du système.

Une oscillation forcée isochrone peut toujours être considérée comme résultant de la superposition de plusieurs oscillations forcées harmoniques et isochrones.

Vérifions le sur un exemple : Soit un canal fermé sur lui-même, de longueur  $l$ , de profondeur

h constante, de largeur également constante et petite. Le niveau s'élève de  $z$ ; une perturbation se propage avec la vitesse  $\sqrt{gh}$ .  
Si l'on considère une oscillation isochrone

$$z = e^{i\alpha} (s \pm \sqrt{gh} t)$$

le double signe  $\pm$  signifiant que la perturbation peut se propager dans un sens ou dans l'autre, et  $s$  étant l'arc compté à partir d'une origine fixe dans un sens déterminé.  $\alpha$  doit être tel que  $z$  soit fonction périodique de  $s$ , donc

$$\alpha = \pm \frac{2\pi m}{e}$$

$m$  étant un entier quelconque positif; on obtient ainsi toutes les oscillations propres harmoniques du système.

Supposons une force perturbatrice proportionnelle à  $e^{i\omega t}$ ; l'oscillation forcée

sera  $z = F(s) e^{i\omega t}$ ,  $F(s)$  étant une fonction périodique

$$F(s) = \sum A e^{\frac{2\pi i m s}{e}} = \sum A e^{i\alpha s}$$

Elle est ainsi décomposée en oscillations harmoniques de la forme

$$z = A e^{i(\alpha s + \omega t)}$$

Avec un canal non fermé sur lui-même, il y aurait réflexion de l'onde aux deux extrémités, et on aurait la période propre par la considération des ondes stationnaires.

Si la période des variations de la force perturbatrice est très voisine de la période propre du système, il y aura résonance, comme



comme dans un tuyau d'orgue.

La période des marées est donc celle des forces perturbatrices (attraction du Soleil et de la Lune). Ces forces dérivent d'un potentiel  $V$  qui est

$$V = \frac{m}{\delta} - m_1 \frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r_1^3}$$

car on étudie le mouvement des molécules liquides par rapport au centre de la Terre et non leur mouvement absolu.

$r_1$  = distance de la Terre à la Lune;

$\delta$  = distance de la molécule liquide à la Lune;

$(xyz)$  = coordonnées de la molécule;

$(x_1 y_1 z_1)$  = celles de la Lune par rapport à des axes mobiles par le centre de la Terre.

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_1} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2) - \frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{r}{r_1}$ ,  $r$  étant le rayon terrestre allant à la molécule, et  $\varphi$  l'angle des 2 rayons  $r$  et  $r_1$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{\alpha \cos \varphi}{r_1} + \frac{\alpha^2}{r_1} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} + \dots$$

$\frac{1}{2}$  est indépendant de  $(xyz)$ ; le 2<sup>e</sup> terme  $\frac{\alpha \cos \varphi}{r_1}$  est détruit par  $\frac{m_1 \sum xx_1}{r_1^3}$

Donc le 1<sup>er</sup> terme qu'on doit considérer dans

$$V \text{ est } \frac{m_1 \alpha^2}{r_1} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} = \frac{m_1 r^2}{r_1^3} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2}$$

La présence du coefficient  $\frac{1}{r_1^3}$  explique pourquoi l'action de la Lune est prépondérante sur celle du

154

Soleil.

Il n'en serait pas de même, si l'action variait en raison inverse du carré des distances ; Mais ce qu'on observe, ce n'est pas l'attraction de la lune sur la mer, mais la différence de cette attraction sur la mer et sur le centre de la terre. Cette différence varie en raison inverse du cube des distances.

$$\cos \varphi = \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos A.$$

$A$  est l'angle horaire du corps troublant,  $\delta$  sa distance polaire.  $V$  est de la forme

$$V = V_0 + V_1 \cos A + V_2 \cos^2 A.$$

Ces termes peuvent être exprimés en séries trigonométriques.  $V_0$  est indépendant de  $A$  ; il ne dépend que du mouvement de la lune et de celui du soleil ; il ne contiendra donc que des termes à longue période (de l'ordre de 1 mois)

$$V_1 \cos A = V_1 \cos R - V_1 \sin R \sin H.$$

Les deux coefficients  $V_1 \cos R$ ,  $V_1 \sin R$  ne dépendent que du mouvement de la lune et sont développables en termes trigonométriques à longue période. En les multipliant par  $\cos H$  et  $\sin H$ , on aura ainsi des termes dont la période est voisine de 1 journée ; et pour  $\cos 2A$ , des termes dont la période est voisine de  $\frac{1}{2}$  journée. On retrouve des termes de même période dans les oscillations du niveau de la mer, et l'on distingue les marées à longue période, les marées diurnes et les marées semi-diurnes. Les plus importantes sont la marée  $M_2$  (période =  $\frac{1}{2}$  jour lunaire moyen), la marée  $S_2$  (période =  $\frac{1}{2}$  jour solaire moyen), la marée  $K_2$  (période =  $\frac{1}{2}$  jour sidéral).

Parmi les marées diurnes, les principales sont les marées  $O$ ,  $P$ ,  $K$ , dont les périodes sont 1 jour lunaire moyen et 1 jour sidéral.

Les principales marées à longue période ont

pour période  $1/2$  révolution sidérale de la lune et  $1/2$  année.

Le plus grand de tous ces termes est  $M^2$  au moment des syzygies (pleine lune et nouvelle lune)  $M_2$  et  $S_2$  sont en concordance ; au moment des quadratures, au contraire, ils se retranchent, on a les petites marées.

Pour étudier complètement les marées, il faudrait connaître les oscillations propres de l'Océan ; elles dépendent de la forme du continent et de la profondeur des mers ; de plus ce n'est pas un équilibre absolu qu'on a à étudier, mais la terre tourne, et il faut faire intervenir la force centrifuge composée.

Pour toutes ces raisons le calcul complet est impossible ; on a cependant pu expliquer certaines particularités, telles que les suivantes : dans l'Atlantique, les marées semi-diurnes sont de beaucoup les plus importantes ; les termes  $O, P, K, Y$  sont négligeables ; pour qu'ils soient nuls partout, Laplace a démontré qu'il faudrait que la profondeur de la mer soit constante.

Dans l'Océan Indien et le Pacifique, les marées diurnes sont très sensibles.

Dans certaines régions  $S_2 > M_2$  les marées suivent alors le Soleil. (Australie). Ces particularités tiennent à un phénomène de résonance avec la période diurne ou semi-diurne, ou bien avec la période lunaire ou solaire.

La Méditerranée n'a pas de marées, car c'est une mer fermée et la marée dépend de la différence des attractions lunaires aux extrémités.

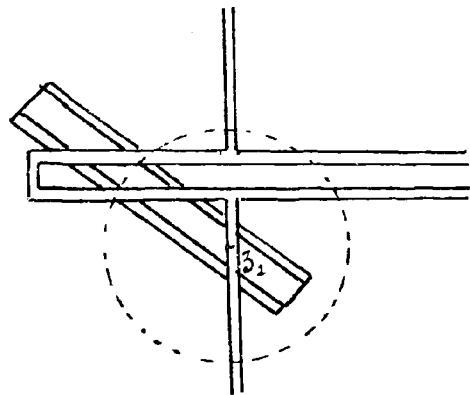
Cependant le golfe de Gabès et le fond de l'Adriatique ont des marées sensibles, ce qui est dû encore à la résonance entre les ondes qui ont subi une double réflexion en ces deux points.

Si on assimile la marée à la propagation d'une onde, il peut y avoir une onde unique comme dans la Manche, ou deux ondes inverses

qui interfèrent, d'où des nœuds et des ventres (mer d'Islande). Sur les côtes du Bonkin, ces deux ondes inverses interfèrent et les ondes semi-diurnes sont détruites; il n'y a que des marées diurnes. Pour prédire les marées, on se sert de la formule.

$$\zeta = \sum A \cos \lambda t + \sum B \sin \lambda t$$

qui définit les oscillations du niveau des mers; le coefficient  $\lambda$  est connu car il dépend de la période des mouvements des corps célestes;  $A$  et  $B$  sont des inconnues qu'on détermine empiriquement; on relève le niveau pendant une année; de la courbe obtenue on déduit  $A$  et  $B$  par l'analyse harmonique. Mais au lieu de calculer la série, on se sert de la machine de Kelgin. — Elle est constituée par autant de poulies qu'on veut garder de termes dans la série; un fil tendu par un poids  $P$  et fixé à une de ses extrémités  $B$ , passe sur ces poulies; il porte un crayon  $A$  devant lequel se déplace une feuille de papier proportionnellement au temps.



Chaque poulie est folle et son centre fixé à une tige susceptible de prendre un mouvement rectiligne et vertical de gauche et de droite, s'abaisse et s'élève alternativement. La tige porte une coulisse horizontale dans laquelle glisse le bouton d'une manivelle.

C'est la rotation de ces manivelles qui commande le mouvement des poulies. La période de rotation de chaque manivelle est celle du terme qu'elle représente dans la série et la longueur du bras de la manivelle est proportionnelle au coefficient de ce terme. Les fils étant verticaux, le crayon monte ou descend proportionnellement à la quantité

$$\sum H \sin(\lambda t + \omega)$$

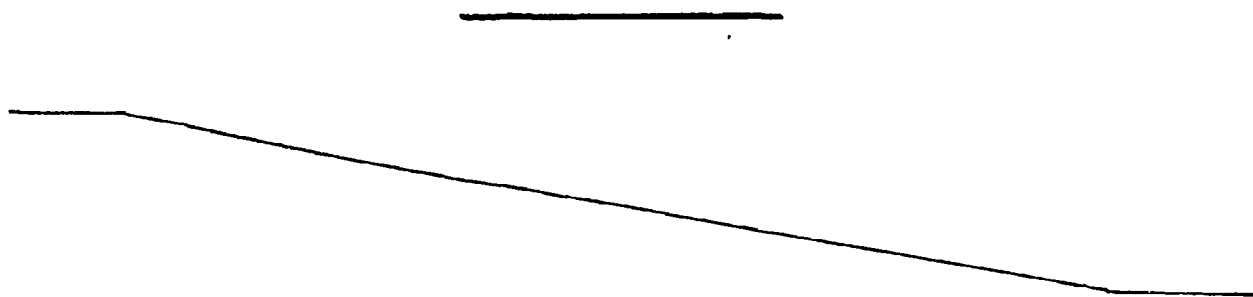
$H$  étant la longueur de la manivelle et  $\lambda t + \omega$  est l'angle de la manivelle avec l'horizontale: si  $z_1$  désigne le déplacement vertical du centre de la première poulie, on a

$$z_1 = H \sin(\lambda t + \omega) + C \underline{te}$$

le déplacement correspondant d'un point  $A'$  du fil est  $2z_1$ ; de sorte que le déplacement vertical de  $A$  est

$$z = C \underline{te} + 2 \sum H \sin(\lambda t + \omega).$$

Cet angle varie proportionnellement au temps, sa période =  $\frac{2\pi}{\lambda}$  celle du terme correspondant de la marée. On dispose  $H$  de façon que le crayon décrive la courbe des marées.



Astronomie générale  
(1<sup>re</sup> division - 1906-1907).

40<sup>e</sup> feuille.

## Quatorzième Leçon.

### Coordonnées des Étoiles.

On a admis jusqu'ici que les coordonnées des étoiles fixes étaient des constantes, elles subissent en réalité des variations qui sont ou petites ou lentes. Ces variations sont dues à 3 causes :

- 1<sup>o</sup> Les axes de coordonnées varient (phénomènes de précession et de nutation) ;
- 2<sup>o</sup> La position apparente des étoiles ne coïncide pas avec la position vraie (phénomène d'aberration) ;
- 3<sup>o</sup> La direction du rayon visuel allant à l'étoile varie aussi à cause du mouvement propre et de la paralaxe annuelle.

#### Précession luni-solaire et nutation.

Le phénomène de la précession a été découvert par Hipparque qui constata que la latitude des étoiles est constante mais que leur longitude augmente de 50" par an environ ; il en conclut que le plan de l'écliptique était fixe, que l'équateur conserve une obliquité constante sur l'écliptique, mais que l'équinoxe, origine des longitudes se déplace. Ce déplacement séculaire de l'équateur constitue la précession ; mais l'inclinaison de l'équateur n'est pas non plus constante, et diminue

de  $0''48$  par an ; en négligeant cette variation séculaire de l'obliquité, tout se passe comme si l'axe de la Terre se déplaçait lentement et le pôle terrestre décrivait un cercle autour du pôle de l'écliptique en 26000 ans.

Au XVII<sup>e</sup> siècle, Bradley a découvert que la précession n'était pas un mouvement uniforme et que de plus la latitude des étoiles n'était pas constante ; le phénomène de la précession est compliqué du phénomène de la nutation et la trajectoire du pôle terrestre autour du pôle de l'écliptique n'est pas un cercle ; Bradley découvrit la nutation en cherchant à déterminer les distances des étoiles fixes en mesurant leur parallaxe annuelle ; il prenait comme base du triangle d'opérations, la distance des 2 positions occupées par la Terre à 6 mois d'intervalle ; la base est ainsi le diamètre de l'orbite terrestre, c'est-à-dire une base 23000 fois plus grande que l'on puisse obtenir avec 2 points éloignés de la surface de la Terre (diamètre terrestre) ; Bradley constata des variations dans les coordonnées méridiennes ; il les attribua à un nouveau déplacement de l'équateur terrestre. Soit un point fictif décrivant le petit cercle précédent d'un mouvement uniforme ; ce point est ce qu'on appelle le pôle moyen ; le pôle vrai décrit en 18 ans autour du pôle moyen une petite ellipse dont le demi grand axe =  $9''$ .

Il en résulte que l'obliquité de l'équateur n'est pas constante, que la latitude des étoiles n'est pas constante et que leur longitude ne varie pas proportionnellement au temps ; elle contient, outre le terme proportionnel au temps, un terme périodique très petit.

Newton a reconnu que la cause de ce double mouvement était l'attraction du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre. Si la Terre était sphérique, les attractions qui s'exercent sur elle auraient, par raison de symétrie, une résultante unique passant par son centre ; et la Terre serait animée d'un simple mou-

gement de translation. Mais cette symétrie n'existe pas, par suite de l'aplatissement de la Terre, et ces attractions se réduisent à une résultante et à un couple qui influe sur la direction de l'axe de rotation de la Terre. La Terre est de révolution autour de l'axe du monde; ce couple tend donc à la faire tourner autour d'une perpendiculaire au plan passant par l'axe du monde et l'astre troublant (Soleil ou Lune). De plus ce couple dépend de la déclinaison de cet astre et de sa distance, mais non de son  $M$ , par raison de symétrie.

Ce couple tendrait à amener le plan de l'équateur à passer par l'astre troublant; il est nul quand sa distance polaire  $\delta$  est 0 ou  $= 90^\circ$ .

Calculons sa valeur  $\gamma$ ; c'est une certaine fonction de  $\delta$ ; pour un accroissement  $d\delta$  son travail égale

$$d\delta = \frac{dV}{d\delta} \cdot d\delta$$

$V$  étant l'énergie potentielle du globe due aux diverses attractions.

$$V = \sum K \frac{mm_1}{\Delta},$$

$K$  étant une constante qu'on peut prendre  $= 1$  pour un choix convenable d'unités;  $m_1$  étant la masse de l'astre troublant de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  par rapport au centre de la Terre;  $m$  la masse d'une molécule de la Terre à une distance  $\Delta$  de l'astre;  $r$  et  $r_1$  désignant les rayons terrestres allant à cette molécule et à l'astre, et  $\varphi$  désignant leur angle. Par un développement déjà vu précédemment

$$V = \sum \frac{m m_1}{r_1} + \sum \frac{r m m_1}{r_1^2} \cos \varphi \\ + \sum \frac{r^2 m m_1}{r_1^3} \frac{(3 \cos^2 \varphi - 1)}{2} + \dots$$



Si la Terre tourne,  $\delta$  varie ; le 1<sup>er</sup> terme ne dépend pas de  $\varphi$ , ni par conséquent de  $\delta$  ; quant au second, il s'écrit :

$$\sum \frac{m m_1}{r_1^3} [x x_1 + y y_1 + z z_1]$$

Or  $\sum m x = \sum m y = \sum m z = 0$

puisque l'origine des axes est le centre de la Terre supposée homogène. Dans le 3<sup>e</sup> terme nous n'avons à considérer que le terme dépendant de  $\varphi$ , car  $r_1$  ne varie pas quand l'orientation du globe varie. Donc  $V$  se réduit à

$$V = \sum \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \frac{r^2 m m_1}{r_1^3}$$

or  $\cos \varphi = \cos \lambda \cos \delta + \sin \lambda \sin \delta \cos A$

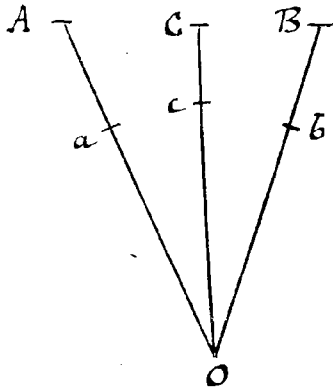
$V$  contient donc un terme en  $\cos^2 \delta$ , un en  $\sin^2 \delta$ , mais pas de terme en  $\sin \delta \cos \delta$  : car si on change  $A$  en  $A + \pi$ , c'est-à-dire  $\delta$  en  $-\delta$ ,  $V$  qui doit être indépendant de  $A$  ne doit pas changer. Donc, ne tenant pas compte du terme constant que fournit  $\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta$ , le seul terme utile de  $V$  est :

$$V = \frac{A m_1}{r_1^3} \cos \delta, \quad A = \text{cte.}$$

La valeur du couple est donc

$$\gamma = - \frac{A m_1}{r_1^3} \sin 2\delta$$

Soyons maintenant l'effet de ce couple. Par raison de symétrie l'ellipsoïde central d'inertie du globe terrestre est de révolution autour de l'axe du monde  $OA$  ; soient  $A = B < C$



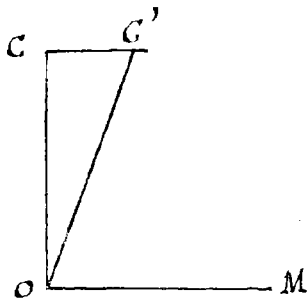
de la Terre est

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$\overline{OG}^2 = \overline{C}^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2$$

$$C^2 - 2CT = A(A-C)(p^2 + q^2)$$

$C^2 - 2CT$  est très petit ; il faut donc que  $p$  et  $q$  soient eux-mêmes très petits, donc que l'axe de rotation  $OB$  soit voisin de l'axe d'inertie  $OA$  ; la distance  $ab$  comptée sur la sphère terrestre est  $\leq 15$  mètres ; et  $bc = 60$  centimètres environ. Donc les 3 points  $a, b, c$  peuvent être considérés comme coïncidant sensiblement ; et cette circonstance subsistera, car ni  $C$  ni  $T$  ne peuvent subir de variations séculaires ; si cette coïncidence était réalisée rigoureusement, le mouvement serait une simple rotation autour d'un axe principal d'inertie ; il n'y aurait pas précession.



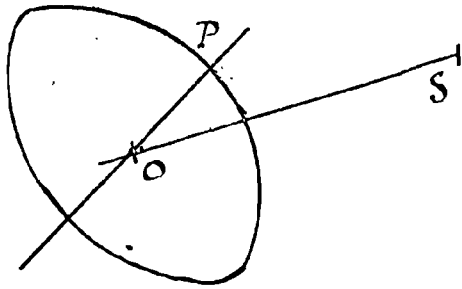
ses 3 demi axes.

Soient  $OB$  de composantes  $(p, q, r)$  le vecteur rotation instantanée de la Terre ;  $OC$  de composantes  $(Ap, Bq, Cr)$  le vecteur moment par rapport au centre  $O$  des quantités de mouvement. Ces 3 droites percent le globe terrestre en  $a, b, c$ . La force gyre

L'axe  $OC$ , à l'instant  $t$ , occupe à  $t + dt$  la position  $OG'$ , et  $GG' = OM \cdot dt$ ,  $OM$  étant le commencement du couple. La vitesse de  $A$  est sensiblement égale à celle de  $G$ , elle est donc parallèle à

l'axe du couple ; la vitesse que prend le pôle sous l'influence du couple quand il y a rotation est donc

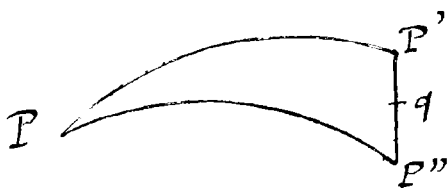
perpendiculaire à celle qu'il prendrait sous l'action du même couple s'il n'y avait pas rotation.



Supposons d'abord que le Soleil agisse seul ; il résulte de son attraction un couple d'axe perpendiculaire à l'axe du monde  $OP$  et  $OS$  ; la vitesse de  $P$  va donc être perpendiculaire sur la sphère céleste, la vitesse du point  $P$  est normale à l'arc de grand cercle qui va du Pôle au Soleil ; la vitesse en longitude sera toujours positive quelle que soit

la position du Soleil sur l'écliptique ; elle est maximum aux solstices et nulle aux équinoxes. Donc, si le Soleil agissait seul, la trajectoire du pôle se composerait d'une série d'arcs raccordés en rebroussement et disposés en circonférence autour du pôle de l'écliptique ; tous ces arcs sont très petits et l'on pourra considérer le mouvement comme dû à une rotation d'un pôle moyen autour duquel tournerait le pôle vrai, avec une petite inégalité semi-annuelle. C'est la nutation semi-annuelle que nous pouvons négliger en première approximation.

Mais la Lune agissant aussi, la vitesse totale du pôle en longitude n'est jamais nulle. Si l'orbite lunaire coïncidait avec l'écliptique, les 2 phénomènes s'ajouteraient simplement et nous aurions une précession uniforme, due en partie à la Lune, une nutation semi-annuelle due à la Lune et ces deux nutations seraient négligeables. Mais l'orbite lunaire est inclinée sur l'écliptique : Soient  $P, P', P''$  les pôles de la Terre, de l'écliptique et de l'orbite



lunaire ; la vitesse de  $P$  due au Soleil est perpendiculaire à l'arc  $PP'$ , et celle qui est due à la Lune est perpendiculaire à  $PP''$  ; et si le Soleil agissait seul,  $P$

164.

tournerait autour de  $P'$ ; si la Lune agissait seule,  $P$  tournerait autour de  $P''$ .

En réalité  $P$  tourne autour d'un point intermédiaire  $q$ . Mais  $q$  n'est pas fixe et comme la ligne des nœuds il tourne en 18 ans autour de  $P'$ . La période de nutation est donc celle du nœud lunaire et tout se passe comme si un pôle moyen tournait autour de  $P'$  d'un mouvement uniforme et si  $P$  tournait autour de ce pôle moyen en 18 ans.

La nutation permet de comparer les deux couples dus au Soleil et à la Lune et par suite la masse de la Lune à celle de la Terre.

Le rapport de ces couples est en effet :

$$\frac{m_1'}{a'^3} : \frac{m_2}{a^3}$$

$m_1'$  étant la masse de la Lune,  $m_2$  celle du Soleil. Si  $M$  est la masse du système Terre + Lune, on a

$$\frac{M}{a'^3 n'^2} = \frac{m_2}{a^3 n^2}$$

$\frac{n}{n'}$  est connu, donc

$$\frac{M}{a'^3} : \frac{m_2}{a^3} \text{ aussi, donc } \frac{m_2'}{M}$$

### Précession planétaire:

L'écliptique varie aussi par l'action des planètes et ce phénomène de la précession planétaire vient compliquer celui de la précession luni-solaire; il en résulte les variations de latitude des étoiles et de l'obliquité de l'écliptique.

Un premier effet de la précession luni-solaire est que le pôle de l'équateur se déplace sur la sphère céleste et que l'étoile polaire ne sera pas la plus voisine du pôle. Un second effet est que l'année tropique (intervalle entre 2 passages du Soleil à l'équinoxe du printemps) n'est pas égale à l'année sidérale

(intervalle entre 2 passages du Soleil en un même point de la sphère céleste, sur une même étoile).

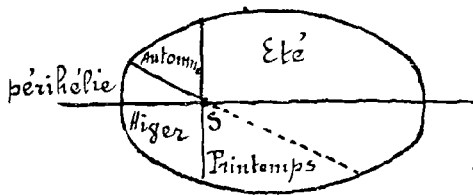
La première est de 365 jours, 2422, elle n'est pas constante;

La deuxième est de 365 jours, 2564, et est constante.

Le calendrier est réglé sur la première qui ramène les saisons; la deuxième est la véritable durée de la révolution sidérale de la Terre.

Une troisième conséquence de la précession luni-solaire porte sur la durée des saisons.

Considérons dans le plan de l'orbite terrestre 2 parallèles par le Soleil à la ligne des équinoxes et à celle des solstices; les durées des saisons sont proportionnelles aux aires des  $H$ , secteurs ainsi déterminés; elles sont donc inégales, et l'hiver est la saison la plus courte; c'est celle qui comprend le périhélie; mais la ligne des équinoxes



tourne de  $50''$  par an, le périhélie subit une variation séculaire et avance de  $10''$  par an en sens inverse; de sorte que la période des saisons est de 21000 ans, et non de 26000 comme celle de la précession.

Enfin, par suite de la précession luni-solaire, le jour stellaire n'est pas égal à la durée de rotation de la Terre ni au jour équinoxial; mais il dépendra de la déclinaison des étoiles, car le méridien d'un lieu n'est plus le même au bout d'un jour. On distingue le jour équinoxial vrai, correspondant au pôle moyen et à l'équateur vrai, correspondant au pôle moyen et au pôle vrai, à l'équateur moyen et à l'équateur vrai. Mais les différences entre ces diverses sortes de jour sidéral sont très faibles et généralement négligées.

La théorie de la précession suppose que la Terre est un solide invariable; or on admet plutôt que la Terre est fluide à son intérieur.

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> Division - 1906-1907)

42<sup>e</sup> feuille

Dans cette hypothèse, lord Kelvin, trouve que même si ces liquides ont une certaine viscosité, ils ne seraient pas entraînés dans le mouvement, et la précession devrait alors être plus rapide, la masse à entraîner étant plus faible. Lord Kelvin a supposé ensuite que la cavité intérieure était ellipsoïdale et non sphérique; dans cette hypothèse le liquide intérieur serait entraîné; mais alors les coefficients pour la nutation seraient très différents et même changeraient de signe. De sorte que dans les deux cas Lord Kelvin conclut à la Terre toute entière solide. Mais tout dépend de la viscosité qu'on attribue aux liquides internes, de sorte que cette conclusion ne s'impose pas avec une entière certitude.

On vient de voir que l'axe instantané de rotation varie par rapport à la sphère céleste, mais il varie peu par rapport à la Terre.

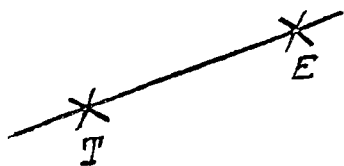
On a cherché si les latitudes des différents lieux de la Terre variaient: pour cela on a appliqué la théorie du mouvement d'un ellipsoïde de révolution qui tourne, sans être soumis à aucune force; et la théorie a conduit à une période de 303 jours pour ces écarts de latitude. Ces derniers ont bien été observés, mais on leur a trouvé une période de 420 jours.

De ces observations faites systématiquement en 6 stations réparties sur la même latitude, on déduit le déplacement du pôle sur la sphère céleste; un astronome japonais attribue une partie de ces variations à une contraction et un déplacement d'ensemble des parallèles vers le pôle qui resterait fixe.

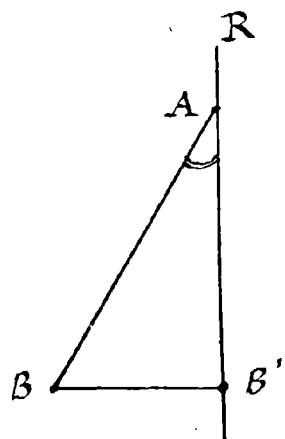
### Aberzation des étoiles fixes.

Bradley, continuant ses recherches sur la parallaxe annuelle, découvrit une nouvelle inégalité dont la période était bien un an, mais qui était la même pour toutes les étoiles à la même distance; de plus les maxima de ces écarts

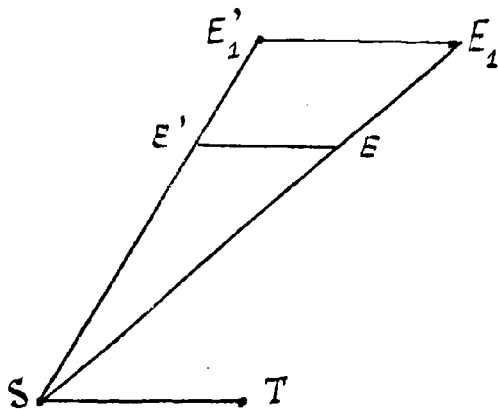
angulaires ne coïncident pas en direction.  
 Cette inégalité est l'aberration.



on observe la direction de la vitesse relative de la lumière par rapport à la Terre. Si A est le centre optique de l'objectif de la lunette, B, son réticule, un rayon émané d'une étoile ne doit pas suivre la direction AB pour passer par la croisée du réticule, car B se déplace avec la Terre pendant le temps dt que la lumière parcourt l'intérieur de la lunette et B vient en B'.



la direction observée.  $\frac{BB'}{dt}$  représente en grandeur, direction et sens la vitesse de la Terre ;  $\frac{AB'}{dt}$  = vitesse absolue de la lumière et  $\frac{AB}{dt}$  est la vitesse relative. L'angle  $\hat{A}$  entre ces deux directrices est l'aberration.



La Terre étant en S, et  $SE_1$  étant la direction vraie, sur  $SE_1$  portons un vecteur  $SE$  égal à la vitesse de la lumière. La Terre a un mouvement sensiblement circulaire et uniforme ; soit  $ST$  sa vitesse, située dans le plan de l'écliptique ; menons  $EE'$  égal,

parallèle à  $ST$  et de sens contraire ;  $SE'$  est la direction apparente. Donc  $E'$  décrit un cercle d'un mouvement uniforme autour de  $E$  ; et le cône  $SE'$  coupe la sphère suivant une ellipse sphérique, trajectoire apparente de l'étoile autour de sa position vraie.

Si l'étoile est au pôle de l'écliptique, ce cône est de révolution, la trajectoire est un cercle ; cette trajectoire est une ellipse d'autant plus aplatie que l'étoile est plus voisine de l'écliptique, et elle se réduit à un petit arc de grand cercle pour une étoile située dans le plan de l'écliptique. Le grand axe de cette ellipse est constant pour toutes les étoiles ; c'est l'angle dont la tangente = le rapport des vitesses  $\frac{1}{10000} = 20''$ . On a ainsi la vitesse de la lumière en unités astronomiques.

En un an, la lumière parcourrait 10000 fois l'orbite terrestre. Pour mesurer ce grand axe constant, on fait en général des observations méridiennes. L'inconvénient est qu'on ne peut pas observer une même étoile à toute heure ni à toute hauteur. De plus les observations sont compliquées par les phénomènes de nutation et de précession.

Une autre méthode due à Monsieur Lægy consiste à observer deux étoiles très éloignées après réflexion sur les 2 faces d'un prisme placé devant l'objectif de la lunette. Cette méthode est analogue à celle que l'éminent astronome a appliquée à l'étude de la réfraction et que nous avons décrite plus haut.

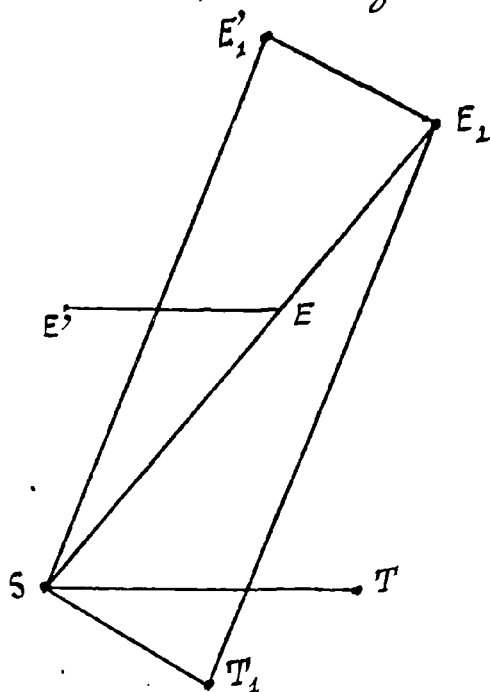
Il y a, entre l'aberration et la parallaxe, les deux différences suivantes :

1<sup>o</sup> Soit  $T_1$  la position vraie de la terre ; la direction vraie est  $T_1 E_1$  ; la direction observée est  $SE'$  ; l'aberration qui faisait observer  $SE'$  est donc indépendante de la distance  $SE_1$  de l'étoile ; la parallaxe, au contraire, n'est sensible que pour les étoiles le plus rapprochées.

2<sup>o</sup> La déviation due à l'aberration est dans



le plan  $STE$  ; la déviation due à la parallaxe est perpendiculaire dans le plan  $ST_1E$  et les deux droites  $ST$  (vitesse de la Terre) et  $ST_1$  (rayon vecteur de la Terre) sont perpendiculaires.



On distingue pour une étoile plusieurs sortes de coordonnées : les coordonnées moyennes sont rapportées à l'équinoxe vrai, c'est-à-dire affecté de la nutation ; et les coordonnées apparentes sont affectées de la nutation et de l'aberration.

### Aberration planétaire.

Le phénomène d'aberration précédent est pour les planètes compliqué d'une aberration propre ; car pendant le temps  $t$  que la lumière va de la planète à la Terre, la planète se déplace et l'on n'observe que la direction sur laquelle se trouvait la planète un instant  $t$  ayant l'observation.

---

## Quinzième Leçon.

---

### astronomie stellaire.

---

Le système solaire étudié jusqu'ici

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> Division - 1906-1907).

43<sup>e</sup> feuille

n'est qu'une très petite partie du monde stellaire, qui comprend encore un très grand nombre d'étoiles.

Les étoiles dites fixes n'ont cependant pas leurs coordonnées constantes ; on a vu dans la leçon précédente deux causes de ces variations. Une troisième cause est que les étoiles ont un mouvement propre, qui paraît très lent, car elles sont très éloignées.

On a déterminé, en éliminant le plus possible les causes d'erreur systématique, les coordonnées d'un certain nombre d'étoiles qu'on a appelées étoiles fondamentales ; et c'est à ces repères bien définis qu'on rapporte ensuite les autres étoiles par des observations différentielles.

Depuis plusieurs années, tous les observatoires du monde travaillent en outre à la carte photographique du ciel ; on emploie pour cela un équatorial photographique : on en régularise le mouvement d'horlogerie et on en fixe l'axe optique dans une direction constante par rapport à la sphère céleste en maintenant constamment une étoile sur la croisée d'un chercheur. Pour éviter de confondre l'image d'une étoile avec une tache de la plaque, on fait trois poses consécutives en imprimant à la plaque de très légers déplacements ; on obtient ainsi, pour chaque étoile, 3 images formant un triangle qu'on examine à la loupe.

Ayant ainsi reproduit un cliché, on le reproduit sur une carte par héliographie ; on mesure les coordonnées polaires ou rectangulaires de chaque étoile, les réduit en ascension droite et déclinaison au moyen des  $R$  et  $D$  des fondamentales du cliché. Pour éviter dans ces mesures les erreurs dues au retrait de la gélatine, on rapporte ces coordonnées aux sommets d'un réseau tracé au préalable sur la gélatine.

Les étoiles sont classées d'après leur éclat ; celles de 6<sup>e</sup> grandeur sont les plus petites qu'on puisse voir à l'œil nu. On admet qu'une étoile de  $n$ <sup>ième</sup> grandeur est 2 fois  $\frac{1}{2}$  plus brillante qu'une étoile de  $(n+1)$ <sup>ième</sup> grandeur.

Si l'on admet de plus la répartition uniforme des étoiles dans le ciel et l'uniformité de leur éclat, leur nombre devrait croître en progression géométrique, en même temps leur grandeur croît en progression arithmétique; l'éclat décroît comme le carré de la distance; donc le nombre des étoiles croîtrait en progression géométrique de raison  $(2,5)^{3/2}$ . On arrive ainsi à 2 milliards d'étoiles; et avec cette loi, les étoiles de 16<sup>e</sup> grandeur seraient 500 fois plus éloignées de nous que celles de 1<sup>re</sup> grandeur, dont la plus voisine est trois cent mille fois plus éloignée que le Soleil: La lumière met 5000 ans pour parvenir jusqu'à nous.

Supposons l'univers illimité et la distribution et l'éclat des étoiles uniformes, l'éclat total devrait alors être infini, puisque l'éclat d'une étoile décroît comme  $\frac{1}{r^2}$  et que leur nombre

croît comme  $r^3$ . Il est vrai que les étoiles se cacheraient mutuellement, mais il n'y aurait pas de direction où le rayon visuel ne fût par rencontrer une étoile. Or la surface apparente

varie comme  $\frac{1}{r^2}$ , l'éclat aussi; donc l'éclat par unité de surface devrait être constant, et l'éclaircissement devrait être le même que si toute la surface de la sphère céleste avait autant d'éclat que le Soleil. Il n'en est pas ainsi. C'est donc qu'il y a absorption de la lumière ou bien que l'univers n'est pas infini. On peut dire en faveur de cette dernière hypothèse que dans certaines régions du ciel, la grandeur des étoiles que l'on distingue n'est limitée que par la puissance de l'instrument, de sorte que l'univers semble y être infini; tandis que dans d'autres régions il semble que l'on atteigne la limite de l'univers et l'on n'y distingue pas d'étoiles au

dessus d'une certaine grandeur.

D'ailleurs la distribution des étoiles n'est pas uniforme ; elles ont une tendance à se condenser dans la région occupée par la voie lactée.

M. Stratonoff a dressé pour chaque grandeur, des cartes dont les teintes sont proportionnelles à la densité des étoiles dans la région correspondante du Ciel. Il a reconnu ainsi que les étoiles de chaque grandeur forment, non une nuée unique, mais une série de nuées dont une s'étend jus qu'à la distance des étoiles de 7<sup>e</sup> grandeur et comprend le Soleil. Dans le Ciel austral il y a aussi des nuées indépendantes de la voie lactée (nuées de Magellan).-

### Mesure de la parallaxe.

Cette mesure nous renseigne sur la distance des étoiles à la Terre. On compare les deux positions d'une étoile à 6 mois d'intervalle, c'est-à-dire pour deux positions de la Terre diamétralement opposées sur son orbite ; on a ainsi une base de triangulation très grande.

Cette orbite est un cercle autour du Soleil, l'étoile paraît décrire une petite ellipse dont la grandeur dépend du rapport des distances de la Terre au Soleil et à l'étoile.

L'observation donne cette ellipse, et par suite ce rapport, qui définit la parallaxe annuelle de l'étoile. Les observations méridiennes sont peu précises ; mieux vaut opérer par observations différentielles, et la méthode la plus précise sera la photographie ; on prendra trois clichés à six mois d'intervalle. Deux clichés seraient insuffisants, car l'étoile peut avoir un mouvement propre dont l'effet s'ajoutera

à la parallaxe et qu'on ne pourra pas distinguer. Pour éviter les erreurs systématiques, on prend les étoiles de comparaison de part et d'autre de l'étoile étudiée. Pour toutes les étoiles, sauf pour 38 qui sont plus rapprochées de nous, les résultats obtenus sont de l'ordre des erreurs inévitables ( $0'',03$ ). La parallaxe la plus forte est celle de  $\alpha$  du Centaure, elle est de  $0'',75$ ; sa lumière met quatre ans pour nous arriver; et sa distance à la Terre est environ 280000 fois le rayon de l'orbite terrestre.

La 61<sup>e</sup> du Cygne et Sirius ont même parallaxe  $0'',37$ ; la lumière met 49 ans à nous en arriver; la 61<sup>e</sup> du Cygne est de grandeur 4,8; et Sirius de grandeur -1,4 (une étoile de grandeur zéro est une étoile 2 fois  $\frac{1}{2}$  plus brillante que l'étoile type de 1<sup>re</sup> grandeur).

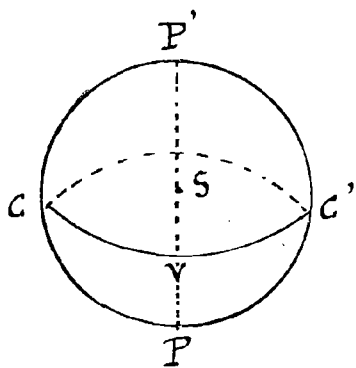
### Mouvements propres des étoiles.

Des observations précises ont montré qu'un grand nombre d'étoiles ont de petits mouvements propres qui, en projection sur la sphère céleste, s'effectuent sur des arcs de grand cercle et sont uniformes. Ils sont plus faciles à déterminer que les parallaxes, car ils ont toujours lieu dans le même sens, de sorte qu'au bout d'un temps suffisant ils deviennent appréciables. Il n'y a guère plus de 76 étoiles dont le mouvement propre dépasse  $1''$  par an; le maximum est de  $8''$ . Ayant ainsi le mouvement propre angulaire, on peut calculer la composante de la vitesse perpendiculaire au rayon visuel, si l'on connaît la distance de l'étoile et la vitesse suivant ce rayon ou vitesse radiale, par application du principe Doppler-Fizeau: on sait, en effet, que si une source lumineuse périodique se rapproche ou s'éloigne de l'observateur, la fréquence des vibrations observées sera différente de celle des vibrations émises; or,

le spectre des étoiles présente des raies caractéristiques de telles vapeurs métalliques et dont on connaît la longueur d'onde exacte ; d'autre part, dans un spectroscopie, ou dans un réseau, la déviation d'une radiation dépend de la fréquence des vibrations observées et non des vibrations émises.

On constate que le spectre des étoiles est dévié, par rapport aux mêmes raies métalliques terrestres ; on reconnaît ainsi qu'elles ont des vitesses radiales que l'on peut calculer, indépendamment de leurs distances. Ces vitesses sont de l'ordre de celle de la Terre sur son orbite. Ce qu'on observe ainsi c'est la vitesse relative par rapport à la Terre.

On a cherché si le Soleil a un mouvement propre : On a admis pour cela que le centre de gravité du système formé par le Soleil et un certain nombre d'étoiles environnantes restait fixe ; et l'on a ainsi attribué au Soleil un mouvement égal et contraire à la résultante des mouvements de ces étoiles.



Soit S le Soleil, centre de la Sphère céleste, SP la direction de sa vitesse ; si le Soleil se mouvait seul, toutes les étoiles restant fixes, une étoile quelconque aura un mouvement apparent sur un petit arc de grand cercle et en sens inverse de la vitesse SP. Toutes ces trajectoires paraîtraient donc converger vers P', leurs pôles étant tous sur un grand cercle CC' de centre P'.

On aurait donc le point P de la Sphère céleste vers lequel le Soleil se dirige.

En réalité les étoiles ont un mouvement propre, mais si l'on observe les arcs de grands cercles qui constituent les trajectoires vraies des étoiles, on constate que leurs pôles sont distribués au voisinage du grand cercle CC', qui figure le maximum de densité de ces pôles.

Le pôle de ce cercle donne la direction moyenne du mouvement propre du Soleil ; c'est un point de la constellation d'Hercule. On l'appelle l'apex. Pour connaître la grandeur de cette vitesse, sans avoir la distance des étoiles, on répartit les étoiles par groupes de façon qu'on puisse supposer que celles d'un même groupe soient en moyenne à la même distance (ou groupe ensemble, par exemple, les étoiles d'une grandeur donnée, ou celles dont le mouvement propre annuel est compris entre deux limites données.)

La moyenne des mouvements propres dirigés vers le point P sera le mouvement propre moyen du Soleil et vu de ces étoiles. Pour avoir le mouvement vrai du Soleil en kilomètres par seconde, on détermine les vitesses radiales des étoiles en kilomètres par seconde.

On peut ainsi déterminer la parallaxe moyenne des étoiles de 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> grandeurs. Soit en effet  $d$  leur distance moyenne,  $\omega$  le mouvement propre angulaire,  $r$  la composante radiale. La composante tangentielle du mouvement est  $d\omega$ , la valeur probable des 3 composantes rectangulaires, dont deux tangentielles et l'autre radiale, doit être la même ;  $r^2$  est le carré d'une de ces composantes et  $d^2\omega^2$  est la somme des carrés des deux autres.

La résultante tangentielle a donc pour carré sensiblement  $d^2\sum\omega^2 = 2\sum r^2$ . On trouve ainsi pour la parallaxe moyenne des étoiles de 2<sup>e</sup> grandeur 0,07.

### Etoiles variables et étoiles doubles.

Un grand nombre d'étoiles ne conservent pas un éclat constant ; elles présentent des variations considérables dont la période est plus ou moins longue. Si ces variations d'éclat sont dues les étoiles nouvelles qui se produisent de temps en temps ; c'est ainsi que dernièrement, dans la constellation de Persée, une étoile qui

ne figurait pas sur une photographie prise par Pickering quelques jours auparavant et qui n'était pas conséquemment pas de 12<sup>e</sup> grandeur, est apparue subitement de 1<sup>re</sup> grandeur, ce qui représente une augmentation d'éclat de l'ordre de  $(2,5)^{12}$ . Elle a baissé, en 24 heures, à la 2<sup>e</sup> grandeur, et est restée de 6<sup>e</sup> pendant quelques mois; elle est encore visible.

Pour ces étoiles nouvelles toutes les raies spectrales sont dédoublées, et l'on est conduit pour leurs vitesses radiales à des valeurs considérables (1000 kilomètres par seconde). On peut en conclure ou bien que 2 astres se sont heurtés avec cette vitesse, ou bien que l'atmosphère de ces étoiles est le siège d'éruptions dont la vitesse = 1000 kilomètres par seconde. Quand leur éclat commence à diminuer, le spectre des étoiles nouvelles se rapproche généralement de celui des nébuleuses planétaires.

La nouvelle étoile de Persée a présenté un phénomène très curieux: on observe dans le voisinage une nébulosité qui s'en éloigne avec la vitesse de la lumière; on suppose que l'étoile était entourée de poussière cosmique qui s'étendait à une très grande distance et dont la lumière subite produite par l'étoile le jour de l'explosion vient éclairer successivement les différentes parties.

Une des étoiles variables périodiques dont la variation d'éclat est plus mathématique est Algol ou  $\beta$  de Persée; c'est une étoile à courte période (2 j. 21<sup>h</sup>.)

D'autres étoiles variables sont à longue période, par exemple Mira de la Baleine, dont la période est de 11 mois. Pour ces dernières étoiles et pour les étoiles nouvelles, la cause des variations d'éclat est inconnue; on peut cependant les rapprocher du maximum des taches solaires qui ont une période de 11 ans.

Au contraire, pour les étoiles à courte période, du type d'Algol, le phénomène est



expliqué et se rattache à la considération des étoiles doubles. On désigne ainsi deux étoiles qu'on aperçoit très voisines sur la sphère céleste. Mais il faut distinguer les couples optiques et les couples physiques. Ces derniers désignent les étoiles qui sont en réalité très éloignées l'une de l'autre, leurs perspectives sur la sphère céleste étant voisines : ce sont les couples optiques. Pour les premiers les 2 étoiles ont même mouvement propre moyen ; on est ainsi conduit à les considérer comme faisant partie d'un même système animé du mouvement observé. Mais de plus Herschell a reconnu que des 2 étoiles simples qui forment un couple la plus petite tourne autour de l'autre, comme la Terre autour du Soleil. Cette orbite est une ellipse que l'on suppose képlérienne.

Sirius est une étoile double ; mais son compagnon est très petit et peu visible à cause de son faible éclat par rapport à celui de Sirius (1) ; le compagnon de Sirius, cause de ces irrégularités, aurait donc une masse comparable à celle de Sirius ; la masse totale du couple est connue par la loi de Kepler, qui donne  $n^2 a^3$ . L'observation donne le diamètre apparent du grand axe, donc le grand axe vrai, connaissant la parallaxe de Sirius.

On trouve ainsi que la masse de Sirius et celle de son compagnon sont 2 fois et 1 fois celle du Soleil tandis que leur éclat est 100 fois et 0,01, celui du Soleil ; on voit combien l'éclat de deux étoiles de masse presque égale peut être différent.

On peut étudier l'orbite des étoiles doubles de deux manières, par l'observation directe ou par l'application du principe Doppler-Fizeau, et de la vitesse radiale on déduit le diamètre absolu de l'orbite des étoiles doubles, en par comparaison avec l'orbite observée au télescope ou à la parallaxe.

On a ainsi reconnu par le spectroscope l'existence d'étoiles doubles spectroscopiques ; que le

---

(1) Sa découverte fut une conséquence de l'étude des irrégularités du mouvement de Sirius.

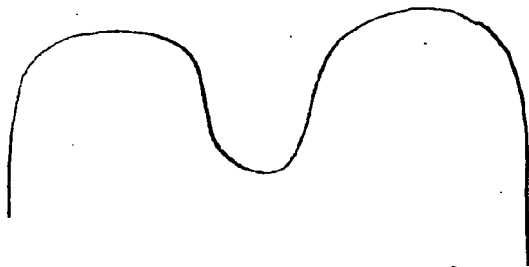
télescope n'aurait pu dédoubler. On a vu ainsi que les étoiles variables à courte période sont considérées comme des étoiles doubles et l'on pense que les variations régulières de leur éclat sont dues à des éclipses périodiques de l'étoile principale par un satellite de dimensions comparables, leur distance étant de plus de l'ordre de leur rayon. Cette hypothèse a été confirmée par les observations spectroscopiques de vitesses radiales, qui ont mis en évidence le mouvement du satellite.

Pour d'autres étoiles doubles non variables on a mis en évidence un terme périodique (étoiles doubles spectroscopiques).

Ces considérations sur les étoiles variables à courte période ont permis de déterminer leur densité: la durée de l'éclipse donne en effet le rapport  $\frac{r}{a}$  du diamètre apparent total  $r$  au rayon  $a$  de l'orbite. D'autre part on a  $\frac{M}{a^3}$  par

les lois de Kepler; donc on connaît le rapport  $\frac{M}{r^3}$  de la masse au volume, c'est-à-dire la densité.

On trouve ainsi pour Algol une densité environ moitié de celle du Soleil, et si on y joint l'observation spectroscopique et celle de la parallaxe, on trouve pour l'astre principal une masse égale à celle du Soleil, et pour son satellite une masse moitié; sa parallaxe est  $0'' 05$ , son diamètre apparent  $0,00084$ , son éclat intrinsèque = 40 fois celui du Soleil.



Courbe de lumière de  $\beta$  de la Lyre.

Il existe d'autres étoiles variables, dont  $\beta$  de la Lyre est le type, et dont la courbe de lumière ne présente plus de palier entre deux éclipses. Le spectroscopie montre que ces étoiles sont encore des étoiles doubles (mouvement orbital); on admet que ce sont 2 astres très rapprochés qui ont pris la forme d'un

ellipsoïde allongé de sorte qu'ils se présentent à nous sous une surface apparente variable, il en résulte une variation continue de leur éclat total, cette variation étant plus rapide au moment d'une ellipse.

Leurs masses sont respectivement 20 et 10 fois celle du Soleil; leur vitesse =  $180 \text{ km}$ ; le rayon de l'orbite =  $1/4$  du rayon de l'orbite terrestre; leur densité par rapport au Soleil =  $0,0006$ ; c'est à peu près la densité de l'air, celle du Soleil étant voisine de celle de l'eau; de sorte que ces 2 corps occupent toute leur orbite.

### Amas d'étoiles et de nébuleuses.

On connaît aussi des étoiles triples, quadruples et quintuples, et des amas d'étoiles; on distingue deux sortes d'amas d'étoiles: les amas irréguliers (Pleiades) et les amas globulaires. Les premiers appartiennent à la voie lactée, les seconds sont indépendants.

Certaines nébuleuses sont des agglomérations d'étoiles que les télescopes suffisamment puissants peuvent résoudre. Mais on connaît des nébuleuses non résolubles: les nébuleuses planétaires formant un disque ou un anneau (quelquefois avec une étoile au centre), les nébuleuses en spirale et les nébuleuses irrégulières (nébuleuse d'Orion).

Le spectre des irrégulières ne ressemble nullement à celui des étoiles, car il est formé de bandes lumineuses.

Les nébuleuses planétaires sont toutes dans la voie lactée. Les irrégulières sont au contraire condensées au pôle de la voie lactée. Les nébuleuses en spirales sont réparties uniformément, indépendamment de la voie lactée.

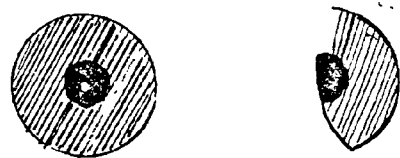
Il est permis de supposer que la voie lactée est elle-même une nébuleuse spirale, et que toutes les nébuleuses spirales sont des systèmes analogues à la voie lactée, mais extrêmement éloignés.

# Seizième Leçon:

## Astronomie physique.

### Le Soleil.

On observe sur le disque du Soleil des taches souvent très grandes (leur diamètre peut dépasser 10 fois celui de la Terre), et qui sont formées d'un noyau sombre entouré d'une pénombre. Ces taches se déplacent et sont entraînées dans la rotation d'ensemble du Soleil. Si l'on observe une de ces taches quand elle arrive au bord du disque solaire, on constate que la pénombre disparaît du côté interne; les



taches ne sont donc pas en relief sur la photosphère, mais ce sont des cavités, qui laissent voir l'intérieur du globe solaire. Cependant cette conclusion ne semble pas générale, et certaines taches semblent dues à des

soulèvements des nuages constituant la photosphère et peuvent ainsi apparaître en relief.

Les premières recherches sur la constitution physique du Soleil sont dues à Arago qui employait le polariscope: la lumière émanée d'un gaz, en effet, n'est pas polarisée, celle au contraire qui émet obliquement le bord d'un globe incandescent liquide ou solide

est polarisée.

Arago trouva que la lumière émise par le bord du Soleil n'était pas polarisée ; il en conclut que le Soleil était une masse gazeuse, et il admit qu'il était formé d'un noyau solide intérieur entouré d'une enveloppe gazeuse, la photosphère.

Mais les observations au spectroscope ont montré un spectre continu, caractéristique d'un corps solide, et semé de raies noires, que Kirchhoff attribua à l'absorption de certaines radiations par une atmosphère gazeuse extérieure. Ce résultat n'était pas en contradiction avec l'expérience polarimétrique d'Arago et l'on admet que la photosphère est formée de nuages de particules solides incandescentes ; elle est analogue à la partie réductrice de la flamme d'une bougie ; dans ces conditions il ne peut y avoir polarisation.

Le noyau interne est considéré maintenant comme gazeux ; ces gaz sont moins lumineux que la photosphère, bien qu'étant plus chauds ; c'est que le pouvoir émissif des solides est plus grand que celui des gaz ; c'est ainsi que la partie réductrice de la flamme d'une bougie qui contient des particules de carbone solide incandescent est plus brillante que la partie oxydante qui est plus chaude.

Parmi les nuages qui constituent la photosphère, on distingue des plages plus brillantes nommées facules.

Au dessus de la photosphère se trouve une atmosphère absorbante qu'on appelle la couche renversante ; elle est en effet formée de vapeurs métalliques et c'est elle qui produit les raies obscures du spectre. Ces raies ne sont sombres que par contraste, et elles apparaissent brillantes dans les éclipses, dans l'instant très court où la couche renversante n'est pas encore cachée et où la photosphère l'est déjà.

On pense qu'il n'y a pas d'oxygène dans l'atmosphère du Soleil, et l'oxygène du spectre solaire est dû à l'atmosphère terrestre.

La couche absorbante est elle-même entourée par la chromosphère, qui apparaît pendant les éclipses totales, sous forme d'une couche rose qui se soulève parfois en protubérances très élevées.

Astronomie générale.  
(1<sup>re</sup> édition - 1906-1907)

46<sup>e</sup> feuille.

L'analyse spectrale y révèle du calcium, de l'hydrogène et de l'hélium.

L'application du principe de Doppler a montré que ces éruptions ont des vitesses considérables qui peuvent atteindre 300 kilomètres par seconde, la hauteur de la protubérance elle-même atteint parfois 200 000 kilomètres.

M. M. Janssen et Lockyer ont trouvé le moyen d'observer ces protubérances, en dehors des éclipses en observant au spectroscopie le bord du Soleil : par suite de la dispersion, le fond du Ciel sera moins éclairé, tandis que la lumière due aux protubérances et qui se compose de quelques radiations monochromatiques restera concentrée.

M. M. Deslandres et Hales observent le disque lui-même et non plus seulement le bord, en employant un spectroscopie à deux fentes : la première fente sert à produire un spectre pur, et la seconde fente permet d'isoler dans ce spectre une raie déterminée.

On reçoit sur une plaque photographique l'image ainsi formée de la région du Soleil où s'est formée une protubérance ; on déplace cette image d'un mouvement d'ensemble, et on obtient l'image de la chromosphère comme si la photosphère n'existait pas.

Enfin une dernière enveloppe du Soleil est la couronne qui s'étend très loin du Soleil. Son spectre est formé de raies brillantes, dont une seule, qui correspond à un élément non isolé, le coronium ; on retrouve aussi dans ce spectre le spectre continu caractéristique des corps solides et le spectre solaire avec les raies de Fraunhofer, et qui est dû également à la lumière solaire réfléchiée ; la couronne serait donc formée de gaz, de particules solides incandescentes et de particules réfléchissant la lumière du Soleil. La couronne semble entraînée dans le mouvement de rotation du Soleil.

Le mouvement des taches montre que le Soleil est animé d'un mouvement de rotation.

Cette rotation n'est pas uniforme, mais sa durée

est fonction de la latitude ; elle est de 24 jours à l'équateur et elle peut atteindre 27 jours aux latitudes élevées. De plus, les taches, ne se forment pas à toute latitude, mais entre  $\pm 35^\circ$ , comme les cyclones à la surface, de la Terre. Le nombre et l'éclat des taches varient périodiquement ; la période est de 11 ans.

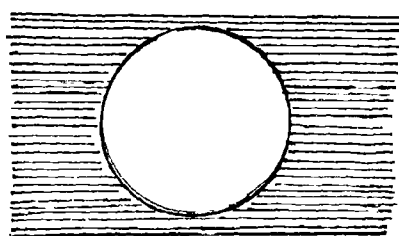


fig. 1

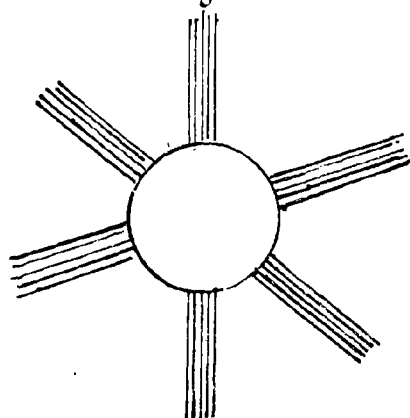


fig. 2

Au moment des minima, la couronne est concentrée vers l'équateur (fig. 1) ; au moment des maxima, au contraire, la couronne présente l'aspect de la fig. 2.

Ces taches semblent offrir une relation avec les phénomènes de magnétisme terrestre. Ceux-ci ont, en effet, une périodicité, la période étant de 11 ans ; de plus les phénomènes sont liés à l'apparition d'une tache considérable ; et c'est lorsque cette tache atteint le méridien central du Soleil et non quand elle apparaît que la perturbation se produit.

La température du Soleil est mal déterminée, et les valeurs trouvées varient entre 14 000 et 9,10<sup>6</sup> degrés ; le chiffre le plus probable pour la photosphère est de 10 000. On a admis, pour expliquer que la quantité de chaleur du Soleil reste sensiblement constante ; qu'un grand nombre de bolides tombaient d'une façon constante sur le Soleil, et que ces choses entretenaient son énergie. Mais dans cette hypothèse, le mouvement d'inertie du Soleil irait en croissant et sa rotation ne pourrait être constante. On admet aujourd'hui que le Soleil se contracte lentement et que le travail, positif des attractions qui s'exercent entre les éléments du Soleil est

transformé en énergie calorifique. On a ainsi calculé que le Soleil existait depuis 25 millions d'années et qu'il existerait encore pendant 18 millions d'années.

## Les Etoiles.

Le spectre des étoiles a les mêmes caractères généraux que le spectre solaire ; mais certaines différences ont permis de classer les étoiles en étoiles blanches, jaunes et rouges.

Les premières ont une température plus élevée, comme le montre leur spectre continu, la longueur d'onde des radiations émises croissant en effet avec la température (loi de Stirling) ; de plus elles tendent à se rapprocher de la voie lactée. À grandeur égale, elles ont un mouvement propre plus lent que les étoiles rouges et a fortiori que les étoiles jaunes. Elles sont donc plus éloignées et, intrinsèquement, elles sont plus brillantes.

Parmi les étoiles blanches on distingue : 1° les étoiles à Hélium (Orion, Régulus) dont le spectre continu offre les raies de l'hydrogène (Sirius) où l'on ne reconnaît plus l'hélium ; 2° les étoiles à hydrogène et calcium (Procyon) qui forment la transition entre les étoiles jaunes et les étoiles blanches. Les étoiles jaunes ont un spectre analogue à celui du Soleil ; les étoiles rouges ont un spectre moins étendu vers le violet. Leur spectre présente en outre de larges bandes cambrées qu'on attribue à des oxydes non dissociés, la température étant suffisamment abaissée. Il existe d'autres étoiles rouges qui présentent des bandes dues à des hydrocarbures, et quelques raies brillantes d'origine inconnue.

D'autres étoiles, appartenant toutes à la voie lactée, contiennent de l'hydrogène, de l'hélium et des raies dont les vibrations sont données par la formule  $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{4}$ , où  $m$  au lieu d'être un nombre entier  $n$  comme dans la forme de Bôlmer



est égal à  $\frac{2n+1}{2}$ .

Certains astronomes prétendent que les étoiles blanches sont les plus jeunes, puis qu'elles se sont moins refroidies par rayonnement; d'autres, moins nombreux, qu'elles sont les plus vieilles, puis que l'énergie calorifique étant due à une contraction lente de l'astre, les étoiles deviennent de plus en plus blanches à mesure qu'elles se condensent.

### Les Nébuleuses.

Parmi les nébuleuses non résolues, il en est qui, comme Orion, sont certainement irrésolubles, car leur spectre est totalement différent de celui des étoiles et se compose uniquement de raies brillantes dues à l'hydrogène et à un gaz inconnu.

On observe que les étoiles nouvelles, au moment où elles vont disparaître, ont un spectre qui tend vers celui des nébuleuses.

### Les Planètes.

Venus et Mars sont mal connues; la surface de Venus paraît couverte de nuages. Mars est la planète la mieux connue; on y observe des régions rougeâtres qui sont les continents, et des régions plus sombres qui sont les mers. De plus, aux pôles, on distingue des taches qui diminuent presque complètement l'été, et qui augmentent l'hiver: elles semblent dues aux neiges. Mars paraît sans relief. Enfin, M. Schiaparelli a observé à la surface de Mars des traînées sombres sensiblement rectilignes et qui font communiquer deux mers. De temps à autre, ces canaux se dédoublent; ils sont probablement dus à une simple illusion d'optique.

La surface de Jupiter offre des bandes alternativement noires et blanches, parallèles à l'équateur, et qui sont dues probablement à des nuages

qui empêchent de voir la partie solide de Jupiter ; la vitesse de rotation de Jupiter semble en effet fonction de la latitude, de même qu'un observateur qui observerait les nuages au dessus de la Terre noterait, par suite des vents alizés, une vitesse qui varierait avec la latitude.

Sur Saturne, on sait simplement que sa densité superficielle est très petite (0,72).

### Les Comètes.

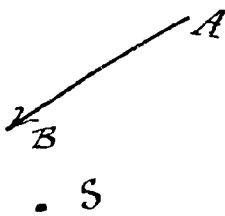
La plupart ont une orbite parabolique ou du moins leur excentricité diffère très peu de l'unité. Quelques unes ont une orbite elliptique et reviennent périodiquement. Mais on ne connaît pas de comète qui ait une orbite sûrement hyperbolique. Ce qui détruit l'hypothèse que les comètes sont irrégulièrement distribuées et n'appartiennent pas au système solaire. Pour que l'orbite soit parabolique, il faut en effet que la vitesse relative par rapport au système solaire soit nulle à l'infini ; avec une orbite hyperbolique, elle est finie à l'infini.

Les orbites elliptiques sont d'anciennes orbites paraboliques devenues elliptiques par l'effet des perturbations.

### Etoiles filantes. - Bolides.

Les étoiles filantes sont des corps qui pénètrent dans l'atmosphère terrestre, avec de très grandes vitesses ; le frottement les chauffe et ils deviennent lumineux. Quelques uns tombent sur la Terre (aérolithes).

Les étoiles filantes sont plus nombreuses à certaines époques de l'année : Soit  $AB$  la vitesse relative du météore par rapport à l'observateur placé en  $S$  ; le météore se meut suivant cette droite  $AB$  pendant un certain temps ; donc sa trajectoire apparente sur la



sphère céleste sera de grand cercle d'intersection avec le plan SAB ; or les vitesses absolues de tous les corpuscules appartenant à un même essaim sont les mêmes ; on peut considérer la vitesse de l'observateur comme constante dans une nuit ; donc les vitesses relatives sont constantes ; et les plans de toutes ces trajectoires passent par une même droite parallèle à AB et menée par S ; cette droite perce la sphère céleste en un point qu'on appelle le radiant, par où passent toutes les trajectoires apparentes.

On connaît un point de la trajectoire ; c'est la position de la Terre au moment de la rencontre ; on connaît en outre la direction de la vitesse par l'observation du radiant ; on peut connaître aussi sa grandeur en observant de deux endroits différents. On peut donc déduire la vitesse absolue et l'orbite de l'étoile. On reconnaît alors que cette orbite est souvent identique à celle d'une Comète connue (sauf l'époque du passage au périhélie). Par exemple l'orbite des Perséides est tout à fait semblable à celle de la Comète de 1862 ; les Léonides ont une orbite voisine de celle de la Comète de 1833, dont la période est de 33 ans. Les Biélicides ont été identifiées à la comète périodique de Biéla, qu'on a vu se dédoubler, puis qu'on n'a plus revue, mais au moment où l'on attendait cette comète, on constata l'apparition d'étoiles filantes. Celles-ci proviendraient donc de la désagrégation des Comètes.

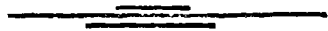
Le spectre des comètes montre surtout des hydrocarbures. Celles qui passent très près du Soleil montrent aussi du sodium au moment du passage au périhélie.

### Queue des Comètes.

La queue d'une comète est toujours dirigée dans le sens opposé au Soleil. Leur existence suppose une force répulsive qu'on attribue à la lumière solaire. Mascogell a montré l'existence de cette répulsion exercée par la lumière (émission

Maxwell - Bartholi). Cette pression varie en raison inverse du carré de la distance et proportionnellement à la surface. On conçoit donc que si la comète renferme des particules très légères, cette répulsion pourra l'emporter sur l'attraction qui elle varie proportionnellement à la masse ; le rapport de la force répulsive à la masse attractive peut d'après les observations de M. Bredikhine, prendre différentes valeurs telles que 5, 7, 18, 36, correspondant probablement à diverses sortes de substances ; il est donc variable suivant les différentes comètes ou les différentes parties de la queue d'une même comète, comme si celle-ci n'était pas homogène.

Une expérience met cette action de la lumière en évidence : on fait tomber dans un tube en forme de sablier et où l'on a fait un vide presque complet, un mélange de poudre d'émeri et de poudre de lycopode ; on éclaire vigement ce tube ; l'émeri tombe verticalement, il représente le noyau de la comète. Le lycopode, au contraire, plus léger, est repoussé de la verticale.



# Dix-septième Leçon.

## Cartes géographiques.

Soient  $S$  et  $S'$  deux aires, soit planes soit courbes, supposons qu'à chaque point  $M$  de  $S$  on fasse correspondre un point  $M'$  de  $S'$  et un seul; et inversement. On dira que cette correspondance constitue une représentation de  $S$  sur  $S'$  ou de  $S'$  sur  $S$ .

Étudions d'abord la déformation subie par une figure infiniment petite  $F$  tracée sur  $S$ ; soit  $M$ , un point de cette figure; soit  $M'$  son transformé et  $F'$  la transformée de la figure  $F$ . Rapportons les points de  $S$  à un système d'axes rectangulaires  $Mx, My, Mz$ , ayant leur origine en  $M$ , et le plan des  $x, y$  étant le plus tangent en  $M$  à la surface  $S$ . Rapportons de même les points de  $S'$  à un système d'axes rectangulaires  $M'x', M'y', M'z'$ , ayant leur origine en  $M'$  et le plan des  $x', y'$  étant le plus tangent en  $M'$  à la surface  $S'$ . Soient  $x, y, z$  les coordonnées d'un point de  $S$  par rapport aux premiers axes, et soient  $x', y', z'$  celles du point correspondant de  $S'$  par rapport aux seconds axes. Alors  $x', y', z'$  pourront être développés suivant les puissances de  $x$  et  $y$  par la formule de Taylor.

En ce qui concerne la figure infiniment petite  $F$ , on pourra regarder  $z$  et  $z'$  comme nuls, de sorte que les deux figures  $F$  et  $F'$  pourront être regardées comme planes. De plus nous pourrions réduire les développements de  $x'$  et  $y'$  aux termes du 1<sup>er</sup> degré, de sorte que  $x'$  et  $y'$  seront des fonctions linéaires de  $x$  et  $y$ . En d'autres termes on passe de la figure  $F$  à  $F'$  par une transformation homographique. A une ellipse infiniment petite  $F$  correspond une ellipse infiniment petite  $F'$ , et à deux diamètres conjugués

de  $F$  correspondent deux diamètres conjugués de  $F'$ . Si  $F$  est un cercle,  $F'$  est une ellipse, et si alors nous prenons pour axes des  $x'$  et des  $y'$  les axes de cette ellipse; pour axes des  $x$  et des  $y$  les deux diamètres rectangulaires correspondants du cercle  $F$ , les équations de la transformation homographique s'écrivent :

$$x' = ax \quad , \quad y' = by$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes. Ces deux constantes peuvent avoir des valeurs différentes dans le voisinage des différents points  $M$  de l'aire  $S$ .

Deux cas surtout sont à distinguer :

1° Si  $a = b$ , l'ellipse  $F'$  est également un cercle; toute figure infiniment petite  $F$  est transformée en une figure semblable, les angles sont conservés.

Si cette condition est remplie en tous les points  $M$  de la surface  $S$ , on dit que la représentation est conforme.

2° - Si  $ab = 1$ , les surfaces sont conservées.

3° - Si  $a = b = 1$ , les angles et les surfaces sont conservés à la fois; toute figure infiniment petite est transformée en une figure égale, les longueurs sont conservées, les deux aires  $S$  et  $S'$  sont applicables l'une sur l'autre.

Deux aires ne sont pas toujours applicables l'une sur l'autre. En particulier une aire sphérique n'est jamais applicable sur une aire plane. Si en effet les longueurs étaient conservées (et par conséquent aussi les angles et les surfaces) les lignes de plus petite longueur devraient se transformer en lignes de plus petite longueur, c'est-à-dire les arcs de grand cercle en droites. Un triangle sphérique devrait se transformer en un triangle rectiligne ayant mêmes angles, et cela est impossible puisque la somme des angles est plus grande que 2 droits dans un cas et égale à 2 droits dans l'autre.

On doit donc se contenter d'une représentation

altérant soit les angles, soit les surfaces, soit les uns et les autres.

### Représentations conformes.

Considérons deux aires planes,  $S$  et  $S'$ ; soient  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point de  $S$ ,  $x'$  et  $y'$  celles du point correspondant de  $S'$ ; la condition nécessaire et suffisante pour que la représentation soit conforme c'est que

$$x + iy' = u'$$

soit une fonction analytique de

$$x + iy = u.$$

Si en effet  $u' = f(u)$ ; on a  $\frac{dx' + idy'}{dx + idy} = f'(u) = A e^{i\omega}$ ,

$A$  étant le module et  $\omega$  l'argument de  $f'(u)$ ; il suffira donc pour transformer une figure infiniment petite de multiplier toutes ses longueurs par  $A$  et de la faire tourner d'un angle  $\omega$ ; la figure restera donc semblable à elle-même.

Je dis ensuite qu'une aire plane ou courbe quelconque  $S$  peut être représentée d'une façon conforme sur une autre aire plane ou courbe  $S'$  également quelconque. Il suffit évidemment de démontrer qu'on peut faire la représentation conforme soit de  $S$ , soit de  $S'$  sur un cercle.

Soit donc  $S$  une aire quelconque,  $C_0$  la courbe qui limite cette aire,  $O$  un point de cette aire choisi une fois pour toutes,  $C_1$  un cercle infiniment petit décrit autour de  $O$ . Considérons notre aire  $S$  comme une surface métallique très mince, d'épaisseur et de conductibilité constantes; mettons tous les points de  $C_0$  en communication avec l'un des pôles d'une pile (potentiel 0) et tous les points de  $C_1$  en communication avec l'autre pôle de la pile (potentiel -1). Un courant va passer; traçons sur  $S$  les lignes d'égal potentiel que j'ap-

pelleraï C, le potentiel sera compris entre 0 et -1; le long de C on aura  $V = \text{const.}$  V étant le potentiel. Les lignes de courant seront normales aux lignes C, je les appellerai L; soit  $L_0$  l'une d'elles. Soit I l'intensité totale du courant. Soit une ligne quelconque a, M un de ses points,  $M_0$  le point où elle coupe  $L_0$ ; soit  $i$  la quantité d'électricité qui traverse l'arc  $MM_0$ . Nous poserons

$$\omega = \frac{2\pi i}{I}$$

Les lignes de courant L auront pour équation  $\omega = \text{const.}$  Le point M sera déterminé par V et  $\omega$ .  
Considérons un petit rectangle abce limité par deux lignes C et C' infiniment voisines et deux lignes de courant L et L' infiniment voisines. La loi de Ohm nous donne:

$$dV = k di \frac{ab}{ac}$$

k étant une constante dépendant de la conductibilité et de l'épaisseur de la surface, tandis que ab et ac sont la hauteur et la base de notre rectangle. On a donc:

$$\frac{dV}{d\omega} = \lambda \frac{ab}{ac}$$

ou

$$\lambda = \frac{kI}{2\pi}$$

est une constante.

Faisons alors correspondre à notre point M, un point M' du plan ayant pour coordonnées polaires

$$e \frac{V}{\lambda} \text{ et } \omega$$

Aux lignes C et en particulier à  $C_0$  et à  $C_1$  correspondront des cercles concentriques, aux lignes L des droites normales à ces cercles, au rectangle abce, un rectangle a'b'c'e'; il s'agit de démontrer



que la représentation est conforme, c'est-à-dire que les deux rectangles sont semblables. On a en effet:

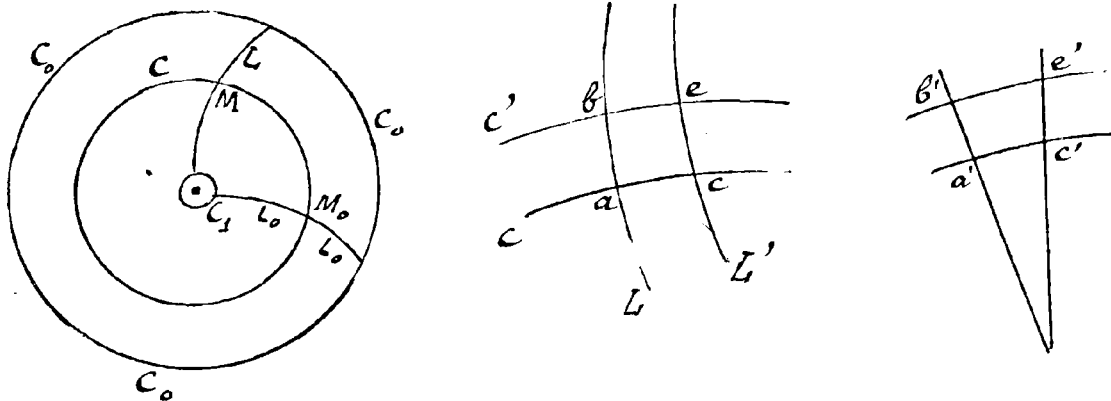
$$a'b' = \frac{dV}{\lambda} e^{\frac{V}{\lambda}}; \quad a'c' = d\omega e^{\frac{V}{\lambda}}$$

d'où

$$\frac{dV}{\lambda d\omega} = \frac{a'b'}{a'c'} = \frac{ab}{ac}.$$

La surface plane  $S'$  sur laquelle  $S$  est ainsi représentée d'une façon conforme est limitée extérieurement par le cercle qui correspond à  $C_0$  et qui a pour rayon l'unité, et intérieurement par le cercle qui correspond à  $C_1$  et qui est infiniment petit, parce que  $I$  et par conséquent  $\lambda$  sont très petits. C'est donc la surface d'un cercle.

C. Q. F. D.



La représentation conforme peut d'ailleurs se faire d'une infinité de manières puisqu'on peut choisir arbitrairement le point  $O$  sur  $S$ , et la ligne de courant initiale  $L_0$ . On démontrerait d'ailleurs qu'il n'y a pas d'autre manière de la faire.

### Projections stéréographiques.

On sait que la projection stéréographique est une perspective de la sphère en prenant pour point de vue un point de la sphère et pour plan du tableau un plan parallèle au plan tangent en ce point.

Astronomie générale.  
(12<sup>e</sup> Édition - 1906-1907)

49<sup>e</sup> feuille.

194.

On sait de plus que cette projection conserve les angles et change les cercles en cercles.

On obtiendra une projection qui ne différera pas essentiellement de la précédente, si après l'avoir obtenue, on la déplace d'une manière quelconque, soit dans son plan, soit dans un autre plan, ou si on agrandit la figure en multipliant toutes les longueurs par une même constante de façon qu'elle reste semblable à elle-même. Nous conserverons le nom de stéréographiques pour toutes les projections ainsi obtenues.

D'après le théorème énoncé plus haut, on obtiendra toutes les représentations conformes de la sphère sur le plan, en partant d'une projection stéréographique quelconque et en transformant un point  $x, y$  de cette projection en un point  $x', y'$ , tel que  $x' + iy' = z'$  soit égal à une fonction analytique donnée  $f(z)$  de  $x + iy = z$ . Toute fonction analytique  $f(z)$  définit donc une représentation conforme. On peut en particulier passer de cette façon d'une projection stéréographique à une autre; comme une projection stéréographique fait correspondre à tout point de la sphère un point du plan et un seul, [ le point à l'infini ( $z = x + iy = \infty$ ) étant regardé comme un point unique ], à toute valeur de  $x + iy = z$  correspondra une valeur de  $x' + iy' = z'$  et une seule et réciproquement. Si donc un même point de la sphère est représenté dans une projection stéréographique par le point  $x, y$  et dans une autre par le point  $x', y'$ , si l'on pose  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$ , on aura entre  $z$  et  $z'$  une relation homographique de la forme :

$$(1) \quad z' = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Inversement toute relation homographique de cette forme définit une projection stéréographique. Il suffit d'établir qu'une projection stéréographique présente le même degré de généralité qu'une homographie, c'est-à-dire qu'elle peut être choisie de façon à faire correspondre à trois points

donnés quelconques de la sphère trois autres points donnés quelconques du plan. Or au point à l'infini du plan, correspond sur la sphère le point de vue que l'on peut choisir arbitrairement et on peut d'autre part, en déplaçant la figure et l'agrandissant, en la laissant semblable à elle-même, comme nous l'avons expliqué plus haut, amener les transformés de deux autres points quelconques de la sphère à coïncider avec deux points du plan arbitrairement donnés. L'équation (V) définit donc toujours une projection stéréographique. On voit donc qu'une relation homographique conserve les cercles.

Toute représentation qui conserve les cercles (c'est-à-dire change les cercles en cercles) est une projection stéréographique.

En effet cette représentation est conforme puisqu'elle conserve les cercles infiniment petits.

Soit  $M$ , un point de la sphère,  $M'$  son transformé, par la représentation  $P'$  considérée,  $M_1'$  son transformé par une projection stéréographique  $P_1'$  quelconque; soient  $x', y'$  les coordonnées de  $M'$ ;  $x_1', y_1'$  celles de  $M_1'$ , soit  $x' + iy' = z'$ ,  $x_1' + iy_1' = z_1'$ . Soit  $V$  le point de la sphère, dont le transformé  $V'$  par la représentation  $P'$  soit le point à l'infini, nous pourrions choisir ce point  $V$  comme point de vue de la projection  $P_1'$ , de sorte que son transformé  $V_1'$  sera aussi le point à l'infini. Les cercles passant par  $V$  seront donc transformés, tant par  $P'$  que par  $P_1'$  en des cercles passant par le point à l'infini, c'est-à-dire en des droites. Donc la transformation qui fait passer de  $P'$  à  $P_1'$  conserve les angles puisque les deux représentations  $P'$  et  $P_1'$  sont l'une et l'autre conformes; de plus elle conserve les droites; elle change donc un triangle rectiligne quelconque en un triangle rectiligne semblable, et par conséquent une figure quelconque même finie en une figure semblable. Les deux représentations  $P'$  et  $P_1'$  ne sont donc pas essentiellement distinctes et l'on a:

$$z_1' = \alpha z' + \beta$$

On pourrait toutefois faire une objection; car on a

196.

le droit de se demander s'il existe un point  $V$  dont le transformé  $V'$  soit à l'infini. Soit alors  $V$  un point quelconque de la sphère, que nous prendrons encore pour point de vue de  $P_1$ , tandis que dans le plan nous choisirons son transformé  $V'$  pour origine. Posons alors :

$$z'' = \frac{1}{z'}$$

$z''$  définira une nouvelle représentation  $P''$  qui comme  $P'$  conservera les cercles et qui transformera  $V$  en un point  $V''$  réglé à l'infini. Nous pourrions alors appliquer à  $P''$  le raisonnement précédent et écrire :

$$z'_1 = dz'' + \beta = \frac{\alpha}{z''} + \beta$$

ce qui montre que  $z'$  et  $z'_1$  sont liés par une relation homographique, c'est-à-dire que  $P'$  est une projection stéréographique.

C. Q. F. D.

### Autres représentations conformes.

A chaque fonction  $f(z)$  correspond, comme nous l'avons vu, une représentation conforme ; partons d'une projection stéréographique  $P_0$  où l'un des pôles est choisi comme point de vue ; les parallèles se projettent suivant des cercles concentriques et les méridiens suivant des droites concourantes. Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées de la projection d'un point quelconque de la sphère et si  $z = x + iy = \rho e^{i\omega}$ , on aura :

parallèles  $\rho = \text{mod. } z = \text{const.}$  pour les équations des  
et en particulier  $\omega = \text{arg. } z = \text{const.}$  pour celles des méridiens,  
 $\rho = |z| = 2$  pour celle de l'équateur.

Pour une autre représentation conforme  $P'$ , le transformé de ce même point aura pour coordonnées  $x'$  et  $y'$  et l'on aura :

$$z' = x' + iy' = f(z).$$

Preons  $f(z) = z^\alpha$ ; alors le module de  $z'$  sera la puissance  $\alpha$  du module de  $z$  et l'argument de  $z'$  sera  $\alpha$  fois celui de  $z$ ; de sorte qu'on aura encore

$$\rho^\alpha = \text{mod. } z' = \text{Const.} \quad \text{pour les équations des parallèles}$$

$$\alpha \omega = \text{arg. } z' = \text{Const.} \quad \text{pour celles du méridien}$$

Les méridiens sont encore des droites concourantes, les parallèles des cercles concentriques, mais les autres cercles ne se transforment pas en cercles.

C'est la projection de Lambert.

Soit maintenant

$$f(z) = \log z$$

On aura

$$x' = \log \rho = \text{Const.} \quad \text{pour les équations des parallèles}$$

$$y' = \omega = \text{Const.} \quad \text{pour celles des méridiens.}$$

Les méridiens et les parallèles forment deux systèmes de droites rectangulaires.

C'est la projection de Mercator.

On peut évidemment généraliser. Nous sommes partis d'une projection stéréographique  $P_0$  où l'un des pôles avait été choisi comme point de vue. Si nous posons

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

nous définirons une autre projection stéréographique  $P''_0$  où le grand cercle

$$|z''| = 2$$

jouerait le rôle que jouait l'équateur par rapport à  $P_0$ . Posons ensuite

$$f(z) = \log z'' = \log \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

nous définirons une nouvelle représentation conforme qui sera par rapport à  $P''_0$  ce que la projection de Mercator était par rapport à  $P_0$ ; il y aura encore des

198.

cercles de la sphère qui se transformeront en droites, mais ce ne seront plus les méridiens et les parallèles, ce seront les petits cercles parallèles et les grands cercles, perpendiculaires au grand cercle  $|z''| = 2$ . C'est la projection de Mercator généralisée, le grand cercle  $|z''| = 2$  sera le cercle principal de la projection.

Faisons maintenant :

$$f(z) = \frac{az^\alpha + \beta}{cz^\alpha + \gamma}$$

On voit que  $f(z)$  et  $z^\alpha$  sont liés par une relation homographique. Cette nouvelle représentation conforme se déduit donc aisément de la projection de Lambert comme les relations homographiques conservent les cercles, les parallèles et les méridiens seront dans la nouvelle projection, transformés en cercles.

C'est la projection de Lambert généralisée.

### Rapport de similitude.

Le caractère des représentations conformes, c'est qu'elles transforment une figure infiniment petite en une figure semblable; mais le rapport de similitude varie d'un point à un autre. Dans le cas de la projection stéréographique  $P_0$  on a :

$$z = \rho e^{i\omega}$$

$\omega$  étant la longitude du lieu; et

$$\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Posons maintenant

$$z' = f(z)$$

de façon à définir une représentation conforme quelconque  $P'$ ; soit  $F$  une figure sphérique,  $F_0$  sa transformée par  $P'$ ; le rapport de similitude de  $F'$

à  $F$  sera donc

$$|f'(z)| \left(1 + \frac{|z|^2}{4}\right)$$

On doit chercher à ce que ce rapport varie le moins possible dans l'étendue de la carte et par conséquent qu'il atteigne un maximum ou un minimum vers le milieu de la carte. Dans le cas de la projection de Mercator, le rapport devient :

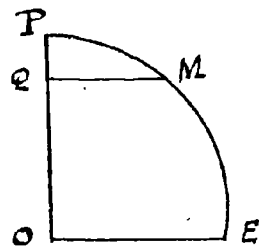
$$\frac{1}{|z|} \left(1 + \frac{|z|^2}{4}\right) = \frac{1}{|z|} + \frac{|z|}{4}$$

et le minimum est atteint pour  $|z| = 2$ , c'est-à-dire sur l'équateur.

De même dans la projection de Mercator généralisée, le minimum est atteint sur le cercle principal.

### Projection de Gauss

On peut tenir compte de l'aplatissement de la Terre; la solution de Gauss consiste à chercher d'abord une représentation conforme d'une portion de l'ellipsoïde sur la sphère, puis de la sphère sur le plan. Soient  $L$  et  $\lambda$  la longitude et la colatitude d'un point sur l'ellipsoïde,  $L'$  et  $\lambda'$  celles du point correspondant de la sphère. Soit  $PME$  le



quart de l'ellipse méridienne,  $M$  le point de colatitude de  $\lambda$ ,  $P$  le pôle,  $Q$  la projection de  $M$  sur l'axe  $OP$ . Soit  $s$  l'arc  $PM$ ,  $z$  la distance  $MQ$ ;  $s$  et  $z$  sont des fonctions connues de  $\lambda$ . L'élément d'arc de méridien

sera  $ds$ , l'élément d'arc de parallèle sera  $r dL$ . Sur la sphère ces deux éléments seront  $d\lambda'$  et  $dL'$ . Nous prendrons

$$L = \alpha L'$$

$\alpha$  étant une constante. Pour que la représentation soit conforme, il faut :

$$\frac{ds}{rdL} = \frac{d\lambda'}{\sin \lambda' dL'}$$

200.

$$\text{ou} \quad \frac{d\lambda'}{\sin \lambda'} = \frac{\alpha ds}{r}$$

comme  $s$  et  $r$  sont des fonctions connues de  $\lambda$ , on a là une équation différentielle qui définit  $\lambda'$  en fonction de  $\lambda$ .

### Représentations non conformes.

Soit une représentation quelconque,  $l$  une longueur quelconque infiniment petite sur la sphère,  $l'$  la longueur correspondante sur la projection. Soit  $M$  et  $m$  le maximum et le minimum du rapport

$\frac{l'}{l}$  dans toute l'étendue de la carte. Nous avons défini au début deux constantes  $a$  et  $b$ . Nous avons vu qu'un cercle infiniment petit de rayon  $\varepsilon$ , se transforme en une ellipse ayant pour grand axe  $a\varepsilon$  et pour petit axe  $b\varepsilon$ . Alors  $M$  est le maximum de  $a$ , et  $m$  le minimum de  $b$ . On doit s'efforcer que le rapport  $\frac{M}{m}$  soit aussi voisin de l'unité que possible.

Étant donnée une région quelconque de la sphère à représenter, la représentation qui remplira le mieux la condition énoncée ne sera pas toujours une représentation conforme.

Si par exemple cette région est un cercle, nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que le cercle a pour circonférence un parallèle; la représentation conforme la plus favorable est alors la projection stéréographique  $P_0$ . Le rapport de similitude est alors :

$$1 + \frac{|\zeta|^2}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$\theta$  étant la colatitude. Si  $\theta$  est petit, cela peut s'écrire :

$$1 + \frac{\theta^2}{4}$$

On a donc

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{\theta_0^2}{4}$$



$\theta_0$  étant le maximum de  $\theta$ .

Supposons au contraire que nous représentions un point de la sphère de la colatitude  $\theta$  et de longitude  $\omega$ , par un point de plan dont les coordonnées polaires soient  $\rho$  et  $\omega$ ; un élément d'arc de méridien sera sur la sphère  $d\theta$  et sur la projection  $d\rho$ ; un élément d'arc de parallèle sera sur la sphère  $\sin \theta d\omega$  et sur la projection  $\rho d\omega$ ; l'une de nos constantes  $a$  et  $b$  sera donc égale à 1 et l'autre

$$\frac{\rho}{\sin \theta} = 1 + \frac{\theta^2}{6}$$

On aura donc

$$\frac{M}{m} = 1 + \frac{\theta_0^2}{6}$$

ce qui est plus favorable.

Néanmoins on devra toujours préférer une représentation conforme parce que sur chaque feuille de la carte, le rapport de similitude reste sensiblement constant; tout se passe donc simplement comme si l'échelle variait légèrement d'une feuille à l'autre.

### Remarque (Non exigé).

J'ai dit que la représentation conforme la plus favorable est la projection stéréographique  $P_0$ ; plus généralement ce sera celle (on démontre qu'elle existe toujours) qui est telle que le rapport de similitude soit constant tout le long de la courbe  $C$  qui limite la région à représenter. Soit en effet  $P$  cette représentation et  $e^u$  le rapport de similitude correspondant. Ce sera le long de cette courbe que  $e^u$  atteindra sa plus petite valeur  $m$ . Soit maintenant  $P'$  une autre représentation conforme et  $e^{u'}$  le rapport de similitude correspondant. Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du point du plan qui dans la projection  $P$  représente un point de la sphère, on aura:

$$(1) \quad \frac{d^2(u'-u)}{dx^2} + \frac{d^2(u'-u)}{dy^2} = 0.$$

$\lambda$  - Voir nota à la page suivante.

Astronomie générale  
(1<sup>re</sup> division - 1906-1907)

51<sup>e</sup> feuille.

Nous en concluons (voir plus haut la démonstration du théorème de Stokes) que  $V'-V$  ne peut avoir ni maximum ni minimum; c'est donc sur la courbe limite  $C$  que cette fonction atteindra sa plus grande et sa plus petite valeur.

Soit alors  $A$  et  $B$  la plus grande et la plus petite valeur de  $V'-V$  sur  $C$  et  $D$  la valeur de cette fonction en  $O$ , on aura

$$A > D > B$$

Si ensuite  $M'$  et  $m'$  sont la plus grande et la plus petite valeur du rapport de similitude  $e^u$ , on aura:

$$M' > M e^A, m' < M e^B, m' < m e^D < m e^A$$

d'où

$$\frac{M'}{m'} > \frac{M}{m}$$

La seconde projection  $P'$  est donc moins favorable que  $P$ .

C. Q. F. D.

### Projection polyédrique.

On peut circonscrire à la sphère un polyèdre et projeter stéréographiquement sur les différentes faces du polyèdre les régions correspondantes de la sphère. Chacune des faces du polyèdre représentera une des feuilles de la carte. Dans ces conditions chaque feuille de la carte est une représentation conforme avec un rapport de similitude sensiblement constant. L'échelle est la même pour toutes les feuilles, mais les différentes feuilles ne se raccordent pas et ne peuvent s'assembler.

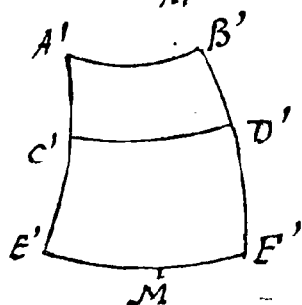
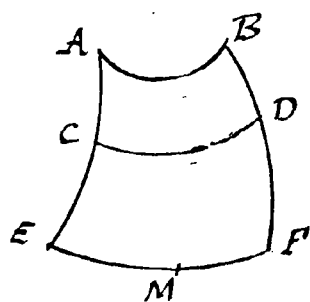
---

$\lambda$ .. Et en effet comme on a  $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} > 0$ , la fonction  $V$  peut avoir des minima, mais pas de maximum. C'est donc sur le contour de la région envisagée qu'elle doit atteindre sa plus grande valeur.

## Projection de Bonne.

La projection de la carte d'Etat-Major française est fondée sur de tout autres principes. Ce n'est pas une représentation conforme. En revanche, elle conserve les surfaces. Tous les parallèles sont représentés par des cercles concentriques, le méridien moyen par une droite normale à ces cercles. Les longueurs sont conservées sur ce méridien moyen, ainsi que sur tous les parallèles.

Je représente en ACE



(Sur la sphère)  
le méridien moyen, en BDF un méridien quelconque; en CD le parallèle moyen; en AB' et en EF deux parallèles quelconques, en M un point quelconque. Ces différentes lignes seront représentées sur la carte

en A'C'E', B'D'F', etc. A'B', C'D', E'F' seront des cercles concentriques; les longueurs étant conservées sur le méridien moyen

on aura  
 $CE = C'E'$   
et par conséquent

$$\rho = \lambda + h$$

en désignant par  $\rho$  et  $\omega$  les coordonnées polaires du point M' par rapport au centre du cercle C'D', par  $L$  et  $\lambda$  la longitude et la colatitude du point M; par  $h$  une constante.

Les longueurs étant conservées le long des parallèles, on aura:

$$\text{arc } ME = \text{arc } M'E'$$

c'est-à-dire

$$L \sin \lambda = \omega \rho$$

Je dis que les surfaces sont conservées, en effet la surface est sur la sphère :

$$\iint \sin \lambda \, dL \, d\lambda$$

et sur le plan

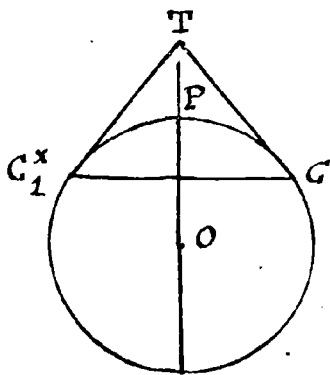
$$\iint \rho \, d\rho \, d\omega = \iint \rho \left( \frac{d\rho}{d\lambda} \frac{d\omega}{dL} \right) dL \, d\lambda$$

Mais comme  $\frac{d\rho}{dL} = 0$ ,  $\frac{d\rho}{d\lambda} = 1$ ,  $\frac{d\omega}{dL} = \frac{\sin \lambda}{\rho}$ , il reste

$$\iint \rho \frac{d\rho}{d\lambda} \frac{d\omega}{dL} dL \, d\lambda = \iint \sin \lambda \, dL \, d\lambda$$

C. Q. F. D.

Il reste à choisir la constante  $h$  ou ce qui revient au même le centre commun des cercles représentant les parallèles. On doit s'efforcer que dans le voisinage du parallèle moyen les déformations soient nulles. On obtiendra évidemment ce résultat en développant le cône circonscrit à la sphère le long de ce parallèle moyen. Je représente ici la



sphère, en  $C_1$ , la projection du parallèle moyen, en P le pôle, en T le sommet du cône circonscrit; le rayon du cercle développé  $C'D'$  sera alors  $CT$ , et on aura :

$$h = CT - CP = \operatorname{tg} \lambda_0 - \lambda_0$$

$\lambda_0$  étant la colatitude du parallèle moyen. Et en effet la zone infiniment petite de la sphère voisine du parallèle moyen peut être considérée à des infiniment

petits près d'ordre supérieur, comme appartenant à ce cône.

Les déformations sont alors nulles au centre de la carte, mais deviennent sensibles aux points les plus excentriques tels que Brest. Le maximum de l'erreur sur les angles est de  $18^\circ$  et sur les longueurs de  $1/320$  environ.

Si l'on avait pris une projection stéréographique sur le plus tangent au centre du pays l'erreur maximum sur les longueurs aurait été de  $1/200$  environ.

La projection de Bonne est théoriquement inférieure aux représentations conformes, mais pratiquement, pour un pays aussi peu étendu que la France, il y a équivalence, les différences étant très faibles.

### Projection de Cassini - Soldner.

La projection de Cassini - Soldner repose sur des principes analogues, seulement la constante  $k$  au lieu d'être égale à  $\tan \lambda_0 - \lambda_0$  est prise, égale à l'infini; les parallèles sont donc représentées par des droites parallèles.

### Systèmes adoptés dans les divers pays.

La France, la Belgique, la Hollande ont adopté la projection de Bonne; l'Angleterre, celle de Cassini; l'Autriche, l'Italie, les États-Unis, la projection polyédrique.

En Allemagne, l'unité de système n'est pas encore réalisée. On a publié en Prusse une carte fondée sur le système polyédrique; mais pour les calculs de la triangulation, on se sert d'une représentation conforme, en passant de l'ellipsoïde à la sphère par la projection de Gauss et de la sphère au plan par la projection de Mercator généralisée, le cercle principal étant un méridien. La Bavière a adopté la projection de Bonne, le Wurtemberg celle de Cassini, qui sert également pour le cadastre en Prusse et dans la plupart des États. Dans l'ancien

royaume de Hanovre où on avait employé le système de Gauss-Mercator, généralisé sous l'influence personnelle de Gauss, on l'a abandonné pour celui de Cassini-Soldner. Le Mecklenbourg se sert de la projection de Lambert. Il y a toutefois, un mouvement d'opinion en faveur de l'unité du système et du retour aux représentations conformes.

La Suisse va faire une nouvelle carte avec la projection de Mercator généralisée, le grand cercle principal étant oblique; comme c'est dans le voisinage de ce grand cercle que les déformations sont minima, on a intérêt à choisir pour ce grand cercle, le "grand axe d'inertie" du pays à représenter. L'ancienne carte de Rumie est faite avec la projection de Bonne. On en a commencé une nouvelle avec la projection de Lambert généralisée.

### Remarque.

Si nous avons à représenter un pays de médiocre étendue, on peut faire la discussion suivante. Faisons d'abord la projection stéréographique sur le plus tangent au centre de ce pays (que nous prendrions pour origine des coordonnées) le point de vue étant naturellement le point diamétralement opposé à ce centre. Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point de cette projection stéréographique. Ce seront de petites quantités. Soient  $x'$  et  $y'$  les coordonnées du point correspondant dans une représentation quelconque.

Nous négligerons les puissances supérieures de  $x$  et de  $y$ .

Le carré du rapport d'un arc infiniment petit sur le plan à l'arc correspondant sur la sphère sera :

$$1 + \frac{x^2 + y^2}{2}$$

dans la projection stéréographique et

$$\frac{dx'^2 + dy'^2}{dx^2 + dy^2} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

dans l'autre représentation. Soit (en supposant que les axes sont des axes de symétrie pour la représentation

$$x' = x (1 + \alpha x^2 + \beta y^2)$$

$$y' = y (1 + \gamma x^2 + \delta y^2)$$

On trouve alors, en négligeant toujours les puissances supérieures de  $x$  et  $y$

$$dx'^2 + dy'^2 = ds^2 + dx^2(ax^2 + by^2) + dy^2(cx^2 + fy^2) + 2gxy dx dy$$

$ds^2$  représentant l'arc sur la sphère ;  $a, b, c, f, g$  sont des constantes faciles à calculer et liées par la relation

$$b + c = g + 1$$

On remarquera alors les solutions suivantes :

$$1^{\circ} \quad dx'^2 + dy'^2 = ds^2 + (dx^2 + dy^2) \frac{x^2 + y^2}{2}$$

C'est la projection stéréographique.

$$2^{\circ} \quad dx'^2 + dy'^2 = ds^2 + (dx^2 + dy^2) x^2$$

C'est la projection de Mercator généralisée, l'axe des  $x$  jouant le rôle du grand cercle principal.

$$3^{\circ} \quad dx'^2 + dy'^2 = ds^2 + \frac{1}{3} (y dx - x dy)^2$$

Les azimuts sont conservés, c'est-à-dire que  $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$  ainsi que les distances au centre.

$$4^{\circ} \quad dx'^2 + dy'^2 = ds^2 - 2xy dx dy$$

208.

il n'y a pas de déformation ni le long de l'axe des  $x$ , ni le long de l'axe des  $y$ ; les surfaces sont conservées; on peut changer de coordonnées en posant

$$x = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$$

et on trouve alors

$$dx'^2 + dy'^2 = ds^2 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)(dx^2 - dy^2)$$

Cette projection ne diffère pas de celle de Bonne à l'ordre d'approximation adopté.

Ces formules permettent de se rendre compte des mérites particuliers des diverses projections en ce qui concerne une contrée de faible étendue.

---



Ecole,  
Polytechnique.

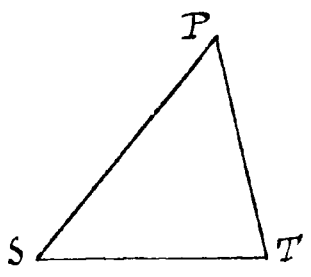
# Supplément

au Cours d'astronomie générale  
(1<sup>re</sup> Division) - (1906-1907)

## Mécanique Céleste.

### Objet de la Mécanique Céleste. Problème de Kepler.

L'objet de la mécanique céleste est de rechercher les causes des phénomènes observés. Nous allons remonter à l'époque de Kepler, au moment où il s'est proposé de déterminer la forme des orbites. Au premier abord, le problème paraît indéterminé. Soit en effet le Soleil en S, la Terre en T, la planète en P. On connaît les directions ST et SP dans l'espace; mais on n'a aucune donnée sur le rapport des trois côtés du triangle STP. Mais le problème devient déterminé avec l'hypothèse complémentaire que les trajectoires sont des courbes fermées. L'observation de la planète et du Soleil nous donne les coordonnées géocentriques de la planète: le problème revient à déterminer les coordonnées hélioc-



triques de P.

Il y a un cas où l'on peut connaître la longitude héliocentrique : c'est quand la planète est en conjonction ou en opposition, c'est-à-dire quand le plan TPS est perpendiculaire au plan de l'écliptique. Quand il y a opposition, la longitude du Soleil = la longitude géocentrique de la planète +  $180^\circ$  et le plan TPS étant perpendiculaire à l'écliptique, la longitude héliocentrique de la planète = la longitude géocentrique. De même, lorsque le plan STP se confond avec le plan de l'écliptique, la latitude héliocentrique est nulle.

### Détermination de la période de la planète sur son orbite.

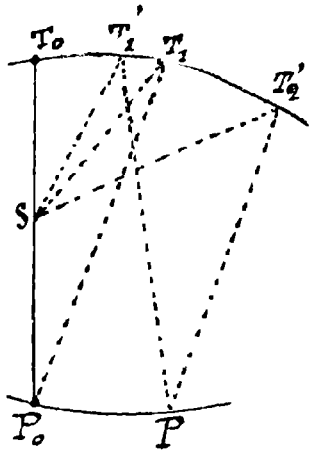
Il faut d'abord déterminer la période de la planète sur son orbite. Si  $n$  est le moyen mouvement angulaire de la terre,  $n'$  celui de la planète, les durées d'une révolution de la terre et de la planète sont  $\frac{2\pi}{n}$  et  $\frac{2\pi}{n'}$ . La différence des vitesses angulaires  $n$  est  $n - n'$  : l'intervalle qui sépare deux conjonctions successives est  $\frac{2\pi}{n - n'}$  et 2 conjonctions quelconques  $\frac{2k\pi}{n - n'}$ . Si  $k$  est très grand, on aura par la mesure de cet intervalle une valeur très approchée de  $n - n'$  : si  $n$  est bien connu :  $\frac{2\pi}{n}$  représente une année.

Si les orbites ne sont pas dans le même plan, on peut observer les moments de passage aux nœuds, moments où la latitude géocentrique est nulle. L'intervalle entre 2 passages consécutifs au nœud ascendant est rigoureusement une révolution.

### Détermination de la forme de l'orbite.

Nous partons de l'instant d'une opposition. La terre est en  $T_0$ , la planète en  $P_0$ . Au bout d'une révolution de la planète, la terre se trouvera en  $T_1$ . On connaît la direction  $T_1S$  et comme on observe la direction de la planète, on connaît  $T_1P_0$ .

On peut construire un triangle semblable au triangle  $ST_1P_0$  : on obtient ainsi une série de positions de la Terre sur son orbite : on peut les relier par un trait continu : on a ainsi l'orbite de la Terre.

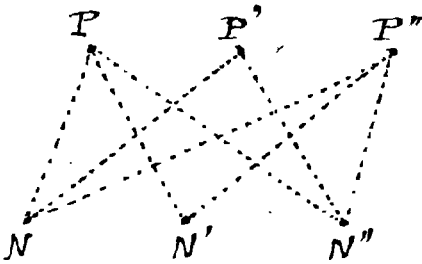


Observons maintenant aux instants  $t$  et  $t + \frac{2\pi}{\omega}$ . La planète qui se trouvait en  $P_0$  est revenue exactement en  $P$  : à ces 2 époques la Terre est en  $T_1$  et  $T_2$  : l'observation fait connaître

les directions  $T_1'S$  et  $T_2'S$ . Les points  $T_1, T_2$  sont à l'intersection de ces droites et de l'orbite de la Terre. L'observation donne aussi les directions  $T_1P$  et  $T_2P$  : y'obtiens donc ainsi le point  $P$ , et par suite une série de points définissant l'orbite de la planète.

### Remarque.

Le problème rappelle un peu le problème dit problème des 6 points qu'ont à résoudre les ingénieurs hydrographes. Etant donné 3 points de repère  $P, P', P''$ ,



un navigateur prend les positions  $N, N', N''$  : de l'observation des directions  $NP, NP', NP''$ ..., on peut déduire les positions relatives des 6 points.

### Gravitation universelle

À l'époque de Kepler, la Mécanique commençait à se constituer par l'influence de Galilée. Galilée avait énoncé le principe de l'inertie. Huyghens s'était rendu compte que la force était égale au produit de la masse par l'accélération : l'accélération

4

sera donnée par les lois de Kepler : les équations du mouvement képlérien sont :

$$\begin{cases} x = a(\cos u - e) \\ y = b \sin u \\ nt = u - e \sin u \quad (n \text{ est le moyen mouvement}) \\ f = a(1 - e \cos u) \end{cases} \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Différentions

$$\frac{dx}{du} = -a \sin u$$

$$\frac{dy}{du} = b \cos u$$

$$n dt = du(1 - e \cos u) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \frac{na}{1 - e \cos u}$$

On en déduit :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{na^2}{1 - e \cos u} \sin u \\ \frac{dy}{dt} = \frac{nab}{1 - e \cos u} \cos u \end{cases}$$

Pour avoir l'accélération, je différentie de nouveau :

$$\frac{d}{du} \frac{dx}{dt} = -\frac{na^2}{r^2} (r \cos u - ae \sin^2 u)$$

c'est-à-dire en remarquant que :  $r \cos u = a \cos u - ae \cos^2 u$

$$\frac{d}{du} \frac{dx}{dt} = -\frac{na^2}{r^2} x$$

On trouverait de même :

$$\frac{d}{du} \frac{dy}{dt} = -\frac{na^2}{r^2} y$$

Et l'on en déduit les deux composantes de la force :

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{mn^2 a^3 x}{r^3}, \quad Y = - \frac{mn^2 a^3 y}{r^3} \quad (3)$$

La force est donc attractive, et en raison inverse du carré des distances.

Remarques. - 1) - La troisième loi de Kepler nous apprend que  $n^2 a^3$  est une constante. Nous pouvons généraliser le résultat en appliquant le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Si le Soleil attire une planète, cette planète doit inversement attirer le Soleil; et l'attraction doit être proportionnelle à la masse du Soleil: on en déduit l'égalité:

$$n^2 a^3 = KM \quad (K \text{ étant une constante})$$

2) - Calcul de la constante des forces vives. - Les équations (2) donnent:

$$v^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)$$

Remarquant que:  $b^2 = a^2 - a^2 e^2$ ,  $r = a(1 - e \cos u)$

$$\text{il vient:} \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m n^2 a^3}{r} - \frac{m n^2 a^3}{2a} = \frac{KMm}{r} - \frac{KMm}{2a} \quad (4)$$

d'où:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{KMm}{r}\right) = -\frac{KMm}{2a}$$

én. emét. + énerq. pot = én. totale

Nous appellerons constante des forces vives la quantité  $-\frac{KMm}{2a}$

Les lois de Kepler et l'attraction unigé-  
selle. -

Newton a étendu ces résultats, au cas de la Lune attirée par la Terre et il a comparé cette force à l'attraction terrestre des corps pesants.

La vitesse angulaire  $\omega$  avec laquelle il faudrait lancer horizontalement un projectile à la surface de

6

la Terre pour qu'il ne rencontrât plus le sol en décrivant une orbite sensiblement circulaire est donnée par la relation

$$cvr = g \quad (r \text{ rayon de la Terre})$$

qu'on obtient en écrivant que la force centrifuge fait équilibre à la pesanteur.

Soient maintenant  $n$  le moyen mouvement,  $a$  la distance de la lune. Appliquons la 3<sup>e</sup> loi de Kepler, il vient

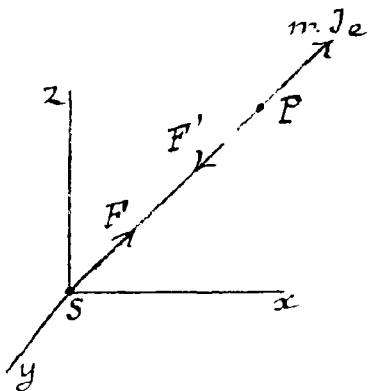
$$\omega^2 r^3 = n^2 a^3 \quad \text{ou} \quad g = \frac{n^2 a}{p^2},$$

$p = \frac{r}{a}$  désignant la parallaxe horizontale moyenne de la lune.

Newton essaya de vérifier cette formule en prenant pour longueur de la minute d'arc terrestre le mille anglais (1609m); il n'y parvint pas. Ce ne fut que quand il connut la détermination de l'arc d'1° par Picard qu'il put conclure à l'identité de la pesanteur et de la force qui relie les astres sur leurs orbites. Newton arriva ainsi à son grand principe de l'attraction universelle.

### Modifications de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler.

Ce principe une fois admis, les résultats qu'on en déduit ne concordent plus avec les faits mêmes qui ont servi à l'établir.



1<sup>o</sup> Considérons le système formé par le Soleil S et une planète P. Ces deux corps s'attirent réciproquement avec une force absolue  $K \frac{M m}{r^2}$ . Cherchons

la force qui s'exerce sur P relativement à des axes

Sxyz de directions stellaires fixes.

L'accélération de l'origine S est  $\frac{Km}{r^2}$ ; l'accélération d'entraînement  $J_e$  de P est donc  $\frac{Km}{r^2}$  et la force relative cherchée est  $\vec{F}' - m\vec{J}_e$ , c'est-à-dire

$$-\frac{KMm}{r^2} - \frac{Km^2}{r^2} = -\frac{Km(M+m)}{r^2}$$

C'est se passer comme si la planète était attirée par une masse  $M+m$  placée au centre du soleil.

La 3<sup>e</sup> loi de Kepler doit donc être modifiée, car on a

$$K(M+m) = n^2 a^3,$$

et  $n^2 a^3$  variera avec la planète considérée.

Mais la correction à faire est faible car pour Jupiter, la plus grosse des planètes du système solaire,

on a  $\frac{m}{M} = \frac{1}{1000}$  seulement. Les observations du temps

de Kepler ne permettaient pas de mettre le terme  $Km$  en évidence.

2<sup>e</sup> Pour établir la formule  $F = -\frac{mn^2 a^3}{r^2}$ , nous

avons supposé la planète décrivant une ellipse képlérienne sous la seule action du Soleil. En réalité la planète décrit son orbite sous des influences multiples dont nous pouvons calculer les lois d'après le principe de la gravitation. Pour qu'on puisse admettre la loi de force précédente il faudra que les perturbations calculées coïncident avec les perturbations calculées.

### Détermination des masses des planètes.

On peut facilement calculer la masse  $M$  d'une planète  $J$  qui a un satellite  $S$  de masse  $m$ .

Supposons l'orbite du satellite circulaire; soient  $a'$  son rayon,  $n'$  le moyen mouvement; soient  $a''$  le demi grand axe de l'orbite de  $J$ ,  $n''$  son moyen

mouvement.

En négligeant  $m$  devant  $M$  et  $M$  devant la masse  $M'$  du Soleil, on a

$$\begin{aligned} a'^3 n'^2 &= KM \\ a''^3 n''^2 &= KM' \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{M'} = \left(\frac{a'}{a''}\right)^3 \left(\frac{n'}{n''}\right)^2$$

On a pu la détermination de  $n''$ . L'observation du mouvement du satellite donne  $n'$ .

Pour déterminer  $\frac{a'}{a''}$  on observe de la terre  $T$  la plus grande élongation  $\alpha$  du satellite.

$$\sigma J = a' = TJ \sin \alpha$$

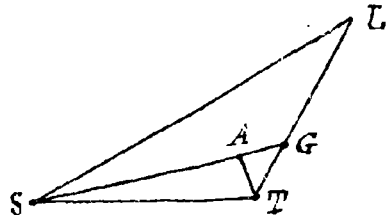
Or les tables des mouvements des planètes donnent à l'instant considéré la mesure de  $TJ$  en prenant comme unité le demi grand axe  $a$  de l'orbite terrestre:  $TJ = \lambda a$ . D'autre part la 3<sup>e</sup> loi de Kepler donne  $a'' = \mu a$ . D'où

$$\frac{a'}{a''} = \frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \quad \text{et par suite le}$$

rapport de la masse de  $J$  à la

masse du Soleil.

Ce procédé ne peut donner la masse de la Terre, mais considérons le système Terre, Lune, Soleil. Soit  $G$



le centre de gravité du système Terre - Lune. À cause de la grandeur de  $SG$  par rapport à  $TL$ ,  $G$  décrit sensiblement une ellipse képlérienne autour du Soleil.  $T$  et  $L$  décrivent en même temps des ellipses homothétiques autour de  $G$  comme foyer



et la durée de leur révolution sera une révolution synodique de la Lune. Il y aura donc une inégalité mensuelle dans la longitude héliocentrique de la Terre, ou encore dans la longitude géocentrique du Soleil. Elle sera mesurée par  $\widehat{GST}$  et par suite nulle aux pleine lune et nouvelle lune, maximum aux quadratures ( $SGT$  droit) soit  $\alpha = \frac{GT}{TS}$  ce maxi-

imum. L'inégalité à une époque quelconque sera

$$\widehat{GST} = \frac{AT}{TS} = \frac{GT \sin SGT}{TS} = \alpha \sin (\ell - \odot)$$

$\ell$  désignant la longitude géocentrique de la Lune et  $\odot$  celle du Soleil. On trouve  $\alpha = 6'', 5$   
d'autre part

$$\alpha = \frac{GT}{TS} = \frac{d'}{d} \frac{\frac{m'}{m}}{1 + \frac{m'}{m}}$$

en désignant par  $d$  la distance  $TS$  de la Terre au Soleil, par  $d'$  celle de la Terre à la Lune, par  $m$  et  $m'$  les masses de la Terre et de la Lune.

Mais  $\frac{d'}{d} =$  l'inverse du rapport des sinus des parallaxes horizontales équatoriales  $p$  et  $p'$  de la Lune et du Soleil.

$$\alpha = \frac{\sin p}{\sin p'} \frac{\frac{m'}{m}}{1 + \frac{m'}{m}}$$

D'où  $\frac{m'}{m}$  si  $p, p'$  sont connus et si l'on détermine  $\alpha$  par l'observation assidue du Soleil  $\frac{m'}{m} = \frac{1}{81}$  environ.

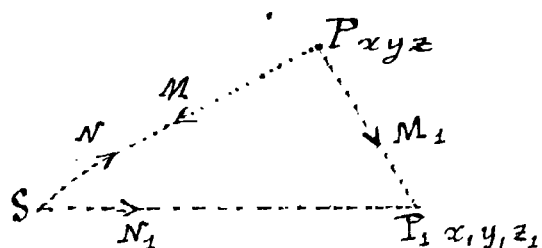
On en déduit  $m$  si l'on connaît  $m'$ . Inversement, si l'on connaît le rapport des masses  $\frac{m'}{m}$  et la parallaxe  $p'$  on peut en déduire un moyen important de détermination de la parallaxe  $p$  du Soleil.

### Calcul des perturbations Planétaires.

La loi de Newton une fois mise à la base des mou-

vements planétaires, il s'agit d'en contrôler par l'observation les déductions mathématiques. Proposons-nous donc tout d'abord de mettre en évidence les perturbations planétaires.

Une planète  $P$  est soumise à l'action du Soleil  $S$  et d'une autre planète  $P_1$  troublante : étudions son mouvement - rapportons-le



à des axes passant par le point  $S$  et de directions fixes. Soient  $xyz$  les coordonnées de  $P$ ,  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées de  $P_1$ ; posons

$$r^2 = \sum x^2, \quad r_1^2 = \sum x_1^2, \quad \delta^2 = \sum (x - x_1)^2$$

Soient  $\bar{y}_r$  l'accélération du point  $P$  relative aux axes adoptés :  $\bar{y}_a$  son accélération absolue,  $\bar{y}_e$  l'accélération du point  $S$ . Calculons séparément  $\bar{y}_e$  et  $\bar{y}_a$ .

$$\bar{y}_a = \overline{PM} + \overline{PM}_1 = \frac{M}{r^2} + \frac{m_1}{\delta^2}$$

$$\bar{y}_e = \overline{SN} + \overline{SN}_1 = +\frac{M}{r^2} + \frac{m_1}{r_1^2}$$

d'où

$$\bar{y}_r = \bar{y}_a - \bar{y}_e = \frac{M}{r^2} - \frac{m}{r^2} - \frac{m_1}{\delta^2} - \frac{m_1}{r_1^2}$$

et en projection :

$$\bar{y}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{m_1(x-x_1)}{\delta^3} - \frac{mx}{r^3} - \frac{m_1x_1}{r_1^3}$$

Posons (1)  $V = \frac{M+m}{r}$

(2)  $R = \frac{m_1}{\delta} - \frac{m_1}{r} (xx_1 + yy_1 + zz_1)$

On a les formules :

(3)  $\frac{dV}{dx} = -\frac{M+m}{r^2} \frac{x}{r}$

(4)  $\frac{dR}{dx} = -\frac{m_1}{\delta^2} (x-x_1) - \frac{m_1x}{r^2}$

donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dx} + \frac{dR}{dx}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{dV}{dz} + \frac{dR}{dz}$$

si la masse de la planète troublante était nulle,  $R$  serait nul : nous retomberions sur les équations de Kléber.

### Definitions -

1) Fonctions perturbatrices .-  $R$  s'appelle la fonction perturbatrice -  $m \frac{dR}{dx}$ ,  $m \frac{dR}{dy}$ ,  $m \frac{dR}{dz}$  sont les com-

posantes de la force perturbatrice, et sont par conséquent proportionnelles aux dérivées partielles de la force perturbatrice. La fonction perturbatrice se compose de 2 termes, la fonction principale ( $\frac{m_1}{r}$ ) et la fonction

complémentaire. La partie principale de la force perturbatrice est l'attraction exercée par la planète troublante sur la planète troublée; la partie complémentaire est une force fictive égale au produit de la masse de la planète considérée par une accélération égale et de signe contraire à celle que la planète troublante imprime au Soleil.

2) .- Travail de la force perturbatrice .- Le travail de la force perturbatrice est :

$$m \frac{\partial R}{\partial x} dx + m \frac{\partial R}{\partial y} dy + m \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$R$  est fonction de 6 coordonnées  $xyz, -x, y, z_1$  : l'accroissement infinitésimal  $dR$  est donc de la forme  $d_0R + d_1R$ ,  $d_0R$  étant l'accroissement de la fonction perturbatrice dû au déplacement de la planète troublée,  $d_1R$  étant dû au déplacement de la planète troublante  $P_1$ .

En général la fonction perturbatrice  $R$  est très petite par rapport à la fonction  $V$ . Car la masse  $m_1$  est d'ordinaire négligeable à côté de la somme  $M + m$ . Dans le cas de la planète Jupiter, la plus grosse de toutes, les

12.

perturbatrices sont 1000 fois plus petites que l'attraction du corps central. Pour la Terre elles sont environ 300 000 fois plus petites et pour la Lune 30 000 000 fois.

Il est des cas toutefois où la petitesse relative du terme  $m_1$  ne peut être invoquée. Soit par exemple le système Terre, Lune, Soleil : le corps central n'est plus le Soleil : c'est la Terre : la planète troublée est la Lune : le corps troublant est le Soleil : la masse  $m_1$  que nous négligions précédemment est alors la masse prépondérante du système. Nous allons montrer que dans ce cas encore la fonction perturbatrice est très petite.

Nous avons la relation

$$\delta^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi$$

$$(1) \quad \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_1} \left( 1 - 2 \frac{r}{r_1} \cos \varphi + \frac{r^2}{r_1^2} \right) - \frac{1}{2}$$

Développons le second membre de l'égalité (1) par la formule du binôme

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_1} + \frac{r}{r_1^2} \cos \varphi + \frac{r^2}{r_1^3} F_2(\varphi) + \frac{r^3}{r_1^4} F_3(\varphi) + \dots$$

d'où :

$$R = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_1 r}{r_1^2} \cos \varphi + \frac{m_1 r^2}{r_1^3} F_2(\varphi) + \dots - \frac{m_1}{r_1} (xx_1 + yy_1 + zz_1)$$

$$= \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_1 r^2}{r_1^3} F_2(\varphi) + \dots$$

Le premier terme n'influence en rien les équations du mouvement car il est indépendant de  $x, y, z$  et  $R$  ne figure que par ses dérivés dans les équations du mouvement. Le premier terme perturbant est donc

$$\frac{m_1 r^2}{r_1^3} F_2(\varphi)$$

Nous allons comparer son ordre de grandeur à celui du terme principal  $\frac{M+m}{r}$ , ou bien  $\frac{M}{r}$ . La 3<sup>e</sup> loi

de Kepler donne,  $n_1$  étant le moyen mouvement de la Terre par rapport au Soleil,

$$Km_1 = n_1^2 a_1^3 = n_1^2 x_1^3,$$

car  $a_1$ , demi grand axe de l'orbite solaire est voisin de  $r_1$ ,  
de même  $KM = n^2 a^3 = x^2 y^3$ ,  $n$  étant le moyen mouvement de la Lune par rapport à la Terre et  $a$  (voisin de  $r$ ), le demi grand axe de l'orbite lunaire.

Ainsi 
$$\frac{m_1}{M} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^3$$

ce qui s'écrit 
$$\frac{m_1 \frac{r^2}{r_1^3}}{\frac{M}{r}} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = \text{environ} \left(\frac{1}{13}\right)^2 = \frac{1}{169}$$

d'où résulte que la Lune subit des perturbations bien plus importantes que les planètes ordinaires.

### Remarque.

Il convient de se mettre en garde contre une erreur que l'on pourrait faire en raisonnant superficiellement. On pourrait croire qu'ayant une loi de force en raison inverse du carré de la distance, la perturbation doit varier de même. Il n'en est rien, car nous ne nous occupons que du mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre, et par suite, ce qui intervient, ce n'est pas l'attraction du Soleil sur la Lune, mais bien l'action apparente qui est la différence de l'attraction du Soleil sur la Lune et sur la Terre, et cette action varie en raison inverse du cube de la distance. Ceci nous explique pourquoi la marée lunaire est plus importante que la marée solaire : c'est le contraire qui se produirait si l'on supposait que dans le mouvement relatif de la mer par rapport à la Terre, nous devions considérer la différence d'attraction sur une molécule variant comme le

14.

caré et non comme le cube de la distance. La même remarque doit être faite lorsqu'on étudie la précession.

### Variation des éléments de l'orbite osculatrice.

Considérons une planète qui, sous l'influence de l'attraction solaire et de divers effets perturbateurs décrit une trajectoire et supposons qu'à un certain moment les effets perturbateurs disparaissent subitement: la planète, d'après les équations intrinsèques du mouvement d'un point sur une courbe décrira alors une nouvelle trajectoire ayant un contact du second ordre avec la trajectoire primitive. Cette nouvelle trajectoire est d'ailleurs une ellipse que l'on nomme l'orbite osculatrice. Naturellement, cette orbite osculatrice n'est pas la même aux différents points de la trajectoire, mais elle s'en écarte fort peu. D'ailleurs, nous savons que dans le mouvement képlérien, six éléments sont nécessaires pour définir la position de la planète sur son orbite:

le grand axe  $2a$   
la longitude du périhélie  $\omega$   
l'excentricité  $e$   
l'inclinaison sur l'écliptique  $i$   
la longitude du nœud  $\Omega$   
la longitude de l'époque  $E$ .

$n$  étant le moyen mouvement donné par la 3<sup>e</sup> loi de Kepler puis qu'on connaît  $a$ , la longitude moyenne à l'instant  $t$  sera  $l = nt + E$

Pour l'orbite osculatrice, ces éléments se nomment les éléments osculateurs de l'orbite de la planète.

S'il n'y avait pas de fonction perturbatrice, ces éléments seraient constants. Mais comme il existe une force perturbatrice qui, d'après ce qui précède est toujours très petite, les éléments varient faiblement et la méthode pour intégrer les équations du mouvement consiste précisément à étudier les variations des éléments osculateurs.

## Variations de l'excentricité.

On trouvera une équation telle que

$$\frac{de}{dt} = m_1 E$$

où  $E$  est une fonction qui dépend des positions des deux points et par suite des six éléments osculateurs de la planète troublée et  $m_1$  la masse de la planète troublante, car si cette masse est nulle, on doit avoir  $e = \text{constante}$ .

Pour trouver la forme de la fonction  $E$ , remarquons qu'elle doit être périodique relativement à  $l$  et à  $l_1$  et avoir pour période  $2\pi$ .

$$\text{Ainsi } E = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p_1=0}^{p_1=\infty} A_p^{p_1} \cos(p l + p_1 l_1 + \theta)$$

$p$  et  $p_1$  étant des nombres entiers et  $A_p^{p_1}$  et  $\theta$  deux fonctions des six éléments osculateurs autres que  $l$  et  $l_1$ . Si le mouvement était képlérien, ce seraient des constantes. Comme  $m_1$  est très petit,  $m_1 E$  changera très peu si on remplace ces six éléments osculateurs par des valeurs constantes

$$\begin{aligned} l &= n t + \varepsilon \\ l_1 &= n_1 t + \varepsilon \end{aligned}$$

alors

$$\frac{de}{dt} = m_1 \sum \sum A \cos[(p n + p_1 n_1) t + \eta],$$

en intégrant  $e = e_0 + m_1 A_0 t + m_1 \sum \sum \frac{A \sin[(p n + p_1 n_1) t + \eta]}{p n + p_1 n_1}$

les combinaisons telles que  $p n + p_1 n_1 = 0$  étant exclues dans la sommation.

Ainsi, il y a deux sortes de termes perturbateurs, les uns périodiques, restent toujours très petits, l'autre, proportionnel au temps peut donner des variations très grandes, c'est le terme séculaire.

Naturellement, ce que nous venons de dire pour l'excentricité s'applique aux autres éléments, mais cependant avec quelques modifications comme nous l'allons voir.

## Variation du grand axe.

Nous allons démontrer que dans ce cas la perturbation séculaire est nulle.

Remarquons qu'à l'instant  $t$  on peut supposer l'action perturbatrice détruite : on peut alors appliquer la formule

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left( -K \frac{(M+m)m}{r} \right) = -K \frac{(M+m)m}{2a}$$

qui a été démontrée pour une trajectoire képlérienne : ici,  $v$  désigne la vitesse véritable de la planète à l'instant  $t$ .

On en déduit

$$d \frac{1}{2} m v^2 = d \left[ K \frac{(M+m)m}{r} \right] + d \left[ - \frac{K (M+m)m}{2a} \right]$$

c'est-à-dire

total = travail de la force attirante + travail de la force troublante = travail de la force attirante +  $d \left[ - \frac{K (M+m)m}{2a} \right]$

Ainsi  $d \left[ - \frac{K (M+m)m}{2a} \right] = \text{traj. de la force troublante.}$

Ce travail est d'ailleurs ce que nous avons antérieurement appelé  $m d_0 R$ .

$$\text{Ainsi } m d_0 R = - \frac{d m (M+m)}{2a} \cdot K$$

d'où

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{M+m} \frac{d_0 R}{dt}$$

D'ailleurs, à cause de l'hypothèse simpliste que nous avons faite,  $R$  n'est fonction que du temps, par l'intermédiaire de  $l$  et de  $l_1$  en sorte que

$$\begin{aligned} dR &= n dt \frac{\partial R}{\partial l} + n_1 dt \frac{\partial R}{\partial l_1} \\ &= d_0 R + d_1 R \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d_0 R = n dt \frac{\partial R}{\partial l}$$



d'où, sans peine  $\frac{da}{dt} = \frac{2}{an} \frac{\partial R}{\partial l}$

d'ailleurs, en raisonnant sur  $R$ , comme nous l'avons fait tout à l'heure sur  $E$ , on voit tout de suite que  $R$  est une fonction périodique de  $l$  &  $l_1$ , de période  $2\pi$  et par suite que

$$R = \sum \sum B_p^{p_1} m_1 \sin(\rho l + \rho_1 l_1 + \theta_p^{p_1})$$

les  $B$  et  $\theta$  étant des fonctions des éléments osculateurs : ils peuvent donc ici être regardés comme des constantes.  
Il en résulte

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \sum \sum B m_1 \rho \cos(\rho l + \rho_1 l_1 + \theta)$$

d'où enfin  $\frac{da}{dt} = \frac{2}{an} \sum \sum B m_1 \rho \cos[(\rho R + \rho_1 n_1)t + \theta]$

Il ne saurait y avoir de terme séculaire : en effet, il ne pourrait provenir que de termes de la somme tels que  $\rho n + \rho_1 n_1 = 0$ . Cette équation admet d'abord la solution  $\rho = 0$   $\rho_1 = 0$  et le terme correspondant est nul puisque  $\rho$  est un facteur, et en second lieu, les solutions de l'équation  $\frac{\rho}{\rho_1} = -\frac{n_1}{n}$  qui prouvent que le rap-

port des moyens, mouvements doit être rationnel : ce n'est pas, en général, le cas, car, la probabilité pour qu'il en soit ainsi est infiniment petite.

### Variation de la longitude moyenne.-

Par un calcul analogue à celui déjà fait dans l'étude de  $e$ , on trouvera

$$\frac{dl}{dt} = n + m_1 \sum \sum C \cos(\rho l + \rho_1 l_1 + \theta),$$

donc, ici, comme ce n'est pas multiplié par  $m_1$ , il n'est plus légitime de considérer  $n$  comme une constante.

Nous poserons donc  $n = n_0 + dn$   
Or  $n^2 a^3 = C \underline{t^e}$

d'où  $\delta n = -\frac{3}{2} \frac{22}{a} \delta a$

en employant la caractéristique  $\mathcal{J}$  pour désigner les variations dues à la déformation de l'orbite osculatrice.

Pour calculer  $\delta a$ , on emploierait un calcul analogue à celui qui nous a déjà servi pour le calcul de  $e$ : on trouverait alors naturellement une expression analogue, mais sans terme séculaire, car s'il y en avait un, il y en aurait a fortiori un dans l'expression de  $\alpha$ , ce que nous avons démontré n'être pas.

$$\text{Ainsi } \delta a = m_1 \sum \sum \frac{D}{pn + p_1 n_1} \sin[(pn + p_1 n_1)t + \xi]$$

d'où, par un calcul aisé

$$\left[ l = n_0 t + \varepsilon_0 + \frac{3}{2} \frac{m_1 n}{a} \sum \sum \frac{D}{(pn + p_1 n_1)^2} \cos[(pn + p_1 n_1)t + \xi] \right. \\ \left. + m \sum \frac{C}{pn + p_1 n_1} \sin[(pn + p_1 n_1)t + \theta] \right]$$

les sommations provenant de la dernière série peuvent d'ailleurs introduire un terme proportionnel à  $t$  qui se réduira à  $n_0 t$ .

Il est intéressant de remarquer le dénominateur  $(pn + p_1 n_1)^2$ . Remarquons que l'on ne pourra jamais calculer exactement le rapport des moyens mouvements: on ne pourra en avoir qu'une expression approchée, développable par exemple en fraction continue. Le rapport  $\frac{n}{n_1}$  pourra alors être pris voi-

sin d'une des réduites de cette fraction continue et sera par suite très près d'être rationnel: il en résulte que  $pn + p_1 n_1$  pourra devenir très petit mais,

la période étant  $\frac{2\pi}{pn + p_1 n_1}$  dans le temps, cette période

peut devenir très longue, et à cause du dénominateur  $(pn + p_1 n_1)^2$ , qui compense la faiblesse du multiplicateur  $m_1$ , les termes correspondants peuvent être très grands.

Ainsi le rapport des moyens mouvements du système Jupiter-Saturne est très voisin de  $\frac{2}{5}$ . Les

termes correspondants introduisent une perturbation de 50' ayant pour période 900 ans. De même pour Hécube dont le moyen mouvement est le double de celui de Jupiter.

### Degré d'approximation de la Loi de Huxton.

La théorie de la gravitation universelle rend-elle un compte précis des faits observés?

Répondre à cette question est très délicat, car on ne sait trop en réalité à quoi attribuer les divergences entre la théorie et l'observation. Une divergence peut en effet tenir à ce que les observations sont mauvaises et alors, de nombreuses observations permettront bien d'éliminer les erreurs accidentelles par la méthode des moindres carrés, mais les erreurs systématiques subsisteront. De plus la méthode des moindres carrés est d'une application difficile, et quel calculateur est assez sûr de soi-même pour prétendre ne pas se tromper dans des calculs aussi pénibles?

Une divergence peut encore tenir à l'omission des termes sensibles dans le calcul des perturbations. On s'en tient en effet aux premiers termes des séries de Fourier précédemment considérées et rien ne prouve qu'on n'a pas négligé de termes sensibles. Enfin, la perturbation peut encore provenir de masses stellaires inconnues jusqu'ici: C'est ce qui est arrivé pour la planète Neptune découverte par Le Verrier. L'illustre astronome attribua les perturbations de la planète Uranus à une masse troublante Neptune dont il calcula les éléments et la masse. La seule indéterminée de son problème était la distance de l'astre troublant au Soleil. Il supposa qu'il obéissait à la loi de Bode, ce qui est inexact, et fut cause qu'il attribua à Neptune une masse double de sa masse réelle et une excentricité considérable. On peut néanmoins s'étonner que, malgré ces erreurs considérables, les observateurs aient découvert Neptune dans la direction indiquée par Le Verrier: cela tient à ce que la planète était en conjonction avec Uranus: ainsi, le calcul de Le Verrier n'eut donné, cent ans plus tard, que des résultats absolument stériles.

Il existe actuellement une anomalie dont on n'a pas encore donné une solution satisfaisante:

le périhélie de Mercure subit une variation séculaire plus considérable que la théorie ne l'indique. On a songé à augmenter de  $\frac{1}{10}$  la masse de Vénus, mais alors, ce sont les perturbations que cause Vénus dans le mouvement de la Terre, qui ne s'accordent plus avec la théorie. C'est alors que Le Verrier proposa d'admettre l'existence d'une ou plusieurs planètes intramercurelles. Mais les difficultés de l'observation de cet astre sont considérables. Si en effet on la suppose près du Soleil, la masse troublante est assez grande, mais elle est noyée dans la lumière du Soleil. Si on la suppose éloignée du Soleil, la masse troublante est alors trop petite et il en est de même de son volume, sans doute. Enoi qu'il en soit, en dépit d'une observation probablement fantaisiste du docteur Lescaubault et de diverses autres observations plus ou moins controversées, on n'est encore arrivé à aucun résultat définitif. On admet, en général, qu'il faut renoncer à l'hypothèse d'une planète unique, que s'il existe des astres analogues à celui perçu par le docteur Lescaubault, ils ne peuvent être qu'en très-petit nombre, sans quoi l'assiduité des observateurs les aurait inmanquablement fait découvrir, mais alors elles seraient en trop petit nombre pour produire sur Mercure l'effet voulu. On pourrait encore supposer l'existence d'un anneau de matière cosmique, et il conviendrait de le placer entre Vénus et Mercure, car le nœud de Vénus subit des perturbations inexpliquées.

Pour donner une idée de la difficulté des observations, due à la proximité du Soleil, il suffira de remarquer qu'un même astronome, observant les éclipses totales de Soleil pendant un siècle entier ne pourra guère se livrer à la recherche des planètes intramercurelles pendant plus d'une heure. On a encore proposé de modifier la loi de Newton et de prendre comme loi de force  $\frac{1}{1^v}$  avec  $v = 2,0000001.574$ . Mais le mouvement du périhélie de la Lune ne permet pas de donner à l'exposant 2 un accroissement supérieur à  $0,0000004$ . On voit par conséquent à quel degré d'exactitude la loi de Newton est vérifiée par les observations.

Cependant la comète d'Encke subit, au voisinage du Soleil une accélération encore mal expliquée. On a proposé d'admettre l'existence d'un milieu résistant qui, augmentant la constante des forces vives proportionnelles à  $\frac{1}{a}$ , diminue par là même et par suite augmente  $n$ , d'après l'équation

$$n^2 a^3 = Cte.$$

### Perturbation du mouvement de la Lune.

Ptolémée connaissait déjà l'évection qui a même période que l'argument  $2D-g$ ,  $D$  étant la distance du Soleil à la Lune et  $g$  l'anomalie moyenne de la Lune.

L'équation annuelle, découverte par Zychow Braché provient de l'attraction du Soleil sur la Lune qui varie suivant la distance de la Terre au Soleil: elle peut atteindre  $11''$ .

La Lune possède une accélération séculaire de  $6''$  d'arc par siècle. Halley l'a découverte en comparant les observations de son temps avec les éclipses très anciennement observées par les Arabes et les Grecs. Les éclipses n'auraient pu avoir lieu s'il ne s'était produit une variation de quelques minutes dans la longitude de la Lune.

Laplace a découvert dans la théorie de la Lune un terme séculaire qui oblige à ajouter à la longitude moyenne de la Lune la quantité  $6'' t^2$  et il attribue cette perturbation à la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre. C'est cette même cause que Laplace attribue deux autres perturbations séculaires subies par le périgée et par le nœud. Les deux perturbations accompagnent l'accélération du mouvement moyen de la Lune. Le périgée de la Lune fait une révolution complète dans le sens direct en 9 ans, et le nœud dans le sens rétrograde en 18 ans  $\frac{2}{3}$ . On concevra aisément le mouvement de la Lune en imaginant une ellipse tournant dans son plan, tandis que ce plan se meut autour d'un axe perpendiculaire à l'écliptique en 18 ans  $\frac{2}{3}$ .



# Astronomie.

## Résumé de la deuxième leçon.-

### Erreurs.-

Le rapport de deux grandeurs, c'est à dire la mesure de l'une, l'autre étant prise pour unité, peut s'exprimer par un nombre; telle la surface d'un carré de côté donné. Certains rapports au contraire, quoique exactement définis ne peuvent être exprimés par des nombres mais seulement évalués avec une approximation plus ou moins grande, aussi grande qu'on voudra, mais jamais rigoureusement; telle dans certains cas, le rapport de la surface donnée d'un carré au côté; c'est le caractère des grandeurs dites incommensurables,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , & ...

Quand au lieu de grandeurs définies, il s'agit de la mesure des choses ou d'éléments de phénomènes, cette mesure ne peut jamais être rigoureusement déterminée ni par suite, exactement exprimée par un nombre.

Le résultat de l'opération destinée à réaliser la mesure, opération matérielle, est fatalement inexact, entaché d'une erreur plus ou moins grande; la même opération reproduite aussi identiquement que possible, ou d'une manière différente, donnera des résultats généralement différents. Si, parmi les mesures effectuées, l'une d'elles se trouvait être la mesure exacte, nous n'aurions aucun moyen de la distinguer.

La théorie des erreurs ressortit naturellement aux sciences d'observation et en particulier à l'astronomie, la plus ancienne de ces sciences, celle dont les théories, édifiées en suite des observations, sont incessamment et merveilleusement contrôlées dans leurs développements successifs à l'aide de nouvelles observations rendues de plus en plus précises surtout par

L'élimination minutieuse des causes d'erreurs.

L'ensemble des faits qui servent de base à la théorie des erreurs peut être exposé suivant la forme expérimentale ou comme conséquence d'une théorie due particulièrement à Gauss.

Nous commencerons par l'analyse des faits expérimentaux et l'exposé des méthodes pratiques qui seront ensuite synthétisés par un aperçu de la théorie.

Les causes d'erreur peuvent être rattachées : à l'observateur ; aux instruments ; aux méthodes, procédés, ou mode opératoire ; enfin aux circonstances, c'est-à-dire aux phénomènes secondaires qui accompagnent le phénomène principal. Ainsi, comme exemples simples, on peut citer :

Erreurs personnelles ou d'appréciation : de la position d'un point entre deux lignes parallèles, ou d'un trait entre deux divisions ; d'une étoile entre deux fils du réticule ; l'erreur sur le temps de passage d'une étoile derrière un des fils du réticule..... &...

Erreurs instrumentales : mesure mal étalonnée ; règle ou cercle mal divisés ; défaut de solidité des parties assemblées d'un instrument de mesure ; arme dont le guidon est mal réglé, dont la charge est variable ...&.

Erreurs dues aux méthodes : méthodes par répétition, par réitération, par transposition ... & ; perte de matière par entraînement, évaporation, transformation partielle..... & ; théorie erronée ou reposant sur des hypothèses inexactes .... &

Erreurs résultant des circonstances : influence des modifications ambiantes sur les mesures, sur les instruments, sur les choses, influence des variations de la température, de la pression, du degré hygrométrique ..... & ; du vent sur le tir ....&.

La recherche des causes d'erreur a conduit à répartir celles-ci en deux catégories : erreurs systématiques ; erreurs accidentelles.

Sont dites systématiques toutes les erreurs dont la



cause immédiate a pu être déterminée ou seulement soupçonnée. C'est dire qu'à chacun des progrès successifs, une partie des erreurs de la seconde catégorie passe dans la première. En un état donné de la Science l'ensemble des erreurs considérées comme accidentelles ne saurait être subdivisé en sous catégories à un titre quelconque puisqu'une telle subdivision conduirait à caractériser la nature d'une partie des erreurs, de sorte que par le fait même de la subdivision celles-ci deviendraient systématiques. Aucune distinction ne saurait être faite entre les erreurs catégorisées accidentelles.

Toutes les causes peuvent donner naissance à des erreurs qui seront classées dans l'une ou l'autre catégorie, selon leur importance, selon le degré d'avancement de la question considérée ou de la Science en général, selon la manière d'opérer ou les circonstances. Ainsi l'usage répété d'une arme unique dans des circonstances identiques pourra mettre en évidence le défaut de réglage dont elle est affectée; si l'on change d'arme à chaque coup, celles-ci étant, a priori, considérées comme équivalentes, les écarts résultant des défauts de réglage se confondront avec les écarts accidentels.

L'histoire de la Science montre qu'un grand nombre de phénomènes, parmi les plus importants, se sont réglés de façon imprévue lors de l'étude ou de la recherche d'un phénomène tout différent déjà connu, seulement prévu ou soupçonné. Lorsque les écarts des résultats ne peuvent être considérés comme accidentels, soit à cause de la grandeur, soit par le fait d'une loi apparente, on est incité à des recherches conduisant plus ou moins péniblement, mais sûrement à la découverte d'un phénomène qui peut d'accessoire devenir phénomène principal. Tel a été par exemple le cas pour la réfraction astronomique, pour l'aberration... - &c.

Les progrès de la Science sont donc intimement liés aux succès des efforts tentés pour éliminer ou atténuer les erreurs systématiques qui affectent les mesures, pour faire sortir de la catégorie des accidentelles celles dont la cause peut être découverte et la loi ultérieurement précisée.

4.

Un aperçu des résultats obtenus dans les opérations du nivellement géométrique mettra en évidence le degré de perfection auquel on peut arriver dans l'élimination des erreurs systématiques.

Il s'agit de déterminer l'altitude d'un lieu donné au dessus de la surface de niveau définie par la surface des océans supposée prolongée sous les continents.

Partant d'un rivage, deux échelles digitales sont placées verticalement à une distance plus ou moins grande l'une de l'autre, puis transportées de proche en proche la première prenant la place de la seconde, l'observateur muni d'un niveau à lunette prend une position intermédiaire, rend vertical l'axe de l'instrument d'après les indications d'un niveau à bulle d'air, vise successivement sur chacune des échelles et note les lectures; la différence de celles-ci donne la différence d'altitude des pieds des échelles. En certains points choisis on scelle des repères d'un modèle uniforme portant indication de la cote.

Lorsqu'on songe au nombre de stations nécessaire pour parcourir un pays, à partir d'un point initial unique, on comprend l'importance que prendraient les moindres des causes d'erreurs systématiques, constantes ou variables suivant une loi quelconque, dont les effets se reproduiraient à chaque portée.

Cependant les instruments, les procédés, le mode opératoire ont pu être étudiés et réglés de façon que l'erreur de fermeture est estimée ne point dépasser pour la France sept centimètres.

Le système de déterminations actuel réalisé par le service du nivellement général sous la direction de Monsieur Zillemand, Ingénieur des Mines n'a pu régler d'écart supérieur à un mètre relativement au premier nivellement, exécuté antérieurement sous la direction de l'Ingénieur Bourdaloué.

Ceci met en évidence un caractère essentiel des erreurs classifiées accidentelles, que l'expérience, indéfiniment répétée et variée, montre se compensant à peu près dans l'ensemble d'un grand nombre de déterminations équivalentes. Il est clair par exemple que si dans les opérations du nivellement géométrique, les seules erreurs

accidentelles de pointé ou de réglage de la verticalité de l'axe, par exemple, pouvaient s'accumuler, se reproduire avec le même signe dans la totalité ou seulement le plus grand nombre des opérations partielles, l'erreur de fermeture serait incomparablement plus grande, l'accord entre les résultats obtenus à des époques différentes avec des opérateurs, des instruments et des procédés différents, ne pourrait atteindre la perfection constatée.

C'est un fait constant que les erreurs systématiques étant écartées, les écarts qui se manifestent entre les mesures d'une même grandeur renouvelées dans des conditions aussi identiques que possible, un assez grand nombre de fois, se compensent à peu près exactement parce qu'elles se présentent en égal nombre, de même grandeur absolue, en plus et en moins.

D'ailleurs les écarts ne dépassent jamais certaines limites dépendant de la nature de l'observation et des moyens dont on dispose (1) ; sur un nombre total donné d'écarts classés par ordre de grandeur absolue, les nombres partiels d'écarts d'une grandeur donnée décroissent très rapidement lorsque cette grandeur croît, c'est-à-dire que les écarts sont d'autant plus nombreux, et de beaucoup, qu'ils sont plus petits, toujours en nombre égal positifs et négatifs. Telle est la loi des erreurs accidentelles qui sera précisée plus loin.

Examinons le cas où les erreurs systématiques sont supposées éliminées ; il n'est censé subsister que les seules erreurs accidentelles inévitables dans les conditions considérées. On a mesuré directement une grandeur et à cause de l'importance que l'on attache à la connaissance exacte de la mesure, celle-ci a été renouvelée un nombre  $m$  de fois dans des conditions jugées identiques ; toutes ces mesures inspirent une égale confiance ; elles sont fatalement différentes, mais on n'a aucune raison de choisir entre elles. Dans ce cas, l'usage unigénéral et indiscuté est de prendre la moyenne arithmétique.

Pour apprécier la précision des mesures, pour se mettre

---

(1) Il est clair que les erreurs d'écriture ou de transcription sont supposées écartées.

en état de discuter les résultats, opérant comme si la moyenne était le résultat exact, on forme le tableau des différences entre la moyenne et chaque valeur observée. Ces différences sont dénommées résidus. L'étude du tableau des résidus servirait de base à la recherche des erreurs systématiques; mais comme on admet qu'il n'en existe aucune, les écarts rangés par ordre de grandeur se répartissent comme il sient d'être indiqué. La grandeur des résidus renseigne sur la précision des mesures mais quelle fonction de l'ensemble sera choisie pour caractériser cette précision, ou plutôt l'erreur moyenne? Ce ne peut être la somme algébrique puisque la moyenne jouit de la propriété de la rendre nulle. Legendre remarquant que les petits écarts se présentent toujours en grand nombre a proposé de considérer l'écart moyen quadratique ou la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts. Quelques auteurs ont proposé pour le même objet la moyenne des valeurs absolues, dite moyenne non quadratique. Mais la convention de Legendre est plus généralement adoptée: l'erreur moyenne est l'erreur moyenne quadratique sauf indication contraire. On remarquera qu'elle donne plus d'importance aux grandes erreurs et d'autant plus qu'elles sont plus grandes.

Ceci se rapporte au cas simple où il existe une seule inconnue qui est mesurée directement, mais il arrive souvent que l'on doit conclure d'un système de mesures les valeurs de plusieurs inconnues. Par exemple dans le cas du trinôme de dilatation  $\vartheta = \vartheta_0 (1 + \alpha \theta + \beta \theta^2)$  que l'on écrira  $\vartheta_0 \alpha \theta + \vartheta_0 \beta \theta^2 = \Delta \vartheta$ , les inconnues seront d'abord  $\vartheta_0 \alpha$  et  $\vartheta_0 \beta$  desquelles on conclura d'ailleurs  $\alpha$  et  $\beta$ . Deux coefficients, ici  $\theta$  et  $\theta^2$ , et un système de  $m$  mesures de  $\Delta \vartheta$  répondant à des valeurs convenablement différentes des coefficients fourniront autant d'équations entre les inconnues  $\vartheta_0 \alpha$  et  $\vartheta_0 \beta$  ou  $x$  et  $y$ . Les coefficients  $\theta$  et  $\theta^2$  ou plus généralement  $a$  et  $b$  auront selon les cas des valeurs exactement connues ou mesurées, pour plus de simplicité si on devait considérer les valeurs de ces coefficients comme entachés d'incertitudes ou d'erreurs celles-ci seraient conventionnellement reportées sur la mesure principale  $\Delta \vartheta$  ou à qui figure dans le second membre.

Ainsi on a un ensemble de  $m$  équations à deux inconnues

$$a_1 x + b_1 y = u_1, \dots, a_k x + b_k y = u_k, \dots, a_m x + b_m y = u_m$$

qui forme un système incompatible par le fait des erreurs accidentelles. Mais il est entendu que l'on n'a aucune raison de choisir entre ces équations. Les règles de l'algèbre ne sauraient conduire à la détermination des inconnues et l'on va reconnaître qu'on ne pourrait multiplier les deux membres de certaines d'entre elles par un même nombre sans altérer plus ou moins les valeurs qu'il convient d'attribuer aux inconnues.

Si on connaissait les valeurs exactes des inconnues, en portant leurs valeurs dans chaque équation, on aurait la valeur exacte du second membre et par suite l'erreur de chaque mesure. Si ignorant les valeurs exactes des inconnues on leur attribuait certaines valeurs, à celles-ci correspondraient des différences  $\varepsilon$  entre le résultat du calcul et celui  $u$  de la mesure correspondante. Le système des équations primitives serait remplacé par celui

$$a_1 x + b_1 y = u_1 + \varepsilon_1, \dots, a_k x + b_k y = u_k + \varepsilon_k, \dots, a_m x + b_m y = u_m + \varepsilon_m;$$

système compatible comprenant  $m-2$  équations équivalentes aux deux restantes.

Au contraire, les inconnues  $x$  et  $y$  peuvent être considérées comme des fonctions du système de valeurs que l'on pourrait, à priori, attribuer aux  $\varepsilon$ ; quelle condition imposée aux résidus  $\varepsilon$  pourrait déterminer le système de valeurs qu'il est plus avantageux de leur attribuer?

L'une des propriétés de la moyenne arithmétique est symbolisée par  $\sum \varepsilon = 0$ ; on reconnaît aussitôt que cette condition ne saurait convenir au cas considéré car  $m-1$  des résidus pourraient être pris arbitrairement pourvu que le  $m$ <sup>ème</sup> soit choisi en conséquence. Mais la moyenne jouit d'une seconde propriété qui est de rendre minimum la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire la somme qui, divisée par le nombre des mesures, caractérise le carré de l'erreur moyenne quadratique dans le cas de la mesure directe d'une grandeur unique.

Or dans le cas de plusieurs inconnues cette condition

8

fournit autant d'équations que d'inconnues car la condition  $\Sigma (\mathcal{E}^2)$  minimum revient à rendre minimum la fonction de deux variables  $x$  et  $y$

$$\sum_{k=1}^{k=m} (a_k x + b_k y - u_k)^2$$

c'est à dire à résoudre le système de deux équations qui expriment que les dérivées partielles relatives à chacune des inconnues, sont respectivement nulles ;

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{k=m} a_k (a_k x + b_k y - u_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{k=m} b_k (a_k x + b_k y - u_k) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ou suivant} \\ \text{la notation} \\ \text{de Gauss} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} [aa]x + [ab]y = [au] \\ [ab]x + [bb]y = [bu] \end{array} \right.$$

D'où la régle de Legendre :

Pour former les équations finales on considère successivement chacune des inconnues ; on multiplie chaque équation par le coefficient de l'inconnue considérée et on fait la somme de toutes les équations ainsi transformées.

Ainsi chaque multiplicateur donne à l'équation transformée une importance déterminée par la grandeur du multiplicateur, qui n'est plus indifférent comme en algèbre élémentaire où les équations sont considérées comme rigoureuses.

Cauchy a proposé de prendre comme multiplicateur de chaque équation  $\pm 1$  selon que le coefficient de l'inconnue considérée est positif ou négatif, ce qui conduit au système

$$x \Sigma |a| + y \Sigma (\pm b) = \Sigma \pm u$$

$$x \Sigma (\pm a) + y \Sigma |b| = \Sigma \pm u$$

de Bisserand a montré que dans certains cas les solutions fournies par ce procédé si simple ont à très peu près la même probabilité d'exactitude que celles obtenues par la méthode des moindres carrés.

L'application stricte de cette dernière comporte le plus souvent des calculs d'une extrême complication. Legerrier et M. Cargallo ont fait remarquer que l'on pourrait prendre pour multiplicateurs des nombres simples dont les rapports soient seulement à peu près ceux des coefficients; il est clair qu'ainsi, par un choix convenable, on peut réduire considérablement la complication des calculs. Cette licence se justifie aisément par la simple remarque qu'il s'agit d'une question de minimum.

L'erreur moyenne sur les mesures u sera, conformément à la règle indiquée plus haut caractérisée par

$$\mu_u = \pm \sqrt{\frac{\sum(\varepsilon^2)}{m}} \text{ ou si on veut } \sqrt{\frac{\sum(\varepsilon^2)}{m-i}}$$

i étant le nombre des inconnues qui est supposé moindre, et notablement moindre que le nombre m des équations.

Quelle est l'erreur moyenne relative à chacune des inconnues ?

Remarquons d'abord que l'on peut considérer les inconnues comme exprimables en fonction du système des  $\varepsilon$ , de sorte que pour x par exemple on peut écrire symboliquement

$$x = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m).$$

La différence entre cette valeur de x et la valeur exacte peut être représentée dans l'hypothèse par

$$\Delta x = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) - \varphi(0, 0, \dots, 0)$$

ou en négligeant les termes de degré supérieur à l'unité en  $\varepsilon$

$$\Delta x = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_k} \varepsilon_k$$

10.

On convient de remplacer les  $\varepsilon$  par l'erreur moyenne sur les mesures  $\mu_u$  et de prendre pour l'erreur moyenne sur l'inconnue  $x$

$$\mu_x = \mu_u \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right)^2}$$

ou, si l'on observe que les équations primitives, de même compatibles aux valeurs des inconnues lorsque l'on ajoute  $\varepsilon$  à  $u$ , on peut écrire finalement

$$\mu_x = \mu_u \sqrt{\sum_{k=1}^{k=m} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right)^2}.$$

Par exemple, dans le cas de deux inconnues, l'équation qui donne la valeur de  $x$  est, en utilisant la notation de Gauss et représentant par  $\Delta$  le déterminant

$$x\Delta = [au][bb] - [bu][ab] = \sum_{k=1}^{k=m} u_k \left\{ [bb]a_k - [ab]b_k \right\}$$

ainsi

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [bb]a_k - [ab]b_k \right\}^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ [bb]^2 a_k^2 + [ab]^2 b_k^2 - 2[bb][ab]a_k b_k \right\}$$

Lorsqu'on fait la somme des  $m$  dérivées,  $[aa]$  prend la place de  $a_k^2$  et  $[ab]$  celle de  $a_k b_k$ , le second terme se retranche du dernier, enfin  $[bb]$  étant mis en facteur, le déterminant  $\Delta$  apparaît au numérateur, de sorte que

$$\mu_x = \mu_u \sqrt{\frac{[bb]}{\Delta}}.$$

Dans le cas d'une seule inconnue  $x$  définie  $a_k x = u_k$  l'erreur moyenne relative à  $x$  est

$$\mu_x = \mu_u \sqrt{\left[ \frac{1}{a^2} \right]}$$

Si tous les coefficients  $a$  étaient égaux à l'unité, c'est-à-dire s'il s'agissait de mesures directes, l'erreur moyenne relative à la moyenne arithmétique des  $m$  mesures serait  $\frac{\mu_u}{\sqrt{m}}$ , car chaque dérivée partielle est égale à  $\frac{1}{m}$  et elles sont en nombre  $m$ .



Ainsi dans le cas de  $m$  mesures équivalentes d'une grandeur, l'erreur moyenne des mesures  $u$  est

$$\mu_u = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{m}} ;$$

l'erreur moyenne de la moyenne des mesures, c'est-à-dire l'erreur moyenne de la valeur de l'inconnue

$$x = \frac{[u]}{m} \text{ est } \mu_x = \frac{\mu_u}{\sqrt{m}} .$$

Par exemple l'erreur moyenne de cent mesures directes équivalentes d'une grandeur est la dixième partie de l'erreur moyenne des mesures.

Pour simplifier on a supposé les conditions imposées aux inconnues de forme linéaire; mais les conventions ci-dessus doivent être considérées comme générales; d'ailleurs dans certains cas on aura avantage à substituer aux conditions primitives d'autres conditions équivalentes au degré d'approximation considéré, mais de forme aussi simple que possible.

Si les conditions imposées aux inconnues comprennent des équations devant être rigoureusement satisfaites, comme par exemple celle  $A+B+C = \pi$ , se rapportant aux trois angles d'un triangle considérés comme inconnus, on devrait éliminer autant d'inconnues de manière que les conditions restantes soient réduites au nombre minimum et que les quantités à déterminer restent indépendantes les unes des autres jusqu'au choix de la condition imposée aux résidus.

L'application donne lieu, même dans les cas relativement simples, à des calculs assez longs dont l'exécution peut occasionner de grosses déceptions, si l'ensemble n'est point ordonné de manière à réduire, au minimum les nombres et les chiffres consergés, certaines opérations devant être exécutées à part et le résultat seul retenu pour figurer

dans l'ensemble.

Il y a toujours avantage certain à consacrer un temps au moins égal à celui que l'on peut estimer nécessaire pour l'exécution immédiate à préparer les dispositions propres: 1<sup>o</sup> à réduire l'étendue des écritures tout en assurant la netteté par une répartition convenable des tableaux successifs; 2<sup>o</sup> à faire choix, après étude minutieuse, des procédés d'exécution qui doivent comprendre des vérifications de proche en proche pour chaque partie du calcul, de manière que la recherche d'une faute ainsi réglée soit aussi facile et rapide que possible. Quelle que soit l'étendue, petite ou grande, des opérations, le temps ainsi employé constitue une sage économie parce que l'expérience montre qu'aucun calculateur ne peut être assuré contre les erreurs ou méprises les plus inattendues et que la recherche des fautes commises dans un ensemble de calculs insuffisamment ordonné conduit le plus souvent à un travail beaucoup plus long, plus difficile et pénible que l'exécution même de l'ensemble. D'ailleurs, outre la protection directe contre les fautes que procure une bonne ordonnance, celle-ci assure encore à l'opérateur la sérénité qui est une des meilleures garanties de succès (1).

## Résumé de la 3<sup>e</sup> leçon.

### Digression préliminaire - Probabilités

La probabilité mathématique d'un événement est le rapport  $(n : N)$  du nombre des cas favorables au nombre de tous les cas possibles, ceux-ci étant supposés ou considérés comme également possibles.

Au lieu d'appliquer directement cette définition à

---

(1) Voir au sujet de l'ordonnance des calculs une note de M. Cayolle C. R. de l'Académie des Sciences, tome CVI, page 346.

à l'étude de certaines questions, il est d'usage de recourir à l'un ou l'autre des théorèmes suivants qui en découlent immédiatement.

Probabilités totales. - Lorsque l'énumération des cas favorables comprend des événements distincts dont la probabilité partielle est comme la probabilité de l'un ou l'autre d'entre eux sans distinction est la somme de toutes les probabilités partielles. Exemple: probabilité d'une carte sur 32 est (1:32); probabilité d'une quelconque des quatre cartes de même valeur (1:8).

Probabilités composées. - Théorème de Moivre.  
 Quand l'événement favorable est le résultat de l'arrivée simultanée ou successive de plusieurs événements partiels indépendants les uns des autres, la probabilité de l'événement favorable est le produit des probabilités de chaque événement partiel considéré isolément. Exemple: probabilité d'obtenir double six en jetant deux dés ou un même dé deux fois successivement (1:36); probabilité d'obtenir par une distribution de cartes une à une à la même personne d'abord le valet de trèfle puis celui-ci obtenu successivement et sans intermédiaire deux autres valets quelconques est (1:32)(1:31)(1:30).

Répétition des événements. - Soit pour servir de support au raisonnement une urne contenant des boules blanches et des boules noires en nombres dont le rapport soit ( $p:q$ ). On suppose effectués  $\mu$  tirages après chacun desquels la composition de l'urne est ramenée à l'état initial, et ces  $\mu$  tirages ont amené  $m$  boules blanches et  $n$  boules noires. La probabilité pour que le premier tirage ait amené une blanche est  $p$ ; pour que le premier et le second donnent deux blanches est  $p^2$ ; pour que les  $m$  premiers tirages donnent d'abord  $m$  blanches puis  $n$  noires est  $p^m q^n$ . C'est là la probabilité d'une répartition de  $\mu$  événements en  $M$  de même nature et  $N$  d'une autre se produisant dans un ordre déterminé à l'avance. Si au contraire on admet comme équivalents les répartitions correspondant aux mêmes nombres  $M$  et  $N$  d'événements de chaque nature qui se succéderaient

dans un ordre quelconque, il faudra faire la somme des probabilités de chaque répartition, c'est-à-dire affecter le produit  $p^m q^n$  d'un coefficient égal au nombre des répartitions équivalentes. Considérant  $\mu$  cases juxtaposées,  $m$  d'entre elles marquées d'une manière et les  $n$  restantes d'une autre manière, on reconnaît que le nombre des répartitions est  $C_\mu^m = C_\mu^n$ . De sorte que la probabilité totale se rapportant à la combinaison  $m+n = \mu$  est

$$C_\mu^m p^m q^n.$$

A chaque partage du nombre total d'événements  $\mu$  en deux parties telles que  $m$  et  $n$  correspondra une probabilité exprimée par un terme analogue et la somme des probabilités pour tous les partages  $\mu$  et  $0, 1$  et  $\mu-1, 2$  et  $\mu-2, \dots, \mu$ , devra être égale à l'unité puisqu'il y a certitude d'obtenir l'un de tous les partages possibles à la suite de  $\mu$  événements; donc

$$1 = p^\mu + C_\mu^{\mu-1} p^{\mu-1} q + \dots + C_\mu^m p^m q^n + \dots + C_\mu^1 p q^{\mu-1} + q^\mu$$

Le second membre est le développement du binôme  $(p+q)^\mu$  dont la valeur numérique est en effet l'unité. Si  $p$  et  $q$  représentent, non pas seulement des nombres proportionnels à ceux des boules blanches et des boules noires, mais bien les probabilités des deux événements, c'est-à-dire deux fractions dont la somme est un par application du théorème des probabilités totales: il y a certitude que l'un des deux événements exclusifs se produira, que l'on aura une boule blanche ou même une noire à chaque tirage.

L'ensemble des  $n+1$  premiers termes du second membre exprime la somme des probabilités des partages auxquels chacun d'eux se rapporte, c'est-à-dire la probabilité de l'avisée d'au moins  $m$  blanches ou au plus  $n$  noires sur  $\mu$  tirages.

Jacques Bernoulli a conclu de l'étude de cette question que :

1<sup>o</sup> la répartition dont la probabilité est la plus grande est celle pour laquelle le rapport  $(m : n)$  est égal ou diffère le moins possible du rapport des probabilités  $(p : q)$  ; les probabilités des autres répartitions sont d'autant plus petites que le premier rapport s'écarte d'avantage du second.

2<sup>o</sup> Lorsque le nombre  $n$  des épreuves croît, le nombre des répartitions possibles croît également ; la probabilité de chacune d'elles diminue d'autant plus rapidement que le rapport  $(m : n)$  est plus différent de celui  $(p : q)$ .

3<sup>o</sup> La probabilité d'un ensemble de répartitions pour lesquelles le rapport  $(m : n)$  est peu différent de  $(p : q)$  croît indéfiniment avec le nombre des épreuves.

Le développement de ces considérations pourrait servir d'introduction à la loi de probabilité des erreurs accidentelles, mais après ces prémisses indispensables, nous reprendrions l'analyse des faits d'expérience qui conduit plus rapidement, plus simplement à la loi de probabilité dite loi de Gauss.

Si considérant l'ensemble d'un système de mesures effectuées dans des conditions identiques, on compare chacun des résultats à la moyenne, on obtient un ensemble de résidus. Toute cause d'erreur systématique étant supposée écartée, ces résidus seront dénommés erreurs accidentelles. Répartissant celles de même signe en groupes pour lesquels la grandeur est comprise entre de certaines limites croissantes mais équidistantes, on pourra figurer la répartition de ces erreurs en portant en abscisse des divisions

équidistantes correspondant aux limites adoptées et en ordonnées, au milieu de chaque intervalle, une longueur proportionnelle au nombre des erreurs de cette grandeur.

Ainsi on obtient dans tous les cas une série de points dont l'ensemble symétrique relativement à l'axe des ordonnées est réparti de manière à figurer le contour apparent d'une campanule ou d'une cloche plus ou moins surbaissée et ce fait expérimental est si solidement établi que lorsque la répartition est dissymétrique ou affecte une forme différente, on en tire cette conclusion, toujours vérifiée par une étude ultérieure plus complète, qu'une ou plusieurs causes d'erreurs systématiques sont intervenues au cours des mesures.

Le nombre des erreurs de chacun des groupes est représenté par la longueur de l'ordonnée, ou si on veut par l'aire du rectangle de même hauteur ayant pour base l'intervalle adopté. Ainsi la somme des aires représente le nombre total des erreurs et par suite le rapport d'une aire partielle à l'aire totale exprime la probabilité d'une erreur comprise entre les limites correspondantes. Et la substitution des aires aux ordonnées permet le passage de la représentation discontinue à celle continue lorsqu'on y adjoint la conception d'un nombre de mesures et d'erreurs indéfiniment croissant. Pour exprimer analytiquement la loi empirique de répartition, on doit faire un choix dicté par la double condition de représenter de façon aussi approchée que possible les résultats expérimentaux et d'autre part d'utiliser une fonction dont l'usage soit suffisamment commode en vue des rapprochements incessants avec les résultats d'expériences nouvelles.

Le choix de Gauss s'est porté sur la fonction exponentielle  $e^{-h^2x^2}$ . Le rapport de l'aire d'un rectangle élémentaire  $ydx$  à l'aire totale exprime la probabilité infiniment petite d'une erreur de grandeur rigoureusement précisée. Le rapport de l'aire finie comprise entre deux ordonnées répondant aux abscisses  $x_1$  et  $x_2$ ,  $\int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2x^2} dx$ , à l'aire totale, exprime la probabilité d'une erreur  $x$ , comprise entre  $x_1$  et  $x_2$ .<sup>(1)</sup>

(Voir renvoi, page 17)

Or l'aire totale est  $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$ , de sorte que la loi de probabilité des erreurs accidentelles est symbolisée par l'expression différentielle

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

qui exprime la probabilité d'une erreur de grandeur rigoureusement égale à  $x$ .

L'unique paramètre  $h$  suffit pour permettre l'assimilation de la fonction analytique à la représentation des erreurs des systèmes de mesures plus ou moins précis; il caractérise à la fois la hauteur de l'ordonnée à l'origine et la précision des mesures; celle-ci est d'autant plus grande que la probabilité d'une erreur nulle toujours maximum et infiniment petite est elle-même plus grande, c'est-à-dire que la courbe représentative est plus élevée et par suite, puisque l'aire est constante, plus effilée.

Il est accoutumé de considérer un autre paramètre  $\eta$  dénommé erreur probable, qui est la grandeur de l'erreur telle que la probabilité d'une erreur plus grande ou d'une erreur moindre en valeur absolue est la même; c'est celle qui occupe le rang du milieu quand elles sont rangées dans l'ordre des valeurs absolues, ou encore celle qui répond à l'ordonnée qui divise la moitié de l'aire en deux parties égales. On obtient la relation entre les paramètres  $\eta$  et  $h$  en écrivant que la probabilité d'une erreur comprise entre  $-\eta$  et  $\eta$  est  $\frac{1}{2}$ .

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2}$$

Intégrant par développement en série ou utilisant

---

(1) La courbe  $e^{-h^2 x^2}$  s'étend à l'infini de part et d'autre, mais elle est asymptote à l'axe des abscisses à un tel degré que l'aire  $\int_{x_1}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx$  est négligeable pour des valeurs de l'abscisse qui ne sont pas très grandes.

18.

la table des valeurs de la fonction. On obtient la relation numérique

$$\eta h = 0,477, \dots$$

$$\text{L'erreur moyenne quadratique } \mu = \pm \sqrt{\frac{[\xi^2]}{m}}$$

s'obtient en considérant le produit du carré  $x^2$  par le nombre des erreurs de grandeur  $x$  et faisant la somme pour toutes les valeurs de  $x$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx \quad \text{d'où } \mu h \sqrt{2} = 1.$$

L'intégration se fait par parties ou s'obtient par comparaison avec le résultat de la dérivation par rapport au paramètre  $h$  de l'intégrale de Laplace  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$ . L'erreur moyenne

$\mu$  répond à l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative.

On peut encore calculer la relation entre l'erreur moyenne non quadratique  $e = \pm \frac{[\xi]}{m}$  et le paramètre  $h$  par

$$2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-h^2 x^2} dx = e \quad e h \sqrt{\pi} = 1$$

L'abscisse égale à  $e$  en valeur absolue est celle du centre de gravité de la moitié de l'aire entière.

La précision des mesures est ainsi également caractérisée par le paramètre  $h$  ou l'une des trois valeurs inversement proportionnelles équivalentes

$$\eta < e < \mu.$$

Comme a proposé d'utiliser la relation  $\pi e^2 = 2 \mu^2$  pour distinguer de suite et par un calcul sommaire les cas où le système de mesure considéré satisfait à la loi de probabilité ; lorsque ce criterium n'est



pas satisfait il y a lieu de chercher à découvrir les causes d'erreurs systématiques.

Comme conclusion abrégée, on se bornera ici à remarquer que l'adoption universelle de la loi de Gauss témoigne de l'accord entre cette loi et les résultats des innombrables systèmes de mesures qui en ont été rapprochés souvent avec un soin des plus minutieux. La conviction personnelle peut résulter seulement d'une étude attentive d'un certain nombre de ces rapprochements.

Mais il est nécessaire d'ajouter que cette loi est encore constamment utilisée, avec le même succès dans l'étude des variations accidentelles de phénomènes de toute nature : le tir des armes à feu ; les inégalités de la taille humaine ou celles du développement des animaux ou végétaux d'une espèce donnée ; la répartition des notes attribuées aux examens ; ..... etc. etc...

## Résumé de la quatrième leçon.

La lunette astronomique comprend comme parties essentielles, l'objectif et le réticule situé dans le plan focal principal. L'objectif est composé de deux lentilles : l'une biconvexe de crown, l'autre biconcave de flint, juxtaposée à la première du côté du réticule ; ainsi on peut faire coïncider dans le plan focal principal les rayons réfractés provenant de deux faisceaux parallèles de radiations répondant à des portions différentes du spectre, les raies D et F par exemple ; ou pour les objectifs photographiques, deux radiations choisies parmi celles ultra violettes dont l'action chimique est plus intense. On emploie même parfois des objectifs formés de trois lentilles.

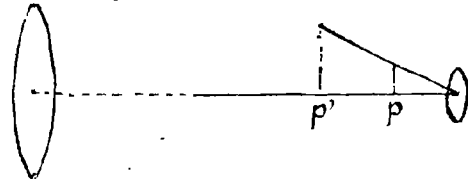
Comme à faire remarquer que l'on pourrait passer de l'achromatisme visuel à celui photographique en écartant convenablement les deux lentilles de l'objectif.

Les phénomènes de diffraction qui accompagnent la formation des images font que l'image d'une étoile, c'est-à-dire d'un point lumineux, disparaît sous la forme d'un disque de rayon  $(F \lambda : R)$ ,  $R$  étant le rayon de l'objectif et  $\lambda$  la longueur d'onde, entouré d'anneaux concentriques dont l'intensité décroît très rapidement à mesure qu'on considère des anneaux plus éloignés du disque central. Deux points, les deux composantes d'une étoile double, par exemple, ne peuvent être distingués que si les disques des images sont eux-mêmes distincts d'où la considération du pouvoir optique ou pouvoir séparateur  $(\lambda : R)$  estimé par Foucault à 1" pour un objectif de 13<sup>cm</sup> de diamètre.

L'objectif donne une image renversée qui observée avec l'oculaire est encore renversée mais agrandie.

Déplacement de l'oculaire. - Selon que l'œil doit, pour la vision distincte, observer une image virtuelle située à l'infini, ou seulement à 40<sup>cent.</sup> l'oculaire doit être moins ou plus voisin du plan focal principal d'une très petite quantité. En effet la relation

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \text{ donne } f - p = (fp : p')$$

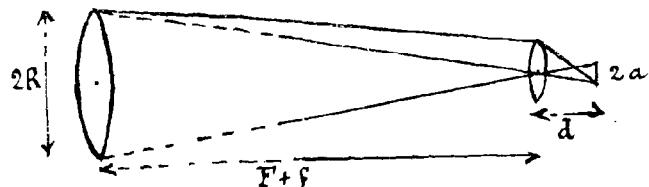


Si  $f$  est égal à 1<sup>cent</sup> le déplacement  $f - p$  est de moins d'un millimètre de sorte que dans la suite la distance de l'oculaire au plan focal sera toujours prise égale à  $f$ .

Le grossissement de la lunette astronomique est le rapport des angles soutendus par l'image focale vue du centre de l'objectif et du centre de l'oculaire c'est-à-dire à peu près  $(F : f) = g$ .

L'anneau oculaire est l'image réelle du contour de l'objectif donnée par l'oculaire et située à la distance  $d$  de celui-ci. On a

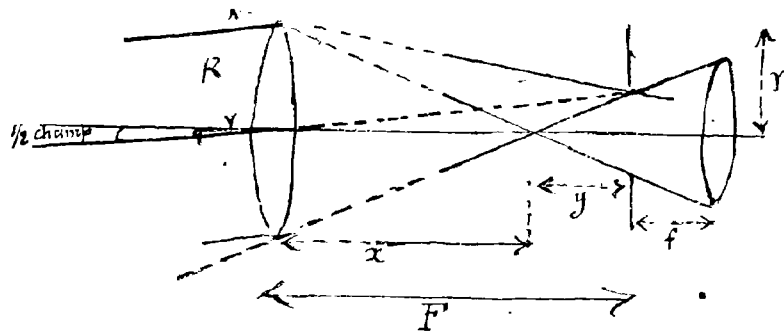
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{F+f} = \frac{1}{f} \text{ ou } \frac{1}{d} = \frac{F}{f(F+f)}$$



qui combinée à la relation de similitude  $(R:a) = [(F+f):d]$  donne  $(R:a) = (F:f) = g$ .

Le dynamètre de Ramsden formé essentiellement d'une surface translucide portant une échelle digisée en dixièmes de millimètres par exemple permet d'évaluer le diamètre  $2a$  de l'anneau oculaire et de conclure le grossissement. Une loupe permet de voir nettement l'échelle digisée; un tube ouvert dont le bout s'appuie sur le porte oculaire reçoit l'ensemble de la surface digisée et de la loupe; en enfonçant plus ou moins l'ensemble dans le tube ouvert on peut obtenir une image nette de l'anneau oculaire et évaluer son diamètre qui sera pris comme digiseur du diamètre de l'objectif mesuré d'ailleurs.

Le Champ est défini par l'étendue de la portion visible de l'image focale et limité par un diaphragme focal qui est en même temps le porte réticulé. L'ouverture du diaphragme est déterminée, en raison du diamètre de l'oculaire, de manière que les faisceaux qui rencontrent la surface de celui-ci comprennent la totalité des rayons du faisceau incident sur l'objectif



$Z$  représentant le rayon du diaphragme, on a

$$\frac{Z}{R} = \frac{y}{x} \quad \text{d'où} \quad \frac{R+Z}{R} = \frac{F}{x}$$

et d'ailleurs

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{y+f} \quad \text{d'où} \quad \frac{R}{R+r} = \frac{x}{F+f}$$

par suite

$$\frac{R+Z}{R+r} = \frac{F}{F+f} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{F(R+r) - R(F+f)}{F+f}$$

22.-

Réduisant, divisant par  $R$  puis les deux termes du second membre par  $f$  on obtient pour l'expression de la moitié du champ

$$\frac{z}{F} = \frac{\frac{r}{f} - \frac{R}{F}}{g+1}$$

Toutes choses égales d'ailleurs, le champ varie à peu près en raison inverse du grossissement. Avec un grossissement modéré on peut avoir en entier le disque de la lune ou du Soleil, soit un champ de 30'; mais avec un grossissement plus fort le champ est restreint à une portion qui peut n'être qu'une très petite fraction du disque. Ainsi la lunette astronomique est ordinairement pourvue d'un chercheur, petite lunette à grand champ dont l'axe optique est rendu parallèle à celui de la lunette principale.

Pour l'observation du Soleil l'objectif est fortement diaphragmé de façon à réduire la quantité de radiations calorifiques dont l'excès est à redouter, et l'oculaire porte un verre fortement enfumé ou coloré pour permettre l'observation, toujours pénible surtout lorsqu'elle doit être un peu prolongée.

La clarté dépend de la quantité de lumière, proportionnelle au carré du rayon de l'objectif et l'éclat est d'ailleurs en raison inverse de l'étendue de l'image, donc exprimé par le rapport ( $R^2 : g^2$ ) égal à  $a^2$ , carré du rayon de l'anneau oculaire. La clarté est le résultat de la comparaison avec la quantité de lumière reçue par l'œil dans la vision directe proportionnelle à  $p^2$ ,  $p$  étant le rayon de la pupille. Si l'anneau oculaire est plus grand que l'ouverture de la pupille, la clarté n'est modifiée que par la très faible absorption par les lentilles; si le grossissement est fort, l'anneau oculaire est petit, moindre que la pupille, la clarté est réduite et peut être considérablement réduite. Avec un instrument de grande ouverture et un faible grossissement l'observation de la pleine lune est pénible; lorsque le grossis-

sement est fort l'éclat est assez réduit pour que l'observation des détails exige un assez grand effort.

[ Raison de la visibilité des étoiles en plein jour avec une grande ouverture et un fort grossissement.]

## Mesure des angles.-

[ Erreurs psychologiques d'appréciation des angles entre objets terrestres situés à l'horizon; diamètre apparent de la lune à l'horizon ou vers le zénith; déformation des constellations ].

L'axe optique ou ligne de visée est définie par le centre optique de l'objectif et le centre du réticule.

Le centre optique est remplacé par les points nodaux lorsqu'on tient compte de l'épaisseur des lentilles.

Le réticule peut comporter plusieurs points ou lignes de repères qui définissent des axes optiques secondaires faisant avec l'axe optique principal des angles toujours petits et invariables.

L'oculaire étant réglé sur le réticule, l'ensemble formé par ce dernier et l'oculaire peut être déplacé de façon à amener le réticule dans le plan focal principal, et cette dernière opération est faite une fois pour toutes.

La visée d'un astre s'accomplit en deux temps; d'abord à la main puis, la vis de pression étant serrée, par le maniement de la vis de rappel. L'organe maintenant exclusivement employé pour cet usage est la pince de Brunner.

La lecture sur les cercles divisés se fait d'abord à l'estime, d'après la position du trait repère puis est complétée par la moyenne des lectures aux verniers ou aux microscopes micrométriques.

La mesure d'un angle s'obtient par la différence des lectures faites pour les deux directions limites. Mais lorsque la détermination doit être aussi précise que possible la mesure est conclue de la moyenne d'un certain nombre d'opérations réalisées successivement et ordonnées suivant les règles précises qui

24.

constituent les méthodes de la réitération et de la répétition.

Réitérer un certain nombre de fois, c'est faire la mesure autant de fois successivement à partir d'origines également réparties sur le cercle digisé dans l'intervalle de deux verniers ou deux microscopes consécutifs. Pour cela le cercle digisé peut changer de position et tourner autour de l'axe fixé au support de manière que chaque origine choisie puisse venir successivement occuper la même situation; ainsi l'ensemble des lectures faites sur le cercle digisé pour définir une même direction est également réparti sur la circonférence entière et c'est la condition qui caractérise la méthode. D'ailleurs il suffit que la répartition soit seulement à très peu près uniforme, aussi le déplacement du cercle peut se faire à la main et sans qu'il soit besoin de recourir à une vis de rappel.

Dans la moyenne, l'ensemble des lectures se rapportant à l'une des directions de l'angle forme une progression arithmétique de sorte que la somme des sinus de ces angles est nulle. Or on a reconnu que les erreurs de division de chacun des traits d'un cercle peuvent être représentées par la série de Fourier

$$\sum A_k \sin k\alpha$$

$\alpha$  définissant le trait considéré et  $A_k$  étant un coefficient toujours très petit mais décroissant très rapidement avec l'indice  $k$  ou le rang du terme dans la série. La réitération annule donc l'influence de tous les termes de la série, même supposée indéfiniment prolongée, dont l'indice n'est pas égal au nombre des lectures ou à un multiple de ce nombre.

Dans les opérations géodésiques, la direction de chacun des côtés des triangles de premier ordre, est déterminée, à l'aide d'un cercle portant quatre microscopes, par vingt réitérations, de sorte que les lectures sont également réparties au nombre de

quatre vingt.

Pour mesurer une grandeur on peut la comparer par différence à une grandeur type à très peu près égale ; c'est le principe des mesures différentielles susceptibles de donner les résultats les plus précis.

Au contraire, lorsque la chose à mesurer peut être reproduite, l'exacte juxtaposition de grandeurs rigoureusement identiques permet de mesurer un multiple, de sorte que l'erreur de l'opération de mesure se trouve réduite dans le rapport inverse du nombre de choses juxtaposées. C'est le principe de la répétition pour la mesure des angles.

Dans l'instrument répétiteur, le cercle divisé est mobile autour de l'axe fixé au support ; il peut être fixé par une vis de pression et rectifié d'orientation par une vis de rappel.

Le cercle est d'abord fixé au support et les visées dans les deux directions sont faites dans ces conditions, de sorte que l'angle est inscrit sur le cercle divisé par la position finale des verniers, et le cercle, et la lunette sont reliés par la vis de pression spéciale, mais on a fait seulement les lectures relatives à la direction initiale. Toutes choses restant d'ailleurs en l'état on rend le cercle libre relativement au support et on déplace le cercle et la lunette toujours solidarisés jusqu'à ce que la lunette reprenne exactement la direction initiale. Le cercle étant ainsi de nouveau solidarisé avec le support, c'est-à-dire avec le sol, on libère la lunette relativement au cercle et on l'amène dans la direction qui limite l'angle de sorte que les verniers parcourent sur le cercle divisé un angle qui s'ajoute au premier déjà inscrit. On continue l'addition des angles, on répète autant de fois qu'on le juge à propos et la lecture finale comparée à celle initiale fait connaître un angle multiple exact de celui observé si les opérations satisfont aux conditions d'une juxtaposition rigoureuse. Autant de fois deux pointés de la lunette que l'on fait de répétitions, et deux lectures seulement, celles initiale et finale.

L'erreur due à l'excentricité, c'est-à-dire celle résultant

de ce que l'axe autour duquel tourne l'alidade ne passerait pas par le centre du cercle divisé, affecterait les mesures si l'on employait un seul vernier; c'est ainsi qu'on observe le plus souvent que l'aiguille des secondes d'une montre s'arrête en ayant des divisions en un certain point du cadran et en arrière du point diamétralement opposé. Si l'on imaginait que les divisions fussent des points uniformément repartis sur une circonférence et que l'alidade soit une règle, la demi-somme des lectures faites aux deux points situés sur la règle définirait exactement la direction perpendiculaire à celle de l'alidade, quelle que soit la position de celle-ci; donc, alors même que l'excentricité changerait avec la direction de la règle, la mesure angulaire serait toujours exactement conclue de la différence des moyennes des deux lectures au bord de l'alidade. Comme les divisions sont des traits et que les lectures peuvent ainsi être faites à des distances différentes du centre du cercle divisé, il en résulte une erreur résiduelle d'excentricité, mais il est facile de reconnaître qu'elle est du second ordre relativement à celle que donnerait l'emploi d'un vernier unique.

## Résumé de la cinquième leçon.

De l'extrême petitesse de la parallaxe des étoiles les plus voisines de la terre et des mouvements propres qui sont insensibles pour un grand nombre d'entre elles, on conclut la possibilité d'obtenir des directions repères qui seront considérées comme fixes, et qui sont d'ailleurs à très peu près indépendantes du lieu de l'origine, que celle-ci soit prise à la surface, au centre de la terre, ou même au centre du Soleil.

L'axe de rotation de la terre est pris pour axe de la sphère céleste et des systèmes de coordonnées héliocentrique et géocentrique. Ce dernier qui n'a pas encore été défini sert à repérer les positions des astres, comme

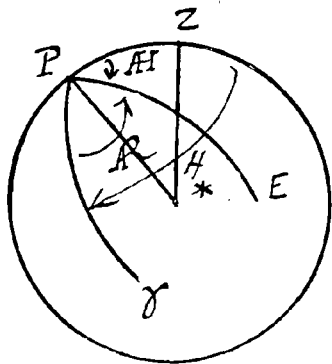


le système horaire, mais cette fois indépendamment du mouvement diurne. Il comprend la distance polaire  $\delta$ , qui appartient aussi au système horaire, et un angle dièdre, l'ascension droite  $R$ , compté dans le sens direct à partir d'un certain plan de référence passant par l'équinoxe de printemps ou point  $\gamma$ . Si l'axe de la Terre était de direction invariable dans l'espace les deux coordonnées  $\delta$  et  $R$  seraient également invariables, mais cet axe subit des déplacements coniques dus aux phénomènes de la précession et de la nutation dont les périodes sont de 26 000 ans et de 18 ans  $\frac{2}{3}$ ; ces déplacements d'une extrême lenteur pour le premier et de faible amplitude pour le second produisent de petits changements dans les coordonnées des étoiles; ceux-ci sont calculés à l'avance et les valeurs des coordonnées Uranographiques sont consignées de dix en dix jours ou même de jour en jour dans les éphémérides annuelles qui figurent dans la connaissance du temps.

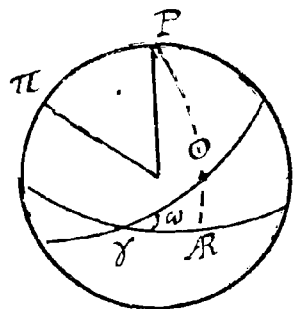
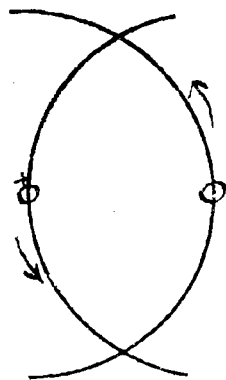
La mesure du temps est par définition celle de l'angle horaire du plan origine ou du point  $\gamma$ ,  $AH$ , dénommée heure sidérale  $H_*$ ; de sorte que la formule de transformation des coordonnées horaires en Uranographiques et inversement est  $H_* = A + R$ .

Cette formule exprime une relation actuelle;  $A$  est variable tout au moins par le seul fait du mouvement diurne;  $R$  dépend du mouvement propre de l'astre.

Le temps civil est réglé sur le mouvement du Soleil; le temps solaire grec est par définition la mesure de l'angle horaire du Soleil  $H_\odot$ . De ce que la Terre se transporte annuellement autour du Soleil, il suit que le mouvement relatif du Soleil a lieu dans le même



temps et dans le même sens direct  $\omega$  et que dans la relation  $H_* = H_0 + R_0$   $R_0$  change de  $2\pi$  ou 24 heures en une année.



Le Soleil parcourt l'écliptique inclinée sur l'équateur de l'angle  $\omega$ , obliquité de l'écliptique égale à environ  $23^\circ$  et le point  $\gamma$  ou équinoxe de printemps est l'une des intersections de ces deux grands cercles, celle pour laquelle le Soleil semble passer de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal.

Comme le mouvement de la terre n'est point circulaire et uniforme, la longitude  $\odot$  du Soleil contient une partie principale la longitude moyenne  $L_0 + nt$  qui varie proportionnellement au temps et une partie périodique dépendant de l'excentricité de l'orbite de la terre et de l'anomalie moyenne  $m = L_0 + nt - \omega$ , qui est égale à la longitude moyenne diminuée de celle du périhélie, l'une des extrémités du grand axe de l'orbite elliptique.

La longitude a ainsi pour expression

$$\odot = L_0 + nt + A_1 \sin m + A_2 \sin 2m + \dots$$

dans laquelle les coefficients  $A_1 A_2 \dots$  sont des séries procédant

(1) Le mouvement relatif ou apparent diurne est rétrograde tandis que le mouvement relatif ou apparent annuel est direct. Dans le premier cas, le mouvement est rapporté au centre de la terre qui est extérieur à la ligne qui joint l'observateur au soleil; dans le second, les vitesses sont de sens contraire, mais les phases diffèrent de  $\pi$  de sorte que les trajectoires réelle et relative sont parcourues dans le même sens.

suivant les puissances de l'excentricité ;  $A_1$  commençant par un terme du premier degré,  $A_2$  par un terme du second et ainsi de suite. La partie périodique s'appelle équation du centre et sera représentée par  $E_c$ .

D'ailleurs alors même que le mouvement serait uniforme sur l'écliptique, l'ascension droite  $R_0$  mesurée par l'arc d'équateur, projection sphérique de  $\odot$  sous l'angle  $\omega$ , ne s'accroîtrait pas proportionnellement au temps.

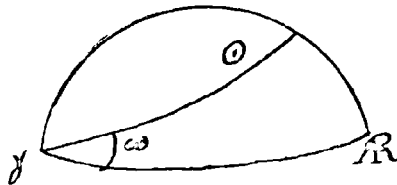
Le triangle rectangle donne

$$\operatorname{tg} R = \cos \omega \operatorname{tg} \odot \quad \text{ou} \quad R_0 = \odot - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \operatorname{Sin} 2\odot + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\omega}{2} \operatorname{Sin} 4\odot - \dots$$

La série du second membre s'appelle la réduction à l'équateur et sera représentée par  $R$ .

Il suit de là que

$$R_0 = L_0 + nt + E_c + R$$



Le temps moyen qui est le temps légal est défini par la variable  $H_m$

$$H_* = H_m + L_0 + nt$$

et la différence entre le temps moyen et le temps vrai

$$H_m - H_0 = E_c + R$$

est purement périodique, s'annule quatre fois par an, ne dépasse guère 17 m.m et se nomme l'équation du temps.

L'heure moyenne serait l'angle horaire d'un soleil fictif qui parcourrait uniformément l'équateur au lieu de l'écliptique. On peut observer que le soleil vrai et le soleil fictif passent tous deux aux équinoxes mais non point simultanément.

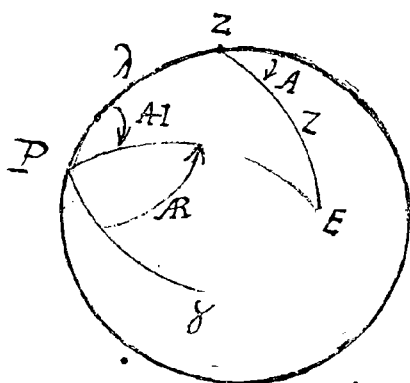
## Détermination des coordonnées ou éléments géographiques :

Le rattachement d'un lieu à un autre peut se faire par une opération purement terrestre, topographique ou géodésique, mais il s'agit ici de la détermination directe

par des observations exclusivement locales.

La colatitute, l'heure sidérale, la direction du méridien peuvent en effet être obtenues en dehors de la connaissance d'aucun élément terrestre. La longitude géographique se conclut de la différence  $H_p - H$  entre les heures actuelles au lieu d'origine et au lieu de l'observateur.

De l'observation des astres il faut déduire le lieu du zénith sur la sphère céleste, car le triangle de position  $PZE$ , dont les sommets  $P$  et  $E$  sont des points fixes repérés sur la sphère fera connaître la colatitute  $\lambda$ , l'angle horaire  $AI$ , d'où l'heure sidérale par la somme  $AI + R$  et enfin l'azimut  $A$  qui définit la direction du méridien rapporté à celle du vertical d'observation  $ZE$ .



Le lieu du zénith peut se conclure des distances zénithales de deux astres convenablement choisis. La solution exposée ci-dessous suppose que le choix est fait en vue de déterminer successivement et autant indépendamment que possible la colatitute et l'angle horaire ou l'heure. Cette manière d'opérer se prête d'ailleurs aux approximations successives.

On suppose l'observateur muni d'un théodolite dont il rend d'abord l'axe vertical. Pour cela le niveau solidaire de la partie mobile autour de l'axe est orienté, dans la direction de deux des vis calantes; en agissant sur l'une de ces vis, ou sur les deux, on amène la bulle entre les repères, opération préliminaire qui ne préjuge aucune condition initiale. On donne à la partie mobile et par suite au niveau un déplacement d'un demi-tour, de sorte que ce dernier prend une position symétrique relativement à l'axe de rotation. Si après ce déplacement la bulle était encore entre les repères l'axe serait dans un plan vertical perpendiculaire au niveau. Si la bulle est déplacée, on la ramène en ayant soin d'égaliser l'angle dont doit tourner la vis calante sur

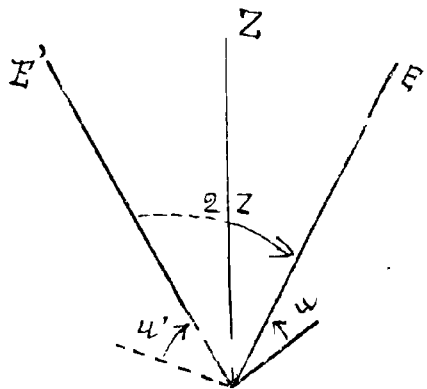
laquelle on agit ; ainsi l'axe passe de sa position primitive à une position symétrique relativement au plan vertical perpendiculaire au niveau ; il suffit donc de faire tourner la vis calante en sens contraire de la moitié de l'angle évalué pour amener l'axe dans ce plan vertical. Si la bulle n'est pas dans une position favorable on la déplace à l'aide de la vis spéciale au niveau et si on veut on ramène la bulle entre les repères. Il suffit ensuite de faire tourner la partie mobile d'un quart de tour de façon que le niveau ait une orientation perpendiculaire à la première et d'agir sur la troisième vis calante de manière à amener la bulle dans la position rectifiée. Ainsi la direction de l'axe est l'intersection de deux plans verticaux rectangulaires.

Il est clair que le résultat d'une première opération peut n'être pas suffisamment approché mais ultérieurement la bulle ne sortant pas du champ utilisable du niveau, il suffira de faire les lectures des extrémités qui définissent sa position et de partager en deux également le déplacement que pourrait produire un retournement.

L'axe du théodolite étant vertical, l'angle compris entre l'axe optique de la lunette, dirigée sur un objet extérieur, avec la verticale, s'obtient par retournement de la partie mobile comprenant la lunette et le cercle vertical solidarisés, suivi d'un déplacement de la lunette sur le cercle qui ramène l'axe optique dans la direction primitive inscrit sur le cercle le double de la distance zénithale.

Si le point observé est mobile, par exemple animé du mouvement diurne apparent, on note les temps des deux pointés de façon à rattacher la distance zénithale observée à l'époque intermédiaire.

Si l'on fait en même temps la lecture sur le cercle horizontal, on pourra après avoir déterminé



L'azimut  $A$  de l'astre, déplacer la lunette de cet angle pris en sens contraire de manière à amener l'axe optique à être dirigé dans le méridien ; ainsi on sera en état d'installer un repère ou une mire méridienne.

On peut toujours, de diverses manières, obtenir à peu près la direction du méridien : la distance zénithale d'un astre mesurée lors de son passage au méridien donnerait la colatitute par la formule

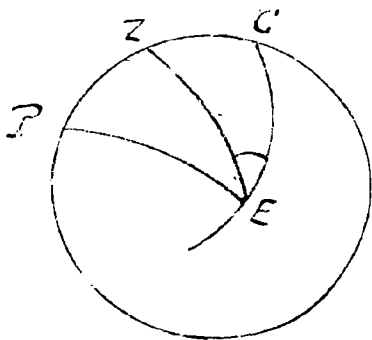
$$\lambda = \delta - z .$$

On obtiendra encore une valeur approchée si l'astre est observé un peu avant ou un peu après, c'est-à-dire au voisinage de la valeur minimum de  $z$ , pourvu que l'astre ne culmine pas trop près du zénith. D'ailleurs la correction dite réduction au méridien se calcule aisément comme il sera indiqué à propos de la navigation.

La mesure de la distance zénithale d'un astre dont l'azimut est voisin de  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ , portée dans la formule

$$\cos Z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos A, \text{ c-à-d } \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(\delta - Z) \sin(\delta + Z)}{\sin \delta \sin(\delta - Z)}$$

fera connaître l'angle horaire  $A$  et par suite l'heure sidérale  $A + R$ .

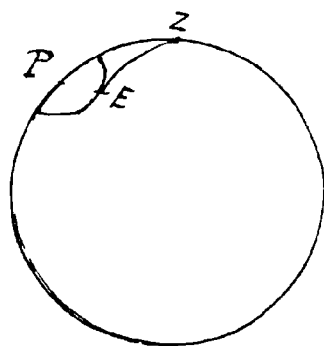


Il est visible que cette circonstance est favorable car l'angle  $ZEC$  passant par un minimum, les variations de  $Z$  sont plus grandes pour un même déplacement angulaire de l'astre sur son parallèle c'est-à-dire pour une variation donnée du temps. Ces deux variations sont alors sensiblement proportionnelles de sorte que l'on peut faire plusieurs mesures suc-

cessives de  $z$  à des temps voisins et prendre la moyenne comme répondant à la moyenne du temps ; ainsi on a à réduire comme une seule observation l'ensemble

des déterminations qui comporte une erreur atténuée.

En ce qui concerne la direction du méridien on observera une étoile circumpolaire aussi voisine du pôle que possible ; on l'observera à son élongation



parce qu'alors une erreur d'appréciation sur l'angle horaire a une moindre influence. Mais si l'on observe dans le jour, c'est-à-dire le Soleil, la même observation dans l'azimuthe voisin de  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  peut être utilisée pour obtenir tout à la fois l'heure et la direction du méridien. L'azimuthe se calcule

par

$$-\sin A \cotg A = \cotg \delta \sin \lambda - \cos \lambda \cos A.$$

Dans le cas où on dispose d'un intervalle favorable d'environ six heures, on peut recourir à une méthode très simple employée par les anciens, celle des hauteurs correspondantes. Ils observeraient l'ombre d'un style vertical et relevaient sur le sol les directions des traces de deux ombres d'égale longueur, l'une prise le matin, l'autre l'après midi ; le plan vertical bissecteur serait le méridien et la moyenne du temps d'observation répondrait au midi vrai si le mouvement apparent du Soleil était uniforme ; la petite correction se calcule aisément. L'emploi du théodolite dont l'axe optique reste invariablement lié à l'axe de rotation supposé vertical permet d'obtenir plus de précision dans la détermination des instants et des directions correspondant à la même hauteur de Soleil ou de tout autre astre.

En résumé :

- 1°  $\lambda$  par mesure de  $z$  dans le méridien  $\lambda = \delta - z$
- 2°  $A$  par mesure de  $z$  dans le 1<sup>er</sup> ou le 3<sup>e</sup> vertical

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin(\delta - z) \sin(\delta - \lambda)}{\sin \delta \sin(\delta - z)}$$

d'où

$$H_* = A + R \text{ et enfin } L = H_\delta - H.$$

3° A par mesure de  $Z$  et lecture  $u$  correspondante sur le cercle horizontal

$$- \sin A \cotg A = \cotg \delta \sin \lambda - \cos \lambda \cos A$$

d'où  $A$  et la lecture  $u_m = u - A$  qui sont sur le cercle horizontal répond à la direction du méridien.

L'heure du lieu origine  $H_p$  est fournie par un chronomètre ou, dans le cas où cette indication fait défaut, déterminée sur place par l'observation d'un phénomène dont l'époque, en temps de Paris, a été consignée à l'agence dans la connaissance du temps. —

## Résumé de la sixième leçon.

### Instruments d'observatoire. —

Deux classes : instruments de mesures absolues, lunette méridienne et cercle mural, ou les deux réunis en un cercle méridien ; instruments de mesures relatives ou d'observations physiques, équatorial, sidérost, etc..

La lunette méridienne sert à observer les temps des passages au méridien des étoiles ou autres astres ; l'angle horaire étant nul, l'ascension droite  $A$  est égale à l'heure sidérale du passage. Cet instrument est indissociable d'une pendule sidérale dont la marche est contrôlée par l'observation assidue d'étoiles dites fondamentales, objet d'un choix international. Ces étoiles sont d'ailleurs rattachées au point  $\gamma$  par les observations du soleil poursuivies pendant un grand nombre d'années et dans l'intervalle de deux fois rattachement par les formules de la mécanique céleste.

L'axe optique de la lunette doit engendrer le méridien. Pour la rectification cette condition est décomposée en trois,



deux terrestres et une astronomique.

1<sup>o</sup> L'axe optique doit engendrer un plan, donc il doit être perpendiculaire à l'axe de rotation.

Pour reconnaître s'il en est ainsi ou plutôt pour déterminer la position du fil mobile qui satisferait à cette condition, on utilise la méthode du retournement: on fait un pointé sur un collimateur, ou une mire méridienne, à l'aide du fil mobile, puis on effectue avec un support spécial un retournement qui amène le tourillon ouest à l'Est et vice versa; on fait un nouveau pointé; l'axe optique idéal dépourvu de collimation répond à la lecture moyenne des deux pointés. En réalité on fait deux retournements consécutifs et trois pointés et on compare la moyenne des deux extrêmes à celui intermédiaire.

2<sup>o</sup> Le plan engendré par l'axe optique ainsi déterminé doit être vertical, donc l'axe de rotation doit être horizontal. On utilise le niveau et comme ses indications se rapportent à la direction des points d'appui de ses pieds, ceux-ci reposent sur les surfaces même des tourillons considérés après vérification comme étant cylindriques, concentriques et de même diamètre. Le niveau retourné successivement deux fois donne trois lectures et la moyenne des extrêmes rapportée à celle intermédiaire donne l'inclinaison de l'axe en parties du niveau dont la valeur a dû être déterminée d'ailleurs.

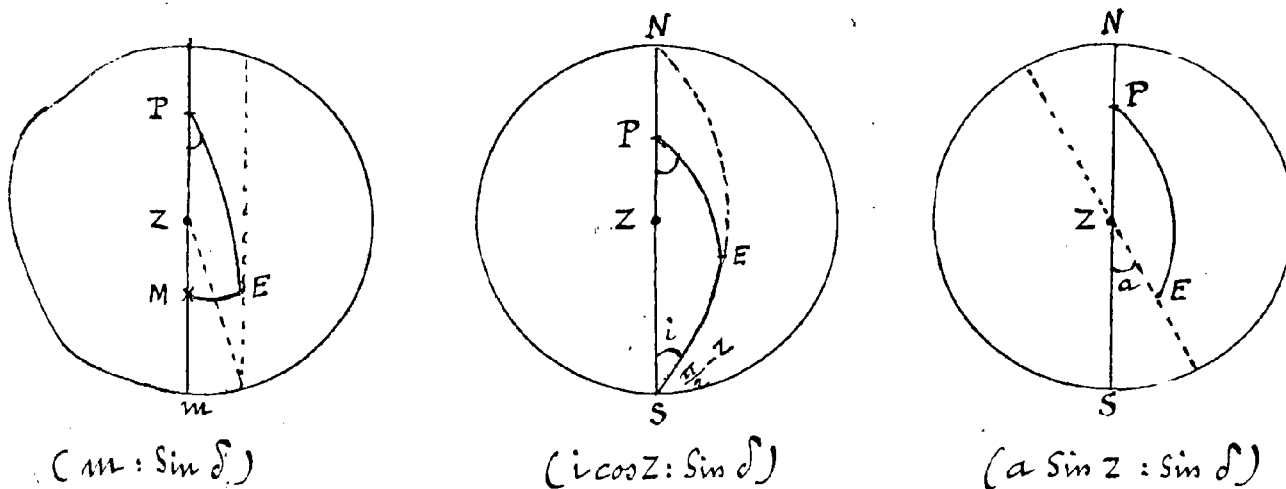
L'axe de rotation déterminé par les tourillons doit être perpendiculaire au plan méridien de façon que l'axe optique qui décrit un plan vertical puisse être dirigé vers le pôle. Comme le pôle n'est pas observable, on observe une circompolaire et on s'assure si le plan d'observation coupe diamétralement le petit cercle qu'elle décrit autour du pôle. Trois passages consécutifs de cette circompolaire doivent avoir lieu à deux intergalles égaux entre eux et par suite égaux à douze heures sidérales, et si la lunette est affectée de déviation azimuthale, la différence entre les deux intergalles est d'autant plus grande que l'étoile est plus voisine du pôle.

L'observation se fait au fil mobile parce que le

mouvement apparent de l'astre est d'autant plus lent que sa trajectoire est de plus petit rayon que l'étoile, est plus voisine du pôle. On fait au moins dix pointes pour chaque passage.

Les rectifications se font une fois pour toutes, ensuite on se garde de toute modification mais on détermine avec soin, aussi souvent que possible, la grandeur des erreurs résidues de chaque espèce et on calcule les corrections à apporter à l'heure d'un passage, c'est-à-dire à une ascension droite observée, pour obtenir le temps du passage exact au méridien.

Les trois figures suivantes sont des projections sur le plan de l'horizon et se rapportent respectivement à chacune des trois erreurs de collimation, d'inclinaison, azimuthale; pour chacune d'elles l'erreur résiduelle considérée est supposée exister seule et la trace de l'axe optique sur la sphère céleste est figurée en pointillé; pour la première on considère le triangle formé en abaissant du lieu de l'astre observé un arc de grand cercle  $EM$  perpendiculaire sur le méridien; pour la seconde le triangle  $SEP$  et pour la troisième celui  $PZE$ ; enfin la correction à apporter à l'heure du passage est la mesure exprimée en temps de l'angle horaire  $ZPE$ ; dans les conditions des figures cette correction est additive.



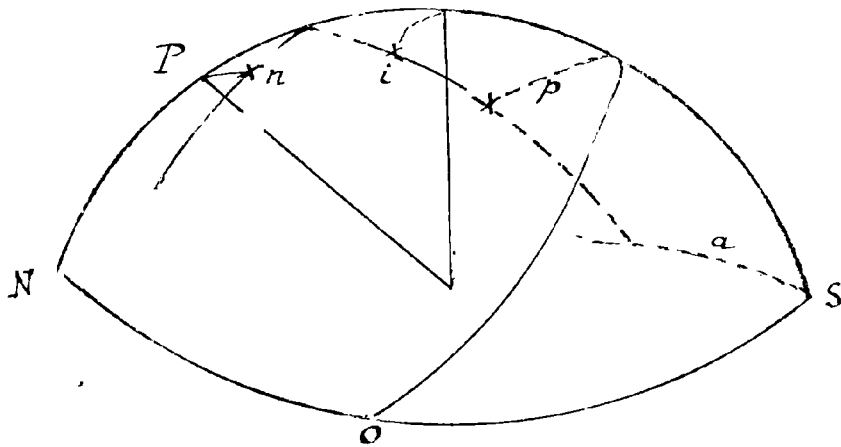
Les astronomes expriment les erreurs résiduelles  $i$  et  $a$  en fonction de deux constantes  $\mu$  et  $\rho$  dites instrumentales

et définies par les relations

$$n = i \cos \lambda - a \sin \lambda \quad p = i \sin \lambda + a \cos \lambda$$

de sorte que la correction finale égale à la somme s'exprime par

$$\Delta A = m \operatorname{cosec} \delta + n \cotg \delta + p$$

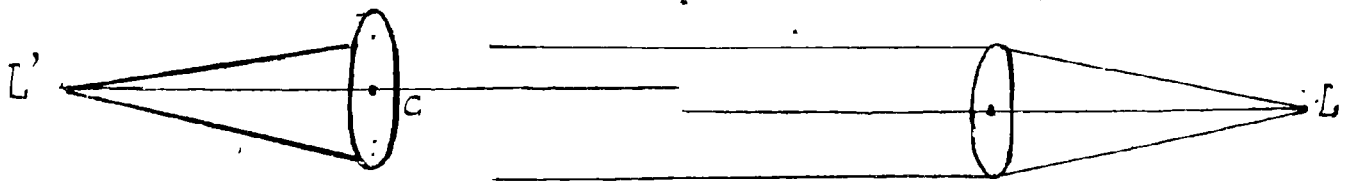


Et l'interprétation géométrique des constantes  $n$  et  $p$ , caractéristiques du plan décrit par l'axe optique, est indiquée par la figure.

Le micromètre comprend au moins cinq fils fixes parallèles

au méridien et l'heure du passage est la moyenne des cinq temps d'occultations derrière chacun des fils et entre deux fils horizontaux très voisins, qui limitent la petite partie du champ utilisée. Un fil mobile conduit par une vis micrométrique également parallèle au méridien sert à observer les arcs polaires et à la détermination de la collimation.

Lors de cette dernière opération la marche des faisceaux lumineux est celle indiquée ici.



Le faisceau cylindrique fourni par le collimateur, dont le réticule  $L$  est éclairé, est parallèle à l'axe optique du collimateur et à l'axe secondaire  $L'C$  déterminé par

l'image focale  $L'$  de  $L$ , mais ces deux axes ne coïncident pas nécessairement.

Modes d'observation : à l'œil et à l'oreille, par l'estimation directe du temps de passage, ou par l'appréciation du partage par le fil de l'intervalle entre les positions de l'étoile aux deux battements consécutifs de la pendule (Repsold) ; par le chronographe plus ou moins complet ; enfin par la photographie (Lippmann-Gautier).

[ Pour mémoire : détermination de la différence de longitude de deux observatoires fixes ou temporaires reliés ou non par le télégraphe ].

Cercle mural, mobile autour d'un axe horizontal solidement fixé à un pilier perpendiculairement au méridien ; muni de six microscopes, permettant de mesurer les distances au pôle par observation comparée à la moyenne de deux passages consécutifs d'une circompolaire, l'un supérieur et l'autre inférieur. Il permet également de mesurer les distances zénithales et par suite de conclure la latitude. La lecture répondant à la direction verticale de l'axe optique se déduit de l'observation du nadir. Un bain de mercure est placé sous la lunette dirigée, verticalement, l'objectif en bas ; une petite glace transparente inclinée à peu près à  $45^\circ$  est placée devant l'oculaire et réfléchit dans la lunette, à travers l'oculaire, une petite quantité de lumière fournie par une source placée à peu près sur la même direction horizontale et dans le vertical perpendiculaire à la glace. Ainsi le réticule est éclairé et l'œil voit à travers la glace, à la fois, le réticule et son image réfléchi par le bain de mercure. Lorsque l'image de retour vient se former sur le réticule, l'axe optique, parallèle au faisceau cylindrique émergent de l'objectif et aussi au faisceau réfléchi par le miroir horizontal, est vertical. [ Observations par réflexion donnant la direction horizontale. ]

[ Pour mémoire : Instruments de mesures relatives ou d'observations physiques. Equatorial ; équatorial, coudé ; équatorial à lunette entièrement fixe dirigée ]

vers le pôle ; sidérostak à lunette horizontale ,  
grande lunette de Gautier (Exposition de 1900) ; calostat.

## Résumé de la Septième Leçon.

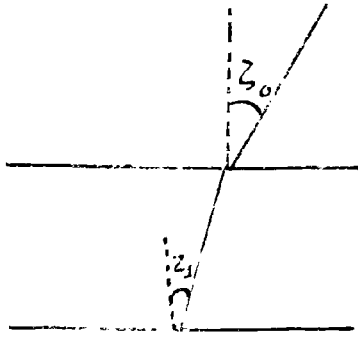
### Refraction atmosphérique

L'atmosphère a une hauteur estimée à 200 ou 300 kilomètres ; la pression et la température décroissent du sol jusqu'aux espaces célestes. Le faisceau de rayons parallèles qui, venant d'un astre, doit traverser la lunette est dévié de proche en proche depuis son entrée dans l'atmosphère jusqu'à l'observateur ; si celle-ci est supposée constituée de couches sphériques concentriques à la terre, de densité croissante et chacune homogène, le faisceau, au passage d'une couche à la suivante, se rapproche de la normale, c'est-à-dire de la verticale ; la distance zénithale apparente ou observée est moindre que la distance zénithale vraie, et la différence, qui mesure la refraction totale, est d'autant plus grande que l'incidence est elle-même plus grande que l'astre est plus éloigné du zénith.

L'indice de réfraction de l'air dans les conditions normales est 1,000293, nombre très peu différent de l'unité, et à cause de cela on peut obtenir un résultat utilisable en considérant simplement la déviation que produirait une couche unique homogène d'épaisseur quelconque, de densité égale à celle de l'air au voisinage du sol. Pour une incidence qui ne serait pas trop grande, une telle couche peut être supposée limitée par une surface plane horizontale et la dévia-

40.

tion aurait lieu uniquement au passage par cette surface de séparation.



L'angle d'incidence étant  $z_0$  et celui de réfraction égal à la distance zénithale apparente,  $z_1$ , on aurait

$$\frac{\sin z_0}{\sin z_1} = n$$

ou 
$$\frac{\sin z_0 - \sin z_1}{\sin z_1} = n - 1$$

et par une transformation simple, en remarquant que l'on peut négliger le carré de la différence  $z_0 - z_1$ ,

$$z_0 - z_1 = 0,000293 \operatorname{tg} z_1 \text{ ou en secondes}$$

$$(z_0 - z_1)'' = 60,6 \operatorname{tg} z_1$$

Cette formule est utilisable pour les distances zénithales inférieures à  $70^\circ$ ; à cette limite le résultat du calcul n'est pas en excès de plus d'une seconde sur la valeur de la réfraction, comme en témoigne la formule plus approchée

$$60,6 \operatorname{tg} z_1 - 0,057 \operatorname{tg}^3 z_1.$$

Ainsi la réfraction est d'environ une minute pour la distance zénithale  $45^\circ$  et d'ailleurs elle est à peu près proportionnelle à la tangente de la distance zénithale apparente  $z_1$ . Cette double remarque est assez simple pour constituer un renseignement mnémorique commode.

Le résultat serait le même si on considérait la déviation produite par un ensemble de couches horizontales de densités croissantes du gide au sol.

L'indice de réfraction de l'air au voisinage du sol n'est pas constant; la puissance réfractrice  $n^2 - 1$  est proportionnelle à la densité, or la très petite

quantité  $\delta = n - 1$  peut également être considérée comme proportionnelle à la densité aux quantités près de l'ordre du carré de  $\delta$ . La réfraction répondant à la pression  $H$  et à la température  $\theta$  s'obtiendra en multipliant la réfraction normale par

$$\frac{H}{760} \cdot \frac{1}{1.000366\theta}$$

Ces facteurs figurent tout calculés dans les tables de réfraction. [ connaissance du temps, Annuaire du Bureau des Longitudes ].

La réfraction dépasse  $3''$  à l'horizon de sorte que le Soleil ou la Lune sont au dessous du plan de l'horizon alors que le disque entier est encore visible. Dans ces conditions, la réfraction est très irrégulière comme en témoignent les phénomènes de déformation ou même de dislocation apparente du contour qu'on observe alors.

On peut établir simplement l'équation différentielle de la réfraction dans le cas des couches sphériques concentriques et chacune homogène.

Considérant les limites d'une de ces couches infiniment minces, on a par la loi de Descartes,

$$\frac{\sin i}{\sin x} = \frac{n'}{n}$$

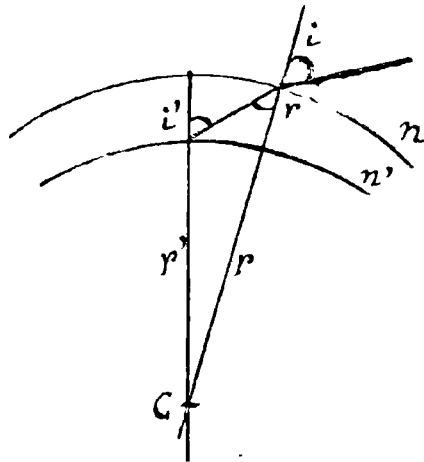
par le triangle au centre,

$$\frac{\sin r}{\sin i'} = \frac{r'}{r}$$

$$\text{Donc } nr \sin i = C^{\text{te}} = n_1 r_1 \sin i_1$$

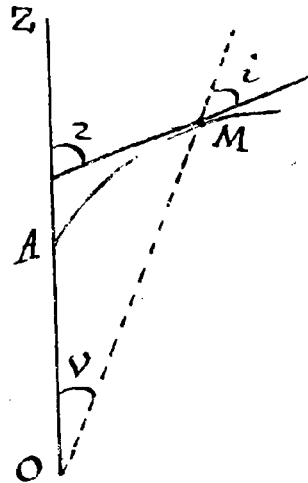
les quantités affectées de l'indice 1 se rapportant à la couche dans laquelle se trouve l'instrument d'observation.

D'ailleurs si  $M$  est un point quelconque de la trajectoire lumineuse au sein de l'atmosphère et  $z$  l'angle variable de la tangente en



42.

ce point avec la verticale du lieu d'observation,



on a  $Z = v + i$ . donc

$$dz = dv + di \text{ et d'autre part } \frac{dr}{r} = \frac{dv}{\operatorname{tgi}}$$

de sorte qu'en portant ces valeurs dans l'expression qu'on obtient en différentiant logarithmiquement la relation  $nr \sin i = \text{cte}$  établie plus haut, on trouve

$$\frac{dn}{n} + \frac{dz}{\operatorname{tgi}} = 0$$

ou  $dz = -\frac{dn}{n} \operatorname{tgi}$  qui est l'équation différentielle de la réfraction. Le facteur  $\operatorname{tgi}$  s'exprime en

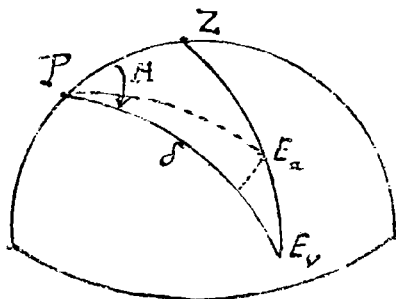
fonction des variables  $n$  et  $r$  par la relation  $nr \sin i = n_1 r_1 \sin z_1$  et l'intégrale prise entre les limites 1 et  $n$  donnera la réfraction  $Z_0 - Z_1$ .

Pour intégrer, on change de notations en posant

$$n = 1 + s \quad \text{et} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{1}{1 - s}, \quad s < 0,05,$$

de façon à mettre en évidence les petites quantités  $s$  et  $S$ . [ Voir les feuilles du cours ].

La trajectoire lumineuse est tout entière dans le



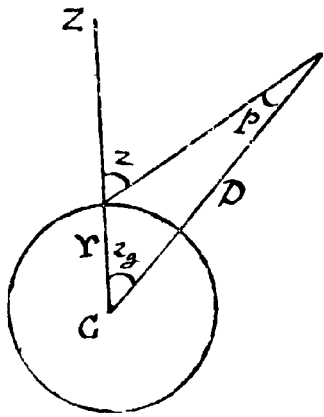
vertical de l'astre de sorte que l'azimut reste indépendant de la réfraction. Mais lorsqu'on observe à l'équatorial, les deux coordonnées  $\delta$  et  $AI$  sont altérées. En effet le lieu apparent de l'astre est dans le même vertical mais au dessus et par suite, l'astre étant hors du méridien, les cercles



de déclinaison des deux lieux sont différents. Les corrections seront exprimées à propos de la parallaxe.

Parallaxe de hauteur. - Les coordonnées urographiques des astres qui, calculées à l'avance, figurent dans les éphémérides, supposent l'observateur en un point déterminé, unique qui est le centre de la terre. La distance zénithale observée d'un point quelconque de la surface doit être corrigée de la parallaxe, c'est-à-dire de l'angle compris entre les rayons issus de l'astre et aboutissant l'un au centre de la terre, l'autre au lieu d'observation, de sorte que la distance zénithale géocentrique  $Z_g$  est égale à la différence  $Z - p$ . D'ailleurs on a

$$\sin p : \sin Z = r : D = P.$$



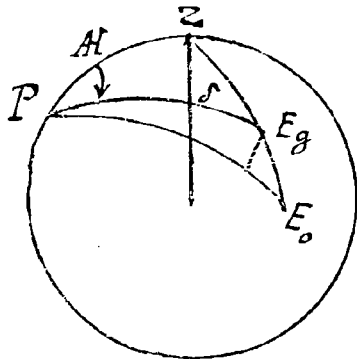
en désignant par  $r$  le rayon de la terre, par  $D$  la distance de l'astre au centre, enfin par  $P$  la valeur maximum de  $p$  qui, pour une distance donnée, répond à l'horizon et qu'on nomme parallaxe horizontale.

La parallaxe de hauteur est insensible pour les étoiles car elle ne peut atteindre la 23400<sup>ème</sup> partie d'une seconde d'arc pour l'étoile la plus voisine puisque pour celle-ci la parallaxe annuelle est inférieure à une seconde. Mais la valeur moyenne de la parallaxe horizontale du Soleil est de  $8''80$ ; pour les planètes elle est très variable avec la distance et atteint  $57'$  pour la lune. Sa mesure donne le moyen de déterminer la distance  $D$ .

La distance polaire déterminée au cercle mural ou au cercle méridien doit être corrigée de la parallaxe. Les coordonnées horaires mesurées à l'équatorial sont toutes deux différentes des coordonnées correspondantes géocentriques. Le lieu observé est

44.

sur le même vertical de la sphère céleste mais au dessous du lieu géocentrique de sorte que si de ce dernier on abaisse un arc de grand cercle perpendiculaire sur le cercle de déclinaison du lieu observé, on a par la figure-



$$d\delta = \cos E dz \quad \text{et}$$

$$dA = \frac{\sin E}{\sin \delta} dz ;$$

d'ailleurs les cosinus et sinus de l'angle de position  $E$  sont donnés par

$$\sin \delta \cos E = \cos \lambda \sin z + \sin \lambda \cos z \cos A, \quad \frac{\sin E}{\sin \lambda} = \frac{\sin A}{\sin z} = \frac{\sin A}{\sin \delta}$$

ou bien conclud. de  $\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \frac{\sin(p-\delta) \sin(p-z)}{\sin p \sin(p-\lambda)}$

L'angle horaire observé est donc soumis à une inégalité diurne résultant de la parallaxe et en effet la distance de l'astre au centre restant constante, la distance au lieu d'observation serait moindre au zénith, si l'astre culminait en ce point, qu'à l'horizon, elle est dans tous les cas moindre lors de la culmination. Il suit de là un moyen de conclure la distance d'un astre assez voisin de la terre, la Lune par exemple, par de simples observations locales des variations diurnes de la parallaxe. On même fait résultent des variations du diamètre apparent qui pour la Lune dépassent un soixantième et sont de sens inverse à l'apparence résultant de l'erreur psychologique d'appréciation.

### Navigation à l'estime:-

[ Pour mémoire: le loch et l'ampoulette; la boussole ou compas; la carte de Mercator et la loxodromie. ]

## Navigations astronomique.

On rappelle la détermination des coordonnées géographiques :

1° Colatitude  $\lambda$  par une observation de distance zénithale à peu près méridienne

$$\lambda = \delta - z$$

2° Heure locale par une observation de distance zénithale dans le premier ou le troisième vertical, d'où

$$\cos z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos A \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(p-\delta) \sin(p-\lambda)}{\sin p \sin(p-z)}$$

et 
$$H_* = A + R .$$

Enfin la longitude géographique par

$$L = H_p - H .$$

La détermination approchée de l'azimut sert au contrôle de la Boussole.

Il convient d'ajouter que consécutivement à la détermination de l'heure locale on peut corriger la première détermination de la colatitude de la réduction au méridien. Pour cela on a eu soin de noter l'indication du chronomètre répondant à l'instant de l'observation de la mesure de la distance zénithale à peu près méridienne ; la correction du chronomètre permet de conclure l'heure locale de l'observation qui portée dans la relation

$$H = A + R$$

fait connaître la véritable valeur de l'angle horaire  $A$  d'abord supposé nul.

d'ailleurs de la formule

$$\cos z = \cos \delta \cos \lambda + \sin \delta \sin \lambda \cos A$$

et de celle 
$$z_m = \delta - \lambda \quad \text{d'où} \quad \cos z_m = \cos(\delta - \lambda)$$

46

on déduit aisément la différence  $\cos z_m - \cos z$  qui transformée en produit donne la correction supposée petite

$$z - z_m = 2 \frac{\sin \delta \sin \lambda}{\sin \frac{z+z_m}{2}} \sin^2 \frac{A}{2}$$

La précision du produit dépend du dernier facteur car l'erreur relative du produit est égal à la somme des erreurs relatives des facteurs

$$d\left(\frac{uv}{xy}\right) = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} - \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} ;$$

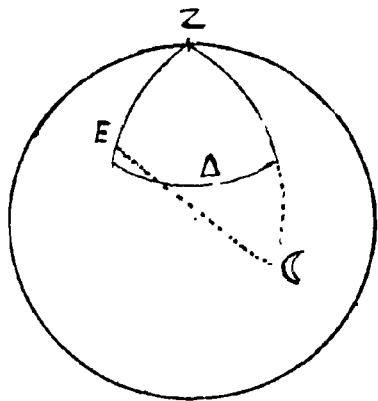
Or  $\sin^2 \frac{A}{2}$  est supposé petit et le digiseur ne peut être petit si l'astre a été convenablement choisi.

Cette correction doit être digisée par  $\sin 1''$  ou multipliée par  $206265''$  pour être exprimée en secondes.

Lorsque les indications des chronomètres sont suspectes ou viennent à manquer, on recourt à l'observation d'un phénomène dont l'époque a été calculée à l'avance en temps de Paris et consignée dans la connaissance du temps. L'observation de ce phénomène fait connaître l'état du chronomètre sur le temps du lieu origine.

Parmi les phénomènes faciles à observer en mer, il convient de citer les distances lunaires, toujours observables lorsque la lune est visible. La lune décrit un grand cercle entier en 27 jours 8 heures environ, de sorte que son déplacement relatif aux étoiles peut être comparé à celui de l'aiguille d'un instrument horaire dont le cadran porterait des digisions arbitraires correspondant aux étoiles ou même aux planètes. Les distances du bord éclairé de la lune à certains de ces astres peuvent être facilement conclues des données de la connaissance du temps en fonction du temps de Paris de sorte que la mesure d'une distance lunaire réalisée à l'aide

du sextant permet de déterminer l'heure de Paris correspondante.

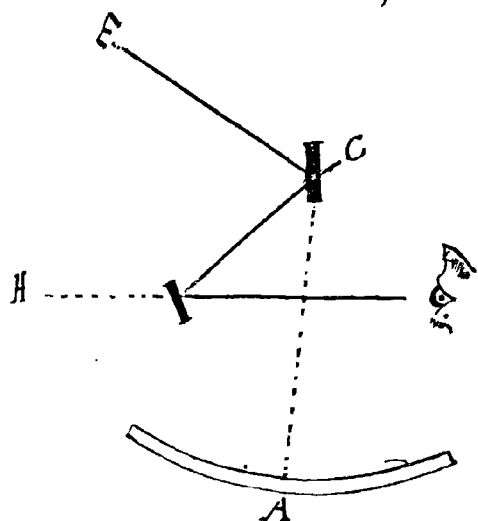


au zénith, différence d'azimut, est commun.  
On utilise deux fois de suite la relation

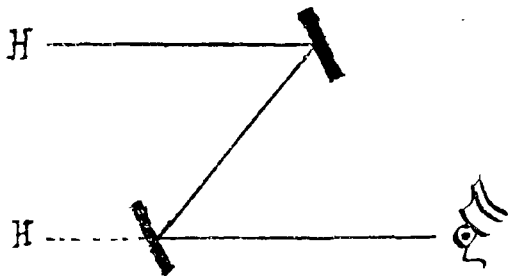
$$\cos \Delta = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos Z.$$

L'instrument utilisé en mer pour la mesure des angles est le sextant qui permet d'opérer par gisées simultanées de sorte que les mesures sont indépendantes des mouvements de l'observateur et de l'instrument.

L'alidade porte le grand miroir C qui reçoit une partie du faisceau lumineux venant de l'astre E; un petit miroir fixe, partie transparent, partie réfléchissant renvoie dans l'œil de l'observateur le faisceau doublement réfléchi et permet de voir directement le second point observé, l'horizon par exemple.



le grand miroir est parallèle au petit et l'alidade



doit être au zéro de la graduation. L'angle que doivent parcourir l'alidade, et le grand miroir qui l'accompagne, pour que l'image de l'astre yienne se superposer à celle de l'horizon est la moitié de la distance zénithale; la graduation du limbe divisé et celle du goniomètre, sont ordonnées de façon que la lecture donne immédiatement la distance zénithale elle-même. On peut interposer une petite lunette qui donne des images un peu agrandies.

L'horizon apparent est au dessous de l'horizon rationnel par le fait de la hauteur de l'œil de l'observateur au dessus du niveau de la mer, il est d'ailleurs relevé par suite de la réfraction. Cette correction peut atteindre environ 6' pour une altitude de 10<sup>m</sup>.

La ligne d'horizon n'est pas toujours assez nettement déterminée; on peut y suppléer par l'emploi du sextant de Fleurbaey le quel comporte comme système adjoint une toupie à précession régulière autour de la verticale qui fournit une détermination artificielle de la direction horizontale.

[ Pour mémoire: cercle à réflexion; l'astrolabe à prisme Claude Driencourt pour les observations faites à terre.]

### Cercles et droites de hauteur.

On peut ramener le problème de la détermination des coordonnées géographiques et par suite celui de la navigation, à construire le lieu du zénith sur la sphère céleste, où se trouvent marqués a priori le pôle P et l'astre observé E, c'est-à-dire deux des sommets du triangle de position PZE.

La mesure de la distance zénithale de l'astre E détermine un petit cercle de pôle E, dit cercle de hauteur, se le quel se trouve le zénith du lieu d'observation. La mesure de la distance zénithale d'un autre astre détermine un second cercle et

le zénith est à l'une des intersections de ces deux cercles. Si les astres sont convenablement choisis, le zénith sera bien déterminé et sans ambiguïté possible. Ainsi, par exemple, une observation à peu près méridienne et une autre faite dans le premier ou le troisième vertical donne deux cercles se coupant orthogonalement; comme on l'a déjà remarqué, l'une des mesures donne la colatitude et l'autre l'angle horaire ZPE, d'où l'heure locale.

Mais les données de l'estime donnent les coordonnées géographiques avec une certaine approximation plus ou moins grande et l'objet est précisément de fixer celle-ci. À cause de cela, la partie utile du cercle de hauteur peut être réduite à un petit arc de circonférence, ou même à une tangente en un point de celle-ci. La direction de cette tangente est perpendiculaire au plan azimuthal de l'astre à l'instant de l'observation et l'azimuth peut être estimé par exemple d'après la boussole dont les indications sont supposées convenablement rectifiées.

Ainsi la solution du problème de la navigation est ramenée à une construction graphique, consécutive aux mesures, qui s'effectue avec facilité, non sur la sphère ou la carte céleste, mais sur la carte marine du système de Mercator.

---

## Résumé de la Huitième Leçon.

---

Coordonnées écliptiques. - Rapports des distances des planètes au Soleil. - Problème de Kepler. -

Le mouvement annuel de la Terre autour

du Soleil donne lieu au mouvement apparent de celui-ci sur la sphère céleste, c'est-à-dire au mouvement relatif du Soleil rapporté aux étoiles.

Les deux trajectoires sont dans le même plan, égales en parcourues toutes deux dans le sens direct; la période est la même mais les phases rapportées à la Sphère céleste diffèrent de  $\pi$ .

Autrefois, à défaut d'autre instrument, l'observation de l'ombre portée sur un plan horizontal par un point fixe situé au dessous donnait la distance zénithale de l'astre. La direction du méridien était déterminée par la méthode des hauteurs correspondantes ou des ombres égales. Les distances zénithales méridiennes minimum et maximum, c'est-à-dire mesurées aux époques des solstices d'été et d'hiver, faisaient connaître la colatitude du lieu et l'obliquité de l'écliptique.

D'ailleurs l'heure solaire vraie peut être conclue de l'observation de l'ombre portée sur une surface quelconque par l'ombre d'un style parallèle à l'axe de la Terre; la graduation du cadran solaire se construit en déterminant les traces, sur la surface choisie, de certains des vingt-quatre plans horaires conduits par le style.

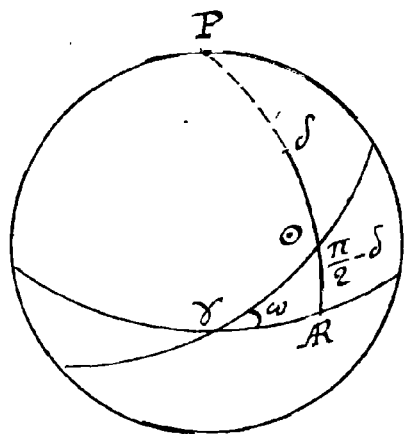
Pour définir l'écliptique, il faut recourir aux observations du Soleil; on mesure sa distance polaire et la différence entre l'ascension droite du Soleil et celle d'une étoile dont la position est d'ailleurs constamment repérée relativement aux groupes des fondamentales. Les deux coordonnées sont constamment variables; deux couples de coordonnées suffiraient à la rigueur à déterminer les deux éléments: direction de l'intersection avec l'équateur ou de la ligne des équinoxes; inclinaison sur l'équateur ou obliquité de l'écliptique  $\epsilon$ .

On a en effet, en désignant par  $h$  l'ascension droite de l'étoile prise pour origine provisoire



et par  $R'$  celle du Soleil comptée à partir de cette origine :

$$\sin R = \sin (R + h) = \cotg \omega \cotg \delta$$



Une mesure dans les environs d'un solstice, alors que la distance polaire passe par un minimum ou un maximum, est particulièrement propre à déterminer  $\omega$ ; au contraire une observation faite lorsque le Soleil est près de l'un des équinoxes est plus propre à déterminer la position du point  $\gamma$ , relativement aux étoiles, parce qu'alors les variations

de la distance polaire sont plus rapides.

En réalité on utilise l'ensemble de toutes les observations du Soleil durant une longue période, et dans l'intervalle des déterminations successives on utilise les déterminations antérieures en tenant compte des changements séculaires ou périodiques que le temps apporte à ces deux éléments : la position du point  $\gamma$  ou équinoxe du printemps ; l'obliquité  $\omega$  à peu près égale à  $23^{\circ} \frac{1}{2}$ .

Ne pas confondre la détermination du lieu de l'équinoxe du printemps avec celle de l'époque de l'équinoxe. Cette dernière répond au moment où la distance polaire du Soleil est  $\frac{\pi}{2}$  et se conclut par interpolation, le Soleil pouvant d'ailleurs n'être pas visible à ce moment.

L'intervalle entre deux passages consécutifs au point  $\gamma$  ou au même équinoxe, la durée de l'année tropique, est 365 jours, 5 heures, 48' 45", 98; tandis que la durée de la révolution annuelle relative aux étoiles, c'est-à-dire la durée de la révolution sidérale est 365 j. 6 h. 9' 9", 8.

La différence résulte du déplacement du point

52.

vernal sur la sphère céleste, sur l'écliptique, c'est-à-dire de la précession générale soit  $50,2''$  par an.

L'époque, ou le temps, est toujours exprimée, à partir de l'origine choisie, en seconde de temps moyen ou en jours moyens ou enfin en années juliennes égales à 365,25 jours moyens; de sorte que la durée de l'année sidérale s'exprime par le nombre 1,006374.

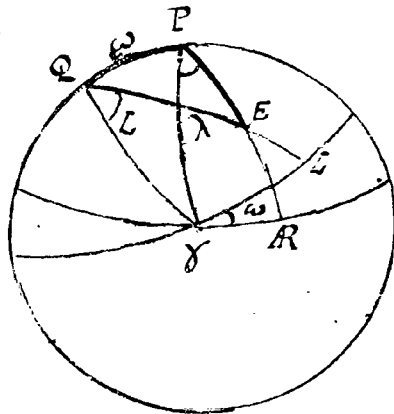
### Coordonnées écliptiques.

L'axe de la Terre, c'est-à-dire l'axe du système de coordonnées uranographiques change de direction dans l'espace par suite de la précession; au contraire l'axe de l'écliptique ne subit que des changements beaucoup plus petits,  $0,48''$  par an, qui résultent des actions des autres planètes sur la Terre [Précession planétaire].

D'ailleurs le plan de l'écliptique est celui auquel on rattache les plans des orbites des planètes et les coordonnées écliptiques servent d'intermédiaire entre les coordonnées dans l'orbite et celles uranographiques.

La colatitude est la distance de l'astre au pôle  $Q$ ; la longitude écliptique est l'angle compris entre les grands cercles menés du pôle  $Q$  au point vernal d'une part, à l'astre d'autre part.

Comme le point  $\gamma$  est le pôle du grand cercle dont le plan comprend les axes de l'équateur et de l'écliptique, on a



$$\angle P\gamma = \gamma QP = \frac{\pi}{2}, \quad QP = \omega$$

et les deux angles aux pôles du triangle  $QPE$  sont respectivement égaux à

$$\frac{\pi}{2} - L \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + A$$

d'où les deux groupes de formules :

$$\cos \lambda = \cos \delta \cos \omega - \sin \delta \sin \omega \sin A$$

$$\sin \lambda \sin L = \cos \delta \sin \omega + \sin \delta \cos \omega \sin A$$

$$\sin \lambda \cos L = \sin \delta \cos A$$

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \lambda \cos \omega + \sin \lambda \sin \omega \sin L \\ -\sin \delta \sin A &= \cos \lambda \sin \omega - \sin \lambda \cos \omega \sin L \\ \sin \delta \cos A &= \sin \lambda \cos L \end{aligned}$$

qui permettent de passer des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques ou inversement.

Le mouvement d'une planète dans son orbite est rapportée au soleil ; des coordonnées dans l'orbite on passe aux coordonnées écliptiques héliocentriques puis par un changement d'origine aux coordonnées écliptiques géocentriques, enfin par le second groupe des formules ci-dessus aux coordonnées des éphémérides.

La marche inverse permet de passer des coordonnées d'une planète observée aux instruments méridiens aux coordonnées dans l'orbite.

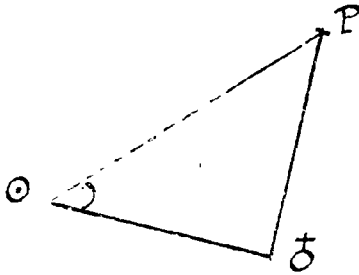
Copernic <sup>(1)</sup> ayant considéré isolément le système solaire et attribué au soleil la position centrale a pu conclure des observations les rapports des distances des planètes au soleil.

Des observations terrestres on peut conclure la longitude héliocentrique d'une planète lorsque celle-ci est en opposition ou en conjonction, c'est-à-dire sur la ligne des centres du soleil et de la terre. Si on suppose que le mouvement de la planète est circulaire et uniforme, ce qui constitue une première approximation, l'intervalle entre deux oppositions ou conjonctions fait connaître la durée de la révolution synodique et par suite la vitesse relative. La vitesse angulaire de la terre, ou celle apparente

(1) 1473-1543

54.

du Soleil? relative aux directions fixes définies par les étoiles, étant connue d'ailleurs, la comparaison avec la vitesse synodique fait connaître la vitesse angulaire ou le moyen mouvement de la planète. Ainsi partant de sa longitude initiale correspondant à une observation d'opposition ou de conjonction, on peut exprimer sa longitude héliocentrique à une époque quelconque et par exemple lorsqu'elle se trouve dans une position voisine de la quadrature c'est-à-dire lorsqu'elle est que de la Terre à angle à peu près droit de la direction du Soleil.



Donc dans ce triangle  $O \hat{O} P$ , à peu près rectangle en  $O$ , on connaît l'angle en  $O$  différence entre la longitude calculée de  $P$ , et celle observée du  $O$  diminuée de  $\pi$ ; d'autre part, l'angle en  $T$  est observable, directement,

la forme du triangle est déterminée et le rapport des distances de la planète au Soleil et de la Terre au Soleil s'ensuit.

Pour résumer les résultats approximatifs obtenus à cette époque ou depuis, on peut énoncer que les différences entre les rayons des orbites, à partir de la planète Jénus, sont toujours en doublant; si on veut que l'énoncé puisse s'appliquer également à la planète Mercure, il faut utiliser la formule dite loi de Bode ou de Titius:

Considérant la suite

0 1 2 4 8 16 32 64 128

on multiplie chacun des nombres par 3 et on ajoute 4, ce qui donne

4 7 10 16 28 52 100 196 388

et cette suite peut être rapprochée des véritables

(pour comparaison) 4      7      10      16      28      52      100      196      388

rapports des distances

0,39      0,72      1      1,52      2,7      5,2      9      19      30.

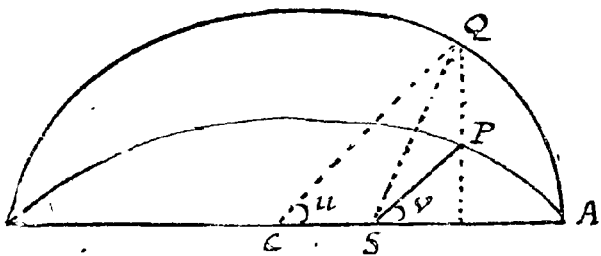
Cette loi empirique a joué un rôle dans les découvertes postérieures à l'époque où elle a été signalée: ainsi les petites planètes sont venues combler la lacune entre les distances de Mars et Jupiter; les planètes Uranus et Neptune ont ajouté deux nouveaux termes à la suite. Mais les petites planètes sont réparties entre Mars et Jupiter; l'une d'elles Eros est même intérieure à l'orbite de Mars; le nombre 2,7 donné plus haut se rapporte à la planète Cérès. D'autre part, le dernier terme de la suite de Bode est notablement plus grand que la distance de Neptune.

C'est par une étude aussi heureuse que persévérante des observations de Tycho - Brahe<sup>(1)</sup> que Kepler<sup>(2)</sup> est parvenu à la merveilleuse synthèse formulée dans les trois lois qui portent son nom: les trajectoires sont des ellipses dont l'un des foyers est au Soleil; les aires engendrées par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps; et treize années plus tard, les cubes des demi-grands axes sont entre eux comme les carrés des durées des révolutions.

La seconde loi constitue une détermination équivalente à celle de la vitesse, c'est-à-dire à une intégrale première des équations du mouvement; la loi du mouvement s'obtiendrait par une nouvelle intégration.

Kepler a résolu le problème en utilisant les propriétés projectives de la trajectoire.

L'aire engendrée depuis le passage au périhélie jusqu'en P, c'est-à-dire l'aire ASP, est au temps écoulé  $t - \theta$  dans le rapport de l'aire totale de l'ellipse



(1) 1546-1607.

(2) 1571-1630.

56.

$\pi ab$  à la durée  $T$  de la révolution de la planète; donc, en désignant par  $n$  le moyen mouvement ( $2\pi : T$ ), la mesure de l'aire  $ASP$  sera  $n(t-\theta)$ .

D'autre part, cette aire est la projection de celle  $ASQ$  sous l'angle dont le cosinus est  $(b:a)$  ou  $\sqrt{1-e^2}$  et celle-ci est la différence entre le secteur circulaire  $ACQ$  et le triangle  $CSQ$ . Représentant par  $u$  l'anomalie excentrique  $ACQ$ , on a

$$\frac{1}{2} \frac{b}{a} (a^2 u - a^2 e \sin u) = \frac{1}{2} n ab (t-\theta)$$

$$\text{ou } u - e \sin u = n (t-\theta)$$

qui est l'équation de Kepler.

Ainsi l'anomalie excentrique  $u$  peut être calculée en fonction du temps ou de l'anomalie moyenne  $n(t-\theta)$ ; or on en déduit les coordonnées dans l'orbite, le rayon vecteur  $SP$  ou  $r$  et l'angle polaire  $ASP$ , l'anomalie vraie  $\varphi$ , par le couple de relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r \sin \varphi = a \sqrt{1-e^2} \sin u \\ r \cos \varphi = a (\cos u - e) \end{array} \right\}$$

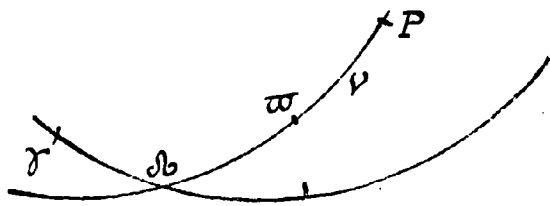
Les éléments de l'orbite sont les six constantes:  $i$  l'inclinaison sur le plan de l'écliptique et  $\Omega$  la longitude du nœud ascendant, qui déterminent le plan; le demi grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$  qui définissent la grandeur et la forme; enfin  $\theta$  l'époque du passage au périhélie ou une autre constante équivalente  $L_0$  la longitude moyenne de l'époque - c'est-à-dire à l'époque origine, qui a avec  $\theta$  la relation

$$L_0 + nt - \omega = n(t-\theta) = m.$$

$m$  étant une autre représentation conventionnelle de l'anomalie moyenne.

La longitude dans l'orbite  $l$  est comptée à partir sur l'écliptique, depuis l'origine  $\gamma$  jusqu'au

nœud ascendant  $\delta_b$ , partie sur l'orbite, du nœud jusqu'à la planète, de sorte que



$$L = \omega + \nu$$

la longitude du périhélie étant la somme de l'arc d'ecliptique de l'origine au nœud et de l'arc d'orbite du nœud au périhélie.

Ainsi, de l'anomalie moyenne on passe à l'anomalie excentrique et de celle-ci à l'anomalie vraie par le problème de Kepler; puis de cette dernière à la longitude dans l'orbite  $L$  par addition de la longitude du périhélie.

On passe ensuite aux coordonnées écliptiques héliocentriques par les relations

$$\operatorname{tg}(L - \delta_b) = \cos i \operatorname{tg}(\alpha - \delta_b)$$

$$\cos \lambda = \sin i \sin(\alpha - \delta_b)$$

ou au lieu de la dernière,  $(L - \delta_b)$  étant calculée,

$$\operatorname{Cotg} \lambda = \operatorname{tgi} \sin(L - \delta_b).$$

Les coordonnées géocentriques se déduisent de celles héliocentriques par changement de l'origine; enfin une dernière transformation en coordonnées équatoriales fait connaître les éléments des éphémérides immédiatement comparables aux résultats des observations méridiennes.

## Resumé de la Neuvième Leçon.

### Evaluation des distances - Parallaxe solaire - Rapport des masses.

[ Pour mémoire : renseignements généraux sur les astres qui composent le système solaire; voir annuaire du Bureau des Longitudes : "éléments du système solaire", "éléments écliptiques des satellites". ]

L'ensemble des masses des planètes et satellites du système solaire n'atteint pas la 600<sup>e</sup> partie de la masse du Soleil. La masse de la Terre est  $\frac{1}{5} 10^{-5}$ ; celle de Vénus un peu moindre environ les  $\frac{3}{4}$ ; les masses de Mars et de Mercure respectivement 10 fois moindres que celles des deux premières.

Les masses des grosses planètes, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune sont (1: 1047), (1: 3529), (1: 24000), 1: (20000).

Les inclinaisons des orbites sur l'écliptique sont: 7° pour Vénus, 3° 24' pour Mercure; toutes les autres sont moindres que 2° 30'.

Les excentricités sont 0,2 pour Mercure, 0,1 pour Mars et moindre pour toutes les autres planètes.

La trajectoire de la Terre ne peut être distinguée d'une circonférence sur une construction graphique, car de la relation entre l'aplatissement  $\mu$  et l'excentricité

$$e^2 = \frac{(a+b)(a-b)}{a^2} = 2\mu + \xi$$

et de la valeur 0,017 de l'excentricité on conclut la valeur 0,00015 pour l'aplatissement. Mais cette trajectoire est sensiblement excentrique, 0,017 de sorte que la distance au périhélie est moindre que celle à l'aphélie de 0,034.

Dans le cas où il s'agirait de mouvements circulaires concentriques et uniformes, le théorème.



d'Huygens donnerait la mesure de l'accélération centricale ou centripète,

$$(V^2 : a) = \omega^2 a = \frac{4\pi^2}{T^2} a = n^2 a.$$

Newton a d'abord formulé le principe de l'égalité et de l'opposition des actions réciproques, puis énoncé le principe de l'attraction : "les choses se passent comme si deux particules matérielles s'attiraient proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance"; et enfin démontré que les corps sphériques homogènes se comportaient comme si la masse totale était concentrée au centre de gravité.

L'accélération qui doit résulter, pour une planète, de l'existence du Soleil, étant en raison inverse du carré de la distance et celle qui caractérise le mouvement circulaire uniforme étant  $n^2 a$  on aperçoit cette conséquence de la troisième loi de Kepler que l'accélération pour les diverses planètes doit prendre la même valeur lorsqu'on la rapporte à l'unité de distance.

Il est clair que le mouvement de la planète étant rapporté à des axes de direction fixe passant par l'origine observable, le centre du Soleil, il s'agit d'un mouvement relatif, de sorte que de l'accélération absolue de la planète ( $fM : a^2$ ) on doit retrancher l'accélération d'entraînement commun à tous les points du système de comparaison, égale par suite à l'accélération du Soleil ( $fM : a^2$ ); on aurait donc dans l'hypothèse

$$f(M + m) = n^2 a^3.$$

Ainsi en conséquence du principe de Newton, la troisième loi de Kepler prend le caractère d'une approximation dont la grandeur relative est exprimée par le rapport de la masse de la planète à celle du Soleil :

$$fM \left(1 + \frac{m}{M}\right) = n^2 a^3.$$

60.

Les écarts entre les valeurs du produit  $n^2 a^3$  sont à peu près proportionnels aux différences des masses des planètes, celles-ci étant toujours petites relativement à celle du Soleil, car de

$$\frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{n_1^2 a_1^3}{n_2^2 a_2^3}$$

on conclut

$$\frac{n_1^2 a_1^3 - n_2^2 a_2^3}{n_1^2 a_1^3} = \frac{m_1 - m_2}{M + m_1}$$

On peut évaluer le rapport de la masse d'une planète pourvue de satellite à celle du Soleil par la relation

$$\frac{m + \mu}{M + m} = \frac{n^2 a^3}{n'^2 a'^3}$$

dans laquelle les masses  $\mu$  du satellite et  $m$  de la planète sont supposées respectivement négligeables relativement à celle de la planète et à celle du Soleil. Le rapport ( $m : M$ ) est ainsi considéré comme dépendant seulement des moyens mouvements qui peuvent être déterminés et du rapport des demi grands axes ; le demi grand axe  $a'$  se conclura de l'observation de la distance apparente du satellite à sa planète lors de l'élongation et de la distance correspondante de la Terre à la planète ; il sera ainsi obtenu en unité astronomique c'est-à-dire par son rapport à la distance de la Terre au Soleil.

En ce qui concerne la Terre, tout corps en mouvement à sa surface sous la seule action de la pesanteur peut être considéré comme un satellite et l'observation du pendule par exemple donne l'accélération relative  $g$ , qui lorsqu'on tient compte de l'accélération d'entraînement corres-

pendant au mouvement de rotation et de quelques autres corrections, fait connaître l'accélération absolue due à l'action de la masse de la Terre, soit  $g^1$  ou  $g^1 r^2$  si elle est rapportée à l'unité de distance. Ce nombre mesure le produit  $\omega^2 r$ , de la distance par le carré de la vitesse qui ferait à la Terre un satellite à mouvement circulaire et uniforme, de sorte que

$$\frac{m}{M} = \frac{g^1 r^3}{n^2 a^3}$$

Le pendule étant supposé observé en un point de la surface de la Terre convenablement choisi, le rayon  $r$  représentera l'unité géodésique et le rapport des masses dépendra de celui de cette unité à celle astronomique, la distance de la Terre au Soleil, donc de la parallaxe solaire.

Il convient d'observer que l'erreur relative du rapport des masses sera environ trois fois aussi grande que l'erreur relative de la parallaxe :

$$(r : a) (1+x) \text{ entraîne } (r : a)^3 (1+3x+\dots);$$

et cette remarque explique l'importance de la détermination aussi précise que possible de la parallaxe solaire.

Le coefficient  $f$  a été mesuré directement d'abord par l'observation de la déviation de la verticale au voisinage du mont Séhastian en Écosse, ensuite par l'expérience de Cavendish souvent répétée et notamment par Cornu et Baillaud dans les cages de l'École en 1873. Sa valeur approchée est

$$6,58 \times 10^{-10}$$

en unités usuelles, mètre, kilogramme force et seconde de temps moyen. On en a conclu la densité moyenne de la Terre soit à peu près 5,5.

## Parallaxe du Soleil.

L'importance de cette constante fondamentale et les difficultés que présente sa détermination ont conduit à employer les moyens les plus différents, et d'abord les moyens géométriques.

La détermination directe à l'aide d'une base choisie sur la terre ne donnerait pas une précision suffisante tant à cause de la petitesse de l'angle ( $8''80$ ) que par suite des causes d'erreur inhérentes à l'observation du Soleil.

Mais comme les rapports des demi grands axes dépendent de ceux des moyens mouvements par la troisième loi de Kepler la détermination de la parallaxe d'une planète entraîne la connaissance de la parallaxe du Soleil.

On ne peut songer à utiliser les planètes intérieures qui sont toujours dans le voisinage plus ou moins immédiat du Soleil, au contraire la planète Mars, facilement observable lors des oppositions a une parallaxe qui, sous les circonstances favorables peut être près de trois fois celle du Soleil.

[ Plus grande distance de la  $\odot$  au  $\oplus$  1,017;  
moindre distance de  $\oplus$  à la  $\odot$  0,362 ]

L'observation se fait en rapportant la position de la planète à celle d'étoiles voisines, soit des différentes stations choisies à la surface de la terre, - parallaxe de hauteur - soit d'un lieu donné pour des angles horaires différents, - parallaxe diurne.

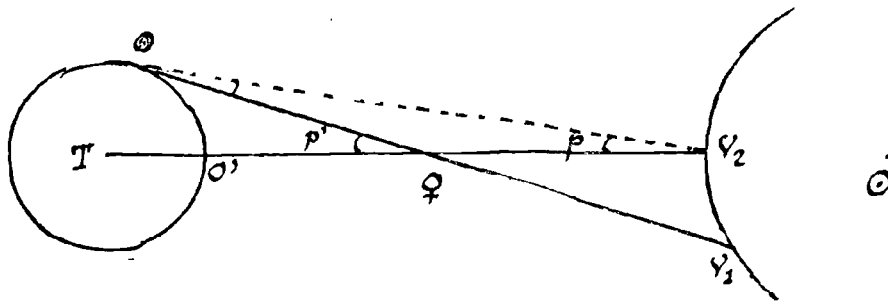
Les résultats n'ont pas atteint la précision espérée à cause des incertitudes des observations qui résultent du diamètre apparent de la Planète.

Ceci a conduit à substituer aux observations de Mars celles de petites planètes télescopiques : Flore (8), Junon (3) Victoria (12) et enfin Eros (433) la seule des petites planètes découvertes jusqu'ici qui, au lieu de circuler entre Mars et Jupiter, circule entre la terre et Mars.

Les observations des planètes intérieures deviennent particulièrement intéressantes lorsque ces

astres, et ont en conjonction, viennent à se projeter sur le disque du Soleil parce qu'il semble facile de repérer les positions de la tache obscure observée de différents lieux de la Terre choisis parmi ceux pour lesquels le phénomène se présente dans des conditions favorables.

La trajectoire apparente de la planète sur le Soleil peut être supposée rectiligne et si pour le raisonnement on imaginait un observateur placé en un lieu de la Terre tel que le Soleil soit à l'horizon et dans le vertical perpendiculaire à la trajectoire apparente au moment du passage, il observerait la planète



en un point  $V_1$  du disque aussi éloigné que possible de la trace  $V_2$  de la ligne des centres de la Terre et de la planète, c'est-à-dire du point où la planète serait observée au même instant du lieu  $O'$  qui aurait le Soleil au zénith. Les positions apparentes  $V_1$  et  $V_2$  étant rapportées au bord et par suite si on veut au centre du disque solaire, l'angle sous-tendu entre elles vu de  $O$  peut être rapporté au diamètre apparent et par suite estimé; or cet angle est la différence entre les parallaxes  $p'$  et  $p$  de la planète et du Soleil. Comme la 3<sup>e</sup> loi de Kepler et la connaissance des lois du mouvement elliptique permettent de calculer le rapport des distances de la Terre et de la planète, c'est-à-dire le rapport inverse des parallaxes au moment de l'observation, on a ainsi deux équations entre les inconnues  $p$  et  $p'$ .

C'est la planète Vénus qu'il est plus avantageux

de considérer parce que sa distance à la Terre pouvant être alors seulement 0,28 l'angle  $\sphericalangle_1 O S_2$ , différence des parallaxes est à peu près égal à un quart de minute, ou près de deux fois et demi la parallaxe du Soleil.

Divers procédés ont été employés pour l'évaluation de cet angle  $\sphericalangle_1 O S_2$  : Halley a proposé d'utiliser les temps pendant lesquels la planète est vue sur le disque du Soleil ; la différence entre les durées du passage observées de deux lieux de la Terre convenablement choisis peut atteindre une demi-heure ou 1800<sup>s</sup> et la grandeur de ce nombre faisait espérer un résultat beaucoup plus précis que celui obtenu. En fait l'appréciation des instants des contacts extérieurs ou intérieurs entre les disques de la planète et du Soleil comporte une assez grande incertitude ; elle paraît dépendre des instruments, de leur mise au point préalable et de l'observateur, par suite d'un phénomène accessoire caractérisé par la formation d'un "ligament".

On peut obtenir une apparence plus ou moins analogue en considérant avec attention, surtout à l'œil nu, deux disques placés devant une surface fortement éclairée, de manière que leurs contours soient voisins ou en contact.

La substitution de la photographie à l'observation visuelle donne également lieu à certaines difficultés.

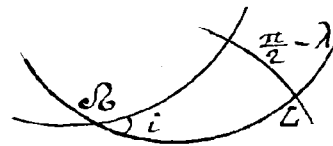
### Périodes des passages de Vénus.

Le rapport des moyens mouvements ou le rapport inverse des durées des révolutions de Vénus et de la Terre, soit  $(365,256 : 224,701) = 1,62552$  est représenté assez exactement par le rapport à termes entiers  $(395 : 243) = 1,62551$ . En 243 années, Vénus accomplit 395 révolutions et passe 152 fois en conjonction ; donc à un passage de Vénus sur le Soleil correspondra un autre passage à 243 ans d'intervalle, au même nœud et dans les mêmes conditions.

Mais les passages sont plus fréquents. Ils ne peuvent se produire à toutes les conjonctions à cause de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique,  $3^{\circ} 23'$ , mais seulement lorsque la planète est assez voisine de l'un des nœuds pour que sa latitude écliptique soit moindre que le demi-diamètre du Soleil, c'est-à-dire moindre que  $16'$  en négligeant le diamètre apparent de Vénus.

Or la relation

$$\sin(L - \delta) = \cot g i \cot g \lambda$$



permet de calculer que  $L - \delta$

peut atteindre  $4^{\circ} 30'$  de sorte que

le passage ne peut avoir lieu qu'environ deux jours trois quarts avant ou après le moment où la longitude de l'astre est égale à celle du nœud ; en tout un intervalle de cinq jours et demi.

La durée de la révolution synodique peut se déduire des durées des révolutions sidérales ou encore des nombres donnés ci-dessus puisque 152 conjonctions se produisent en  $243 \times 365,256$  jours. On trouve  $583,98$  ou environ une année six dixièmes ; ce dernier nombre est équivalent au rapport  $(8:5)$  et la comparaison des produits  $8 \times 583,734 = 2919,70$  et  $8 \times 365,256 = 2922,05$ , montre qu'au bout de huit années les deux astres se retrouvent dans les mêmes situations relatives à la différence près de deux jours un tiers. Ainsi huit années après une conjonction donnant lieu à un premier passage les astres se retrouveront dans les conditions favorables à un nouveau passage puis que la différence des positions relatives est moindre que la moitié de l'intervalle de cinq jours et demi indiqué plus haut. Puis il s'écoulera  $(243 - 8)$  soit 235 ans sans que le passage se reproduise au même nœud.

Les passages au nœud descendant auront lieu un nombre entier de demi-années après ceux au nœud ascendant puis que les longitudes héliocentriques des astres au lieu d'être toutes deux voisines de  $\delta$  devront être voisines de  $(\delta + \pi)$  ; or la période après laquelle

les longitudes redéviennent simultanément égales à  $(\delta_6 + \pi)$  est en fait un peu plus de la moitié soit 81 conjonctions ou 129 ans  $\frac{1}{2}$  car

$$81 \times \frac{243}{152} = 129,498.$$

Entre un passage au nœud descendant et le suivant correspondant au nœud ascendant il s'écoulera 71 conjonctions correspondant à 113 ans  $\frac{1}{2}$ , car

$$71 \times \frac{243}{152} = 113,5;$$

et l'on peut remarquer que la différence entre ces deux durées est égale à 16 années.

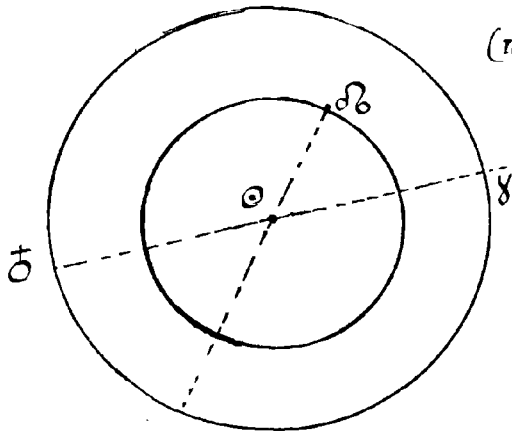
A l'équinoxe de printemps la Terre étant en  $\delta$ , la direction du point  $\gamma$  origine des longitudes est sur le prolongement de la ligne  $\delta \odot$ ; la longitude géocentrique du  $\odot$  est nulle; la longitude héliocentrique de la Terre est  $\pi$ . Or la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Vénus est  $75^\circ 20'$ , le passage de la Terre dans la direction de ce nœud

aura donc lieu lorsque sa longitude aura augmenté de  $(\pi + \delta)$ , c'est-à-dire environ 259 jours après l'équinoxe de printemps.

Ainsi les passages de Vénus pourraient avoir lieu au commencement de décembre au nœud ascendant et au commencement de juin au nœud descendant; en réalité entre le 5 et le 9 de chacun de ces deux mois.

Les passages de Vénus sur le Soleil ont eu lieu ou auront lieu du 5 au 9 :

Décembre, au $\delta_6$ ;	1631	1639	1874	1882
Juin, au $\delta_6$ desc;	1761	1769	2004	2012.





Les différences entre les nombres d'une même colonne sont égales à 129 ans 5 ; les différences entre les termes dont le rang, dans chacune des deux lignes, est de même ordre de parité, sont égales à 243 ans ; les différences entre les termes consécutifs dans chacune des deux lignes sont alternativement égales à 8 et à 235 années.

### Autres procédés employés pour l'évaluation de la Parallaxe du Soleil.

Certains de ces procédés ressortissent à la mécanique céleste et seront mentionnés à l'occasion. D'autres ressortissent à la physique. En effet la parallaxe peut être conclue de la comparaison de la vitesse de la lumière évaluée, d'une part en unité terrestre ou métrique et d'autre part en unité astronomique.

La mesure en unité métrique a été l'objet d'un certain nombre de déterminations directes par la méthode de Fizeau et par celle de Foucault : l'une des premières a été réalisée en 1874 par Cornu entre l'École et le Mont Valérien. Le résultat est environ 300 000 kilomètres par seconde.

D'autre part la même vitesse a pu être estimée directement en unité astronomique par Roemer qui observant les éclipses des satellites de Jupiter a évalué à 8 minutes, l'écart entre les temps observés et ceux calculés lorsque les distances de la Terre à l'astre diffèrent du rayon de l'orbite terrestre. Le phénomène de l'aberration qui est la conséquence de la vitesse de la Terre, naturellement estimée en unité astronomique, demi grand axe de l'orbite, fournit un autre moyen d'évaluation indirect.

La valeur adoptée à la suite d'une entente internationale est  $8''{,}80$ .

## Resumé de la dixième Leçon

La Lune. - Éléments comparés de  
la Lune - Pesanteur à la surface.  
La Terre et le Soleil :

	Diamètre	Distances	exc. et aplatisse- de l'orbite	Volume	Masses	densité.	Pesanteur à la surface.
☾	0, 273	} 60, 27	{ 0, 055 0, 0014	0, 2	(1: 80)	3, 4	1, 7
♁	1			{ 0, 017 0, 00014	1	1	5, 5
☉	109, 3	} 23439	{ "	1310162	324439	1, 4	270

Le centre de gravité des trois corps est distant du centre du Soleil d'environ  $(1: 14)^{\text{ème}}$  de rayon terrestre ou  $(1: 1500)$  du rayon du Soleil.

Le système Terre - Lune tourne autour du centre de gravité de ces deux corps, situé aux trois quarts du rayon terrestre, car  $(60: 81) = 0, 74$ , tandis que ce centre de gravité tourne autour du Soleil.

La trajectoire absolue de la Lune est sans inflexion, comme une épicycloïde accourcie, d'autant plus accourcie que le rayon de la base est plus grand relativement à celui de la roulette.

En tant que satellite, la Lune a une masse considérable car Titan, celui des satellites de Saturne de beaucoup le plus important du système solaire, a une masse qui dépasse peu celle de la Lune, environ  $(1: 50)^{\text{ème}}$  de la Terre, au lieu de  $(1: 80)^{\text{ème}}$ , et cependant la masse de Saturne est plus de cent fois aussi grande que celle de la Terre. La masse des anneaux de Saturne est évaluée à un six centième de celle de

la planète.

Cette remarque fait pressentir l'importance des inégalités et des perturbations qui se manifesteront dans le mouvement du système Terre-Lune et par suite les difficultés que présente l'édification d'une théorie complète.

Parmi les perturbations du mouvement de la Terre, il convient de citer d'abord l'inégalité mensuelle qui résulte de ce que la Terre a un mouvement relatif au centre de gravité de l'ensemble des deux astres. Cette inégalité se reporte dans les coordonnées géocentriques du Soleil et a pour période la différence des longitudes,  $(\ell - \odot)$ , soit 29 jours  $\frac{1}{2}$  et le coefficient de  $\sin(\ell - \odot)$  est  $6''{,}5$ . C'est l'un des moyens que fournit la mécanique céleste pour évaluer la parallaxe solaire, parce que le coefficient dépend des rapports des masses.

L'inégalité parallactique de la Lune fournit un second moyen. Et enfin les perturbations produites par le système Terre-Lune sur une des planètes voisines, Vénus ou Mars, fournissent un nouveau moyen d'autant plus intéressant que les effets de ces perturbations qui dépendent de la masse du système, vont croissant avec le temps et qu'on peut en attendre une détermination de plus en plus précise de cet élément fondamental, la parallaxe du Soleil.

Lorsqu'on étudie le mouvement de la Lune relatif à des axes de directions fixes, on a à tenir compte des actions des planètes et surtout des planètes voisines. Mais l'action perturbatrice du Soleil apporte naturellement un trouble bien autrement important à cause de l'énormité de sa masse qui dépasse 600 fois la somme des masses des planètes et des satellites.

Le rapport de l'accélération, résultant de l'action du Soleil sur un corps placé à la surface de la Terre, à l'accélération due à la pesanteur est environ  $(1:1700)$ ; mais l'accélération relative ou la différence entre l'accélération du centre de gravité de la Terre et celle d'un corps placé à sa surface, résultant de la

seule action du Soleil, atteint au maximum (1: 20000000) de l'accélération résultant de l'action de la Terre. C'est de cette différence que résulte la part du phénomène des marées qui revient au Soleil; celle due à la Lune est à peu près double (2, 3).

La même accélération relative se rapportant à un corps à la distance de la Lune devient à peu près égale à (1: 90) de l'accélération résultant de l'action de la Terre, telle est la grandeur de l'accélération perturbatrice dans le mouvement de la Lune relatif à la Terre.

Aussi certains des éléments elliptiques subissent d'assez grandes variations: celles de  $a$  et  $n$  sont assez petites; il en est de même de l'inclinaison toujours comprise entre  $5^{\circ} 1''$  et  $5^{\circ} 17' 35''$ , la période étant de 173 jours; la longitude du nœud,  $\Omega$  a un mouvement progressif rétrograde de  $3' 10,6''$  par jour de sorte que le nœud parcourt l'écliptique en 18 ans  $\frac{2}{3}$  et il résulte de là que la déclinaison maximum de la Lune passe de la valeur  $28^{\circ} 45'$  lorsque  $\Omega$  est nulle à celle  $18^{\circ} 10'$  lorsqu'elle est égale à  $\pi$ ; en réalité le déplacement du nœud est oscillatoire, il a lieu alternativement dans le sens direct et dans le sens rétrograde, mais ce dernier est prédominant; enfin la longitude,  $\omega$  du périhélie a un mouvement direct dont la période est d'à peu près 9 ans.

On considère les durées de révolution de la Lune relativement:

au point vernal, révolution tropique		27 <sup>j</sup> 7 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 4 <sup>s</sup> , 7
aux étoiles	— Sidérale	- - - 11 <sup>s</sup> , 5
au Soleil	— Synodique	29 <sup>j</sup> 12 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 2 <sup>s</sup> , 9
au nœud de l'orbite	— Draconitique	27 <sup>j</sup> 5 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup> .
au périhélie	— Anomalistique	- 13 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 33 <sup>s</sup>

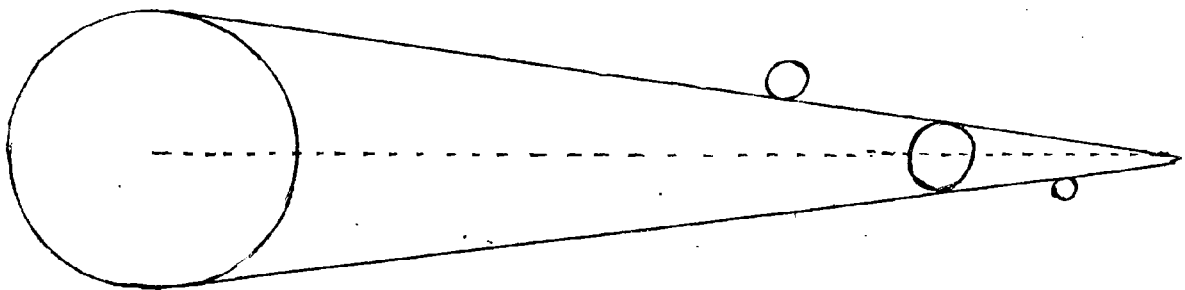
Les phases dépendent de la révolution synodique.

Il se produit dans la situation apparente de la Lune au cours d'une lunaison des phénomènes analogues à ceux qui caractérisent les saisons au cours de la révolution du Soleil : en ce qui concerne la hauteur de la Lune au dessus de l'horizon au passage au méridien elle est au premier quartier analogue à celle du Soleil trois mois plus tard ; et le rapprochement comporte successivement un retard de six mois pour la pleine lune, un retard de neuf mois, ou une avance de trois mois au dernier quartier. En l'iger, la pleine lune se comporte comme le Soleil en été.

[ Pour mémoire : libration en longitude ou en latitude ; forme allongée de la Lune dans la direction de la Terre. ]

### Eclipses.-

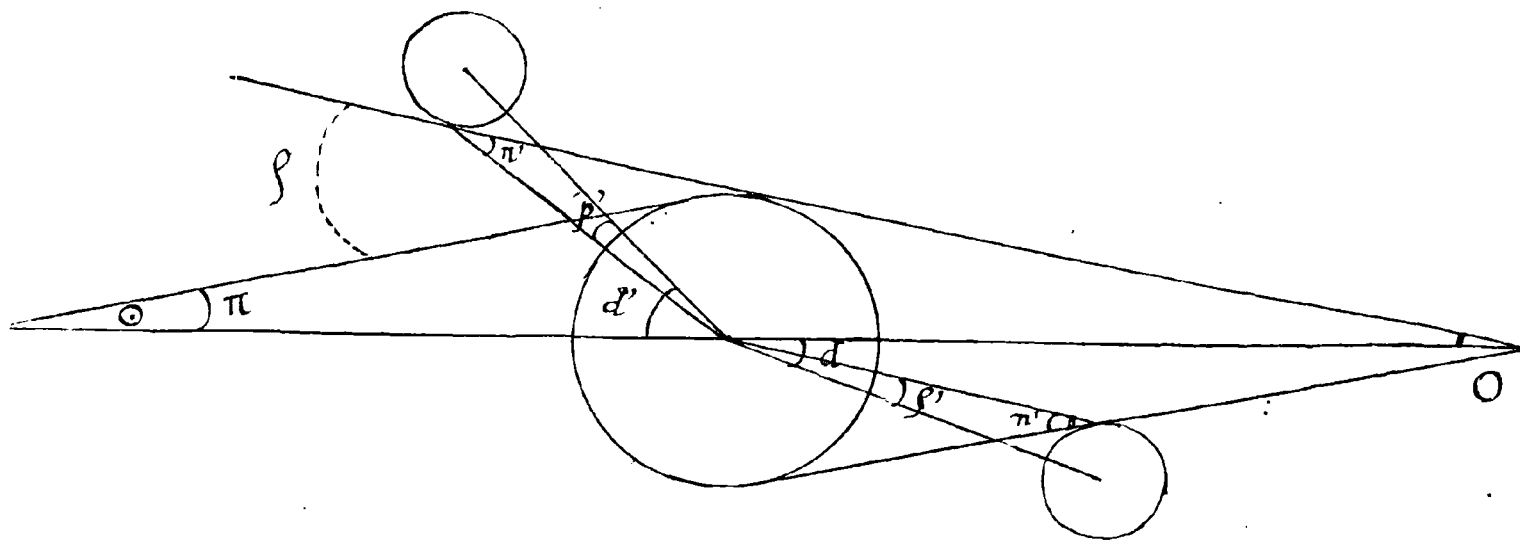
Il y a éclipse de Lune lorsque la Lune pénètre dans le cône d'ombre portée par la Terre et ce phénomène ne peut se produire que lors d'une pleine Lune, puisque cet astre doit être en opposition ; il est observable de tous les points de la Terre pour lesquels la Lune est visible.



Il y a éclipse de Soleil lorsque la Lune, en conjonction, pénètre dans le faisceau conique et intercepte une partie des radiations aboutissant à la Terre. Les éclipses de Soleil ne peuvent avoir lieu que lors de la nouvelle Lune ; elles peuvent être totales ou annulaires selon les distances relatives des astres ; le phénomène est local, plus ou moins complet ou partiel, l'ombre

portée par la Lune sur la Terre se déplaçant en raison du mouvement de rotation de celle-ci et du mouvement relatif des astres.

Le  $\frac{1}{2}$  angle au sommet  $O$  du cône d'ombre est égal à la différence  $(\rho - \pi)$  du demi diamètre apparent du Soleil et de la parallaxe de cet astre.



La condition relative à une éclipse de Lune est

$$d < \rho + \pi' - 0$$

$\rho'$  étant le demi diamètre apparent et  $\pi'$  la parallaxe de la Lune.

La condition analogue relative à une éclipse de Soleil est

$$d' < \rho' + \pi' + 0.$$

L'éclipse ne peut avoir lieu que si la Lune est à moins de  $12^\circ$  du nœud de son orbite, s'il s'agit d'une éclipse de Lune, et à moins de  $17^\circ$  s'il s'agit d'une éclipse de Soleil; aussi, dans la durée de la période, soit 223 lunaisons il se produit 41 éclipses de Soleil et seulement 29 éclipses de Lune.

Pour calculer la période des éclipses, dite Chaldéenne, il convient de remarquer qu'elle est caractérisée par le retour des trois points  $\odot$   $\text{C}$   $\text{Db}$  sur une même direction issue de la Terre; or la période de

retour des deux points  $\odot$  et  $\odot$  est la durée de la révolution synodique  $29^j 53059$  et celle des deux points  $\odot$  et  $\odot$  est la durée de la révolution draconitique  $27, 21222$  ; transformant en fraction continue, la sixième réduite donne pour le rapport à peu près équivalent celui  $(242 : 223)$  et en effet

$$\begin{aligned} 242 \times 27, 21222 &= 6585,35 \\ 223 \times 29, 53059 &= 6585,32. \end{aligned}$$

[ Pour mémoire : occultation d'étoiles par la lune ; rôle historique et scientifique des éclipses de Soleil ].

### Note sur quelques nombres donnés dans les deux leçons précédentes.

Un point matériel placé sur la direction Soleil - Terre, entre ces astres ou extérieurement, à la distance  $x$  du centre de la Terre, est soumis à une accélération résultante différence de celles dues :

au Soleil  $f \frac{M}{(r-x)^2}$ , et à la Terre  $f \frac{m}{x^2}$  ;

dont le rapport est

$$\frac{M}{m} \cdot \frac{x^2}{(r-x)^2}$$

$$\text{et } (M : m) = 3, 24 \times 10^5, \quad r^2 = (2, 34)^2 \times 10^8 = 5, 48 \times 10^8.$$

S'il s'agit d'un point situé à la surface de la Terre ayant le Soleil à son zénith ou à son nadir, la distance  $x$  étant positive ou négative mais égale à l'unité en valeur absolue, le nombre qui exprime le rapport de l'accélération due au Soleil à celle due à la Terre est

$$5, 91 \times 10^{-4} \text{ ou environ } \frac{1}{1700}.$$

74.

S'il s'agit d'un point situé à la distance de la Lune ( $x = \pm 60$ ), il faut multiplier le résultat précédent par 3600 ce qui donne environ 2,12. Ainsi la Lune supposée en conjonction, ou en opposition, directe subit de la part du Soleil une accélération deux fois aussi grande que celle provenant de l'action de la Terre.

Mais - au lieu de comparer les accélérations absolues, il convient de considérer celles qui caractérisent le mouvement d'un point matériel rapporté à des axes de directions fixes passant par le centre de la Terre. La part de l'accélération d'entraînement due au Soleil, qui est la même pour tous les points solidaires des axes, est ( $fM : r^2$ ), de sorte que l'action perturbatrice du Soleil, lors d'une conjonction ou d'une opposition directe, s'exprime par

$$fM \left[ \frac{1}{(r-x)^2} - \frac{1}{r^2} \right] = 2 \frac{fM}{(r-x)^2} \left[ \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right].$$

et son rapport à la part d'accélération absolue due à la Terre ( $f m : r^2$ ) est

$$2 \frac{M}{m} \frac{x^2}{(r-x)^2} \left[ \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right] \text{ ou à peu près } 2 \frac{M}{m} \left( \frac{x}{r} \right)^3;$$

Soit

$$6,48 \times 10^5 \times \left( \frac{x}{r} \right)^3.$$

Dans le cas où le point mobile est supposé à la distance de la Lune, 60 rayons terrestres, la valeur numérique du maximum de l'accélération perturbatrice est environ (1:91)<sup>ème</sup> de celle de la Terre.

Si le point mobile est supposé à la surface de la Terre, ayant le Soleil à son zénith ou à son nadir, le même rapport est seulement

$$5,05 \times 10^{-8} \text{ ou à peu près } \frac{1}{20\,000\,000}.$$

L'action perturbatrice de la Lune estimée dans les mêmes conditions et de la même manière, c'est-à-dire l'accélération d'où résultent les marées lunaires



s'exprime par

$$2 \frac{L}{m} \left(\frac{1}{60}\right)^3 \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{8640000}$$

lorsqu'on remplace ( $L : m$ ) par ( $1 : 80$ ) sa valeur :

Ainsi la part du phénomène provenant de la Lune est environ 2,3 fois celle provenant du Soleil.

## Résumé des douzième et quatorzième leçons.

### Précession des équinoxes.

On comprend sous le nom de précession les phénomènes qui donnent lieu au déplacement séculaire du point vernal et aussi la grandeur de ce déplacement.

Une très petite partie est la conséquence de l'action des planètes sur le mouvement de la terre ; de ce fait le plan de l'écliptique change de direction dans l'espace et son inclinaison rapportée à un plan fixe diminue de  $48''$  par siècle, ou  $0''48$  par an, la rotation ayant lieu autour du diamètre de l'écliptique qui fait un angle de  $8^\circ \frac{1}{2}$  avec celui des équinoxes dans le sens des longitudes négatives. Si l'équateur était fixe, le plan vernal avancerait de  $0''16$  par an ; bien qu'il s'agisse d'un déplacement dans le sens direct, par suite contraire à celui de précession proprement dite, cette première partie est dénommée précession par les planètes et se retranche de la précession luni-solaire pour donner la précession générale égale à  $50''258$ .

Précession luni-solaire. - Newton a montré que

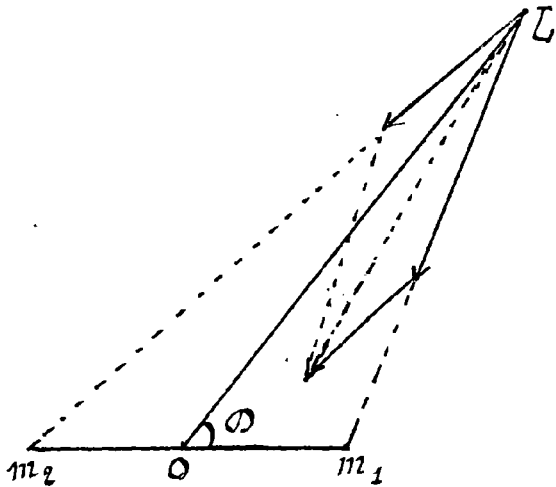
les corps sphériques et homogènes ou seulement formés de couches concentriques et homogènes, agissent les uns sur les autres comme des points matériels de masses respectivement égales, situées aux lieux des centres de gravité. Mais la Terre ne peut être considérée comme sphérique et homogène et notamment les mesures géodésiques ont montré qu'elle est aplatie aux pôles ; tout au plus pourrait-on l'assimiler à un ellipsoïde de révolution autour de son axe de rotation. C'est d'ailleurs sous cette apparence extérieure que se présentent certaines planètes et par exemple Jupiter.

Lors même que l'on supposerait la Terre homogène en toutes ses parties ou seulement formée de couches ellipsoïdales concentriques homogènes, les actions des corps extérieurs, la Lune et le Soleil, ne pourraient donner une résultante passant par le centre de gravité que si ces astres étaient situés dans le plan de l'équateur, c'est-à-dire si leurs déclinaisons étaient nulles.

Si l'astre extérieur est supposé sphérique et homogène, sa masse entière agit comme un point matériel confondu en son centre de gravité. D'ailleurs à chaque force appliquée à un point de la Terre répond une force égale et opposée sur la même direction appliquée à l'astre et la résultante de ce dernier système est égale et opposée à celle du premier. Ainsi d'une manière ou de l'autre, on reconnaît que l'ensemble des forces appliquées aux différents points de la Terre, considérées comme solidaires, a pour équivalent une force unique. Mais on aperçoit de suite qu'en général celle-ci ne passera pas par le centre de la Terre et par suite donnera lieu à un moment, d'où une rotation accélératrice élémentaire.

Par exemple les forces appliquées à deux points pris symétriquement dans l'équateur et dans le plan axial passant par le centre de l'astre extérieur ont manifestement une résultante dont la direction est dans l'angle  $m_1 L O$ .

La différence entre les valeurs numériques de



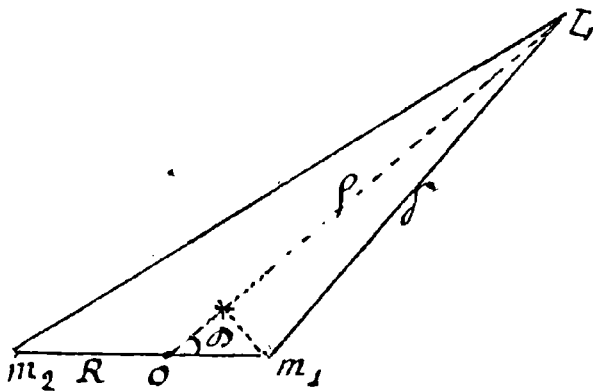
de la force appliquée en  $m_2$  et celle qui agirait sur une masse égale située en  $O$  est la différence de l'expression  $\frac{f L m}{f^2}$  relative à  $\delta$ , c'est-à-dire au second ordre près

$$-2 \frac{f L m}{\rho^3} \Delta \delta$$

l'angle  $m_1 L O$ , la différence  $\Delta \delta$  serait  $-R \cos D$ ,

le bras de levier  $R \sin D$  et le moment aurait pour expression

$$\frac{f L m}{\rho^3} R^2 \sin 2D.$$



Cet aperçu est uniquement destiné à mettre en évidence le facteur  $\sin 2D$ , lorsqu'on traite le problème avec l'approximation utile, on obtient, pour l'ensemble

des éléments matériels de la Terre, l'expression du moment résultant

$$\frac{3}{2} \frac{f L m}{\rho^3} (C - A) \sin 2D$$

dans laquelle  $C$  et  $A$  sont les moments d'inertie de la Terre relativement à l'axe de rotation et à l'un quelconque des axes équatoriaux.

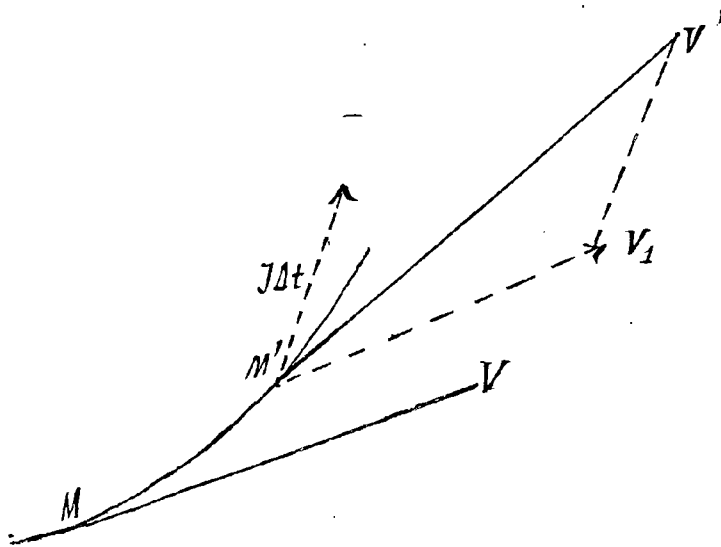
Ce moment est d'ailleurs dirigé perpendiculairement au plan axial passant par l'axe et en ayant, de manière qu'autour de cet axe l'angle  $D$  soit compté à partir de l'équateur positivement de droite à gauche.

On représentera par

$$\mathcal{H} \sin 2D$$

le rapport de ce moment à celui des quantités de mouvement  $C\omega$  correspondant à la rotation diurne de la Terre.

Si la Terre ne tournait pas autour de son axe, le Soleil supposé au solstice la ferait tourner autour de la ligne des équinoxes, dans le sens qui inclinerait l'équateur vers l'écliptique, mais à cause de la rotation préexistante les choses se passent tout autrement et pour reconnaître l'effet du couple perturbateur il faut recourir au théorème des moments des quantités de mouvement, la forme géométrique due à M. Resal est ici particulièrement appropriée.



Soit d'abord un point matériel passant en M avec la vitesse  $V$ , puis en  $M'$  avec la vitesse  $V'$ . Menons  $M'V_1$  égale et parallèle à  $MV$ ; on a la relation géométrique

$$\overline{V'} - \overline{V_1} = \overline{J \Delta t}$$

ou, en multipliant par le facteur numérique qui mesure la masse, celle

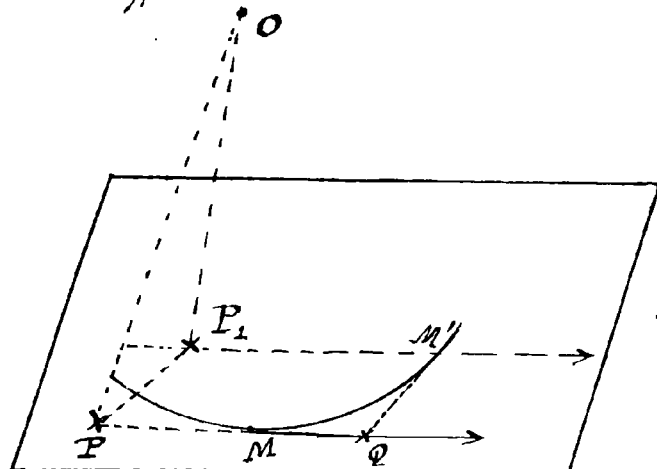
$$m \overline{V'} - m \overline{V_1} = \overline{F \Delta t}.$$

Désignons par  $\overline{K'}$  et  $\overline{K_1}$  les vecteurs représentant les moments des quantités de mouvement par rapport à une origine  $O$  située où on voudra dans l'espace. Les trois grandeurs  $m \overline{V}$ ,  $m \overline{V_1}$  et  $\overline{F \Delta t}$  ayant même situation, étant issues d'un même point, le lieu actuel du mobile, le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes.

Donc

$$\overline{K'} - \overline{K_1} = \overline{m^t F \Delta t}.$$

D'ailleurs les moments de  $mV_1$  et de  $mV$  ne diffèrent que par le second ordre lorsque les positions  $M$  et  $M'$  sont considérées comme infiniment voisines. En effet abaissons de l'origine  $O$  des perpendiculaires



sur les directions parallèles  $V$  et  $V_1$ , la ligne qui joint les pieds est la distance des directions, c'est-à-dire la distance de  $M'$  à la tangente en  $M$ , grandeur du second ordre, donc l'angle en  $O$  et la différence des bras de levier  $OP$  et  $OP_1$  sont tous deux du second ordre, donc on a la relation différentielle géométrique

$$\frac{dK}{dt} = m^t F$$

Cette relation a lieu pour tous les points d'un système quelconque et si les moments sont pris par rapport à une origine unique la somme géométrique des moments élémentaires qui ont tous l'origine commune  $O$  sera une grandeur géométrique dont l'accroissement sera la somme des accroissements des éléments de sorte que par addition géométrique des égalités ci-dessus  $K$  représentant  $\sum K$ , on aura

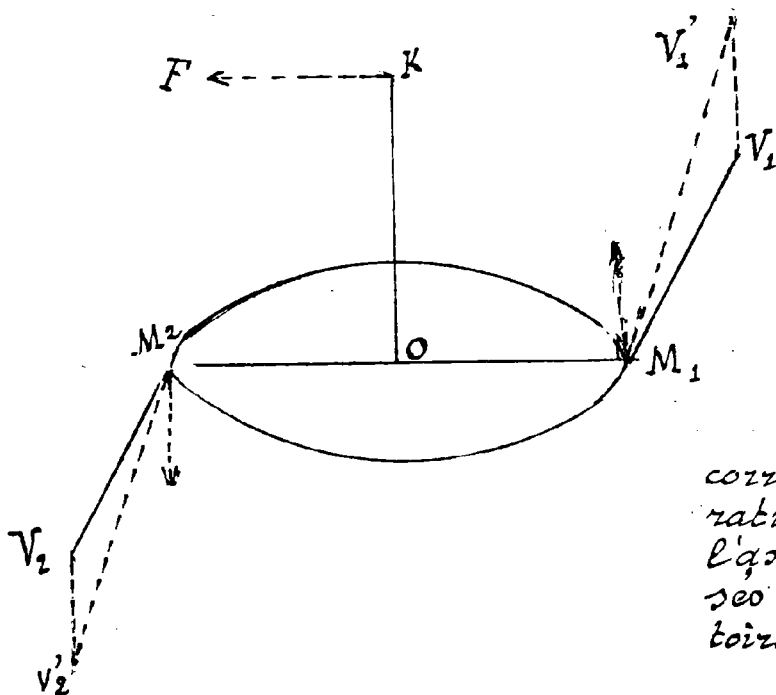
$$\frac{dK}{dt} = \sum m^t F$$

c'est-à-dire le théorème de Poinsot : La vitesse de l'extrémité du vecteur moment résultant des quantités de mouvement est la somme des moments des forces appliquées aux différents points du système.

Ceci s'applique à un système matériel quelconque, et par exemple à un corps solide. Si une toupie suspendue par son centre de gravité est en rotation libre autour de son axe de figure qui est principal d'inertie ce mouvement se conservera identique à lui-même quelle

que soit la direction initiale donnée à l'axe, quelle que soit la vitesse ou l'accélération du centre de gravité, parce que les actions dues à la pesanteur, ou aux forces de liaison, réaction du point de suspension ou forces intérieures, ne donnent lieu à aucun moment résultant.

Si le mouvement initial étant celui indiqué, on vient à introduire une force appliquée en un point de l'axe autre que le centre de gravité, par exemple à l'aide d'un fil afin de marquer nettement la direction et le sens de la force, l'axe au lieu de céder dans le sens de la force, comme il ferait si le corps ne tournait pas, s'incline dans un plan perpendiculaire à celui déterminé par l'axe et la direction de la force et l'interprétation par le théorème de Rosal est immédiate. On peut analyser ce résultat toujours surprenant parce que d'observation peu accoutumée, en considérant un système idéal de deux points matériels égaux réunis entre eux et à un axe médian par des liens rigides supposés sans masse. Le système étant en rotation autour de l'axe médian, c'est-à-dire autour du centre de gravité, et d'ailleurs suspendu comme ci-dessus, si on applique en



un point  $K$  de l'axe une force  $F$  de direction parallèle à celle des points matériels, cette force communiquera à chacun d'eux une accélération élémentaire située dans le plan axial, dont la composition avec chaque vitesse donnera la vitesse ultérieure correspondante. Or les accélérations sont parallèles à l'axe médian et de sens opposés, donc le plan de la trajectoire paraîtra tourner autour de

la ligne joignant les points matériels et l'axe s'inclinera en tournant autour de cette direction, engendrant un plan orthogonal sur la direction de la force.

La modification du mouvement initial autour d'un axe de figure, par suite principal d'inertie, résultant d'une action extérieure donnant lieu à un moment est caractérisée par le théorème de Rosal, mais la rotation n'a plus lieu autour de l'axe de figure qui cesse aussitôt de coïncider avec l'axe résultant des moments des quantités de mouvement. En effet si le moment extérieur est perpendiculaire sur l'axe résultant, ou comporte une telle composante, les directions de ce dernier répondant à deux instants infiniment voisins diffèrent d'un angle du même ordre, ce qu'on exprime en disant que l'extrémité de la ligne idéale, axe représentatif, prend une vitesse, tandis que les éléments matériels et l'axe de figure ou principal d'inertie, qui en est solidaire ne peuvent subir que des déplacements du second ordre répondant à une accélération.

Mais en que d'une première approximation on peut remarquer que si l'action extérieure est assez petite relativement au moment de la quantité de mouvement du système, comme cela a lieu dans le problème qui nous occupe, les axes se sépareront assez peu pour qu'on puisse négliger l'angle qu'ils peuvent comprendre et de fait cet angle est certainement, en suite des observations les plus minutieuses, à la limite des quantités appréciables.

En conséquence d'une telle simplification le seul théorème de Rosal peut suffire à la théorie de la précession luni-solaire.

D'ailleurs on trouvera plus loin quelques indications sur la partie du phénomène ainsi négligée.

D'après ce qui précède, la vitesse angulaire de l'axe du moment résultant, ou de l'axe de rotation supposés confondus, est le rapport

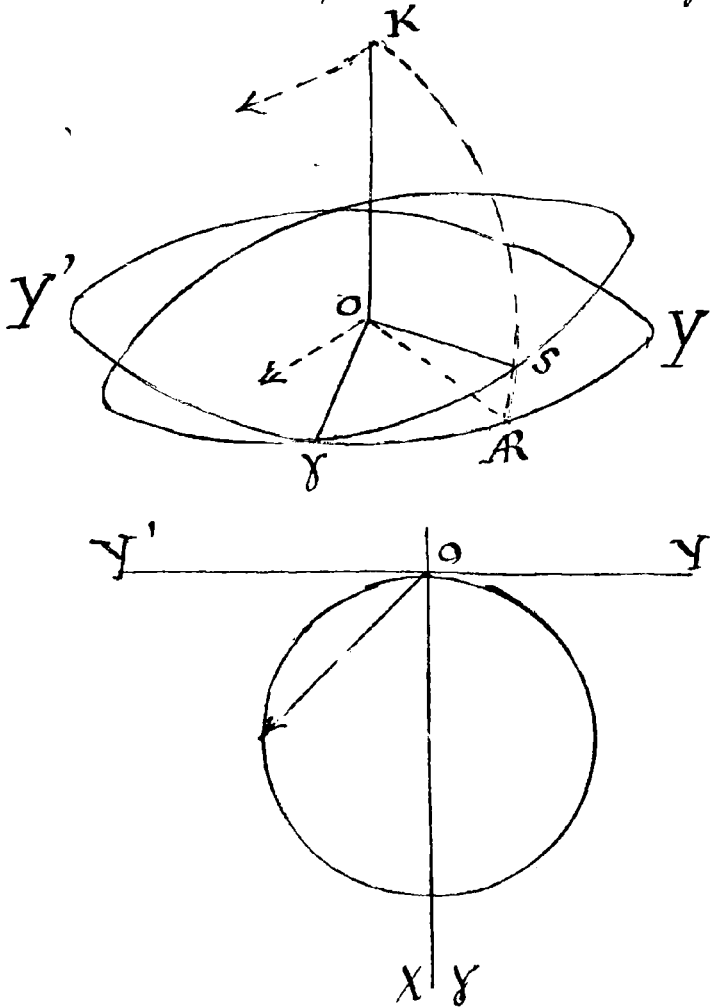
$$\propto \sin 2 \theta$$

du moment extérieur dirigé dans l'équateur à la grandeur du moment résultant dont la direction est perpendiculaire. Le coefficient  $\alpha$  se rapporte à la masse et à la distance de l'astre considéré, soit d'abord le Soleil.

La position du Soleil étant définie par son ascension droite  $R$ , la direction de la vitesse du point  $K$  de l'axe, situé à l'unité de distance, sera définie par  $R - \frac{\pi}{2}$ , de sorte que les composantes de cette vitesse  $\dot{\theta}$  suivant la ligne des équinoxes et suivant la projection de la ligne des solstices seront

$$\alpha \sin 2\theta \sin R, \quad \alpha \sin 2\theta \cos R.$$

La première conserve toujours le même signe; elle croît de l'équinoxe au solstice et décroît du solstice à l'équinoxe reprenant les mêmes valeurs, grandeur et signe, pour les mêmes valeurs absolues de la déclinaison, c'est-à-dire dans les deux moitiés de la trajectoire de l'astre, de l'écliptique. La seconde au contraire change de signe à chaque solstice et à chaque équinoxe, elle est négative de l'équinoxe au solstice, positive du solstice à l'équinoxe. La courbe lieu des projections de l'extrémité de la vitesse est tout entière d'un côté de la projection de la ligne des solstices; elle est parcourue deux fois à chaque révolution du Soleil.

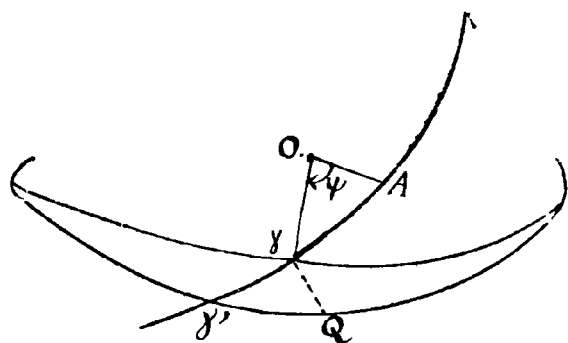


C'est la composante suivant la ligne des équinoxes



qui produisant le déplacement de l'équateur autour de  $YY'$ , entraîne le déplacement du point vernal  $\gamma\gamma'$  ou  $d\psi$ , qui se déduit du triangle formé en abaissant l'arc de grand cercle  $\gamma Q$  perpendiculaire sur l'équateur.

L'analogie des sinus donne, en remarquant que les côtés sont assez petits pour qu'on puisse négliger les grandeurs d'ordre plus élevé,



$$\gamma\gamma' \sin \omega = \gamma Q$$

Le côté  $\gamma Q$  mesure l'amplitude du déplacement angulaire de la direction du moment résultant ou de

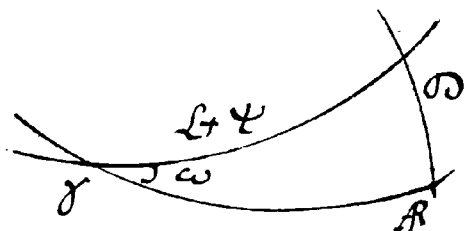
l'équateur qui l'accompagne; il est donc égal à la composante

$$\alpha \sin 2 \omega \sin R$$

et par suite

$$d\psi = \frac{\alpha \sin 2 \omega \sin R}{\sin \omega} dt$$

Pour intégrer cette expression, il faut exprimer les deux variables  $\omega$  et  $R$  en fonction du temps. Soit  $\psi$  la coordonnée écliptique de  $\gamma$  comptée à partir d'une origine fixe  $A$  et, suivant l'usage, dans le sens des longitudes négatives; la coordonnée écliptique du Soleil sera  $(L + \psi)$  et le triangle rectangle donne :



$$\sin \delta = \sin \omega \sin (L + \psi)$$

$$\cos \delta \sin R = \cos \omega \sin (L + \psi)$$

$$\cos \delta \cos R = \cos (L + \psi)$$

La première de ces relations est l'analogie des

sinus ; la troisième est la relation connue,  $\cos a = \cos b \cos c$ , la seconde se déduit de l'application au triangle rectangle considéré de la relation générale

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

l'angle  $A$  étant ici l'angle droit, de sorte que  $a$  devient l'hypoténuse qui tient lieu de  $(L + \psi)$ .  
L'expression de  $d\psi$  devient

$$d\psi = 2 \cos \omega \sin^2(L + \psi) dt = \alpha \cos \omega [1 - \cos 2(L + \psi)] dt.$$

Négligeant les très petites variations de  $\omega$  ou celles de  $\psi$  et aussi, dans ce calcul sommaire, l'équation du centre, on considérera que  $L$  peut être remplacé par la longitude moyenne ( $L_0$  mt) de sorte que

$$\psi - \psi_0 = (\alpha \cos \omega) t - \frac{\alpha}{2n} \cos \omega \sin 2(L + \psi).$$

la variation de  $\psi$  s'annule avec  $\omega$ , c'est-à-dire quand le Soleil est à l'un des équinoxes.

Le premier terme, progressif ou séculaire, a pour coefficient  $16''$  environ, le temps étant exprimé en année julienne ; le terme périodique a pour coefficient  $1'' 27$ .

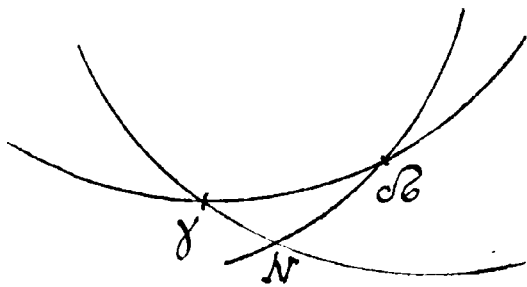
La composante de la vitesse du point  $K$ , situé à l'unité de distance sur la direction du moment résultant, suivant  $Y'Y$  produit la variation d'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique fixe

$$d\omega = -\alpha \sin 2\omega \cos R dt,$$

et donne un terme essentiellement périodique dépendant du cosinus du double de la longitude du Soleil et dont le coefficient est seulement  $0'' 55$ .

Les formules complètes comprennent un assez grand nombre d'autres termes périodiques à coefficients beaucoup plus petits dépendant des différences entre le mouvement réel et celui circulaire et uniforme.

En ce qui concerne l'action de la lune, les effets sont analogues. L'intersection de l'orbite avec l'équateur joue le rôle du point  $\gamma$  et les axes  $Ox$  et  $y'y$  se rapportent à la direction  $ON$  de cette intersection. Si elle était fixe, les termes principaux seraient comme ci-dessus au nombre de deux seulement: un terme séculaire à coefficient plus que double du précédent, parce que l'action de la lune est plus de deux fois aussi grande que celle du soleil; et un terme dépendant du sinus du double de la longitude de la lune dont le coefficient est seulement  $0,9$  parce que le moyen mouvement qui entre en digiseur par le fait de l'intégration est plus de 13 fois plus grand. Mais le nœud de l'orbite lunaire



parcourt l'écliptique en 18 ans  $\frac{2}{3}$  et il s'en suit que l'intersection  $N$  avec l'équateur se déplace sur un arc de  $13^\circ$  de part et d'autre du point  $\gamma$ . Il s'ensuit encore, comme on l'a déjà observé, que la valeur maximum de la déclinaison

de la lune passe de  $28^\circ \frac{1}{2}$  à  $18^\circ \frac{1}{2}$  lorsque la longitude du nœud  $S_0$  passe de  $0$  à  $\frac{1}{2}\pi$ , c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à celui d'automne.

La courbe lieu des projections du point  $K$  situé à l'extrémité de distance sur l'axe du moment résultant oscille de part et d'autre de  $Oy$ , accomplit une oscillation double ou complète pendant la période. Elle se déforme incessamment passant du maximum lorsque  $S_0$  est voisine de  $0$  au minimum lorsqu'elle est voisine de  $\pi$ .

De là résultent deux termes périodiques

$$-17'', 234 \sin S_0 \text{ et } +9'', 210 \cos S_0$$

le premier affectant la position du point vernal, le

second l'obliquité de l'équateur. Ils caractérisent le phénomène auquel on donne plus particulièrement le nom de nutation dans le langage de l'astronomie descriptive. Le terme séculaire correspond au mouvement moyen de l'axe de la terre par lequel il engendrerait en 26 000 ans un cône droit circulaire de  $47^\circ$  d'ouverture ; les deux termes dépendant de  $\delta_0$  montrent que cet axe engendre un cône légèrement ondulé, de sorte que si l'on rapportait sa position, à celle définie par le mouvement moyen séculaire il semblerait engendrer un petit cône découpant sur la sphère céleste l'ellipse de nutation dont le demi grand axe de  $9''^2$  est dans le plan passant par l'axe de l'écliptique et dont le demi petit axe, égal à  $17''^2 \sin \omega$  ou  $7''$  environ, est dans le plan tangent au cône de précession.

Si on observe que l'axe de la terre est l'axe fondamental, intermédiaire entre les coordonnées exprimées par les formules de mécanique céleste et les résultats de l'observation, on comprend toute l'importance des moindres termes que peuvent introduire dans les formules de la Précession les nombreux phénomènes plus ou moins secondaires du système solaire.

Ceux de ces termes qui sont à courte période - à peu près semi-mensuelle - sont "suivant les décisions de la conférence internationale des étoiles fondamentales, omis dans le calcul des éphémérides du Soleil, de la Lune, des planètes et des étoiles fondamentales. Il n'en est tenu compte que dans les éphémérides des étoiles circumpolaires" (Connaissance des temps).

Pour se rendre compte de l'importance que peuvent avoir les moindres variations du pôle quand il s'agit d'astres qui en sont très voisins, il suffit d'imaginer qu'un tel astre se trouve sur la trajectoire de la trace de l'axe de la terre,

son ascension droite considérée avant et après la coïncidence de l'astre et du pôle, c'est-à-dire à deux instants aussi peu différents qu'on voudra, aura deux valeurs différentes de douze heures.

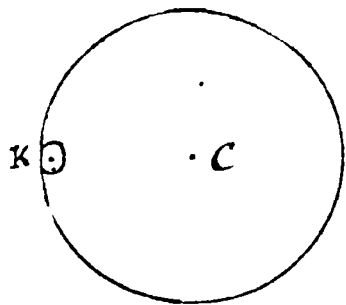
Cette simple remarque est propre à fixer l'attention sur l'importance du rôle de l'observation des circompolaires aussi bien quant au réglage des instruments qu'en vue du contrôle et du perfectionnement des théories.

Nous avons déjà observé que sous l'action d'un moment extérieur l'extrémité de l'axe  $OK$  du moment résultant des quantités de mouvement prend une vitesse, subit des déplacements du premier ordre, tandis que les éléments matériels qui constituent la Terre, et par suite l'axe principal d'inertie  $OC$  qui en est solidaire, prennent seulement des accélérations et subissent des déplacements du second ordre: donc l'existence d'un moment extérieur entraîne fatalement celle de l'angle  $KOC$ .

En l'absence de toute action extérieure cet angle pourrait exister par le seul fait des circonstances initiales du mouvement, comme on le constate lorsqu'on donne à une toupie une rotation autour d'une direction distincte de celle d'un axe principal d'inertie. Dans ce cas le mouvement peut être figuré, suivant l'image de Poincaré, par le roulement d'un cône mobile d'axe  $OC$  sur un cône fixe d'axe  $OK$ ; les ouvertures de ces cônes sont entre elles dans le rapport  $[(C-A) : C]$ .

Pour la Terre,  $C$  étant plus grand que  $A$ , le cône mobile d'axe  $OC$  enveloppe le cône fixe d'axe  $OK$ , d'ouverture 306 fois moindre. Ainsi l'axe de la Terre  $OC$  accomplirait une révolution à peu près diurne autour de  $OK$  et la période ramenant le plan  $KOC$  dans la même direction de l'espace serait de 306 jours ou environ 10 mois: c'est la période dite Eulerienne. Si la Terre pouvait être

supposée animée d'une telle rotation indéfiniment



libre, l'angle  $KOC$  conserverait sa valeur initiale: un instrument méridien supposé invariablement lié à la Terre mettrait en évidence des différences de distance polaire qui accuseraient une variation de latitude à période de dix mois, d'amplitude double

de l'angle  $KOC$  et de phase dépendant de la longitude géographique; les ascensions droites des astres seraient également affectées de variations d'autant plus grandes qu'il s'agirait d'astres plus voisins du pôle.

Les variations des latitudes, certainement très petites, n'ont pu être décelées et on en a conclu que l'angle  $KOC$  reste tout au moins à la limite des grandeurs appréciables.

Quant aux variations des ascensions droites des circompolaires, elles échappent aux observations nouvelles, parce que les instruments ne peuvent être considérés comme invariablement liés à la Terre: la détermination des constantes instrumentales se fait, suivant un usage constant, d'après l'ensemble des observations se rapportant à une durée de quelques jours, en nombre plus ou moins limité, selon les circonstances.

Cependant l'existence de cet angle  $KOC$  et ses variations incessantes sont une conséquence fatale de l'existence du moment extérieur résultant des actions de la Lune et du Soleil. À chaque instant le mouvement est représenté par le roulement du cône d'axe  $OC$ , supposé solidaire de la Terre, sur le cône d'axe  $OK$  fixe dans l'espace; les ouvertures de ces cônes changent avec l'angle des axes mais conservent le rapport constant fixé par celui des mouvements d'inertie.

Si la Terre était un solide invariable, les moments d'inertie conclus de la constante de la précession seraient applicables à tous les mouvements qu'elle prend, à toutes les accélérations qu'elle peut acquérir. Mais si on la considère comme composée de parties non complètement solidaires, celles-ci pourraient obéir plus ou moins indépendamment aux actions partielles qui les sollicitent, en raison des moments d'inertie relatifs à chacune d'elles. D'ailleurs, il est naturel d'admettre que les modifications de la rotation diurne qui s'accomplissent avec une extrême lenteur, la précession en 26000 ans, ou même la nutation en 18 ans  $\frac{2}{3}$ , s'effectuent d'ensemble en conséquence des actions mutuelles, celles-ci peuvent cependant être insuffisantes pour assurer les déplacements d'ensemble à courte période, diurnes par exemple. Ainsi ces actions mutuelles agiraient comme une cause d'entraînement pour les déplacements lents de l'axe de rotation et au contraire comme une cause d'amortissement pour les déplacements à courte période, amortissement qui pourrait expliquer la disparition du mouvement Eulerien et l'atténuation incessante de ceux produits par les actions perturbatrices de la Lune et du Soleil.

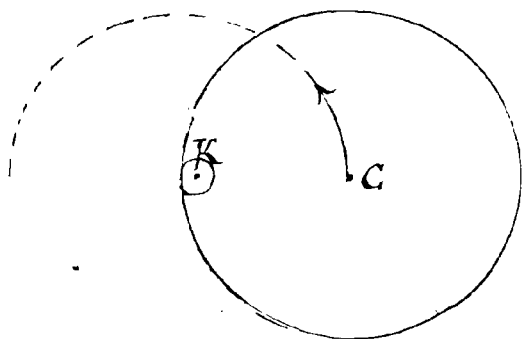
Il n'est donc pas impossible de concevoir que les parties externes de la Terre, si peu solidaires entre elles qu'on les suppose, pourraient obéir aux actions extérieures dans une plus grande mesure que les parties centrales, puisqu'il suffirait que les moments d'inertie relatifs à cette couche externe aient des valeurs différentes de celles qui se rapportent à l'ensemble.

Alors quand les déclinaisons de la Lune et du Soleil sont grandes et que leurs actions s'ajoutent, l'axe résultant des moments des quantités de mouvement pourrait s'écarter de l'axe principal d'inertie, seulement pour un temps limité au bout duquel, l'action perturbatrice étant suffisamment atténuée, ils seraient ramenés à une coïncidence au moins approchée, pour se séparer de nouveau lorsque les circonstances favorables se reproduiraient plus ou moins

complètement.

S'il en était ainsi encore l'angle  $KOC$  compris entre les axes ne pourrait guère dépasser la grandeur répondant au maximum de l'action perturbatrice se rapportant à la couche externe et c'est en quelques jours que, à chaque demi lunaison, il atteindrait le maximum correspondant.

Une lunette fixée à la couche externe accompagnerait l'axe  $OC$  dans son déplacement conique, à peu



près diurne, autour de  $OK$  et si on suppose pour fixer les idées, que la trace de l'axe optique sur la sphère céleste coïncide avec celle de l'axe  $OC$ , ces traces ne se sépareront pas et engendreront le petit cercle de rayon  $KC$  dans l'intervalle d'un jour, à très peu près.

Un couple d'étoiles circumpolaires assez voisines du pôle pour que leurs trajectoires soient tout entières dans le champ, les composantes ayant des ascensions droites différentes de douze heures, se prêterait particulièrement à une détermination du pôle; deux couples rectangulaires donneraient une détermination complète, rattachée micrométriquement à l'axe optique, c'est-à-dire à la Terre. Les déplacements de l'axe  $OC$  dans l'espace, lors d'un maximum de l'angle  $KOC$ , se manifesteraient donc en quelques heures, tandis qu'à quelques jours d'intervalle l'atténuation de l'angle  $KOC$  rendrait le phénomène insensible. D'ailleurs l'interprétation ne comporterait aucun doute puisque, outre que l'amplitude doit passer par un maximum à une époque connue à l'avance, la phase est également conséquence de la direction du plan  $KOC$ , qui, déterminée dans l'espace par celle de l'action perturbatrice, peut être rattaché pour chacune des heures au méridien local.

De telles perturbations diurnes suivant une loi



aussi complexe en ce qui concerne l'amplitude et la phase troublées encore par l'amortissement, doivent avoir des effets indémêlables a priori sur l'ensemble des observations recueillies, même en un lieu donné, suivant le mode usuel, en séries de quelques heures réparties sur chacune des nuits où les circonstances atmosphériques sont favorables, ces effets sont d'ailleurs fatalement confondus avec ceux d'un grand nombre de causes d'erreurs systématiques ou accidentelles du même ordre de grandeur et la séparation exigera sans doute une appropriation spéciale du mode d'observation.

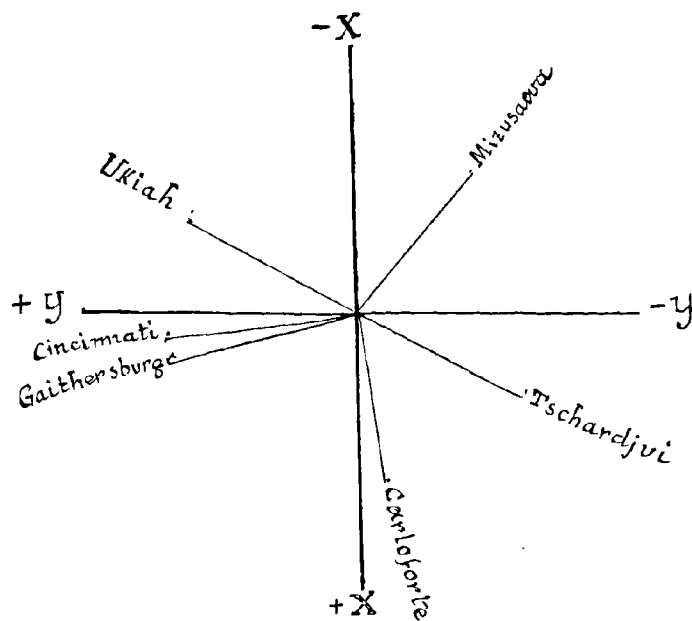
Enoi qu'il en soit il est dès maintenant établi que le pôle subit des déplacements appréciables dont l'amplitude totale peut atteindre quatre dixièmes de seconde, ainsi qu'il apparaît sur le diagramme suivant.

## Légende.

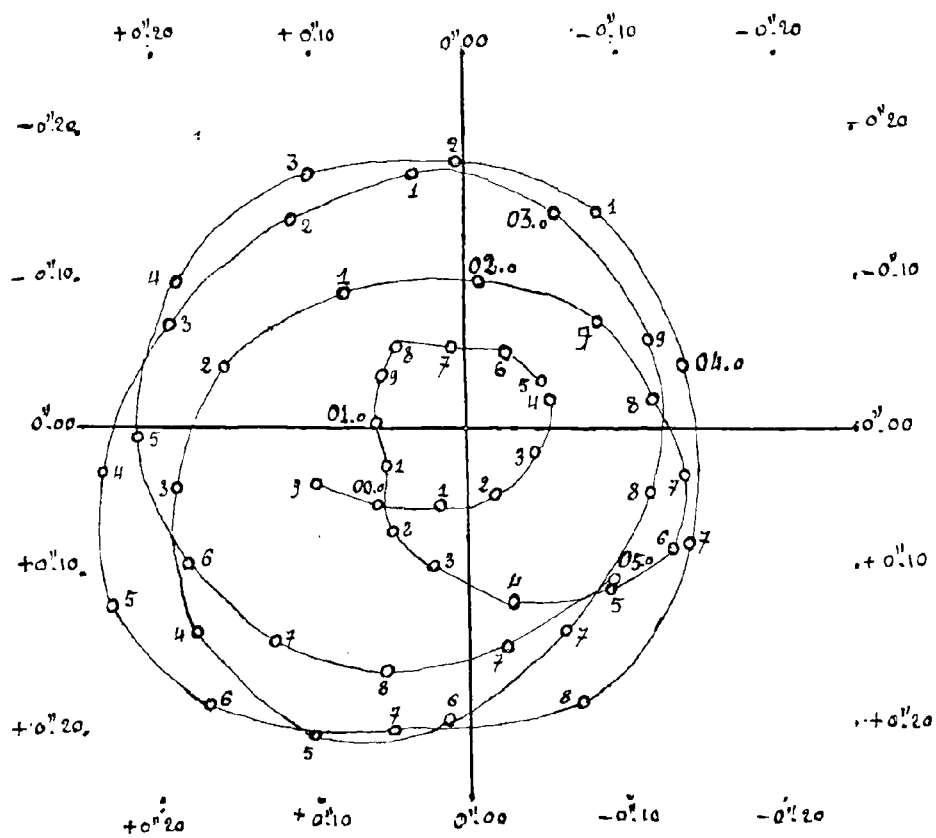
Courbe montrant les déplacements du pôle, de 1900 à 1906, d'après les variations de latitude observées dans les six stations établies par le Service international des latitudes sur le parallèle de  $+39^{\circ}8'$ . savoir :

Mitusaya, Japon,	141°	E de Greenwich
Tschardjui, Asie Centrale,	63°	—
Carloforte, Italie	8°	—
Gaithersbourg, Amérique	77°	O. de Greenwich
Cincinnati, id.	84°	—
Ukiak, id.	123°	—

## Verteilung der Stationen.



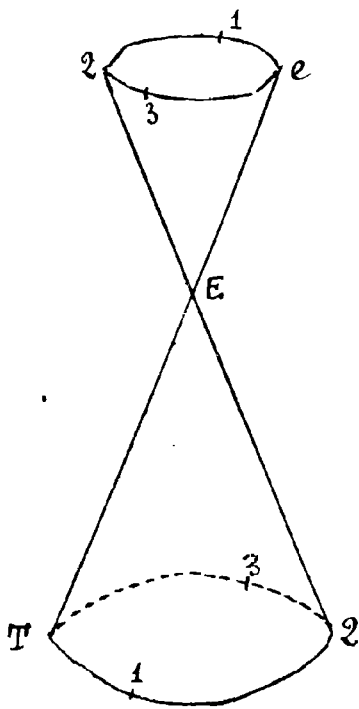
## Bahn des Nordpols der Erdachse.



## Aberration.

Bradley se proposant de mettre en évidence le très petit déplacement des étoiles devant résulter du mouvement annuel de la Terre, la parallaxe annuelle, a institué et poursuivi avec une remarquable persévérance des observations qui l'ont conduit successivement à découvrir deux phénomènes dont la connaissance est bien autrement importante en ce qui concerne la précision des observations : l'aberration (1728) et la nutation (1745).

Par le fait de la parallaxe annuelle une étoile doit paraître décrire, sur la sphère céleste, de rayon aussi grand qu'on voudra, comprenant les étoiles à son intérieur, une trajectoire qui est la trace de la seconde nappe du cône dont la directrice est l'orbite terrestre et le sommet l'étoile considérée;



si l'étoile considérée; si l'étoile était située sur l'axe de l'écliptique le cône serait droit et la trajectoire circulaire.

L'homothétie inverse des sections parallèles des deux nappes montre que le mouvement réel de la Terre et celui apparent de l'étoile ont même période que les trajectoires, sont parcourus dans le même sens, mais que la phase relative est égale à  $\pi$ . L'amplitude du déplacement dépend seulement de la distance, et l'on sait que c'est en comparant directement les positions de deux étoiles très différemment distantes de la Terre

que Bessel a réussi à évaluer la parallaxe de certaines étoiles (1838).

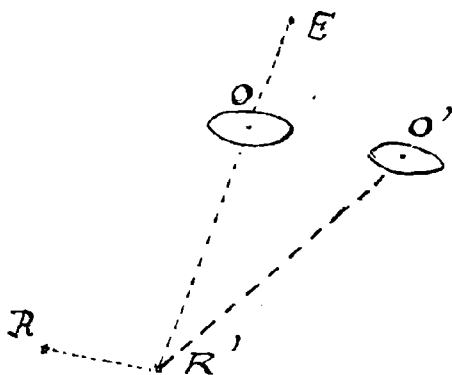
Par ses premières observations Bradley a trouvé que toutes les étoiles avaient des déplacements annuels de même amplitude égale à  $20''$ ; une étoile située sur

94.

l'axe de l'écliptique paraissait décrire un petit cercle, mais la différence de phase au lieu d'être égale à  $\pi$  était une avance de  $\frac{\pi}{2}$ .

Cette différence de phase rendait impossible le rapprochement avec la parallaxe ; d'ailleurs on ne pouvait guère admettre que par rencontre fortuite toutes les étoiles observées se seraient trouvées à la même distance de la Terre. Ayant aperçu et remarqué que la direction d'une girouette, liée à un bateau en mouvement, dépend à la fois de la direction du vent et de celle du mouvement, Bradley fut amené à reconnaître que les déplacements qu'il venait d'observer avec précision, signalés antérieurement sous le nom d'aberration des fixes, résultaient de la transmission successive de la lumière et du déplacement de l'observateur. Le fait de la transmission successive de la lumière avait été découvert par Rømer, (1675) en suite de l'observation régulière des éclipses du premier satellite de Jupiter dont la période était troublée par l'influence de la variation de distance de la planète à la Terre.

La direction de propagation du rayon lumineux est déterminée à l'aide de deux points de repères solidaires de l'appareil optique d'observation, le centre optique de l'objectif et le réticule. Si entre le moment où l'ébranlement lumineux passe au premier point, et celui où il arrive au second point la lunette est déplacée l'axe optique aura, au moment de l'observation, c'est-à-dire lorsque l'ébranlement arrivera au réticule, une direction différente de celle du rayon lumineux. Par exemple, si pendant la durée de la transmission, du centre optique au réticule, la lunette a subi un mouvement de translation  $RR'$  le réticule aura dû être placé en arrière de manière



qu'il soit en  $R'$  au moment où l'ébranlement y arrive, et l'axe optique définira la direction  $O'R'$  parallèle à  $OR$ , au lieu de celle  $OR'$ . La déviation est dans le plan déterminé par l'astre et la direction de la vitesse, ce qui correspond à la phase observée,  $\frac{\pi}{2}$  en avance.

La vitesse du mouvement de la Terre autour du Soleil est d'environ 30 kilomètres par seconde, celle de la lumière 300 000 ; donc le maximum de l'angle d'aberration est (1 : 10 000) en parties du rayon, ou à peu près 20". Quand le déplacement de l'observateur a lieu dans la direction de la propagation, l'angle s'annule et le phénomène de l'aberration se transforme en celui de Doppler-Fizeau.

La constante de l'aberration qui intervient dans la réduction de toute observation astronomique et d'ailleurs fournit l'un des moyens de rattacher l'unité de longueur astronomique à celle métrique, lorsqu'on y associe la détermination terrestre de la vitesse de la lumière, a été l'objet de minutieuses recherches. W. Struve de Poulkova, a fait construire un instrument spécial pour observer des étoiles culminant près du zénith lors de leurs deux passages dans le vertical perpendiculaire au méridien ; par application d'une méthode proposée d'abord par Römer et utilisée par Bessel pour des opérations géodésiques, en vue de la détermination des latitudes géographiques, Struve a pu obtenir des résultats indépendants de la réfraction. (feuilles du cours d'astronomie page 52).

En conséquence d'une décision de la conférence internationale des étoiles fondamentales, la valeur adoptée est 20",47.

Le mouvement de l'observateur résultant de la rotation de la Terre autour de son axe donne lieu à l'aberration diurne. Pour un observateur situé à l'équateur, la vitesse d'entraînement est environ 460 mètres ; le rapport de celle-ci à la vitesse de la lumière, multiplié par 206 265, donne 0",32. Celle est la déviation pour un astre observé d'un point de l'équateur dans le méridien ; la direction d'un astre observé à l'horizon et dans le premier ou le troisième vertical ne serait pas altérée. La déviation angulaire de la lunette résultant de la rotation de la Terre ne peut donner aucun effet appréciable étant donnée la faible différence de vitesse absolue de l'objectif

et de l'oculaire qui dépend de la longueur de la lunette et de la vitesse angulaire de rotation ; l'observation, faite au pôle, d'un astre situé à l'horizon ne donnerait lieu à aucune déviation appréciable.

L'aberration annuelle ou celle diurne est une altération de la direction réelle de l'astre, résultant du déplacement de la lunette durant le cheminement de l'ébranlement lumineux à son intérieur, et par suite une conséquence du mouvement de l'observateur entraîné avec la terre.

Laissons ce phénomène de côté, il y a lieu de remarquer d'autre part que l'on voit un astre, non pas où il est au moment de l'observation, mais au lieu qu'il occupait lorsque l'ébranlement lumineux en est parti. Si donc on veut que les coordonnées observées correspondent au lieu concomitant de l'astre il faut : ou bien ajouter aux coordonnées observées les variations que celles-ci ont dû subir pendant le même temps ; retrancher de l'époque de l'observation le temps employé par la lumière pour venir de l'astre à la terre, c'est-à-dire le rapport de la distance à la vitesse ( $D: 300\ 000$ ).

À la distance moyenne du Soleil à la terre répond une durée d'environ 8 minutes 18 secondes ; à la distance des étoiles répondrait une durée d'un plus ou moins grand nombre d'années, de sorte que la distribution apparente de ces astres est différente de la répartition réelle de leurs projections sur la sphère céleste.

---

Fin des Résumés.

---