# ARITHMÉTIQUE

## UNIVERSELLE

# DE NEWTON.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON,

TRADUITE DU LATIN EN FRANÇAIS;

AVEC DES NOTES EXPLICATIVES,

PAR NOEL BEAUDEUX.

---

TOME SECOND.

---

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire, quai des Augustins, N°. 31.

An X. — 1802.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE, OU DE LA COMPOSITION ET DE LA DÉCOMPOSITION ARITHMÉTIQUES.

## *De la manière de résoudre les Équations.*

LORSQU'ON est parvenu à mettre une question en équation, et que cette équation est réduite et ordonnée, si les quantités connues représentées par des lettres, désignent des nombres, il faut substituer à ces lettres, les nombres qu'elles représentent, et on aura une équation numérique, dont la racine satisfera à la question. Par exemple, dans la division d'un angle en cinq parties égales, si je prends $r$ pour le rayon du cercle, $q$ pour la corde du double du complément de l'angle proposé, et $x$ pour la corde du double du complément de la cinquième partie de cet angle, et que je sois parvenu à cette équation $x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x - r^4q = 0$ (*), il peut y avoir des

(*) Pour bien entendre cet énoncé, et savoir de quelle manière l'équation a été trouvée, consultez le problême XXIX, page 174, Tome I^er^. et les notes qui s'y rapportent.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cas particuliers où le rayon $r$ me serait donné en nombres, ainsi que $q$, corde du double du complément de l'angle proposé : par exemple, si $r = 10$ et $q = 3$, je substitue ces nombres à la place de $r$ et de $q$ dans l'équation, et elle devient $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, et en tirant la racine de cette équation, on aura la valeur de $x$, ou la corde du double du complément de la cinquième partie de l'angle donné.

## *De la nature des Racines des Équations.*

*La racine d'une équation est un nombre qui, étant substitué dans l'équation à la place de la lettre qui le représente, fait évanouir tous les termes.*

Ainsi, dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, l'unité est une racine, car, étant substituée à la place de $x$, elle change l'équation en celle-ci : $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, ce qui se réduit à zéro. Mais il peut y avoir plusieurs autres racines de la même équation; car si, à la place de $x$ et de ces puissances, on substitue 2 et ses puissances, elle deviendra, $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, quantité où tous les termes se détruisent. Ensuite si, à la place de $x$ et de ses puissances, on substitue $+ 3$ ou $- 5$ et leurs puissances, l'équation sera encore réduite à zéro. Dans ces quatre cas, les termes positifs sont détruits par les négatifs. Ainsi, comme les nombres 1, 2, 3 et $- 5$ substitués successivement dans l'équation, y remplissent la même fonction que $x$, qui est de réduire à zéro la totalité de ses termes, chacun de ces nombres est une racine de l'équation.

En effet, il n'est pas étonnant qu'une équation ait plusieurs racines, puisqu'un même problême a plusieurs solutions.

Par exemple, si l'on cherche l'intersection de deux cercles donnés,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

il est évident qu'il y a deux intersections, et par conséquent l'équation a deux solutions. Donc l'équation qui détermine l'intersection a deux racines, une pour chaque intersection; à moins que, dans les quantités données, il n'y ait quelque condition qui détermine la réponse à une seule intersection.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 8). Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver la cinquième partie $AP$ de l'arc $APB$. Alors l'équation qui donnera la solution de ce problême, exprimera la cinquième partie de tous les arcs qui sont terminés aux points $A$ et $B$. Ainsi elle exprimera la cinquième partie de $ASB$; la cinquième partie de $APBSAPB$; celle de $ASBPASB$; celle de $APBSAPBSAPB$, tout aussi bien que la cinquième partie de $APB$. Et si vous divisez toute la circonférence en cinq parties égales, $PQ$, $QR$, $RS$, $SF$, $FP$; la cinquième partie de chacun des arcs ci-dessus, sera respectivement, $AF$, $AQ$, $AFS$, $AQR$. Ainsi, en cherchant la cinquième partie de tous les arcs que soutend la corde $AB$, il faut, pour déterminer tous les cas, couper la circonférence en cinq points $P$, $Q$, $R$, $S$, $F$, et par conséquent l'équation qui doit renfermer tous ces cas, aura cinq racines; car la cinquième partie de chacun de ces arcs dépend des mêmes données; et on calculerait l'équation pour la quintisection de chacun d'eux, de la même manière; de sorte qu'on arriverait toujours à la même équation finale, soit qu'on cherchât la cinquième partie de l'arc $APB$, ou la cinquième partie de l'arc $ASB$, ou enfin la cinquième partie d'un arc quelconque de ceux que nous avons nommés. Donc si l'équation propre à déterminer la cinquième partie de l'arc $APB$, n'avait qu'une seule racine, comme c'est aussi la même équation qui donne la cinquième partie de l'arc $ASB$, il suivrait de-là, que les cinquièmes parties de deux arcs inégaux



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

seraient égales, parce que l'une et l'autre seraient exprimées par la racine unique d'une même équation.

*Il est donc nécessaire que l'équation de tout problême ait autant de racines que le problême lui-même renferme de cas différens dépendans des mêmes données, et déterminés par la même méthode de calcul.*

*L'équation peut avoir autant de racines qu'elle a de dimensions, mais elle ne peut pas en avoir davantage.*

Ainsi l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, a quatre racines, $1$, $2$, $3$, $-5$. Mais elle n'en a pas davantage. En effet, chacun de ces nombres, mis dans l'équation à la place de $x$, fera que tous les termes se détruiront mutuellement, comme nous l'avons vu. Mais tout autre nombre, hors ces quatre, étant substitué à la place de $x$, n'opérera pas cette destruction.

Au reste, on jugera facilement et de la nature, et du nombre des racines d'une équation, par la manière même dont se forme l'équation.

Par exemple, si nous voulons savoir de quelle manière se forme l'équation dont les racines sont $1$, $2$, $3$, et $-5$, il n'y a qu'à supposer que $x$ désigne ces nombres d'une manière ambiguë, c'est-à-dire, que $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$, ou bien que $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ et $x + 5 = 0$. Si on multiplie d'abord $x - 1$ par $x - 2$, on aura, $x^2 - 3x + 2 = 0$, équation de deux dimensions, et qui a deux racines $1$ et $2$. Et si on multiplie cette équation par $x - 3$, on aura, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, qui a trois racines; et celle-ci multipliée encore par $x + 5$, donne $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, comme ci-dessus. Ainsi cette équation étant engendrée par les quatre facteurs, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x + 5$ multipliés les uns par les autres, si un de

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ces facteurs devient zéro, le produit de tous les autres par celui-ci doit être zéro. Mais lorsqu'aucun des facteurs n'est zéro, il est impossible que le produit total soit zéro. Par conséquent, l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30$, ne peut être égale à zéro que dans quatre cas; lorsque $x - 1 = 0$, ou bien $x - 2 = 0$, ou $x - 3 = 0$, ou $x + 5 = 0$. Donc les seuls nombres, 1, 2, 3 et $-5$ peuvent être les valeurs de $x$, ou être les racines de l'équation. Il faut en dire autant de toutes les équations, parce que nous pouvons imaginer que toutes sont engendrées par une pareille multiplication, quoique ordinairement, il soit fort difficile de reconnaître les facteurs particuliers qui ont servi à les produire; car cette décomposition d'une équation en ses facteurs primitifs, est proprement la résolution de l'équation, ou l'extraction de ses racines. Or les racines étant connues, les facteurs le sont aussi.

Il y a différentes espèces de racines; les positives, comme sont, dans l'exemple cité, 1, 2, 3, et les négatives, comme $-5$. Enfin il se rencontre assez fréquemment des racines impossibles, qu'on appelle imaginaires.

Ainsi dans l'équation $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, les deux racines sont, $a + \sqrt{a^2 - b^2}$, et $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Ces deux racines sont réelles, lorsque $a^2$ est plus grand que $b^2$; mais elles sont impossibles ou imaginaires, lorsque $a^2$ est plus petit que $b^2$, parce qu'alors $a^2 - b^2$ est une quantité négative, et que la racine quarrée d'une telle quantité est impossible, puisque toute racine réelle, soit positive, soit négative, étant multipliée par elle-même, produira toujours un quarré positif. Ainsi la racine d'un quarré négatif est impossible. Par un semblable raisonnement, on voit que l'équation $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$, a une racine réelle, qui est 2, et deux autres,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$1+\sqrt{-2}$, et $1-\sqrt{-2}$, qui sont imaginaires. Car en écrivant l'une quelconque de ces trois racines, $2$, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$, à la place de $x$, dans l'équation, tous les termes se détruisent mutuellement. Or les deux racines, $1+\sqrt{-2}$, et $1-\sqrt{-2}$, sont imaginaires, parce qu'il faut, pour les obtenir, tirer la racine quarrée du nombre négatif $-2$, ce qui est impossible.

*Il faut bien que dans les équations il y ait des racines impossibles, sans quoi, dans les problêmes, certains cas impossibles se trouveraient possibles.*

Si l'on veut, par exemple, déterminer l'intersection d'un cercle par une ligne droite; qu'on exprime par une lettre la longueur du rayon, et par une autre lettre la distance de la ligne droite au centre du cercle; et que, parvenu à l'équation qui exprime l'intersection, on mette, au lieu de la lettre qui désigne la distance de la droite au centre, un nombre plus petit que le rayon, l'intersection sera possible. Mais si, au lieu de cette lettre, on met un nombre plus grand que le rayon, l'intersection sera impossible. Ainsi l'équation devant exprimer tous les cas du problême, aussi bien ceux qui sont impossibles que ceux qui sont possibles, il faut que ses deux racines puissent devenir possibles ou imaginaires.

Ainsi lorsqu'un cercle *CDEF* et une ellipse *ACBF* (*Pl.* VIII, *Fig.* 9) se coupent mutuellement aux points *C*, *D*, *E*, *F*, et que des points d'intersection on abaisse sur la droite *AB* donnée de position, des perpendiculaires *CG*, *DH*, *EI*, *FK*, et qu'en cherchant la longueur de l'une quelconque de ces perpendiculaires, on arrive enfin à une équation; il faudra, puisque le cercle coupe l'ellipse en quatre points, il faudra, dis-je, que cette équation ait

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

quatre racines, qui seront ces quatre perpendiculaires. Que si le centre du cercle demeurant fixe, son rayon se raccourcissait, jusqu'à ce que les deux points $E$ et $F$ se rapprochant toujours, parvinssent enfin à se confondre, et à ne plus former qu'un point de contact entre l'ellipse et le cercle, deux des racines de l'équation, qui exprimaient les deux perpendiculaires $EI$, $FK$, confondues dans ce cas en une seule ligne droite, deviendraient égales. Et si le cercle diminuait encore, de manière qu'il ne touchât même plus l'ellipse aux deux points $E$, $F$, mais qu'il continuât pourtant à la couper encore aux deux autres points $C$ et $D$, alors les deux perpendiculaires $EI$, $FK$ étant devenues impossibles, il arriverait que des quatre racines de l'équation, les deux qui exprimaient ces perpendiculaires deviendraient imaginaires en même temps que ces perpendiculaires. C'est ainsi que dans toutes les équations, en augmentant ou en diminuant quelque quantité, deux racines qui étaient inégales deviennent d'abord égales, et finissent par devenir impossibles. De-là vient que le nombre des racines impossibles est toujours pair.

*Il y a cependant des cas où les racines des équations sont possibles, lorsque la figure nous les montre impossibles ; mais cela n'arrive que parce qu'une figure a des limites qu'une équation ne reconnaît pas.*

(*Pl.* VIII, *Fig.* 10). Par exemple, si dans le cercle $ABD$ on donne le diamètre $AB$ et la ligne inscrite $AD$, ainsi que la perpendiculaire $DC$, et qu'on cherche le segment $AC$ du diamètre, on aura, $AC = \frac{\overline{AD}^2}{AB}$. Or dans cette équation, que $AD$ soit plus petit ou plus grand que $AB$, $AC$ est toujours réel. Mais dans la figure, lorsque $AD$ est plus grand que le diamètre, $AC$ est une

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

quantité impossible. En effet, dans la figure on suppose que $AD$ est inscrit dans le cercle, et par conséquent il ne peut être plus grand que le diamètre du cercle; au lieu que dans l'équation, il n'y a aucune limite de cette espèce, elle n'exige que cette seule condition, que les lignes $AB$, $AD$, $AC$ soient en proportion continue. Et puisque l'équation n'est pas bornée aux conditions de la figure, il n'est pas nécessaire non plus qu'elle soit restreinte par les limites de ces conditions. Une figure peut donner des limites aux différens cas d'un problême, mais l'équation l'embrasse dans toute sa généralité. Concluons donc, d'après tout ce qui vient d'être dit, 1°. que dans les équations de dimensions impaires, il est impossible que toutes les racines soient imaginaires. 2°. Que les figures donnent souvent aux quantités d'où dépendent toutes les racines, des limites telles, qu'il est impossible de les franchir sans anéantir toutes les conditions des figures.

*Les racines réelles se divisent en positives et en négatives. Quand les positives sont dirigées dans un sens, les négatives sont dirigées dans le sens opposé.*

(*Pl.* VIII, *Fig.* 9). C'est ainsi qu'en cherchant la perpendiculaire $CG$, on tombera dans une équation qui aura deux racines positives $CG$ et $DH$ dirigées des points $C$ et $D$ vers le bas, et deux racines négatives $EI$, $FK$ partant des points $E$ et $F$, et dirigées de bas en haut.

Supposons encore que sur la droite $AB$ vers laquelle tendent toutes les perpendiculaires, on donne un point quelconque $P$, et qu'on cherche une partie $PG$ de la droite $AB$, s'étendant du point $P$ vers une des perpendiculaires, vers $CG$, par exemple, on arrivera à une équation qui aura quatre racines, $PG$, $PH$, $PI$, $PK$.

La

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

La racine cherchée $PG$, et toutes celles qui tendent d'un même côté que $PG$, telle que $PK$, seront positives; mais celles qui tendent du côté opposé, telles que $PH$ et $PI$, seront négatives.

*Lorsqu'une équation ne contient aucune racine imaginaire, on peut connaître par les signes qui affectent ses termes, le nombre des racines positives, ainsi que le nombre des racines négatives qu'elle contient; car il y aura autant de racines positives que de variations de signes de + en — et de — en + d'un terme à son suivant : toutes les autres racines seront négatives.*

Dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, les signes se suivent dans cet ordre : +, —, —, +, —. Du premier au second, je compte une variation + et —, du troisième au quatrième, une variation — et +, et du quatrième au cinquième, une autre variation + et —. Il y a donc en tout trois variations, et par conséquent trois racines positives, donc une seule est négative. Mais lorsqu'il se trouve des racines imaginaires, cette règle n'a plus lieu, à moins que ces racines imaginaires n'étant ni positives, ni négatives, on ne les regarde comme des racines ambiguës. Ainsi dans l'équation $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, les signes indiquent une racine positive et deux négatives; supposez que $x = 2p$, ou que $x - 2p = 0$, et multipliez la première équation par $x - 2p = 0$, de cette manière, l'équation résultante devra contenir une racine positive de plus que la première équation, et il viendra........

$x^4 - px^3 + p^2x^2 \left.\begin{matrix} -6p^3 \\ -q \end{matrix}\right\} x + 2pq = 0$, équation qui devrait avoir seulement deux racines positives et deux négatives ; cependant, en considérant les variations des signes, on voit qu'elle a quatre racines positives. Ceci vient donc de deux racines imaginaires, qui, par leur ambigüité, se montrent sous la forme de racines négatives


IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dans la première équation, et sous celle de positives dans la dernière.

Au reste, on peut presque toujours connaître le nombre des racines imaginaires qui se trouvent dans une équation, par cette règle.

*Prenez une suite de fractions dont les dénominateurs forment la progression arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, etc. en suivant ainsi jusqu'au nombre qui sera l'indicateur des dimensions de votre équation; et pour les numérateurs de vos fractions, prenez la suite des termes qui forme les dénominateurs, mais dans un ordre renversé. Divisez chacune de ces fractions par celle qui la précède, et placez les fractions qui résulteront de ces divisions, au-dessus des termes moyens de l'équation. Ensuite élevez chaque terme moyen au quarré, et multipliez ce quarré par la fraction qui est au-dessus du terme correspondant, et puis examinez si ce produit est plus grand ou plus petit que le rectangle des deux termes adjacens à droite et à gauche, au terme que vous examinez; si plus grand, placez au-dessous de ce terme le signe +; si plus petit, placez au-dessous le signe —. Écrivez sous le premier et le dernier termes, le signe +. Et il y aura dans l'équation autant de racines imaginaires que de variations dans les signes souscrits de + en — et de — en +.* (67).

Si on a l'équation $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, que l'on forme d'abord cette série de fractions, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, ensuite on divisera la seconde $\frac{2}{2}$ par la première $\frac{3}{1}$, et la troisième $\frac{1}{3}$ par la seconde $\frac{2}{2}$, et on placera les quotiens $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ au-dessus des termes moyens, comme il suit : $\underset{+}{x^3} + \underset{-}{\overset{\frac{1}{3}}{px^2}} + \underset{+}{\overset{\frac{1}{3}}{3p^2x}} - \underset{+}{q} = 0$. Après cela, comme le quarré du second terme $px^2$ multiplié par la fraction $\frac{1}{3}$ qui est au-dessus de lui, donne un produit $\frac{p^2x^4}{3}$, moins grand que le produit du premier terme $x^3$ par le troisième terme $3p^2x$, produit qui est $3p^2x^4$, on placera sous le terme $px^2$ le signe —. Mais comme le quarré $9p^4x^2$ du troisième terme $3p^2x$ multiplié par la fraction $\frac{1}{3}$, qui est au-dessus de lui, est plus grand que zéro, et à plus forte raison, plus grand que le produit négatif du second terme $px^2$ par $-q$, on placera sous ce troisième terme le signe +. Et en écrivant sous le premier terme $x^3$, et sous le dernier $-q$, le signe +, les signes souscrits forment la suite, + — + +, dans laquelle il y a deux variations, l'un de + en —, et l'autre de — en +, ce qui indique deux racines imaginaires. On trouvera de même que l'équation $x^3-4x^2+4x-6=0$, a deux racines imaginaires, ainsi que l'équation $x^4-6x^2-3x-2=0$.

La première de ces deux équations se traiterait comme celle de l'exemple précédent : ainsi je ne m'occuperai que de la seconde. Je forme donc la série des fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, je divise la seconde par la première, la troisième par la seconde, et enfin la quatrième par la troisième, ce qui me donne cette suite de fractions $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$ que je place au-dessus des termes moyens de l'équation.

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & -6x^2 & -3x & -2 & =0, \\ + & + & + & - & + & \end{array}$$

Multipliant ensuite le quarré du second terme, qui est ici zéro, par la fraction $\frac{3}{8}$ qui est au-dessus de ce second terme, le produit est zéro, qui est cependant plus grand que le rectangle négatif $-6x^6$ de $x^4$ par $-6x^2$. Ainsi, sous le terme qui manque, et qui est désigné par une étoile, j'écris le signe +. Je continue pour le reste comme dans l'exemple précédent, et la suite des termes souscrits est + + + — +, où il y a deux



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

variations qui indiquent deux racines imaginaires. En s'y prenant de la même manière, on trouvera dans l'équation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, deux racines imaginaires..........

$$\begin{array}{llllll} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \\ x^5 & -\,4x^4 & +\,4x^3 & -\,2x^2 & -\,5x & -\,4 = 0. \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Mais lorsqu'il y a deux ou un plus grand nombre de termes qui manquent, il faut placer sous le premier terme qui manque, le signe $-$, sous le second le signe $+$, sous le troisième le signe $-$, et ainsi de suite, toujours en variant les signes, excepté le cas où le terme qui précède et celui qui suit immédiatement les termes déficiens, auraient des signes contraires; car alors il faut toujours mettre sous le dernier des termes déficiens le signe $+$. Ainsi.....

$$\begin{array}{llllll} x^5 & +\,ax^4 & * & * & * & +\,a^5 = 0, \\ + & + & - & + & - & + \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} x^5 & +\,ax^4 & * & * & * & -\,a^5 = 0. \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

La première de ces équations a quatre racines imaginaires, et la seconde en a deux. L'équation suivante a six racines imaginaires,

$$\begin{array}{llllllll} & \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{9} & \frac{3}{2} & \\ x^7 & -\,2x^6 & +\,3x^5 & -\,2x^4 & +\,x^3 & * & * & -\,3 = 0. \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

Par-là encore, on peut connaître si les racines imaginaires d'une équation, doivent être placées parmi ses racines positives ou parmi ses négatives; car si l'on considère en même temps les signes des termes et les signes souscrits à chacun de ces termes, on aura autant de racines imaginaires positives que de variations de signes d'un terme à l'autre, et autant de racines imaginaires négatives que de permanences dans les signes d'un terme à l'autre. Ainsi, dans l'équation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, les signes souscrits sont

$$\begin{array}{llllll} + & + & - & + & + & + \end{array}$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

les variations $+ - +$, et les termes au-dessus de ces signes étant $-4x^4 + 4x^3 - 2x^2$, leurs signes sont $- + -$, qui, par deux variations, indiquent qu'il y a deux racines positives, en conséquence les deux racines imaginaires doivent être rangées parmi les racines positives (*). Tous les signes de l'équation étant $+ - + - - -$, on voit qu'il y a trois variations qui indiquent trois racines positives, et que par conséquent les deux autres sont négatives. Or parmi les positives, il y en a deux d'imaginaires; il s'en suit donc que l'équation n'a réellement qu'une racine positive, que deux autres sont négatives, et deux autres imaginaires. Si l'équation était............

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -\,4x^4 & -\,4x^3 & -\,2x^2 & -\,5x & -\,4 = 0, \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

la première variation des signes souscrits annonce une racine imaginaire, les termes correspondans à cette première variation étant, $-4x^4 - 4x^3$, on voit qu'il n'y a pas de variation d'un terme à l'autre, donc la racine imaginaire est négative (**). Et les termes correspondans à la

---

(*) En effet, les signes des termes étant $\quad - \quad + \quad -$
et les signes qui leur sont souscrits étant $\quad + \quad - \quad +$
on voit que le signe du premier terme avec son signe souscrit font $\mp$, et que le signe du second terme avec son signe souscrit font $\pm$. Il y a donc une variation du premier au second terme. Il y en a encore une du second au troisième. Donc il y a deux variations, et par conséquent deux racines imaginaires positives.

(**) Newton dit qu'il n'y a point de variation d'un terme à l'autre. En effet,
les signes des termes sont $\quad - \quad -$
les signes souscrits sont $\quad + \quad -$.

Or il est évident que le signe du premier terme et son signe souscrit étant $\mp$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dernière variation des signes souscrits $-+$, étant $-2x^2-5x$, ne donnent point encore de variation : ce qui prouve qu'une seconde racine imaginaire est encore négative. Ainsi tous les signes de l'équation étant $+-----$, où il n'y a qu'une seule variation, il n'y a aussi qu'une racine positive, par conséquent il y en a quatre de négatives. Il suit donc de-là, qu'il y a une racine positive, deux négatives, et deux imaginaires. C'est ainsi qu'on détermine la nature de toutes les racines, lorsque le nombre des imaginaires n'est pas plus grand que celui qu'on peut découvrir par la règle établie ci-dessus; mais il peut arriver, quoique bien rarement, que le nombre des racines imaginaires surpasse celui que la règle a fait connaître.

---

il faudrait, pour une variation, que le signe du terme suivant et son souscrit fussent $\pm$. Ce qui n'est pas.

Donc il n'y a point de variation.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# DES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS.

*Les racines positives d'une équation quelconque peuvent être rendues négatives, et réciproquement on peut changer les négatives en positives; il suffit, pour opérer ces transformations, de changer les signes des termes alternatifs, à partir du second inclusivement.*

Ainsi, dans l'équation $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, on peut changer ses trois racines positives en négatives, et ses deux racines négatives en positives. Pour cela, il suffit de changer les signes du deuxième, quatrième et sixième termes, ce qui donne, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 4 = 0$. Cette dernière équation a les mêmes racines que la précédente, avec la seule différence que celles qui étaient positives dans la première, sont devenues négatives dans la seconde, et réciproquement; en sorte que les deux racines imaginaires qui dans l'une étaient comptées parmi les positives, le sont dans l'autre parmi les négatives. Ainsi ces deux imaginaires étant retranchées, il ne restera qu'une seule racine véritablement négative.

Il y a aussi d'autres transformations d'équations qui ont leurs différens usages. *Par exemple, nous pouvons supposer que la racine d'une équation est égale à une nouvelle inconnue, plus ou moins une quantité connue arbitraire; et il nous sera libre de substituer dans l'équation, à la place de la vraie racine, cette nouvelle quantité qu'on suppose lui être égale.* De cette manière, nous pouvons augmenter ou diminuer, d'une quantité

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

connue, les racines d'une équation; rendre positives quelques-unes de celles qui étaient négatives, et réciproquement; ou même les rendre toutes positives, ou toutes négatives. Ainsi dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, si je veux augmenter les racines d'une unité, je feindrai que $x + 1 = y$, ou que $x = y - 1$, et en écrivant dans l'équation, au lieu de $x$ et de ses puissances, sa nouvelle valeur $y - 1$ et ses puissances, en cette sorte :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
x^4 & y^4 - 4y^3 & + \ 6y^2 & - \ 4y & + & 1 \\
- \ x^3 & - \ y^3 & + \ 3y^2 & - \ 3y & + & 1 \\
- 19x^2 & & - 19y^2 & + 38y & - & 19 \\
+ 49x & & & + 49y & - & 49 \\
- 30 & & & & - & 30 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Résultat.....} \ y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$$

Les racines de la nouvelle équation $y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$, seront, $2, 3, 4, -4$; et chacune d'elles est d'une unité plus grande que sa correspondante dans l'équation proposée, qui a pour racines $1, 2, 3, -5$.

Si au lieu de $x$ j'avais substitué dans l'équation proposée $y + \frac{3}{2}$, il me serait venu l'équation $y^4 + 5y^3 - 10y^2 - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, dans laquelle il y a deux racines positives, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$; et deux racines négatives, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{13}{2}$. Si au lieu de $x$ on écrivait $y - 6$, on aurait une équation dont les racines seraient $7, 8, 9, 1$, qui sont toutes positives. Et enfin si on mettait pour $x$, $y + 4$, les racines deviendraient toutes plus petites de quatre unités, et seraient, $-3, -2, -1, -9$, qui sont, comme on voit, toutes négatives.

C'est ainsi qu'en augmentant ou en diminuant les racines, on parvient

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

parvient quelquefois à mieux découvrir les imaginaires que par la règle que nous avons donnée précédemment. En effet, cette régle ne nous fait appercevoir aucunes racines imaginaires dans l'équation $x^3 - 3a^2x - 3a^3 = 0$. Mais si on augmente ses racines de la quantité $a$, en écrivant $y - a$ au lieu de $x$, l'équation résultante sera, $y^3 - 3ay^2 - a^3 = 0$. Qu'on y applique maintenant la règle, on y trouvera deux racines imaginaires.

*Nous pouvons aussi, par la même méthode, faire disparaître le second terme d'une équation quelconque.* Voici comment il faut s'y prendre: *Substituez dans l'équation, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coëfficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.*

Par exemple, si on proposait de faire évanouir le second terme de l'équation $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$; le coëfficient du second terme étant $-4$, je le divise par 3, et le joins avec le signe $+$ à une nouvelle inconnue $y$, et la somme $y + \frac{4}{3}$ étant substituée à la place de $x$ dans la proposée, il viendra,

$$\begin{array}{rrrr}
y^3 + 4y^2 & + \frac{16}{3}y & + \frac{64}{27} \\
- 4y^2 & - \frac{32}{3}y & - \frac{64}{9} \\
 & + 4y & + \frac{16}{3} \\
 & & - 6 \\
\hline
y^3 \quad * \quad - & \frac{4}{3}y & - \frac{146}{27} = 0.
\end{array}$$

On peut encore, par la même méthode, faire évanouir le troisième terme d'une équation. Soit proposée l'équation $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$, et qu'on suppose $x = y - e$. En substituant $y - e$ pour $x$, il naîtra cette équation,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} \Big\{ y^3 \begin{matrix} +6e^2 \\ +9e \\ +3 \end{matrix} \Big\{ y^2 \begin{matrix} -4e^3 \\ -9e^2 \\ -6e \\ -5 \end{matrix} \Bigg\} y \begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3e^2 \\ +5e \\ -2 \end{matrix} = 0$$

Le troisième terme de cette équation est, $6e^2 + 9e + 3$ multiplié par $y^2$. Pour que ce terme s'évanouisse, il faut que la quantité $6e^2 + 9e + 3$ devienne zéro. Supposons en effet qu'elle soit zéro, afin de pouvoir découvrir par-là quel nombre il faut substituer à $e$, afin de faire disparaître ce troisième terme. Cette supposition nous donne l'équation du second degré, $6e^2 + 9e + 3 = 0$, qui, étant divisée par 6, devient, $e^2 + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, et en la résolvant, on a, $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, ou bien, $-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, qui se réduit à $-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$. Ainsi $e = -\frac{1}{2}$, ou bien, $e = -1$. Par conséquent $y - e$ sera, ou $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$. Et comme on a substitué dans l'équation $y - e$ au lieu de $x$, il faut substituer $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$, au lieu de $y - e$, et dans l'équation qui en résultera, le troisième terme ne se trouvera plus, et il disparaîtra également, soit qu'on substitue $y + \frac{1}{2}$, ou $y + 1$. Dans le premier cas, l'équation résultante sera, $y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0$; et dans le second, $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

*On peut encore multiplier ou diviser les racines des équations par des nombres donnés; cela sert à augmenter ou à diminuer la valeur des racines, ou encore à faire disparaître les fractions ou les quantités radicales.*

Si on a, par exemple, l'équation $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$. Pour faire disparaître les fractions, je fais $y = \frac{1}{3}z$, et en substituant $\frac{1}{3}z$ pour $y$ dans l'équation, elle devient, $\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, qui se réduit, en ôtant le diviseur 27, à $z^3 - 12z - 146 = 0$, et les racines de cette nouvelle équation sont triples de celles de la précédente. Si je voulais maintenant diminuer les dernières, je ferais,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$2v = z$, et il viendrait, $8v^3 - 24v - 146 = 0$; et en divisant tout par 8, elle se réduirait à $v^3 - 3v - \frac{73}{4} = 0$, équation dont les racines ne sont que la moitié de celles de l'équation $z^3 - 12z - 146 = 0$. Enfin lorsqu'on aura obtenu la valeur de $v$ par la dernière équation, on fera, $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, et $y + \frac{4}{3} = x$. C'est ainsi que l'on connaîtra la valeur de la racine $x$ dans la première équation proposée, $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$.

De même, pour faire évanouir le radical $\sqrt{3}$ de l'équation $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, je fais $x = y\sqrt{3}$, et l'équation proposée devient, $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, et en divisant tout par $\sqrt{3}$, elle se réduit à $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

*On peut aussi changer les racines des équations en d'autres qui soient en raison inverse des premières, et par ce moyen l'équation se trouve quelquefois réduite à une forme plus commode.*

Ainsi notre dernière équation $3y^3 - 2y + 1 = 0$, en faisant $y = \frac{1}{z}$, se changerait en celle-ci, $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, ou, en multipliant tous les termes par $z^3$, et en ordonnant, par rapport aux puissances de $z$, on aurait, $z^3 - 2z^2 + 3 = 0$. On peut encore, par cette méthode, faire évanouir l'avant-dernier terme d'une équation, pourvu qu'on ait d'abord ôté le second terme comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent. Mais si vous voulez débarrasser l'équation de l'ante-pénultième terme, il faudra d'abord faire évanouir le troisième. Ce moyen sert encore à convertir la plus petite racine d'une équation en la plus grande, et réciproquement la plus grande en la plus petite; et cela fournit quelques applications utiles, comme on le verra dans ce qui suit. Par exemple, étant donnée l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, dont les racines sont,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

1, 2, 3, — 5, si l'on substitue $\frac{1}{y}$ au lieu de $x$, il en résultera l'équation, $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{y^2} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, et en multipliant tous les termes par $y^4$, et les divisant par 30, ordonnant et changeant les signes, elle deviendra, $y^4 - \frac{49}{30} y^3 + \frac{19}{30} y^2 + \frac{1}{30} y - \frac{1}{30} = 0$, dont les racines sont, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$; où l'on voit que la plus grande des racines positives 3, de la proposée est convertie en la plus petite $\frac{1}{3}$, et que celle qui d'abord était la plus petite 1, est devenue maintenant la plus grande, et que la racine négative — 5, qui de toutes les racines de la proposée s'éloignait le plus de zéro, est maintenant celle qui en est la plus voisine.

Il y a encore d'autres transformations des équations; mais toutes peuvent se rapporter à l'espèce de celle où nous avons fait disparaître le troisième terme d'une équation, ainsi nous n'en parlerons plus. Disons plutôt quelque chose des limites des équations.

*Il est évident, par la manière dont se forment les équations, que le coëfficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme de toutes les racines; que le coëfficient du troisième terme est égal à la somme des produits deux-à-deux de toutes les racines; que le coëfficient du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des produits trois-à-trois de toutes les racines; que le coëfficient du cinquième est égal à la somme des produits quatre-à-quatre de toutes les racines, et ainsi jusqu'à l'infini.*

Prenons $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, etc., ou bien, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$; et en multipliant successivement toutes ces équations les unes par les autres, nous aurons, 1°. en multipliant $x - a$ par $x - b$, $x^2 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}\right\} x + ab = 0$, où l'on voit que le coëfficient du second terme, en changeant son

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

signe, est $a + b$, somme des racines $a$ et $b$; et $ab$, coëfficient du troisième terme (*), est égal au produit des deux racines. En multipliant ensuite l'équation trouvée par $x + c$, il viendra l'équation du troisième degré, $x^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix}\right\} x + abc = 0$. En changeant les signes du coëfficient du second terme, on a, $a + b - c$, qui est la somme des racines $a$, $b$, $-c$; le coëfficient du troisième terme, $ab - ac - bc$, est égal à la somme des produits de $a$ par $b$, de $a$ par $-c$, et de $b$ par $-c$; et enfin le coëfficient du quatrième terme, en changeant son signe, est $-abc$, qui est égal au produit des trois racines $a$, $b$ et $-c$. Qu'on multiplie encore l'équation du troisième degré par $x - d$, il viendra l'équation du quatrième,

$$x^4 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix}\right\} x - abcd = 0,$$ dans laquelle le coëfficient du second terme, en changeant les signes, est $a + b - c + d$, somme de toutes les racines; le coëfficient du troisième terme, $ab - ac - bc + ad + bd - cd$, est la somme des produits deux-à-deux de toutes les racines; le coëfficient du quatrième terme, en changeant les signes, est $-abc + abd - bcd - acd$, somme des produits trois-à-trois de toutes les racines; et enfin le coëfficient du cinquième est le produit de toutes les racines quatre-à-quatre.

---

(*) Newton appelle $ab$, coëfficient du troisième terme. En effet, le dernier terme d'une équation quelconque est censé multiplié par l'inconnue élevée à la puissance 0. Donc la quantité connue qui multiplie cette puissance zéro de l'inconnue, peut être appelée le coëfficient du dernier terme.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

De tout cela nous pouvons conclure qu'une équation quelconque, dont aucun terme n'est fractionnaire ou incommensurable, contient parmi les diviseurs entiers de son dernier terme, soit ses racines commensurables, soit les produits deux-à-deux, ou trois-à-trois, etc. de ses racines. Ainsi lorsqu'on se sera bien assuré qu'aucun des diviseurs du dernier n'est ni une des racines de l'équation, ni le produit de deux ou d'un plus grand nombre de racines, il sera bien évident que l'équation n'a aucune racine, aucun produit deux-à-deux, ou trois-à-trois, etc. de ses racines, qui ne soit incommensurable.

Supposons maintenant que les coëfficiens des termes d'une équation quelconque soient respectivement $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $v$; supposons de plus que les signes de ces coëfficiens soient changés dans tous les termes où ils doivent l'être. En observant bien les signes que doivent avoir les différens termes, on aura, $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + bq + ra + 4s = d$, $pd + qc + rb + sa + 5t = e$, $pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$, et ainsi jusqu'à l'infini, en suivant la marche de la progression. Et $a$ sera la somme des racines, $b$ la somme des quarrés de chacune des racines, $c$ la somme des cubes, $d$ la somme des quatrièmes puissances, $e$ la somme des cinquièmes, $f$ la somme des sixièmes, et ainsi du reste; de manière que dans l'équation $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, où le coëfficient du second terme est $-1$, celui du troisième $-19$, celui du quatrième $+49$, celui du cinquième $-30$, il faudra faire, $p = 1$, $q = 19$, $r = -49$, $s = 30$. De là on tirera, $a = p = 1$, $b = pa + 2q = 1 + 38 = 39$, $c = pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 = -89$, $d = pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 = 723$. Ainsi la somme des racines est $1$, la somme des

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

quarrés des racines est 39, la somme des cubes est $-89$, et la somme des quatrièmes puissances est 723. Or les racines de cette équation étant 1, 2, 3, $-5$, et leur somme $1+2+3-5$, il est clair qu'elle se réduit à 1; la somme des quarrés est $1+4+9+25=39$; celle des cubes est $1+8+27-125=-89$, et celle des quatrièmes puissances est $1+16+81+625=723$. (68).

## *Des limites des Équations.*

C'est par la méthode précédente que l'on parvient à déterminer les limites entre lesquelles sont renfermées les racines d'une équation, lorsqu'elle n'en contient point d'imaginaires; car chacun des quarrés des racines étant positif, leur somme sera aussi positive, et surpassera le quarré de la plus grande racine. Par la même raison, la somme des quatrièmes puissances de toutes les racines surpassera la quatrième puissance de la plus grande racine, et la somme de leurs sixièmes puissances surpassera la sixième puissance de la plus grande racine.

*Si vous désirez donc connaître la limite qu'aucune racine ne peut dépasser, cherchez la somme des quarrés des racines, et prenez-en la racine quarrée, elle sera nécessairement plus grande que la plus grande racine de l'équation. Vous approcherez plus près de la valeur de la plus grande racine, si vous extrayez la racine quatrième de la somme des quatrièmes puissances; plus près encore, si vous extrayez la racine sixième de la somme des sixièmes puissances, et ainsi à l'infini.* (69).

Ainsi, dans l'équation précédente, la somme des quarrés des racines étant 39, et la valeur la plus approchée de $\sqrt{39}$ étant $6\frac{1}{2}$, on voit que $6\frac{1}{2}$ est plus éloigné de zéro qu'aucune des racines

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

1, 2, 3, — 5, de l'équation. Mais la racine quatrième de la somme des quatrièmes puissances étant $\sqrt[4]{723}$, ou 5 $\frac{1}{2}$ environ, approche encore plus de — 5, racine la plus éloignée de zéro.

Si entre la somme des quarrés et la somme des quatrièmes puissances des racines, on prend une moyenne proportionnelle géométrique, elle sera un peu plus grande que la somme des cubes des racines prises toutes avec des signes positifs. (70). Ensuite si l'on ajoute à cette moyenne proportionnelle la somme des cubes, prise avec son propre signe, c'est-à-dire le signe avec lequel on l'a trouvée d'abord; qu'ensuite on l'en retranche, et qu'on prenne la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités, la demi-somme sera plus grande que la somme des cubes de toutes les racines positives de l'équation, et la demi-différence plus grande que la somme des cubes des racines négatives.

*Donc la plus grande des racines positives de l'équation sera plus petite que la racine cubique de cette demi-somme, et la plus grande des racines négatives sera plus petite que la racine cubique de cette demi-différence.* (71).

Ainsi dans l'équation précédente, la moyenne proportionnelle entre la somme des quarrés des racines 39 et la somme de leurs quatrièmes puissances 723, est 168 environ. La somme des cubes prise avec son signe propre, est, comme nous l'avons trouvée plus haut, — 89. La demi-somme de 168 et de — 89, est 39 $\frac{1}{2}$; et la demi-différence de ces deux mêmes nombres est 128 $\frac{1}{2}$. La racine cubique de 39 $\frac{1}{2}$ est 3 $\frac{1}{2}$ environ, quantité plus grande que la plus grande racine positive qui est 3. La racine cubique de 128 $\frac{1}{2}$ est, à très-peu près, 5 $\frac{1}{21}$, quantité plus grande que la racine négative — 5. On voit, par cet exemple, combien on peut approcher de la valeur de

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de la racine d'une équation, lorsqu'il n'y en a qu'une seule positive, ou une seule négative. Cependant on en approcherait encore de plus plus près, si, après avoir cherché une moyenne proportionnelle entre la somme des quatrièmes et la somme des sixièmes puissances des racines de l'équation, on cherchait encore la somme des cinquièmes puissances des racines, et que, prenant la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités, on tirât la racine cinquième de cette demi-somme, et la racine cinquième de cette demi-différence. Car la racine cinquième de la demi-somme surpasserait encore, mais moins que ci-dessus, la plus grande racine positive de l'équation; et la racine cinquième de la demi-différence surpasserait aussi, mais moins que précédemment, la plus grande racine négative. Nous avons vu plus haut, qu'en augmentant ou en diminuant toutes les racines d'une équation, on pouvait rendre une quelconque d'entre elles, la plus petite de toutes, et ensuite convertir cette plus petite en la plus grande; enfin rendre toutes les racines négatives, hors la plus grande. Il résulte de-là, qu'on peut approcher aussi près qu'on veut de la valeur d'une racine cherchée.

*Si dans une équation toutes les racines sont négatives, excepté deux, on peut en déterminer la valeur par la méthode suivante:*

Ayant trouvé, par la méthode précédente, la somme des cubes des deux racines positives, celles des cinquièmes et septièmes puissances de toutes les racines, cherchez entre les sommes des cinquièmes et des septièmes puissances, une moyenne proportionnelle géométrique, et cette moyenne proportionnelle sera, à très-peu près, la différence entre la somme des sixièmes puissances des racines positives, et la somme des sixièmes puissances des racines négatives; ajoutez donc la somme des sixièmes puissances de toutes les racines à cette moyenne



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

proportionnelle, ensuite retranchez-l'en, et la moitié de la première quantité sera la somme des sixièmes puissances des racines positives, et la moitié de la seconde, la somme des sixièmes puissances des racines négatives. Ainsi, prenant et la somme des cubes, et la somme des sixièmes puissances des deux racines positives, doublez la somme des sixièmes puissances, et retranchez-en le quarré de la somme des cubes, tirez la racine quarrée du reste, et cette racine quarrée sera la différence des cubes des deux racines positives. Or, une fois qu'on a la somme et la différence des cubes, on a les cubes eux-mêmes. Tirez donc leurs racines cubiques, et vous aurez, à très-peu près, la valeur des deux racines positives. Et si l'on exécutait une opération analogue dans des puissances plus élevées, on obtiendrait une approximation encore plus grande des deux racines. Mais cette méthode de trouver lès limites ne peut être que de très-peu d'usage à cause de la difficulté des calculs; et d'ailleurs elle ne peut s'appliquer qu'aux équations qui ne contiennent point d'imaginaires. Je vais donc enseigner, pour trouver les limites, un autre moyen plus facile, et qui s'étend à toutes sortes d'équations.

*Multipliez chacun des termes de l'équation par l'exposant de l'inconnue dans ce terme, ensuite divisez le produit par la racine. Recommencez la même opération sur l'équation résultante, et continuez ainsi jusqu'à ce que vous arriviez à un reste qui ne contienne plus que deux termes. Alors si dans ce dernier reste, ainsi que dans ceux de toutes les opérations précédentes, vous substituez pour l'inconnue, un nombre de même signe que le terme le plus élevé de l'équation proposée, et que, par l'effet de la substitution, tous ces restes aient des résultats de même signe que le terme le plus élevé de l'équation proposée; le nombre que vous aurez substitué pour l'inconnue, sera plus grand que la plus grande racine positive de l'équation* (72).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si l'on propose, par exemple, l'équation... $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$,

je multiplie les termes de cette équation par.. $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$.

Et le produit étant.. $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$,

je le divise par $x$, ce qui le réduit à.......... $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.

Je multiplie ensuite ses termes par....... $4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,

ce qui donne........ $20x^4 - 24x^3 - 60x^2 + 60x = 0$.

Et en divisant tout par $x$, il vient....... $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$.

Je multiplie par.... $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,

ce qui produit....... $60x^3 - 48x^2 - 60x = 0$.

Je divise cette dernière par $12x$, et j'ai $5x^2 - 4x - 5 = 0$.

Je multiplie par.... $2 \quad 1 \quad 0$,

et j'ai............... $10x^2 - 4x = 0$.

qui, étant divisé par $2x$, donne......... $5x - 2 = 0$.

Maintenant, le terme le plus élevé $x^5$ de l'équation, étant positif, je cherche quel nombre positif substitué à la place de $x$ dans chacun des résultats qu'on a obtenus, ainsi que dans l'équation proposée, les convertit tous en nombres positifs. J'essaie d'abord $1$, que je substitue à la place de $x$ dans $5x - 2$, ce qui le transforme en $+3$; mais ce même nombre $1$ substitué dans $5x^2 - 4x - 5$, le transforme en $-4$, quantité négative. Ainsi la limite est plus grande



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que 1, j'essaie donc 2, et le substituant à la place de $x$ dans les résultats, on a....................................

$$\left.\begin{array}{l} 5x-2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 5x^2-4x-5 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 5x^3-6x^2-15x+15 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 5x^4-8x^3-30x^2+60x+63 \ldots\ldots \\ x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \text{qui devient} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \left\{\begin{array}{r} +\ 8 \\ +\ 7 \\ +\ 1 \\ +\ 79 \\ +\ 46. \end{array}\right.$$

Ainsi les nombres 8, 7, 1, 79, 46, étant tous positifs, le nombre 2 est plus grand que la plus grande racine positive de l'équation. De même, si je voulais chercher la limite des racines négatives, j'essayerais des substitutions de nombres négatifs, ou, au lieu de cela, je changerais dans tous les résultats, et dans l'équation proposée, les signes des termes de deux en deux, et je substituerais des nombres positifs. En effet, en changeant les signes des termes de deux en deux, les résultats et l'équation proposée deviennent.....

$$\begin{array}{l} 5x+2 \\ 5x^2+4x-5 \\ 5x^3+6x^2-15x-15 \\ 5x^4+8x^3-30x^2-60x+63 \\ x^5+2x^4-10x^3-30x^2+63x+120. \end{array}$$

Je choisis parmi ces résultats, un de ceux qui ont le plus de signes négatifs, par exemple, $5x^4+8x^3-30x^2-60x+63$; j'y substitue à la place de $x$, les nombres 1 et 2, ce qui le convertit respectivement en deux nombres négatifs $-14$, et $-33$. Ainsi la limite est plus grande que $-2$; mais en substituant le nombre 3, il en provient le nombre positif 234. Maintenant je substitue le même nombre 3 dans les autres résultats, ainsi que dans la proposée, et il en provient toujours des nombres positifs. D'où je conclus

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que le nombre — 3 est plus grand qu'aucune racine négative. Par conséquent, 2 et — 3 sont les limites entre lesquelles sont renfermées toutes les racines de l'équation.

La connaissance de ces limites est utile pour trouver les racines rationnelles d'une équation, ainsi que pour déterminer ses racines incommensurables. Elle sert à nous épargner des tentatives inutiles qui nous feraient chercher des racines au-delà des limites où elles sont renfermées. Par exemple, que je veuille connaître si la dernière équation contient des racines rationnelles, il est certain, par tout ce que nous avons vu, qu'elles ne peuvent se trouver que parmi les diviseurs du dernier terme 120; ainsi je devrais substituer successivement chacun de ces diviseurs, à la place de $x$, et si aucun d'eux ne réduisait l'équation à zéro, j'en conclurais qu'elle n'a point de racines rationnelles. Mais le dernier terme 120 a un grand nombre de diviseurs, ce sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, et 120. Et pris en moins, ce sont $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, $-5$, $-6$, $-8$, $-10$, $-12$, $-15$, $-20$, $-24$, $-30$, $-40$, $-60$, $-120$. La substitution de tous ces nombres serait fastidieuse. Mais en sachant que toutes les racines sont renfermées entre les limites 2 et $-3$, nous sommes délivrés de ce travail, car il n'est plus question que de substituer ceux des diviseurs du dernier terme qui se trouvent compris entre les limites, et qui sont ici, 1, $-1$, et $-2$; et si aucun de ces nombres n'est une racine, on est sûr alors que l'équation n'a aucune racine commensurable (*).

(*) Il me semble que cette méthode de trouver les racines commensurables qu'une équation peut renfermer, est bien préférable dans la pratique, à celle qui a été enseignée à la page 46, Tome I$^{er}$, sur-tout quand le dernier terme a beaucoup de diviseurs.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## *Réduction des Équations par les diviseurs incommensurables.*

JUSQU'ICI j'ai donné les moyens de réduire les équations qui ont des diviseurs rationnels. Mais avant de conclure qu'une équation de quatre, six, ou un plus grand nombre de dimensions, est irréductible, il faut avoir essayé si elle n'aurait pas pour diviseur quelque quantité sourde ou incommensurable; ou ce qui revient au même, il faut voir si l'équation ne pourrait pas être partagée en deux parties égales, de chacune desquelles on pût extraire la racine. La méthode suivante nous en fournira le moyen.

*Ordonnez l'équation par rapport aux dimensions de l'inconnue, et faisant passer tous les termes dans un seul membre, afin que la totalité soit égale à zéro, ayez soin que le terme où se trouve la plus haute puissance de l'inconnue, soit toujours positif. Ensuite, si l'équation est quarrée* (car je veux aussi, à cause de l'analogie, y faire entrer ce cas), *retranchez, de part et d'autre, le dernier terme, et ajoutez, aussi de part et d'autre, le quarré de la moitié du coëfficient du terme moyen.*

Soit l'équation $x^2 - ax - b = 0$, retranchez, de part et d'autre, $-b$, et ajoutez $\frac{1}{4}a^2$, et il viendra, $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$, et en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura......... $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, ou bien $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$.

*Si l'équation est de quatre dimensions, comme* $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, *où* $p$, $q$, $r$, $s$ *désignent les coëfficiens des termes de l'équation, avec les signes qui leur appartiennent; faites,*

$$q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha;\quad r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta,\quad s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta;$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*désignez par $n$ un diviseur commun de $\beta$ et de $2\zeta$. Il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier, mais non pas un quarré; il faut de plus que, dans le cas où l'un des deux nombres $p$ et $r$, serait impair, ce diviseur commun soit impair, et qu'étant divisé par 4, il laisse l'unité pour reste. Désignez aussi par $k$, un diviseur de $\frac{\beta}{n}$, si $p$ est un nombre pair: mais si $p$ est impair, $k$ ne désignera que la moitié d'un diviseur impair de $\frac{\beta}{n}$. Enfin $k$ sera zéro, si $\beta$ est nul ou zéro. Retranchez le quotient de cette division de $\frac{1}{2}pk$, et appelez $l$ la moitié du reste. Faites ensuite....* $\frac{\alpha+nk^2}{2}=Q$, *et voyez si la division de $Q^2-s$ par $n$ est possible, et si de plus, la racine de ce quotient est rationnelle et égale à $l$. Si toutes ces conditions ont lieu, ajoutez à chaque membre de l'équation* $nk^2x^2+2nklx+nl^2$, *et en tirant la racine, vous aurez*.................. $x^2+\frac{1}{2}px+Q=(kx+l)\sqrt{n}$. (73).

*Exemple.* Soit proposée l'équation $x^4+12x-17=0$. Comme $p$ et $q$ manquent, que $r=12$, et $s=-17$, si on substitue ces nombres dans les formules, on aura, $\alpha=0$, $\beta=12$, et $\zeta=-17$, et le diviseur commun de $\beta(12)$ et de $2\zeta(-34)$ étant le seul nombre 2, il sera désigné par $n$. Donc $\frac{\beta}{n}=6$. Il faut essayer successivement pour $k$ chacun des diviseurs de 6, qui sont 1, 2, 3, 6; et ensuite les valeurs respectives de $l$, qui sont $-3$, $-\frac{3}{2}$, $-1$, $-\frac{1}{2}$. D'un autre côté on a, $\frac{\alpha+nk^2}{2}=Q$, ce qui se réduit à $k^2=Q$. Et il faut aussi avoir $\sqrt{\frac{Q^2-s}{n}}$, c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{Q^2+17}{2}}=l$. Si l'on écrit successivement pour $k$ les nombres pairs 2, 6, $Q$ devient respectivement 4 et 36, et $Q^2-s$ sera un nombre impair, qui ne pourra par conséquent être divisé par

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$n$ qui est 2; ainsi il faut rejeter les deux nombres 2 et 6. Mais lorsqu'on met pour $k$ les deux nombres 1 et 3, $Q$ devient 1 et 9, et $Q^2 - s$ devient respectivement 18 et 98. Ces deux nombres sont divisibles par $n$, et l'on peut extraire les racines de leurs quotiens. Ces racines sont respectivement $\pm 3$ et $\pm 7$. Cependant la seule racine $-3$ est égale à une des valeurs de $l$. Je fais donc $k = 1$, $l = -3$, et $Q = 1$. Ensuite j'ajoute à chaque membre de l'équation, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, ou bien, $2x^2 - 12x + 18$, ce qui me donne, $x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 18$, qui devient, en tirant la racine quarrée, $x^2 + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Si vous voulez même éviter une extraction de racine, faites, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, et vous trouverez, comme auparavant, $x^2 + 1 = (x - 3) \times \pm\sqrt{2}$. Et en tirant de nouveau la racine de cette équation, on a... $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2}}$. C'est-à-dire, à cause des variations des signes, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, et.......... $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$; ensuite $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$, et $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$. Telles sont les quatre racines de l'équation proposée, $x^4 + 12x - 17 = 0$. Mais de ces quatre racines les deux dernières sont imaginaires.

Soit proposée l'équation $x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 114x - 11 = 0$; et que l'on désigne respectivement $-6$, $-58$, $-114$, $-11$ par $p$, $q$, $r$, $s$, et on aura, $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, et $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. 3 est le diviseur commun et unique des nombres $\beta$ et $2\zeta$, ou de

$-315$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$-315$ et de $-\frac{4533}{2}$. Ainsi $n$ sera ici 3, et $\frac{\beta}{n}$ ou $-105$ aura pour diviseurs 3, 5, 7, 15, 21, 35, et 105, qu'il faut essayer pour $k$. Ainsi j'essaye d'abord 3, et en divisant $\frac{\beta}{n}$ ou $-105$ par $k$ ou par 3, je retranche le quotient $-35$, qui en provient, de $\frac{1}{2}pk$, ou de $-3 \times 3$, et le reste est $+26$, dont il faut que la moitié 13 soit égale à $l$. Mais $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, ou $\frac{-67+27}{2}$, ou $-20$ est égal à $Q$; on aura donc, $Q^2 - s = 411$, qui est divisible par $n$ ou 3, mais le quotient 137 ne donne pas une racine rationnelle. Ainsi je rejette 3, et j'essaye de mettre 5 pour $k$, et le quotient de la division de $\frac{\beta}{n}$ par $k$, ou de $-105$ par 5 est $-21$, qui, étant retranché de $\frac{1}{2}pk$, ou de $-3 \times 5$, donne pour reste $+6$, dont la moitié 3 sera $l$. Ensuite $Q$ ou $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, c'est-à-dire $\frac{-67+75}{2}$ se réduit à 4, et $Q^2 - s$, ou $16 + 11$ est divisible par $n$, et le quotient étant 9, a une racine rationnelle 3, qui est identique avec la valeur trouvée pour $l$. Ainsi je conclus que $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, et $n = 3$. Donc en ajoutant à chaque membre de l'équation proposée, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, ou $75x^2 + 90x + 27$, on pourra extraire la racine de chaque membre, et l'on aura, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - 3x + 4 = \pm(5x + 3)\sqrt{3}$. Et en tirant une seconde fois la racine, $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \ldots$ $\sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

De même, si l'on proposait l'équation $x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 27x + 9 = 0$, j'écris respectivement $-9$, $+15$, $-27$, et $+9$



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

pour $p$, $q$, $r$, $s$; et il vient $-5\frac{1}{4}$ pour $\alpha$, $-50\frac{5}{8}$ pour $\beta$, et $2\frac{7}{64}$ pour $\zeta$. Les diviseurs communs de $\beta$ ou $-\frac{405}{8}$, et de $2\zeta$ ou $\frac{135}{32}$, sont 3, 5, 9, 15, 27, 45, et 135; mais 9 est un quarré, et les nombres 3, 15, 27, 135 étant divisés par 4, ne donnent pas l'unité pour reste, comme ils devraient la donner, à cause du nombre impair $p$. Je rejette donc tous ces nombres, et il ne reste que 5 et 45, qu'il faut essayer pour $n$. Faisons d'abord $n=5$; et il faudra essayer pour $k$ la moitié de chacun des diviseurs impairs de $\frac{\beta}{n}$ ou $-\frac{81}{8}$, qui sont, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$. Si l'on met $\frac{1}{2}$ pour $k$, le quotient $-\frac{81}{4}$, qui provient de la division de $\frac{\beta}{n}$ par $k$, ce quotient, dis-je, étant rétranché de $\frac{1}{2}pk$ ou $-\frac{9}{4}$, donne pour reste 18, qui sera $2l$. Et $\frac{\alpha+nk^2}{2}=-2$ sera $Q$, et $Q^2-s$ ou $-5$ est divisible par $n$ ou 5; mais le quotient étant $-1$, la racine en est impossible, et cependant il faudrait qu'elle fût 9. Ainsi j'en conclus que $k$ ne peut être $\frac{1}{2}$. J'essaye donc $\frac{3}{2}$. En divisant $\frac{\beta}{n}$ ou $-\frac{81}{8}$ par $k\left(\frac{3}{2}\right)$, le quotient sera $-\frac{27}{4}$, que je retranche de $\frac{1}{2}pk$ ou $-\frac{27}{4}$, et il reste o. Ainsi $l$ sera aussi o. Or, dans cette hypothèse, $\frac{\alpha+nk^2}{2}=3=Q$, et $Q^2-s=0$. Donc la seconde valeur de $l$ devant égaler $\sqrt{\frac{Q^2-s}{n}}$, sera encore o. Toutes les conditions sont donc remplies, et j'en conclus que $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, et $Q=3$. Ainsi j'ajoute à chaque membre de l'équation proposée la quantité $nk^2x^2+2nlkx+nl^2$, qui se réduit à $\frac{45x^2}{4}$. Et en extrayant la racine quarrée de chaque membre, il vient, $x^2+\frac{1}{2}px+Q=(kx+l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2-\frac{9}{2}x+3=\frac{3}{2}x\sqrt{5}$.

*On parvient par la même méthode à réduire les équations littérales.* Si,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

par exemple, on a $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, en substituant respectivement $-2a$, $2a^2 - c^2$, $-2a^3$, et $+a^4$ pour $p$, $q$, $r$, $s$, on aura, $\alpha = a^2 - c^2$, $\beta = -ac^2 - a^3$, et $\zeta = \frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}c^4$. Le diviseur commun de $\beta$ et de $2\zeta$ est $a^2 + c^2$, qui sera par conséquent $n$, et $\frac{\beta}{n}$ ou $-a$ n'a pour diviseurs que 1 et $a$. Mais parce que $n$ est de deux dimensions, et que $k\sqrt{n}$ ne doit en avoir qu'une seule, il s'en suit que $k$ ne doit avoir aucune dimension; il ne peut donc être $a$, il faut donc qu'il soit 1. Et en divisant $\frac{\beta}{n}$ par $k$, et retranchant le quotient $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ ou $-a$, il restera zéro pour la valeur de $l$. Ensuite $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, ou $a^2 = Q$, et $Q^2 - s$, ou $a^4 - a^4 = 0$. Ainsi la seconde valeur de $l$ est encore zéro, ce qui prouve que les valeurs trouvées pour $n$, $k$, $l$, et $Q$ sont bonnes. Ainsi j'ajoute à chaque membre de l'équation proposée, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, c'est-à-dire, $a^2x^2 + c^2x^2$; alors la racine de chaque membre peut être extraite, et il vient, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - ax + a^2 = \ldots \pm x\sqrt{a^2 + c^2}$. Et en tirant de nouveau la racine quarrée, on a, $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Jusqu'ici nous avons appliqué la règle à l'extraction des racines sourdes, mais on peut aussi en faire usage pour trouver les racines rationnelles; il suffit pour cela de supposer $n = 1$. En faisant cette recherche, nous pourrons en même temps nous occuper d'une autre, qui sera de voir si une équation, n'ayant aucun terme fractionnaire ou affecté de radicaux, ne contiendrait pas quelque diviseur de deux dimensions, soit commensurable, soit incommensurable. Si



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'on nous donne, par exemple, l'équation $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, en substituant respectivement $-1$, $-5$, $+12$, et $-6$, pour $p$, $q$, $r$, $s$, il viendra, $\alpha = -5\frac{1}{4}$, $\beta = 9\frac{3}{8}$. Et dans cette supposition de $n = 1$, les diviseurs de $\frac{\beta}{n}$ ou $\frac{75}{8}$ sont 1, 3, 5, 15, 25, 75, dont il faut essayer les moitiés pour $k$, parce que $p$ est impair. Si l'on essaye d'abord $\frac{5}{2}$ pour $k$, on aura, $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, et sa moitié $-\frac{5}{2} = l$. Ensuite $\frac{\alpha + nk^2}{2} = \frac{1}{2} = Q$; et $\frac{Q^2 - s}{n} = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, dont la racine est identique avec la valeur trouvée pour $l$.

J'en conclus donc que les valeurs prises pour $n$, $k$, $l$, $Q$, sont bonnes, et qu'en ajoutant à chaque membre de l'équation, $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, c'est-à-dire, $6\frac{1}{4}x^2 - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, il sera possible d'extraire la racine de chaque membre, ce qui donnera, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \pm(kx + l)\sqrt{n}$, ou bien, $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}) \times 1$. Ou bien, les deux équations suivantes, $x^2 - 3x + 3 = 0$, et $x^2 + 2x - 2 = 0$. Ainsi ces deux dernières équations sont les facteurs de l'équation du quatrième degré. Mais on trouve les diviseurs rationnels de cette espèce, d'une manière bien plus expéditive par la méthode que nous avons enseignée précédemment, Tome I$^{er}$, page 49.

Il arrive souvent que les diviseurs de $\frac{\beta}{n}$ étant en grand nombre, ce serait un travail très-pénible que de les essayer tous successivement pour $k$. Voici un moyen d'abréger les essais. Cherchez les diviseurs de $\alpha s - \frac{1}{4}r^2$, car parmi ces diviseurs, ou parmi les moitiés de ceux qui sont impairs, il doit s'en trouver quelqu'un qui soit égal à $Q$. C'est ainsi que, dans le dernier exemple, $\alpha s - \frac{1}{4}r^2$, ou

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$-\frac{9}{2}$, ayant pour diviseurs 1, 3, 9, il faut que parmi ces diviseurs 1, 3, 9, ou leurs moitiés $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, il se trouve quelque nombre qui soit égal à $Q$. Ainsi ayant essayé successivement pour $k$ les moitiés des diviseurs de la quantité $\frac{\beta}{n}$, qui sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, et $\frac{75}{2}$, je rejette toutes celles qui ne convertissent pas la quantité $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, ou $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}k^2$ en $Q$, c'est-à-dire en quelqu'un des nombres 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Ainsi en écrivant respectivement pour $k$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, etc., il viendra aussi respectivement, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, etc. pour $Q$. Et $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$ sont les seuls qui se trouvent répétés dans la série des nombres 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Ainsi rejetant tous les autres, je fais $k = \frac{3}{2}$, ce qui donne $Q = -\frac{3}{2}$; ou bien $k = \frac{5}{2}$, ce qui donne $Q = \frac{1}{2}$. On examinera ces deux cas. Mais en voilà suffisamment pour les équations de quatre dimensions.

*Qu'on donne à réduire l'équation de six dimensions*, $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$. Faites,

$$q - \tfrac{1}{4}p^2 = \alpha,\ r - \tfrac{1}{2}p\alpha = \beta,\ s - \tfrac{1}{2}p\beta = \gamma.$$
$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \zeta,\ t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \mu,\ v - \tfrac{1}{4}\beta^2 = \theta.$$
$$\zeta\theta - \tfrac{1}{4}\mu^2 = \lambda.$$

Ensuite prenez pour $n$ quelqu'un des diviseurs communs de $2\zeta$, $\mu$, $2\theta$, et il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier et non quarré, ni divisible par un nombre quarré, et que de plus, étant divisé par 4, il donne l'unité pour reste, lorsque quelqu'un des nombres $p$, $r$, $t$ est impair. Prenez pour $k$ quelqu'un des diviseurs entiers de la quantité $\frac{\lambda}{2n^2}$, dans le cas où $p$ est un nombre pair, ou si $p$ est impair, prenez la moitié d'un diviseur impair.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Enfin dans le cas où $\lambda$ sera zéro, $k$ sera aussi zéro. Prenez pour $Q$ la quantité $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, et pour $l$, quelque diviseur de la quantité $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$, si $Q$ est un nombre entier; ou la moitié d'un diviseur de la même quantité, si $Q$ est une fraction ayant pour dénominateur 2. Enfin $l$ sera zéro dans le cas où la quantité $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$ serait zéro. Faites $R = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$; ensuite essayez si $R^2 - v$ ne serait pas divisible par $n$, et si l'on ne pourrait pas extraire la racine du quotient, et enfin si cette racine ne serait point égale à $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$, et à $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nk}$. Si toutes ces conditions sont remplies, appelez cette racine $m$; et au lieu de l'équation proposée, écrivez celle-ci, $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = \pm (kx^2 + lx + m)\sqrt{n}$.

En effet, si on quarre chaque membre de cette équation, et qu'on transpose tous les termes d'un même côté, elle rendra l'équation proposée. Mais si dans aucun cas toutes ces conditions ne peuvent avoir lieu, et qu'on se soit assuré d'avance que l'équation n'a point de diviseur rationnel, on peut être certain que l'équation est irréductible.

*Exemple.* Soit proposée l'équation......................

$$x^6 - 2ax^5 + 2b^2x^4 + 2ab^2x^3 \left.\begin{matrix} -2a^2b^2 \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix}\right\} x^2 \begin{matrix} + 3a^2b^4 \\ - a^4b^2 \end{matrix} = 0.$$

Si l'on écrit respectivement, $-2a$, $+2b^2$, $+2ab^2$, $-2a^2b^2 + 2a^3b - 4ab^3$, 0, et $3a^2b^4 - a^4b^2$, pour $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ et $v$, on aura, $\alpha = 2b^2 - a^2$, $\beta = 4ab^2 - a^3$, $\gamma = 2a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - a^4$, $\zeta = -b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 - 4ab^3 - \frac{5}{4}a^4$, $\mu = -\frac{1}{2}a^5 + 3a^3b^2 - 4ab^4$, et $\theta = -a^2b^4 + a^4b^2 - \frac{1}{4}a^6$. Les termes $2\zeta$, $\mu$, et $2\theta$ ont pour diviseur commun, $a^2 - 2b^2$, ou bien $2b^2 - a^2$, selon que $a^2$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

est plus grand ou plus petit que $2b^2$. Soit $a^2$ plus grand que $2b^2$, et on aura, $a^2 - 2b^2 = n$; parce que $n$ doit toujours être positif. Ensuite $\frac{\zeta}{n} = -\frac{5}{4}a^2 + 2ab + \frac{1}{2}b^2$, $\frac{\mu}{n} = -\frac{1}{2}a^3 + 2ab^2$, et..... $\frac{\theta}{n} = \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2$. Ainsi $\frac{\zeta}{2n} \times \frac{\theta}{n} - \frac{\mu^2}{8n^2} = \frac{\lambda}{2n^2} = \frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{8}a^4b^2 + \frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{3}{8}a^2b^4$, dont les diviseurs sont, 1, $a$, $a^2$. Mais comme $k\sqrt{n}$ ne peut être que d'une seule dimension, et que $\sqrt{n}$ est déjà d'une dimension, il s'en suit que $k$ ne peut avoir aucune dimension, et par conséquent il ne doit être qu'un nombre. Je rejette donc $a$ et $a^2$, et il ne reste que 1 pour $k$. D'un autre côté, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$ donne o pour $Q$, et $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$ est aussi o; par conséquent $l$, qui doit être un des diviseurs de cette dernière quantité, sera également o. Enfin $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ donne pour $R$, $ab^2$; et $R^2 - \nu = -a^2b^4 + a^4b^2$, quantité qui peut être divisée par $n$, ou $a^2 - 2b^2$, et le quotient étant $a^2b^2$, on peut en extraire la racine, qui est $ab$. Cette racine prise négativement, étant comparée à la quantité indéfinie $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ ou $\frac{0}{0}$, on peut la regarder comme lui étant égale, et elle l'est bien certainement à la quantité déterminée, $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nk}$. Ainsi je désigne cette racine $-ab$ par $m$, et au lieu de l'équation proposée, je puis écrire.... $x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = (kx^2 + lx + m)\sqrt{n}$, c'est-à-dire..... $x^3 - ax^2 + ab^2 = (x^2 - ab)\sqrt{a^2 - 2b^2}$; on peut s'assurer de la légitimité des opérations qui nous ont amenés à cette équation, ainsi que de la bonté de l'équation elle-même, en quarrant chacun de ses membres, et transposant tous les termes d'un même côté;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

car par-là nous retrouverons l'équation, $x^6 - 2ax^5 + 2b^2x^4 + 2ab^2x^3 - 2a^2b^2x^2 + 2a^3bx^2 - 4ab^3x^2 + 3a^2b^4 - a^4b^2 = 0$, qui est l'équation même qu'on avait proposé de réduire.

Si on a une équation du huitième degré, telle que $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vx^2 + wx + z = 0$, et qu'on fasse $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = w - \frac{1}{2}\beta\gamma$, et $\mu = z - \frac{1}{4}\gamma^2$. Qu'on cherche maintenant un diviseur commun des quantités, $2\delta$, $2\varepsilon$, $2\zeta$, $8\mu$; et il faut que ce diviseur commun soit un nombre entier, non quarré ni divisible par un quarré; il faut de plus, que dans le cas où un des coëfficiens $p$, $r$, $t$, $w$ des termes alternes serait impair, il faut, dis-je, que ce diviseur commun étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste. Si on ne trouve aucun des diviseurs communs qui remplisse toutes ces conditions, on peut être certain que l'équation n'est pas réductible par l'extraction d'une racine sourde du second degré. Et lorsqu'elle ne sera pas réductible, il sera même bien difficile de trouver un simple diviseur commun des quantités $2\delta$, $2\varepsilon$, etc. Jusqu'ici tout notre travail a été employé à examiner si une équation était réductible ou non; mais comme ces réductions sont rarement possibles, en voilà suffisamment sur cet article.

*Cependant nous observerons encore que c'est par une méthode semblable qu'on s'assurerait si une équation du dixième ou du douzième degré, ou même d'un degré plus élevé, est irréductible.*

Par exemple, si l'on a celle-ci, $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, on fera, $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu = b - \frac{1}{2}\beta\delta$

$\frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta = c - \frac{1}{2}\gamma\delta$, et enfin $\varkappa = d - \frac{1}{4}\delta^2$. Il faudra chercher le diviseur commun des cinq termes $2\varepsilon$, $2\zeta$, $8\mu$, $4\theta$, $8\varkappa$; il faudra que ce diviseur soit un nombre entier, non quarré; et si quelqu'un des coëfficiens des termes alternes $p$, $r$, $t$, $a$, $c$ est impair, il faudra de plus, que ce commun diviseur, étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste.

Si l'on a l'équation de douze dimensions, $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, il faudra faire, $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$, $\beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$, $\gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2$, $\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta$, $\varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$, $\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\mu = b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2$, $\theta = c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta$, $\varkappa = d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta^2$, $\lambda = e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, $\rho = f - \frac{1}{4}\varepsilon$. Et il faudra chercher un diviseur commun, qui soit un nombre entier et non quarré, des six termes $2\zeta$, $8\mu$, $4\theta$, $8\varkappa$, $4\lambda$, $8\rho$; et si un des coëfficiens $p$, $r$, $t$, $a$, $c$, $e$ des termes alternes, est impair, il faudra que ce commun diviseur étant lui-même divisé par 4, laisse l'unité pour reste.

On pourra procéder de cette manière jusqu'à l'infini, et l'on sera certain que l'équation sera irréductible, par l'extraction d'une racine sourde quarrée, toutes les fois qu'on ne trouvera pas un diviseur commun avec toutes les conditions que nous avons énoncées. Si donc on trouve un diviseur $n$ qui donne l'espérance de pouvoir réduire l'équation, il faudra se guider pour les opérations, sur l'exemple que nous allons donner, en réduisant une équation du huitième degré.

Cherchez un nombre quarré tel, qu'étant multiplié par $n$, si l'on ajoute au produit le dernier terme $z$ de l'équation avec son propre signe, la somme fasse encore un quarré. Cela s'exécutera bien facilement de la manière suivante : si $n$ est un nombre pair, ajoutez



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

successivement à $z$, les nombres, $n$, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, etc., mais si $n$ est impair, c'est à $4z$ qu'il faudra ajouter successivement $n$, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, etc.; et dans l'un ou l'autre cas, il faudra essayer les termes, en suivant la progression, jusqu'à ce qu'on tombe sur quelque nombre quarré; et pour cela, je suppose qu'on a sous les yeux la table des nombres quarrés. Mais si, avant qu'aucune des sommes essayées donnât un quarré, on trouvait que la racine quarrée de l'une quelconque d'entre elles, augmentée de la racine quarrée de l'excès de cette même somme sur le dernier terme de l'équation, donne une quantité plus grande que le quadruple du plus grand des coëfficiens $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $v$, etc., de l'équation proposée, il serait inutile de pousser plus loin les tentatives, l'équation est irréductible. Mais si c'est le quarré qu'on rencontre d'abord, on appellera sa racine $S$, si $n$ est pair, ou $2S$, si $n$ est impair; et on fera $\sqrt{\frac{S^2-z}{n}} = h$. Si $n$ est pair, $S$ et $h$ doivent être des nombres entiers; mais si $n$ est impair, $S$ et $h$ peuvent être des nombres fractionnaires ayant 2 pour dénominateur. Et s'il l'un des deux est fractionnaire, il faut que l'autre le soit aussi. On dira la même chose des nombres $R$ et $m$, $Q$ et $l$, $p$ et $k$ qu'on trouvera ensuite. Il faudra écrire dans une table, tous les nombres $S$ et $h$ qui se trouveront compris dans les limites assignées. Ensuite il faudra essayer pour $k$ tous les nombres qui ne donneront pas $nk \pm \frac{1}{2}p$ plus grand, que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Et dans tous les cas, on fera $\frac{nk^2+\alpha}{2} = Q$. Après cela, on essayera pour $l$, tous les nombres qui ne feront pas $nl \pm Q$ plus grand, que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Et il faudra toujours supposer que, $\frac{-npk^2+2\beta}{4} + nkl = R$. Enfin il faudra

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

successivement essayer pour $m$, tous les nombres qui ne feront pas $nm \pm R$ plus grand que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation, et voir pour chaque cas si l'on a, $s - Q^2 - pR + nl^2 = 2H$ et $H + nkm = S$, et si cet $S$ est un des nombres précédemment mis pour $S$ dans la table; et si de plus, le nombre qui a été mis pour $h$ dans la table, est égal aux trois quantités $\frac{2RS - w}{2mn}$, $\frac{2QS + R^2 - v - m^2 n}{2nl}$ et $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$. S'il se trouve un cas où toutes ces conditions soient remplies, au lieu de l'équation proposée, on écrira celle-ci.......................

$$x^4 + \tfrac{1}{2}px^3 + Qx^2 + Rx + S = (kx^3 + lx^2 + mx + h)\sqrt{n}.$$

*Exemple :* soit proposée l'équation, $x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5 = 0$, on aura, $q - \frac{1}{4}p^2 = -1 - 4 = -5 = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta$, $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8} = \varepsilon$, $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta$, $z - \frac{1}{4}\gamma^2 = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \mu$. Ainsi $2\delta$, $2\varepsilon$, $2\zeta$, $8\mu$ sont respectivement, $-5$, $-\frac{105}{4}$, $-20$ et $-\frac{345}{4}$. Ces quantités ont pour diviseur commun, 5, qui lui-même, étant divisé par 4, laisse 1 pour reste, comme cela devait être à cause du coëfficient impair $s$. Ainsi, ayant trouvé un diviseur commun $n$ ou 5 qui me donne l'espérance de réduire l'équation, et ce diviseur étant impair, j'ajoute successivement à $4z$ ou à $-20$, les nombres $n$, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, etc., ou 5, 15, 25, 35, 45, etc., et il me vient, $-15$, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385, 480, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600, parmi lesquels, il ne se trouve que les seuls nombres, 0, 25, 225 et 1600 qui soient des quarrés. C'est pourquoi, je prends



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la moitié de leurs racines o, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, je les écris dans une table, pour $S$; et j'écris dans la même table, pour $h$, $\sqrt{\frac{S^2-\zeta}{n}}$, c'est-à-dire, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, valeurs de $h$ qui correspondent respectivement aux valeurs o, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20 de $S$. Mais si dans la formule, $S+nh$, on écrit 20 pour $S$ et 9 pour $h$, on aura 65, nombre plus grand que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation. Je rejette donc 20 et 9, et je porte seulement dans la table, les autres nombres, comme on le voit ici à côté.

| | |
|---|---|
| $h$ | 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$. |
| $S$ | o, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$. |

Les choses étant ainsi disposées, j'essaye pour $k$ tous les nombres qui ne rendront pas la formule $\frac{1}{2}p \pm nk$ ou $2 \pm 5k$ plus grande que le quadruple du plus grand coëfficient de l'équation, qui est ici, 40. J'essaye donc les nombres $-8$, $-7$, $-6$, $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; et je fais, $\frac{nk^2+\alpha}{2}$ ou $\frac{5k^2-5}{2} = Q$, et en mettant successivement pour $k$ les valeurs posées plus haut, nous aurons aussi respectivement pour $Q$ les valeurs suivantes : $\frac{315}{2}$, 120, $\frac{175}{2}$, 60, $\frac{75}{2}$, 20, $\frac{15}{2}$, o, $-\frac{5}{2}$, o, $\frac{15}{2}$, 20, $\frac{75}{2}$, 60, $\frac{175}{2}$, 120. Or comme $Q \pm nl$ ne doit pas excéder 40, à plus forte raison, $Q$ seul ne doit-il pas l'excéder; par conséquent il est facile de voir qu'il faut rejeter, $\frac{315}{2}$, 120, $\frac{175}{2}$ et 60, ainsi que leurs nombres correspondans, $-8$, $-7$, $-6$, $-5$, 5, 6, 7; ainsi les seuls qu'il faut essayer pour $k$, sont $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, o, 1, 2, 3, 4. Et ceux qu'il faut respectivement essayer pour $Q$ sont, $\frac{75}{2}$, 20, $\frac{15}{2}$, o, $-\frac{5}{2}$, o, $\frac{15}{2}$, 20, $\frac{75}{2}$. Essayons donc $-1$ pour $k$, et o pour $Q$, et dans ce cas, il faudra encore essayer pour $l$, tous les nombres qui ne rendront pas $Q \pm nl$ plus grand que 40, c'est-à-dire,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qu'il faudra essayer tous les nombres qui sont entre $+10$ et $-10$. Il faudra aussi essayer respectivement pour $R$, tous les nombres $\frac{2\beta - npk^2}{4} + nkl$ ou $-5-5l$, ou bien $-55, -50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$, parmi lesquels, les trois premiers et le dernier étant plus grands que 40, peuvent être négligés. Essayons encore $-2$ pour $l$, et 5 pour $R$; et dans ce cas, il faudra essayer pour $m$, tous les nombres qui ne rendront pas $R \pm nm$ ou $5 \pm 5m$ plus grand que 40; c'est-à-dire, qu'il faudra essayer les nombres qui sont entre $+7$ et $-9$. Ensuite il faudra voir si, en faisant $s - Q^2 - pR + nl^2$, c'est-à-dire, $5 - 20 + 20$ ou $5 = 2H$, il faudra voir, dis-je, si $H \pm nkm$ ou $\frac{5}{2} - 5m = S$; ou bien, si parmi les nombres $-\frac{65}{2}, -\frac{55}{2}, -\frac{45}{2}, -\frac{35}{2}, -\frac{25}{2}, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \frac{35}{2}, \frac{45}{2}, \frac{55}{2}, \frac{65}{2}, \frac{75}{2}, \frac{85}{2}$, il ne s'en trouverait pas quelqu'un d'égal à quelqu'un des nombres $0, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$ qu'on a mis pour $S$ dans la table. Ici il s'en rencontre quatre qui sont $-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$, qui répondent aux nombres $\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}$ qui ont été écrits pour $h$ dans la table, selon que j'ai substitué $2, 1, 0, -1$ pour $m$. Mais si nous essayons $-\frac{5}{2}$ pour $S$ et 1 pour $m$ et $\pm\frac{3}{2}$ pour $h$, il viendra, $\frac{2RS - w}{2mn} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, et.........

$\frac{2QS + R^2 - v - nm^2}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, et................

$\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$; ainsi comme dans tous les cas, il nous vient, $-\frac{3}{2}$ pour $h$, j'en conclus, que tous les nombres sont bons; par conséquent, au lieu de l'équation proposée,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

j'écrirai celle-ci, $x^4 + \frac{1}{2}p x^3 + Qx^2 + Rx + S = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(kx^3 + lx^2 + mx + h)\sqrt{n}$, ou bien $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} =$ $(-x^3 - 2x^2 + x - 1\frac{1}{2})\sqrt{5}$. Et en quarrant chaque membre de cette équation, il en naîtra l'équation même de huit dimensions que l'on s'était proposé de réduire.

Si, après avoir essayé tous les nombres, les valeurs trouvées dans chaque cas, pour $h$, n'eussent pas été toutes égales entre elles, c'eût été une preuve que l'équation proposée aurait été irréductible par l'extraction d'une racine sourde quarrée.

Je passe ici quelques moyens d'abréviation qu'on aurait pu employer, parce que mon but était plutôt de faire voir la possibilité de pareilles réductions que d'en enseigner la pratique. Elles ne peuvent guère être d'aucun usage, vu leur grande difficulté, et le peu de cas où elles réussissent. Au reste on les appelle *réductions par l'extraction des racines sourdes quarrées*.

On pourrait encore placer ici la réduction des équations par l'extraction des racines sourdes cubiques. Mais comme elles sont bien rarement utiles, je n'en ferai pas mention pour abréger.

Il y a cependant quelques réductions connues des équations cubiques que le lecteur pourrait regretter de ne pas trouver ici. Soit proposée, par exemple, l'équation cubique $x^3 * + qx + r = 0$, qui manque de second terme (car nous avons vu précédemment que toute équation cubique peut être ramenée à cette forme). Supposons que $x = a + b$, on aura, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (c'est-à-dire $x^3$) $+ qx + r = 0$; supposons encore, $3a^2b + 3ab^2 + qx = 0$, ce qui donne (à cause de $3a^2b + 3ab^2 = 3abx$), $3abx + qx = 0$, Et il s'en suivra que $a^3 + b^3 + r = 0$. De la première, je tire

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$b = -\frac{q}{3a}$, et par conséquent, $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$; et en substituant cette valeur de $b^3$ dans la seconde équation, elle devient..... $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$; ou bien, $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$. Et en résolvant cette équation selon la méthode de celles du second degré, on aura, $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$. Et en tirant la racine cubique, il viendra la valeur de $a$. Mais nous avons vu plus haut que $b = -\frac{q}{3a}$, et $x = a + b$, donc $a - \frac{q}{3a}$ sera la racine de l'équation proposée.

Par exemple, si l'on donne l'équation $y^3 - 6y^2 + 6y + 12 = 0$. Pour en ôter le second terme, je ferai $x + 2 = y$, et il me viendra, $x^3 * - 6x + 8 = 0$, où $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}r^2 = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, et $x + 2 = y$. Donc on a,

$$y = 2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}.$$

Par cette méthode on trouve les racines de toutes les équations cubiques lorsque $q$ est positif, ou lorsque $q$ étant négatif, $\frac{q^3}{27}$ n'est pas plus grand que $\frac{1}{4}r^2$, c'est-à-dire, *lorsque deux racines de l'équation sont impossibles ou imaginaires.* Mais lorsque $q$ est négatif, et que $\frac{q^3}{27}$ est plus grand que $\frac{1}{4}r^2$, les racines $x$ ou $y$ de l'équation se présentent alors sous une forme impossible, parce que la racine quarrée $\sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{q^3}{27}}$ est une quantité imaginaire; *et cependant c'est alors que les trois racines sont réelles.* Elles dépendent toutes les trois, et de la même manière, des coëfficiens $q$ et $r$ de l'équation; il semblerait donc qu'elles devraient être déterminées toutes les trois

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

par la même loi qui en fait trouver une; *mais il est impossible de les déterminer.* (*).

Dans notre hypothèse, la valeur de $x$ est représentée par $a - \frac{q}{3a}$; or ce binome ne peut avoir qu'une seule valeur, tandis que $x$ doit en avoir plusieurs, donc cette hypothèse est impossible; elle ne l'est pas moins, en ce qu'elle suppose, $a^3 + b^3 = \pm r$, et $3ab = \pm q$. Or il n'est pas étonnant que d'une hypothèse impossible on ne puisse tirer aucune conclusion possible.

*Voici cependant un autre moyen d'exprimer ces racines.* Nous avons supposé que $a^3 + b^3 + r = 0$. Si de cette équation nous retranchons $a^3 + r$, ou bien, $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$, il restera.................. $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}$. Par conséquent.................. $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$, et $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$, ou bien, $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$, et.................. $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$. Et alors, à cause de $x = a + b$, on a, $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}}$.

*On peut aussi obtenir les racines des équations du quatrième degré par le moyen des racines de l'équation cubique.*

Commencez par faire disparaître le second terme, et soit l'équation résultante;

(*) C'est-à-dire, qu'il est impossible de les exprimer sous une forme finie, et qu'on ne peut avoir leur valeur approchée que par le moyen des séries.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

résultante, $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Imaginez que cette équation est le produit des deux équations du second degré, $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$, ou que l'équation.....................

$$x^4 + \left.\begin{matrix} +f \\ +g \\ -e^2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +eg \\ -ef \end{matrix}\right\} x + fg = 0,$$

est identique avec l'équation proposée. En les comparant terme à terme, on aura, $f + g - e^2 = q$, $eg - ef = r$, et $fg = s$. Ainsi $q + e^2 = f + g$, $\frac{r}{e} = g - f$,.....

$$\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g, \quad \frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f, \quad \frac{q^2 + 2e^2q + e^4 - \frac{r^2}{e^2}}{4} = fg = s,$$

et en réduisant, $e^6 + 2qe^4 \left.\begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix}\right\} e^2 - r^2 = 0$. Je fais $y = e^2$, et je substitue dans l'équation, ce qui la change en...........

$y^3 + 2qy^2 \left.\begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix}\right\} y - r^2 = 0$, équation cubique, dont on peut faire disparaître le second terme, et en tirer ensuite la racine, soit par la règle précédente, soit par une autre quelconque. Une fois cette racine obtenue, il faudra remonter aux opérations précédentes de cette manière, $e = \sqrt{y}$, $\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g$, $\frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f$, et ayant résolu les équations $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$, on aura les quatre racines de l'équation $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, qui seront, $x = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 - f}$, et $x = \frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^2 - g}$. Il faut remarquer ici que si l'équation du quatrième degré a ses quatre racines réelles, il faut que l'équation cubique.........

$y^3 + 2qy^2 \left.\begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix}\right\} y - r^2 = 0$, ait aussi ses trois racines réelles; or,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dans ce cas, nous avons vu, par la règle précédente, qu'elle ne peuvent pas être déterminées. (*).

*Si une équation affectée de cinq ou d'un plus grand nombre de dimensions, est convertie en une équation non-affectée, les termes moyens étant ôtés par un procédé quelconque, l'expression des racines de cette équation sera toujours impossible, lorsqu'étant d'un degré impair elle a plus d'une racine réelle, ou qu'étant d'un degré pair, elle en a plus de deux; à moins que, dans ce dernier cas, elle ne puisse être réduite par l'extraction d'une racine sourde quarrée, selon la méthode qui a été enseignée précédemment.* (74).

C'est Descartes qui a enseigné l'art de réduire les équations du quatrième degré, comme nous venons de le faire. Par exemple, si l'on propose l'équation dont nous avons déjà fait ci-devant la réduction, $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, qu'on fasse disparaître le second terme en écrivant, $v + \frac{1}{4}$ au lieu de $x$, et l'on aura, $v^4 - \frac{43v^2}{8} + \frac{75v}{8} - \frac{851}{256} = 0$. Pour faire évanouir les fractions, on substituera $\frac{1}{4}z$ au lieu de $v$, et il viendra, $z^4 - 86z^2 + 600z - 851 = 0$. On a donc, $-86 = q$, $600 = r$, et $-851 = s$. Ainsi, en substituant ces valeurs dans l'équation..................... $y^3 + 2qy^2 \left.\begin{matrix} +q^2 \\ -4s \end{matrix}\right\} y - r^2 = 0$, elle deviendra, $y^3 - 172y^2 + 10800y - 360000 = 0$. Et en essayant tous les diviseurs du dernier terme, $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, et ainsi de

(*) Il me semble que la méthode de résoudre les équations du troisième et du quatrième degrés, n'est exposée nulle part avec plus d'ordre et de clarté que dans l'Algèbre du C^n^. Bossut. Le lecteur peut la consulter, et il y trouvera l'explication de tout ce qui pourrait l'embarrasser ici.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

suite, on trouvera enfin que $y = 100$, résultat où on serait parvenu bien plus promptement par la méthode que nous avons exposée ci-devant. (*).

Continuons la méthode de Descartes. Ayant trouvé $y = 100$, on aura, $e = \sqrt{y} = 10$; et $\frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2}$, c'est-à-dire........ $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$, ou $-23 = f$; et $\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2}$, ou $37 = g$. Ainsi, en substituant ces valeurs de $e$, de $f$, et de $g$, dans les deux équations, $x^2 + ex + f = 0$, et $x^2 - ex + g = 0$; et en écrivant $z$ pour $x$, elles deviendront, $z^2 + 10z - 23 = 0$, et $z^2 - 10z + 37 = 0$. Remettant maintenant $v$ pour $\frac{z}{4}$, elles seront changées en...... $v^2 + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0$, et $v^2 - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0$. Et en remettant encore $x - \frac{1}{4}$ au lieu de $v$, on aura enfin, $x^2 + 2x - 2 = 0$, et $x^2 - 3x + 3 = 0$. Les quatre racines de ces deux équations sont, $x = -1 \pm \sqrt{3}$, et $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. Ces racines sont les mêmes que celles que nous avons trouvées au commencement de cet ouvrage, pour l'équation proposée, $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$; et pour y parvenir alors, nous avons fait usage d'une nouvelle méthode de trouver les diviseurs, méthode plus facile que celle que nous venons d'employer.

---

(*) Cette méthode dont parle Newton, est celle qui a été enseignée, tome I, page 46 et suivantes, ou mieux encore, celle qu'il a donnée, tome II, page 26.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# CONSTRUCTION LINÉAIRE DES ÉQUATIONS.

JUSQU'ICI j'ai enseigné les propriétés des équations, leurs transformations, leurs limites, et tous les moyens qu'on peut employer pour les réduire. Je n'ai pas toujours démontré les méthodes dont j'ai fait usage, parce qu'elles m'ont paru assez faciles, et que leur démonstration aurait souvent entraîné beaucoup de longueurs. On sait maintenant quelle est la forme la plus commode qu'il faut donner aux racines des équations, il ne reste donc plus qu'à enseigner l'art de les traduire en nombres ; et la plus grande difficulté est d'obtenir les deux ou trois premiers chiffres qui en donnent la valeur approchée. Or c'est à quoi l'on parvient très-facilement en construisant l'équation, soit géométriquement, soit mécaniquement (*). Je crois donc que le lecteur ne sera pas fâché de trouver ici quelques constructions de cette espèce.

Les Anciens, comme nous l'apprend Pappus, essayèrent d'abord de trouver la trissection de l'angle, et deux moyennes proportionnelles géométriques, par le moyen de la ligne droite et du cercle, mais leurs efforts furent inutiles. Ils en vinrent ensuite à considérer beaucoup d'autres lignes, telles que la conchoïde, la cissoïde et les sections coniques, et par le moyen de quelques-unes de ces courbes,

(*) On va voir bientôt pourquoi Newton ne considère la construction géométrique d'une équation, que comme un moyen d'obtenir, par approximation, la valeur numérique de ses racines.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ils résolurent ces deux problêmes. Enfin, après un mûr examen, ils regardèrent les sections coniques comme des lignes géométriques, et classèrent les problêmes sous trois genres : ils appelèrent *Problêmes plans*, ceux qui peuvent être résolus par des lignes qui naissent sur un plan, telles que la ligne droite et le cercle; *Problêmes solides*, ceux qui ne peuvent être résolus que par des lignes engendrées dans un solide, tel que le cône; et enfin, *Problêmes linéaires*, ceux dont la solution dépend de lignes plus composées. D'après cette distinction, tout problême solide, dont la solution ne peut s'obtenir que par des lignes différentes des sections coniques, ne doit pas être considéré comme problême géométrique, sur-tout si l'on n'admet au rang des lignes géométriques, que la droite, le cercle, et les sections coniques. Mais les modernes se sont mis plus au large; ils ont regardé comme géométrique, toute ligne qui pouvait être exprimée par une équation. Ils ont classé ces lignes en différens genres, d'après le nombre de dimensions de leurs équations, et ils ont posé pour loi : qu'il n'était pas permis de construire par une ligne d'un genre quelconque, un problême qui peut l'être par celle d'un genre inférieur.

Que dans l'étude des courbes, dans l'examen que l'on fait de leurs propriétés, l'on procède selon l'ordre des dimensions de leurs équations, c'est une marche qui me paraît digne d'être approuvée; cependant on remarquera, que ce n'est pas l'équation, mais la description d'une courbe, qui la rend géométrique. Le cercle est une courbe géométrique, non parce qu'il peut être exprimé par une équation, mais parce qu'il peut être décrit géométriquement. Le motif qui doit faire préférer une courbe à une autre, pour la construction d'un problême, n'est pas la simplicité de son équation, mais la facilité avec laquelle on peut la décrire. Car l'équation de la parabole est

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

plus simple que celle du cercle; et cependant, toutes les fois qu'on le peut, on préfère le cercle, parce que sa description est plus facile. Si l'on considère le cercle et les sections coniques sous le rapport des dimensions de leurs équations, on les rangera dans le même ordre : ce qu'on ne fait pas cependant; car le cercle dans la construction des problêmes, est mis au même rang que la ligne droite, à cause de la facilité de sa description; de manière qu'on peut, sans pécher contre la règle, construire par le cercle, un problême qu'on aurait pu également construire par la ligne droite. On y pécherait, au contraire, si l'on construisait par les sections coniques, celui qui peut l'être par un cercle. Décidez-vous maintenant, et voyez si la loi des dimensions des équations doit être tellement observée, qu'on ne puisse faire d'exception en faveur du cercle, et alors rejetez comme inutile cette distinction des problêmes *en plans* et *en solides*; ou bien dites si, malgré cette loi, on peut, dans les lignes des ordres supérieurs, en choisir quelqu'une de préférence à celles du même ordre, et à cause de la facilité de sa description, la ranger, du moins pour la construction des problêmes, parmi celles d'un ordre inférieur. Lorsqu'on est maître de choisir entre plusieurs constructions également géométriques, il faut toujours préférer la plus simple : cette règle n'admet point d'exception. Or, les expressions algébriques les plus simples, ne sont pas toujours les plus faciles à construire. La simplicité que l'on doit préférer, ne doit donc s'entendre que de la simplicité de description : c'est elle uniquement que considéraient les géomètres qui rangeaient le cercle dans la même classe que la ligne droite; car les problêmes sont plus ou moins faciles à construire, selon que les lignes qui en donnent la solution, sont plus ou moins aisées à décrire. Ainsi il est répugnant d'aller

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

chercher les loix de la construction ailleurs qu'en elle-même. Il faudra donc nous accorder avec les anciens pour n'admettre comme lignes géométriques, que *la droite*, *le cercle*, et peut-être *les sections coniques*, ou bien les regarder toutes comme *telles*, en les rangeant selon l'ordre de simplicité de leur description. Si la trochoïde était reçue comme une ligne géométrique, on pourrait, par son moyen, partager un angle en raison donnée. Reprocheriez-vous donc à un géomètre, d'employer la trochoïde, pour couper un angle dans le rapport d'un nombre à un autre, en prétendant que cette courbe ne pouvant être exprimée par une équation, il est obligé d'en employer une qui puisse l'être ? Ainsi donc s'il avait à partager un angle en 10001 parties, il serait tenu, selon vous, à employer une courbe dont l'équation passerait le centième degré. Est-il un homme qui soit, je ne dis pas en état de construire, mais seulement de comprendre une telle équation ? Et pourriez-vous préférer une telle courbe, si elle pouvait exister, à la trochoïde, ligne très-connue, et si facile à décrire par le mouvement d'une roue ou d'un cercle ? Au reste, je crois avoir fait toucher au doigt l'absurdité d'un tel systême. Il faut donc, ou refuser d'admettre la trochoïde dans la géométrie, ou la préférer dans la construction des problêmes, à toute autre ligne d'une construction moins facile; et ce que je viens de dire de la trochoïde, doit s'entendre également de toute autre espèce de courbes. C'est pour cette raison que je préfère les trissections d'angles que nous ont laissées, Archimède dans ses lemmes, et Pappus dans ses collections, à toutes les autres méthodes qu'on a trouvées pour résoudre le même problême, puisque, je le répète, il faut exclure de la géométrie toutes les lignes, hors la droite et le cercle, ou les admettre toutes, selon le rang de simplicité de leur description. Or, excepté

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

le cercle, il n'est aucune courbe plus facile à décrire que la conchoïde.

Une équation est, en général, l'expression d'un calcul arithmétique, où l'on prononce que quelques quantités sont égales à d'autres. Une équation ne peut être géométrique qu'autant que les quantités qu'elle contient sont géométriques, telles que lignes, surfaces, solides, ou proportions. C'est par une innovation des modernes qu'on y a fait entrer des multiplications, des divisions, et d'autres calculs de cette espèce; et cette innovation n'est point heureuse; elle répugne aux premiers principes de la science. Car si l'on réfléchit bien aux constructions des problêmes par la ligne droite et le cercle, telles que les ont imaginées les anciens géomètres, on verra facilement qu'ils n'y ont eu recours qu'afin d'éviter, par le tracer facile de quelques lignes, l'ennui des longs calculs. Il ne faut donc pas confondre ces deux sciences; les anciens en séparaient les limites avec tant de soin, que jamais ils ne se sont permis d'introduire des termes d'arithmétique dans la géométrie; et les modernes en les confondant, ont fait disparaître la simplicité qui fait toute l'élégance de la géométrie. La simplicité arithmétique consiste à exprimer une question par l'équation la plus simple, et la simplicité géométrique, à résoudre une équation en menant les lignes les plus simples. On n'aura donc point de reproches à me faire, si, avec le plus grand des géomètres, Archimède, et les autres anciens, j'emploie la conchoïde pour construire les problêmes solides. Au reste, s'il se trouvait quelqu'un qui ne partageât pas mes sentimens à cet égard, qu'il se persuade bien qu'il s'agit ici, moins de constructions géométriques, que de constructions quelconques, par lesquelles je cherche à approcher le plus près possible de la valeur des racines d'une équation. En conséquence, je vais commencer par un problême qui nous servira de lemme.

Entre

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*Entre deux droites données AB, AC, placer une droite BC d'une longueur donnée, de manière qu'elle passe par un point donné P.*

(*Pl.* IX, *Fig.* 1ere). SI la droite $BC$ tourne autour du point $P$ comme pôle, et qu'une de ses extrémités $C$ soit contrainte de glisser le long de $AC$, son autre extrémité $B$ décrira la conchoïde des anciens, et rencontrera la droite $AB$ au point $B$. Joignez les points $B$ et $P$, et la partie $BC$ de cette droite sera la ligne qu'il fallait mener. On pourrait encore, par la même méthode, mener la ligne $BC$, si, au lieu de la ligne droite $AC$, on nous avait donné une courbe quelconque.

Si cette construction, par la conchoïde, paraissait peu élégante, on peut y employer une section conique. Pour cela, du point $P$, menez les droites $PD$ et $PE$ de manière, qu'en rencontrant les lignes $AD$, $AE$, elles forment le parallélogramme $EADP$, et des points $C$ et $D$, abaissez sur $AB$ les perpendiculaires $CF$, $DG$; menez aussi du point $E$ sur $AC$ prolongée, la perpendiculaire $EH$; et faisant $AD = a$, $PD = b$, $BC = c$, $AG = d$, $AB = x$ et $AC = y$, on aura, $AD : AG :: AC : AF$, d'où $AF = \frac{dy}{a}$. On aura aussi, $AB : AC :: PD : CD$, ou bien $x : y :: b : a - y$, d'où l'on tire $by = ax - xy$, équation qui appartient à l'hyperbole. Ensuite (par la 13e. prop. du 2e. liv. des Élémens) on a,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,FA \times AB$, c'est-à-dire, $c^2 = y^2 + x^2 - \frac{2dxy}{a}$. Multipliez par $\frac{2d}{a}$ l'équation $by = ax - xy$, et retranchez le produit de l'équation $c^2 = y^2 + x^2 - \frac{2dxy}{a}$, et il restera...... $c^2 - \frac{2bdy}{a} = y^2 + x^2 - 2dx$, équation au cercle, lorsque $x$ et $y$ font entre eux des angles droits. Si vous combinez donc l'hyperbole avec le cercle, par le moyen de ces deux équations, l'intersection des deux courbes donnera l'$x$ et l'$y$, ou $AB$ et $AC$ qui détermineront la position de la droite $BC$. Et voici de quelle manière se fera la combinaison de ces deux lignes.

Menez deux droites quelconques $KL$ et $KM$ (*Pl.* IX, *Fig.* 2). Faites la première $KL = AD$, et la seconde $KM = PD$; et que ces deux droites fassent entre elles un angle droit $MKL$; achevez le parallélogramme $KLMN$; prenez $LN$, $MN$ pour asymptotes, et faites passer par le point $K$, une hyperbole $IKX$.

Sur $KM$ prolongée au-delà du point $K$, prenez $KP = AG$, et $KQ = BC$, et sur $KL$ prolongée au-delà du point $K$, prenez $KR = AH$, et $RS = RQ$; achevez le parallélogramme $PKRT$, et du centre $T$ avec un rayon égal à $TS$, décrivez un cercle, il coupera l'hyperbole au point $X$; de ce point, abaissez sur $KP$ la perpendiculaire $XY$, et la droite $XY$ sera égale à $AC$, et $KY$ sera égale à $AB$. Ces deux lignes $AC$ et $AB$, ou seulement l'une d'entre elles, avec le point $P$, suffisent pour déterminer la position cherchée de la droite $BC$. Je ne m'amuserai point à démontrer cette construction, ni les différens changemens qu'elle peut subir, selon les différens cas du problême.

Voilà donc la construction que j'offrirais à ceux qui n'auraient pas goûté la première. Mais on sent bien qu'elle est trop compliquée

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

pour être jamais d'aucun usage. Ce n'est donc qu'une pure spéculation ; mais les spéculations géométriques n'ont d'élégance qu'autant qu'elles ont de simplicité ; et de mérite, qu'à proportion de leur utilité. C'est pourquoi je préfère la construction par la conchoïde, comme étant plus simple que l'autre, non moins géométrique et résolvant parfaitement le problême. Après avoir donné ce lemme, nous allons procéder à la construction géométrique des problêmes cubiques, et des problêmes du 4e degré. Ces derniers peuvent se ramener à la construction des problêmes cubiques.

(*Pl.* IX, *Fig.* 3, 4 et 5). *Soit proposée l'équation cubique.....* $x^3 + qx + r = 0$, *dont le second terme manque, dont le coëfficient du troisième est* $+ q$, *et celui du quatrième,* $+ r$.

Tirez une droite quelconque $KA$ que vous nommerez $n$. $KA$ étant prolongée suffisamment de part et d'autre du point $K$, prenez $KB = \frac{q}{n}$ que vous porterez de $K$ vers $A$, lorsque $q$ sera positif, et du côté opposé, lorsqu'il sera négatif. Partagez $AB$ en deux parties égales au point $C$, et du point $K$ comme centre, avec $KC$ comme rayon, décrivez le cercle $CX$, dans lequel vous inscrirez la droite $CX = \frac{r}{n^2}$, prolongez cette droite de part et d'autre ; tirez maintenant $AX$ que vous prolongerez aussi de part et d'autre. Enfin entre $CX$ et $AX$, ou leurs prolongemens, inscrivez la droite $EY$ d'une longueur égale à $CA$, et qui, étant prolongée, passe par le point $K$, et $XY$ sera une racine de l'équation. Parmi ces racines, celles qui, du point $X$, tendent vers $C$, sont positives, et celles qui vont dans le sens opposé, sont négatives ; dans la supposition pourtant que $r$ est positif, car s'il était négatif, ce serait tout le contraire.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## *DÉMONSTRATION.*

Nous ferons précéder la démonstration, des trois Lemmes suivans :

LEMME I$^{er}$. On a, $XY : AK :: CX : KE$. En effet, menez à $CX$ la parallèle $KF$, et à cause des triangles semblables $ACX$, $AKF$, et $EXY$, $EFK$, vous aurez, $AC : AK :: CX : KF$; et $XY : YE$ ou $AC :: KF : KE$. D'où il est facile de tirer la proportion $XY : AK :: CX : KE$. C. Q. F. D.

LEMME II. On a, $XY : AK :: CY : AK + KE$. Car en composant la dernière proportion du Lemme précédent, elle devient, $XY : AK :: XY + CX$ ou $CY : AK + KE$. C. Q. F. D.

LEMME III. On a aussi, $KE - BK : XY :: XY : AK$. Car (par la 12$^e$. prop. du deuxième livre des Élémens) on a, $\overline{KY}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{CY}^2 - CY \times CX = CY \times YX$. Donc $\overline{KY}^2 - \overline{CK}^2 = CY \times XY$, ce qui donne la proportion $CY : KY - CK :: KY + CK : XY$. Mais $KY - CK = KY - EY + CA - CK = KE - BK$. Et $KY + CK = KY - EY + CA + CK = KE + AK$. Ainsi on a, $CY : KE + AK :: KE - BK : XY$. Mais par le Lemme 2$^e$, on avait, $CY : KE + AK :: XY : AK$, d'où il est facile de conclure que $XY : KE - BK :: AK : XY$ ou $KE - BK : XY :: XY : AK$. C. Q. F. D. (75).

Après ces préliminaires, voici comment on démontrera le problême.

Dans le premier Lemme, nous avons eu, $XY : AK :: CX : KE$, ce qui donne, $KE \times XY = AK \times CX$. Dans le troisième, nous avons eu, $KE - BK : XY :: XY : AK$; et en multipliant les

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

deux termes du premier rapport de cette proportion par $XY$, elle deviendra, $KE \times XY - BK \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$. Et si l'on substitue à la place de $KE \times XY$, sa valeur trouvée plus haut, la dernière proportion devient, $AK \times CX - BK \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, $\overline{AK}^2 \times CX - AK \times BK \times XY = \overline{XY}^3$. Enfin, pour $XY$, $AK$, $BK$, et $CX$, remettant leurs valeurs analytiques, $x$, $n$, $\frac{q}{n}$, et $\frac{r}{n^2}$, il viendra, $r - qx = x^3$. C. Q. F. D.

Quant aux variations des signes qui peuvent affecter les termes de l'équation, selon les différens cas du problême, je ne m'arrêterai pas à en faire la recherche.

*Soit proposée maintenant l'équation*, $x^3 + px^2 + r = 0$, *où le troisième terme manque*. Pour la construire, prenez une ligne quelconque, que vous appellerez $n$; prenez sur une autre ligne les deux longueurs $AK = \frac{r}{n^2}$, et $KB = p$; portez ces deux lignes dans le même sens, si $r$ et $p$ ont les mêmes signes, et dans des sens opposés, s'ils ont des signes contraires. Partagez $BA$ en deux parties égales en $C$, et du point $K$, comme centre, avec le rayon $CK$, décrivez un cercle, dans lequel vous inscrirez $CX$ égale à $n$, et que vous prolongerez de part et d'autre. Ensuite joignez les points $A$ et $K$ par une droite que vous prolongerez encore de part et d'autre. Enfin entre les lignes $CX$ et $AX$, inscrivez $EY$ de même longueur que $CA$, de manière que cette ligne $EY$ étant prolongée, passe par le point $K$; alors $KE$ sera la racine de l'équation. Les racines sont positives lorsque, par rapport au point $X$, le point $Y$ tombe du côté de $C$, et elles sont négatives quand le point $Y$ tombe de l'autre côté

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de $X$, par rapport à $C$. Tout cela dans la supposition que $r$ a le signe $+$; ce serait tout le contraire s'il avait le signe $-$.

Les figures et les lemmes qui ont servi à construire l'équation $x^3+qx+r=0$, serviront également à celle-ci, et voici de quelle manière.

Par le Lemme premier nous avons eu, $XY : AK :: CX : KE$, ou bien, $XY . KE = AK . CX$; et par le Lemme troisième, $KE - BK : XY :: XY : AK$, ou en prenant $KB$ dans un sens opposé, $KE + KB : XY :: XY : AK$, qui deviendra, en multipliant les deux termes du premier rapport par $KE$, $(KE+KB) \times KE : XY \times KE :: XY : AK$. Et en mettant, au lieu de $XY \times KE$ sa valeur, $AK \times CX$, trouvée plus haut, la proportion deviendra, $(KE+KB) \times KE : AK \times CX :: XY : AK$, ou enfin, à cause des deux proportions qui ont des rapports égaux............. $(KE + KB) \times KE : AK \times CX :: CX : KE$, et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a, $\overline{KE}^3 + KB \times \overline{KE}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Et si l'on met, au lieu de $KE$, $KB$, $AK$, $CX$, leurs valeurs analytiques respectives, on trouvera l'équation proposée, $x^3+px^2=r$.

*Il s'agit maintenant de construire l'équation du troisième degré, $x^3+px^2+qx+r=0$, qui a tous ses termes, et dont les racines ne sont ni toutes positives, ni toutes négatives.*

(*Pl.* IX, *Fig.* 6). D'abord si le coëfficient $q$ est négatif, prenez sur une droite quelconque $KB$, deux lignes $KA = \frac{r}{q}$, et $KB=p$, et portez-les du même côté par rapport au point $K$, si $p$ et $\frac{r}{q}$ ont des signes differens; et de côtés opposés du point $K$, si $p$ et $\frac{r}{q}$ ont les mêmes signes. Coupez $AB$ en deux parties égales au point $C$;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

élevez à ce point $C$ une ligne $CX$, perpendiculairement à $AB$, et égale à la racine quarrée de $q$. Tirez maintenant les lignes $AX$ et $CX$, que vous prolongerez indéfiniment, et inscrivez entre elles une droite $EY$, égale à $AC$, de manière que cette ligne inscrite étant prolongée, passe par le point $K$, et $KE$ sera la racine de l'équation; racine positive si le point $X$ tombe entre les points $A$ et $E$, et négative si le point $E$ tombe au-delà du point $X$ du côté de $A$.

Si le coëfficient $q$ est positif, prenez sur la droite $KB$, deux lignes, l'une $KA = \sqrt{-\frac{r}{p}}$, et l'autre $KB = \frac{q}{KA}$, et portez-les toutes deux du même côté, par rapport au point $K$, si les quantités $\sqrt{-\frac{r}{p}}$ et $\frac{q}{KA}$ ont des signes différens; et de côtés opposés, si elles ont les mêmes signes. Divisez $AB$ en deux parties égales au point $C$, et par ce point, élevez sur $AB$ une perpendiculaire $CX$ égale au coëfficient $p$, et entre les lignes $AX$ et $CX$ prolongées indéfiniment, inscrivez une droite $EY$ égale à $AC$, et disposée de manière qu'étant prolongée, elle passe par le point $K$, et $XY$ sera la racine de l'équation; racine qui sera négative, si le point $X$ tombe entre les points $A$ et $E$, et positive, si le point $Y$ tombe du côté de $C$ par rapport à $X$.

## *Démonstration du premier cas où q est négatif.*

*Par le premier Lemme* nous avons eu, $KE : CX :: AK : XY$, et en composant, $:: KE + AK$ ou $KY + KC : CX + XY$ ou $CY$. Mais dans le triangle rectangle $KCY$ on a, $\overline{CY}^2 = \overline{KY}^2 - \overline{KC}^2 = (KY + KC) \times (KY - KC)$; d'où l'on tire la proportion, $KY + KC : CY :: CY : KY - KC$. Mais nous avons vu plus haut,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que $KY + KC$ était la même chose que $KE + AK$, donc $KE + AK : CY :: CY : EK - KB$. (*). Or le premier rapport de cette proportion est égal à celui de $KE$ à $CX$. Donc on a, $KE : CX :: CY : EK - KB$, et en élevant tout au quarré, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: KE + AK : KE - KB$. (76). Multipliant maintenant les extrêmes et les moyens, on aura, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + \overline{CX}^2 \times AK$, et en remettant, à la place de ces quantités, leurs valeurs analytiques assignées plus haut, on trouvera..... $x^3 - px^2 = qx + r$.

## *Démonstration du deuxième cas où q est positif.*

*Par le premier Lemme* on a la proportion, $KE : CX :: AK : XY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $KE \times XY = CX \times AK$. Si, dans l'équation trouvée plus haut, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + \overline{CX}^2 \times AK$, on substitue $KE \times XY$, au lieu de $CX \times AK$, elle deviendra, $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \ldots$ $\overline{CX}^2 \times KE + CX \times KE \times XY$, et divisant tout par $KE$, elle se trouvera réduite à $\overline{KE}^2 - KB \times KE = \overline{CX}^2 + CX \times XY$. Ensuite multipliant tout par $AK$, on aura, $AK \times \overline{KE}^2 - AK \times KE \times KB = AK \times \overline{CX}^2 + AK \times CX \times XY$, et remettant de nouveau $KE \times XY$,

(*) Le dernier terme de cette proportion devrait être $KY - CK$; mais nous avons vu (*note* 75) que $KY - CK = KE - BK$. Donc, etc.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

au lieu de $CX \times AK$, nous aurons, $AK \times \overline{KE}^2 - AK \times KE \times KB = KE \times XY \times CX + KE \times \overline{XY}^2$. Et en divisant tout par $KE$, il viendra, $AK \times KE - AK \times KB = XY \times CX + \overline{XY}^2$. Je multiplie tout par $XY$, et il me vient, $AK \times KE \times XY - AK \times KB \times XY = \overline{XY}^2 \times CX + \overline{XY}^3$. Maintenant, dans le premier terme de cette équation, au lieu de $KE \times XY$, je remets $CX \times AK$, et l'équation devient, $CX \times \overline{AK}^2 - AK \times KB \times XY = CX \times \overline{XY}^2 + \overline{XY}^3$, ou bien, $\overline{XY}^3 + CX \times \overline{XY}^2 + AK \times KB \times XY - \overline{AK}^2 \times CX = 0$. Ensuite, substituant pour $XY$, $CX$, $AK$, et $KB$, leurs valeurs analytiques assignées plus haut, et qui sont respectivement $x$, $p$, $\sqrt{-\frac{r}{p}}$, $q\sqrt{-\frac{p}{r}}$, il viendra enfin, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; équation proposée qu'il fallait construire.

*Un cercle et une ligne droite étant donnés de position; si vous tracez entre cette ligne droite et le cercle une autre ligne droite d'une grandeur donnée, avec la condition que cette dernière étant prolongée, passera par un point donné: vous aurez encore une nouvelle manière de résoudre ces problêmes.*

*En effet, soit proposée l'équation du troisième degré,* $x^3 + qx + r = 0$, *qui manque de second terme :*

(*Pl.* IX, *Fig.* 7). Menez la ligne $KA$ à volonté, et appelez-la $n$. Sur $KA$ prolongée de part et d'autre, prenez $KB = \frac{q}{n}$, que vous porterez de $K$ vers $A$, lorsque $q$ sera négatif, et au contraire de $K$ vers $Y$, lorsque $q$ sera positif. Partagez $BA$ en deux parties égales au point $C$, et du point $A$ comme centre, avec un



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rayon $AC$, décrivez le cercle $CX$. Inscrivez dans ce cercle une droite $CX = \frac{r}{n^2}$, et par les points $K$, $C$ et $X$, faites passer une circonférence de cercle $KCXG$. Joignez les points $A$ et $X$ par une droite, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle $KCXG$ en un point $G$. Enfin, entre ce dernier cercle et la droite $KC$ prolongée, inscrivez une ligne droite $EY$, de même longueur que $AC$, et de manière qu'elle soit dirigée vers le point $G$. Maintenant, par le point $E$, où cette droite rencontre le cercle, menez la ligne $EC$; ce sera une des racines de l'équation. Toutes les racines qui tomberont dans le grand segment $KGC$ du cercle, seront positives; toutes celles au contraire qui tomberont dans le petit segment $KFC$, seront négatives. Tout cela cependant, dans la supposition que $r$ est négatif; car s'il était positif, ce serait tout le contraire, et les racines positives se trouveraient dans le petit segment, et les négatives dans le grand.

Pour démontrer cette construction, nous commencerons par démontrer les Lemmes suivans.

LEMME I[er]. *En nous servant de la construction précédente, nous aurons*, $CE : KA :: CE + CX : AY :: CX : KY$.

Car ayant mené la droite $KG$, on a, $AC : AK :: CX : KG$, à cause des triangles semblables $ACX$, $AKG$. Les triangles $EYC$, $KGY$ sont aussi semblables, car ils ont un angle commun en $Y$; et de plus, l'angle $YGK$ de l'un, et l'angle $ECY$ de l'autre, ont chacun pour mesure la moitié du même arc $EK$, donc ces deux angles sont encore égaux, et par conséquent les triangles sont semblables. Ainsi l'on a la proportion, $CE : EY :: KG : KY$, ou bien, à cause de $EY = AC$ ( par const. ) $CE : AC :: KG : KY$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ce qui donne, $AC \times KG = CE \times KY$. Mais la proportion trouvée plus haut, $AC : AK :: CX : KG$, donne, $AC \times KG = AK \times CX$. Donc $AK \times CX = CE \times KY$. D'où l'on tire la proportion, $CE : AK :: CX : KY$, ou bien, en alternant, $CE : CX :: AK : KY$, et en composant, $CE + CX : CX :: AK + KY : KY :: AY : KY$; et en alternant encore cette dernière proportion, $CE + CX : AY :: CX : KY$. Et à cause de la proportion trouvée plus haut, $CE : AK :: CX : KY$, on a, $CE + CX : AY :: CX : KY :: CE : AK$. C. Q. F. D.

LEMME II. *Ayant abaissé sur la ligne $GY$ la perpendiculaire $CH$, on aura le rectangle $2HE \times EY = CE \times CX$.*

Car, en abaissant aussi sur la ligne $AY$ la perpendiculaire $GL$, on aura les triangles rectangles $EHC$, $GLK$ semblables, puisque, outre l'angle droit, l'angle en $E$ de l'un, et l'angle en $K$ de l'autre, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc $GXC$. Donc ces triangles sont équiangles, et par conséquent on a la proportion, $KG : KL :: EC : EH$. Ensuite du point $A$ j'abaisse sur $KG$ la perpendiculaire $AM$, et à cause des sécantes égales $AK$, $AG$, cette perpendiculaire coupera $KG$ en deux parties égales au point $M$. Les deux triangles rectangles $KAM$, $KGL$ ayant un angle commun en $K$, sont semblables, et par conséquent on a la proportion, $AK : KM :: KG : KL$. Or, $AK : KM :: 2AK : 2KM$ ou $KG$. Donc, à cause des triangles semblables $ACX$, $AKG$, on a, $2AK : KG :: 2AC : CX :: 2EY : CX$ ( parce que $AC = EY$). Donc $AK : KM :: 2AK : KG :: 2EY : CX$. Et à cause de la proportion $AK : KM :: KG : KL$, il s'en suit qu'on a aussi la suivante, $2EY : CX :: KG : KL$. Mais nous avions déjà, $KG : KL :: EC : EH$.

I 2

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc $2EY : CX :: EC : EH$, et par conséquent, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a, $2EY \times EH = EC \times CX$. C. Q. F. D.

Nous avons regardé $AK$ et $AG$ comme étant égales; et en effet, le rectangle $CA \times AK =$ le rectangle $AX \times AG$ ( par le corollaire de la 36^e. prop. du 3^e. liv. des Elém. ); d'où l'on tire la proportion $CA : AX :: AG : AK$. Or ( par const. ) $AX = CA$, donc $AG = AK$.

LEMME III. *En gardant toutes les constructions précédentes, les trois lignes $BY$, $CE$, $KA$, sont en proportion continue.*

Car on a ( par la 12^e. prop. du 2^e. liv. des Elém. ) $\overline{CY}^2 = \overline{EY}^2 + \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Et en retranchant $\overline{EY}^2$ de chaque membre de cette équation, elle deviendra, $\overline{CY}^2 - \overline{EY}^2 = \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Mais nous avons vu, par le Lemme second, que $2EY \times EH = EC \times CX$. Ajoutons à chaque membre de cette dernière équation $\overline{CE}^2$, et nous aurons, $\overline{CE}^2 + 2EY \times EH = \overline{CE}^2 + CE \times CX$. Donc $\overline{CY}^2 - \overline{EY}^2 = \overline{CE}^2 + CE \times CX$, qu'on peut décomposer ainsi, $(CY + EY)(CY - EY) = CE(CE + CX)$; d'où l'on tire la proportion, $CE + CX : CY + EY :: CY - EY : CE$. Maintenant les trois lignes $EY$, $CA$ et $CB$ étant égales (par const. ), il s'en suit qu'on a aussi, $CY + EY = CY + CA = AY$; et $CY - EY = CY - BC = BY$. Écrivons donc dans notre proportion, $AY$ au lieu de $CY + EY$, et $BY$ au lieu de $CY - EY$, et elle deviendra, $CE + CX : AY :: BY : CE$. Mais, par le Lemme premier, on a,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$CE+CX : AY :: CE : AK$. Donc $CE : AK :: BY : CE$, ou, en intervertissant l'ordre, $BY : CE :: CE : AK$. Ces trois lignes sont donc en proportion continue, et c'est *ce qu'il fallait démontrer.*

Enfin, à l'aide de ces Lemmes, voici comment nous démontrerons la construction du problême proposé.

*Par le premier lemme*, on a, $CE : AK :: CX : KY$, donc $CE \times KY = AK \times CX$; et en divisant les deux membres de cette équation par $CE$, elle devient, $KY = \frac{AK \times CX}{CE}$. Ajoutez $BK$ à chaque membre, et vous aurez, $BK + KY$ ou............. $BY = \frac{AK \times CX}{CE} + BK$. Donc, *par le Lemme troisième*, on a.... $\frac{AK \times CX}{CE} + BK : CE :: CE : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $\frac{\overline{AK}^2 \times CX}{CE} + AK \times BK = \overline{CE}^2$; et en multipliant encore chaque membre par $CE$, on a enfin, $\overline{AK}^2 \times CX + AK \times BK \times CE = \overline{CE}^3$. Nous avons dit que la racine $x$ de l'équation, était la ligne $CE$, et comme nous avons fait, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$, si nous mettons ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles représentent, l'équation deviendra, $r + qx = x^3$, ou bien $x^3 - qx - r = 0$, équation qu'il fallait construire. Lorsque $q$ et $r$ sont négatifs, les lignes $KA$, $KB$ doivent se porter du même côté par rapport au point $K$, et la racine positive se trouve dans le plus grand segment $CGK$. *Voilà donc un des cas de la proposition qu'il fallait démontrer.*

Portez maintenant $KB$ du côté opposé à celui où vous l'avez porté d'abord; par-là, vous changez le signe de la valeur $\frac{q}{n}$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ou, ce qui revient au même, le signe de $q$, et la construction de votre équation donnera, $x^3 + qx - r = 0$. *Ce qui est un second cas.* Dans ces deux cas, $CX$, et la racine positive $CE$, tombent du même côté de $AK$. Si la ligne $CX$, et la racine négative, tombent encore du même côté de $AK$, après avoir changé le signe de $CX$, ou de $\frac{r}{n^2}$, ou, ce qui est la même chose, le signe de $r$, *vous aurez le troisième cas*, $x^3 + qx + r = 0$, dans lequel toutes les racines sont négatives. Et en changeant de nouveau le signe de $KB$ ou de $\frac{q}{n}$, ou de la seule quantité $q$, vous tomberez dans le *quatrième cas*, $x^3 - qx + r = 0$. Le lecteur pourra s'exercer à rechercher les constructions pour tous ces cas, et à trouver leurs démonstrations, en suivant la marche de celle que nous avons donnée pour le premier cas. Il nous a paru suffisant d'avoir démontré ce seul cas, et indiqué légèrement les autres, dont la démonstration se fera, en employant les mêmes termes, et en changeant seulement la situation de quelques lignes.

*Qu'il s'agisse maintenant de construire l'équation du troisième degré*, $x^3 + px^2 + r = 0$, *où manque le troisième terme.*

Employez toujours la même Figure, et prenez une ligne d'une longueur quelconque, que vous appellerez $n$; sur cette ligne prolongée indéfiniment de $A$ vers $Y$, prenez $KA$ et $KB$; faites, $KA = \frac{r}{n^2}$ et $KB = p$; portez ces lignes du même côté du point $K$, si les signes des termes $p$ et $r$ sont les mêmes, mais s'ils sont différens, portez ces lignes de côtés opposés. Partagez $BA$ en deux parties égales au point $C$, et du point $A$ comme centre, avec un rayon $AC$, décrivez le cercle $CX$. Inscrivez dans ce cercle une ligne $CX$ égale à la ligne $n$; joignez les points $A$ et $X$ par une droite que vous prolongerez jusqu'en $G$, de manière que $AG = AK$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et par les points $K$, $C$, $X$, $G$, faites passer une circonférence de cercle. Enfin, entre ce cercle et la droite $KC$ prolongée de part et d'autre, inscrivez une droite $EY$ de même longueur que $AC$, et avec cette condition, que $EY$ étant prolongée, passera par le point $G$. Et la droite $KY$ sera une des racines de l'équation. Dans le cas de $r$ positif, les racines qui tendront de $K$ vers $A$, seront positives. Mais si $r$ est négatif, alors les racines positives tendront de $K$ vers le côté opposé à $A$. Il est bien évident, que, dans tous les cas, lorsque les racines positives tendent d'un côté de $K$, les racines négatives tendent du côté opposé.

Voici de quelle manière on démontre la légitimité de cette construction, par le moyen des trois derniers Lemmes.

*Par le troisième de ces Lemmes*, nous avons vu que $BY$, $CE$, $KA$ sont en proportion continue, et *par le premier*, que l'on a la proportion $CE : AK :: CX : KY$. Donc $BY : CE :: CX : KY$. Or, $BY = KY - KB$. On aura donc la proportion $KY - KB : CE :: CX : KY$, et (par la prop. 1$^{ere}$. du liv. 6$^{e}$. des Élém.), on a $(KY - KB) \times KY : CE \times KY :: KY - KB : CE$. Et à cause de la proportion $CE : AK :: CX : KY$, on a, $CE \times KY = AK \times CX$. Donc, en substituant dans la proportion précédente, $AK \times CX$ à la place de $CE \times KY$, elle deviendra............ $(KY - KB) \times KY : AK \times CX :: KY - BK : CE$, c'est-à-dire $:: CX : KY$. Donc $(KY - KB) \times KY : AK \times CX :: CX : KY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Or, dans la construction, nous avons regardé $KY$, comme la racine de l'équation, et par conséquent, $KY$ est $x$, $KB$ est $p$, $KA$ est $\frac{r}{n^2}$, et $CX$ est $n$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Écrivons donc ces valeurs analytiques dans l'équation, au lieu des lignes qu'elles représentent, et elle deviendra, $x^3 - px^2 = r$, ou bien $x^3 - px^2 - r = 0$.

La construction qu'il s'agissait de démontrer, aurait pu être décomposée en quatre cas, $x^3 - px^2 - r = 0$, $x^3 - px^2 + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$. J'ai déjà démontré le premier cas; pour démontrer les autres, il suffit de changer la position des lignes. Car, de même que nous avons porté $KA$ et $KB$ du même côté du point $K$, et que nous avons eu pour racine positive la ligne $KY$ qui tend du côté opposé, ce qui nous a donné l'équation $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 - px^2 = r$; de même, en portant $KB$ du côté opposé, et en raisonnant comme ci-dessus, nous aurons, $\overline{KY}^3 + KB \times \overline{KY}^2 = KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 + px^2 = r$. Et si, dans chacun de ces cas, on change seulement la position de la racine $KY$, en la prenant du côté opposé du point $K$, et en raisonnant toujours comme nous avons fait, on arrivera aux deux autres cas, qui sont, $\overline{KY}^3 + KB \times \overline{KY}^2 = - KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 + px^2 = -r$, et $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = - KA \times \overline{CX}^2$, ou $x^3 - px^2 = -r$. Voilà tous les cas qu'il fallait démontrer.

*Soit proposé maintenant de construire l'équation cubique*, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, *qui a tous ses termes, à l'exception peut-être du troisième.*

Voici de quelle manière elle se construira. Prenez (*Pl.* IX, *Fig.* 8). une ligne arbitraire $n$; prenez $GC$ égale à sa moitié, et par le point $G$ élevez une perpendiculaire $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$. Enfin si les termes $p$ et $r$ ont des signes différens, du point $C$, comme centre,

et

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et de l'intervalle $CD$, décrivez une circonférence de cercle $PBE$; mais si $p$ et $r$ ont les mêmes signes, du point $D$, comme centre, et d'un rayon égal à $GC$, décrivez un arc qui coupera $GA$ en $H$. (*Pl.* X, *Fig.* 1<sup>re</sup>.). Ensuite du centre $C$, et d'un rayon égal à $GH$, décrivez une circonférence $PBE$. Faites $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$. Portez cette ligne $GA$, de $G$ vers $C$, si la quantité $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ est positive; mais si $GA$ est négative, vous la porterez du côté opposé. Il faudra donc faire bien attention aux signes des coëfficiens $p$, $q$, $r$. Dans le premier cas, élevez une perpendiculaire $AY$ au point $A$; entre cette perpendiculaire et le cercle $PBE$, décrit précédemment, inscrivez la ligne $EY$ égale au coëfficient $p$, avec la condition que cette ligne étant prolongée, passera par le point $G$. Prolongez-la en effet, et la ligne $EG$ sera une des racines de l'équation qu'il fallait construire. Toutes les racines qui auront une position semblable, seront positives, si le point $E$ tombe entre $Y$ et $G$; elles seront négatives, si le point $E$ tombe hors des points $Y$ et $G$. Tout cela cependant ne doit s'entendre que pour le cas où on a $+p$, car si l'on avait $-p$, il faudrait dire tout le contraire.

Avant de faire la démonstration de cette construction, nous allons donner les Lemmes suivans.

LEMME I<sup>er</sup>. *Si du point $E$ on abaisse sur $AG$ la perpendiculaire $EF$, et qu'on tire la droite $EC$, on a,* $\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{EC}^2 + 2GC \times GF$.

Car (par la prop. 12<sup>e</sup>. du 2<sup>e</sup>. liv. des Élém.) on a, $\overline{EG}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{GC}^2 + 2GC \times CF$. Ajoutons de part et d'autre $\overline{GC}^2$, et nous aurons, $\overline{EG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{EC}^2 + 2\overline{GC}^2 + 2GC \times CF$. Mais $2\overline{GC}^2 + 2GC \times CF =$



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$2GC(GC+CF)$, c'est-à-dire $2GC\times GF$. Donc $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. C. Q. F. D.

Lemme II. (*Pl.* IX, *Fig.* 8). *Dans le premier cas de la construction, lorsque le cercle PBE passe par le point D, on a......* $\overline{EG}^2-\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

Car, par le Lemme premier, on a, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$, et en retranchant de part et d'autre $\overline{GC}^2$, le reste est, $\overline{EG}^2=\overline{EC}^2-\overline{GC}^2+2GC\times GF$. Mais $\overline{EC}^2-\overline{GC}^2$ est la même chose que $\overline{CD}^2-\overline{GC}^2$, quantité égale à $\overline{GD}^2$. Donc $\overline{EG}^2=\overline{GD}^2+2GC\times GF$. C. Q. F. D.

Lemme III. (*Pl.* X, *Fig.* 1re.). *Dans le second cas de la construction, où le cercle PBE ne passe pas par le point D, nous avons,* $\overline{EG}^2+\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

Car, par le Lemme premier, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. Retranchez de part et d'autre $\overline{EC}^2$, et le reste sera, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=2GC\times GF$. Mais $GC=DH$ (par const.), et $EC=CP=GH$. Donc $\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=\overline{DH}^2-\overline{GH}^2=\overline{DG}^2$. Donc $\overline{EG}^2+\overline{DG}^2=2GC\times GF$. C. Q. F. D.

Lemme IV. *On a,* $2CG\times GF\times GY=2CG\times AG\times GE$. Car, à cause des triangles semblables, $GEF$, $GYA$, on a, $GF:GE::AG:GY$, c'est-à-dire (par la première prop. du 4e. liv. des Elém.) $::2CG\times AG:2CG\times GY$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $2GC\times GY\times GF=2GC\times AG\times GE$. C. Q. F. D.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*Enfin, à l'aide de tous ces Lemmes, voici comment on démontrera la construction du problême.*

*Pour le premier cas.* (*Pl.* IX, *Fig.* 8). On a, par le Lemme second, $\overline{EG}^2 - \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$. Et en multipliant les deux membres par $GY$, on aura, $GY \times \overline{EG}^2 - GY \times \overline{GD}^2 = 2GC \times GF \times GY =$ (*par le Lemme quatrième*) $2GC \times AG \times GE$. Maintenant, à la place de $GY$, mettez $EG + EY$, et vous aurez....................

$(EG + EY)\overline{EG}^2 - \overline{GD}^2(EG + EY) = 2GC \times AG \times GE$, ou bien, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 - EG \times \overline{GD}^2 - EY \times \overline{GD}^2 = 2GC \times AG \times GE$.

ou bien, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 \left.\begin{array}{l} -\overline{GD}^2 \\ -2CG \times GA \end{array}\right\} EG - \overline{GD}^2 \times EY = 0$;

*Dans le second cas.* (*Pl.* X, *Fig.* 1re.). On a, par le Lemme troisième, $\overline{EG}^2 + \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$, et en multipliant chaque membre par $GY$, il vient, $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times GF \times GY$. Or, par le Lemme quatrième, $2CG \times GF \times GY = 2CG \times AG \times GE$. Donc $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times AG \times GE$. Et en mettant pour $GY$ sa valeur $GE + EY$, on aura, $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 + \overline{GD}^2 \times EG + \overline{GD}^2 \times EY = 2GC \times AG \times EG$. Ou bien..............

$\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 \left.\begin{array}{l} +\overline{GD}^2 \\ -2GC \times AG \end{array}\right\} EG + \overline{GD}^2 \times EY = 0$.

Actuellement, nous avons appelé $x$ la racine $EG$ de l'équation, et nous avons fait $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2GC = n$, et..... $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$; telles sont les quantités et leurs signes, pour le premier cas, où $p$ et $r$ ont des signes différens. Mais pour le



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

second cas, où l'on change le signe de $p$ ou celui de $r$, on aura, $GA = -\frac{q}{n} + \frac{r}{np}$. Écrivons donc, au lieu de $EG$, $GD$, $EY$, $2GC$ et $GA$, leurs valeurs analytiques, qui sont respectivement, $x$, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, $p$, $n$, et $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$; et le premier cas donnera,

$$x^3 + px^2 \left.\begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix}\right\} x - r = 0, \text{ qui se réduit à............}$$

$x^3 + px^2 + qx - r = 0$; et le second cas donne............

$$x^3 + px^2 \left.\begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix}\right\} x + r = 0, \text{ qui se réduit à, } x^3 + px^2 +$$

$qx + r = 0$. Dans les deux cas, $EG$ est donc la véritable longueur de la racine $x$. C. Q. F. D.

Chacun de ces deux cas est sous-divisé en plusieurs cas particuliers; d'abord le premier en ceux-ci : $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + px^2 - qx - r = 0$, $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - r = 0$, et $x^3 - px^2 + r = 0$; et le second en ceux-ci : $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - qx + r = 0$, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$, et $x^3 - px^2 - r = 0$. Si l'on change, pour chacun de ces cas, la situation des lignes, le reste de la démonstration s'achèvera entièrement comme pour les cas que nous avons démontrés.

Voilà les principales constructions que l'on peut donner des problêmes, en inscrivant une ligne droite d'une longueur donnée, entre un cercle et une autre ligne droite donnés de position, avec la condition que la ligne droite inscrite étant prolongée, passera par un point donné. Or, on trouvera toujours le moyen d'inscrire cette droite en traçant la *conchoïde* des anciens, et lui donnant pour pôle,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

le point par lequel doit passer la droite inscrite prolongée. Cette conchoïde aura pour asymptote la droite donnée de position, et pour *intervalle* (*) la longueur même de la ligne à inscrire; car cette conchoïde coupera le cercle au point $E$, par lequel il faudra faire passer la droite à inscrire. Dans la pratique, on pourra employer un moyen mécanique quelconque, pour placer *la droite à inscrire*, entre le cercle et la droite donnée de position.

On remarquera que, dans toutes ces constructions, on a pris la droite $n$ indéterminée, et pouvant être prolongée de part et d'autre, à volonté, afin de la rendre propre aux différentes constructions qu'exigent les différens cas du problême. Nous donnerons un exemple de cela dans la recherche de deux moyennes proportionnelles continues, ainsi que dans la trisection de l'angle.

*Il s'agit de trouver entre a et b deux moyennes proportionnelles x et y. Puisque les quantités a, x, y, b sont en proportion continue, on aura,* $a^2 : x^2 :: x : b$ (**), ainsi $x^3 = a^2 b$, ou $x^3 - a^2 b = 0$. Dans cette équation, les termes $p$ et $q$ manquent et $r = -a^2 b$. Ainsi nous ferons usage de la première formule de construction, où il s'agissait d'inscrire une ligne droite entre deux lignes données de position, avec la condition que cette droite serait dirigée vers un point donné.

---

(*) L'*intervalle*, est la distance constante qu'il y a entre chaque point de la courbe et son asymptote, cette distance étant prise sur les lignes qui se dirigent du pôle vers chaque point de la courbe.

(**) En effet, puisqu'on a, $a : x :: x : y :: y : b$, il s'en suit qu'on a aussi, $a^2 : x^2 :: y^2 : b^2$; or $x : y :: y : b$, donne $y^2 = bx$. Donc en substituant à la place de $y^2$ sa valeur $bx$, dans la proportion $a^2 : x^2 :: y^2 : b^2$, elle deviendra, $a^2 : x^2 :: bx : b^2 :: x : b$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Ici la droite à inscrire (*Pl.* X, *Fig.* 2) est $EY$ qui est dirigée vers le point $K$, et les deux lignes entre lesquelles elle doit être inscrite sont $EX$ et $CY$. Je fais $CX = \frac{r}{n^2} = \frac{-a^2 b}{n^2}$; et comme $n$ est indéterminée, je la suppose égale à $a$, ce qui donne $CX = -b$; et voici la construction qui en résulte.

Je trace une droite $KA = a$, que je divise en deux parties égales en $C$, et du point $K$ comme centre, avec un rayon égal à $CK$, je décris le cercle $XC$, dans lequel je place la droite $CX = b$, et entre les droites $XA$ et $CX$ prolongées indéfiniment, je place $EY = CA$, de manière que $EY$ étant prolongée, puisse passer par le point $K$; et les lignes $KA$, $XY$, $KE$, $CX$ seront en proportion continue (77), c'est-à-dire, que $XY$ et $KE$ seront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre $a$ et $b$. Cette construction est bien connue.

Dans une des autres formules de construction, lorsque la droite $EY$ doit être placée entre le cercle et une droite $AK$ donnés de position (*Pl.* IX, *Fig.* 7), et de plus, être dirigée vers le point donné $G$, on a, $CX = \frac{r}{n^2}$, c'est-à-dire, dans le problême actuel, $= \frac{-a^2 b}{n^2}$. Je fais donc comme auparavant, $n = a$, ce qui donne $CX = b$. Le reste s'achevera comme on va le voir.

Je tire une droite $KA = a$ (*Pl.* X, *Fig.* 3), je la divise en deux parties égales en $C$, et du point $A$ comme centre avec le rayon $AK$, je décris un arc $KG$, dans lequel j'inscris une corde $KG = 2b$, inscription à laquelle je parviens facilement en construisant le triangle isocèle $KAG$. Ensuite par les points $C$, $K$, $G$, je fais passer une circonférence de cercle, et entre cette circonférence et la droite $AK$ prolongée, j'inscris la droite $EY = CK$, de

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

manière que cette droite $EY$ soit dirigée vers le point $G$. Cela fait, on aura les quatre droites $AK$, $EC$, $KY$, $\frac{1}{2}KG$ en proportion continue ; c'est-à-dire, que $EC$ et $KY$ sont les deux moyennes entre $a$ et $b$. (78).

*Qu'il s'agisse maintenant de partager un angle en trois parties égales ; et que l'angle proposé soit $ACB$ (Pl. X, Fig. 4), et soient de plus, les parties dans lesquelles il doit être divisé, $ACD$, $DCE$, $ECB$.*

Du point $C$ comme centre, et d'un rayon arbitraire soit tracée la circonférence $ADEB$, qui coupe respectivement les droites $CA$, $CD$, $CE$, $CB$ aux points $A$, $D$, $E$, $B$. Tirez les droites $AD$, $DE$, $EB$, ainsi que $AB$ qui coupera les droites $CD$, $CE$ aux points $F$ et $H$; menez ensuite par le point $D$ et parallèlement à $CE$ la droite $DG$ qui rencontrera $AB$ en $G$. A cause des triangles semblables $CAD$, $ADF$, $DFG$, les lignes $CA$, $AD$, $DF$, $FG$ sont en proportion continue. Si l'on fait donc $AC = a$ et $AD = x$, on aura, $DF = \frac{x^2}{a}$ et $FG = \frac{x^3}{a^2}$. D'un autre côté, on a, $AB = BH + GH + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{a^2}$. Ou bien en faisant $AB = b$, on aura, $b = 3x - \frac{x^3}{a^2}$, ce qui donne, en réduisant, $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$. Cette équation n'a point de second terme, ainsi $p = 0$, et les quantités $q$ et $r$ sont respectivement égales à $-3a^2$ et $+a^2b$. Ainsi, dans la première des formules de construction, où l'on avait, $p = 0$, $KA = n$, $KB = \frac{q}{n}$ et $CX = \frac{r}{n^2}$, ces lignes se changeront pour le problême actuel en $KB = -\frac{3a^2}{n}$, et $CX = \frac{a^2b}{n^2}$ ; et afin qu'elles deviennent les

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

plus simples possible, je suppose que $n = a$, et de cette manière, $KB = -3a$, et $CX = b$. Voici comment se construira le problême.

Je trace une ligne $KA = a$ (*Pl.* X, *Fig.* 5), et au-delà du point $K$, je la prolonge d'une quantité $KB = 3a$. Je divise $BA$ en deux parties égales en $C$, et du point $K$ comme centre, avec $KC$ comme rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris la corde $CX = b$. Et ayant tiré la droite $AX$ que je prolonge indéfiniment, j'inscris entre $AX$ et $CX$ la droite $EY = AC$, et je l'inscris de manière qu'elle soit dirigée vers le point $K$. C'est ainsi que j'obtiendrai $XY = x$. De plus, à cause des cercles égaux $ADEB$, $CXA$, et des cordes égales $AB$, $CX$, et des parties égales $BH$, $XY$ de ces mêmes cordes, les angles $ACB$, $CKX$ seront égaux, ainsi que les angles $BCH$, $XKY$. Par conséquent, l'angle $XKY$ sera la troisième partie de l'angle $CKX$. On trouvera donc le tiers $XKY$ d'un angle quelconque $CKX$, si, en tirant la corde $CX$ de cet angle, et la corde $AX$ de son supplément, prolongées toutes deux indéfiniment, on inscrit une droite $EY$ égale au diamètre $AC$, de manière qu'elle soit dirigée vers le centre $K$ du cercle (79).

D'où il suit, que si, du centre $K$ d'un cercle, on abaisse sur une corde $CX$ la perpendiculaire $KH$, l'angle $HKY$ sera le tiers de l'angle $HKX$ (*). Donc si un angle quelconque $HKX$ est donné, qu'on abaisse d'un point quelconque $X$ d'un

(*) Il est bien facile de voir que l'angle $HKY = \frac{1}{3} HKX$. Car..... $HKX = \frac{1}{2} CKX$, et $YKX = \frac{1}{3} CKX$. Or $HKY = HKX - YKX = \frac{1}{2} CKX - \frac{1}{3} CKX = \frac{1}{6} CKX = \frac{1}{3} HKX$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de

de ses côtés $KX$ une perpendiculaire $XH$, sur l'autre côté $KH$, qu'ensuite du point $X$ on mène au côté $KH$, la parallèle $XE$, et qu'on inscrive entre cette parallèle et la ligne $XH$ une droite $EY$, double de $KX$, de manière qu'elle soit dirigée vers le point $K$, et l'angle $HKY$ sera le tiers de l'angle $HKX$. Ou bien encore....

Soit l'angle donné $AXK$ (*Pl.* X, *Fig.* 6) sur l'un de ses côtés, $AX$ par exemple, élevez une perpendiculaire $XH$, et d'un point quelconque $K$ de l'autre côté $KX$ menez une droite $KE$ dont la partie $EY$ interceptée entre le côté $AX$ prolongé et la perpendiculaire $XH$, soit double de l'autre côté $XK$; et l'angle $KEA$ sera le tiers de l'angle $AXK$. Élevant ensuite une autre perpendiculaire $EZ$, et tirant la droite $KF$ de manière que sa partie $ZF$ interceptée entre $EF$ et $EZ$, soit double de $KE$, l'angle $KFA$ sera le tiers de l'angle $KEA$. C'est ainsi qu'on pourra continuer la trisection jusqu'à l'infini. Cette méthode se trouve dans Pappus, livre 4, prop. 32 (*).

*Si vous aimez mieux, pour opérer la trisection de l'angle, employer celle des formules de construction, où l'on inscrit une droite entre la circonférence d'un cercle et une autre droite donnée de position* (*Pl.* IX, *Fig.* 7); alors vous aurez encore, $KB = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$, quantités qui deviennent dans le problême actuel, $KB = \frac{-3a^2}{n}$, et $CX = \frac{a^2 b}{n^2}$.

(*) Cette construction est absolument la même que la précédente; car, si, au lieu de l'angle $AXK$, on prend son égal $XKH$, il est évident, d'après ce qui vient d'être démontré, que $YKH$ est le tiers de $XKH$; donc, etc.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Et en faisant $n = a$, on aura, $KB = -3a$ et $CX = b$. De-là résulte la construction suivante......... .

## *Lemme d'Archimède.*

D'un point quelconque $K$ (*Pl.* X, *Fig.* 7), soient menées du même côté, par rapport au point $K$, deux droites $KA = a$, et $KB = 3a$. Partagez $AB$ en deux parties égales en $C$, et du point $A$, comme centre, avec un rayon $AC$, décrivez une circonférence dans laquelle vous placerez la corde $CX = b$; ensuite unissez les points $A$ et $X$ par une droite que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en $G$; et entre la droite $KC$ prolongée indéfiniment, et la circonférence, inscrivez une droite $EY = AC$, et dirigée de manière qu'étant prolongée, elle passe par le point $G$; et ayant mené la ligne $EC$, elle sera la racine cherchée $x$, ou la corde qui soutendra le tiers de l'angle donné. Cette construction nous rendra la formule rapportée plus haut. (80).

Mais voici encore une manière de la simplifier. A cause des deux cercles égaux $ADEB$, $KXG$, et de leurs cordes égales $CX$ et $AB$, les angles $CAX$ ou $KAG$, et $ACB$ sont égaux, ainsi $CE$ est la soutendante du tiers de l'angle $KAG$. Par conséquent un angle quelconque $KAG$ étant donné, pour trouver sa troisième partie $CAE$, inscrivez entre le cercle $KGC$ et le côté de l'angle $KA$ prolongé indéfiniment, une droite $EY$ égale au rayon $AG$ du cercle et dirigée vers le point $G$. C'est ainsi qu'Archimède a enseigné à couper un angle en trois parties égales. On aurait pu expliquer toutes ces constructions d'une manière plus simple qu'on ne l'a fait ici; mais j'ai voulu faire voir comment on pouvait déduire les

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

constructions particulières des problêmes, des constructions générales qui ont été exposées plus haut.

On pourrait ajouter ici beaucoup de constructions à celles que nous avons déjà données. Par exemple, si vous voulez trouver deux moyennes proportionnelles géométriques entre $a$ et $b$, tracez une droite $AK = b$ (*Pl.* X, *Fig.* 8), et élevez-lui une perpendiculaire $AB = a$; coupez $AK$ en deux parties égales en $I$; portez de $A$ en $H$ une ligne égale à la distance $BI$; portez sur $AB$ prolongée une ligne $AC$ égale à la distance $BH$; ensuite sur $AK$ prolongée au-delà du point $A$, prenez une longueur arbitraire $AD$ que vous porterez aussi de $D$ en $E$. Maintenant des points $D$ et $E$, comme centres, et des intervalles $DB$, $EC$, comme rayons, décrivez les deux circonférences $BF$, $CG$; placez entre ces deux circonférences la droite $FG = AI$, de manière que $FG$ soit dirigée vers le point $A$; et $AF$ sera la première des deux moyennes proportionnelles. (81).

Les anciens ont montré qu'on pouvait obtenir deux moyennes proportionnelles par la construction d'une cissoïde; mais personne que je sache n'avait indiqué jusqu'ici un moyen mécanique assez simple de décrire cette courbe; le voici.

(*Pl.* X, *Fig.* 9). Soit $AG$ le diamètre, et $F$ le centre du cercle auquel appartiendra la cissoïde. Par le point $F$ élevez sur le diamètre une perpendiculaire $FD$ que vous prolongerez indéfiniment. Prolongez $FG$ jusqu'au point $P$, de manière que $FP$ soit égale au diamètre. Faites mouvoir l'équerre $PED$, de sorte que son côté $EP$ passe toujours par le point $P$, et que l'autre côté $ED$, égal au diamètre $AG$ ou $FP$, ait toujours son extrémité $D$ sur la ligne $FD$, et ne puisse se mouvoir qu'en glissant sur elle. Dans le mouvement



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de cette équerre, le point $C$, milieu du côté $ED$, décrira une cissoïde $GCK$, comme je l'ai démontré ci-devant (voyez le 34<sup>e</sup> des prob. géom.). S'il est donc question de trouver entre $a$ et $b$ deux moyennes proportionnelles, prenez $AM = a$, élevez au point $M$ une perpendiculaire $MN = b$, joignez les points $A$ et $N$, faites mouvoir selon la loi prescrite, l'équerre $PED$, jusqu'à ce que son point $C$ soit parvenu dans la ligne $AN$; alors en abaissant du point $C$ une perpendiculaire $CB$ sur $AP$, et faisant $t : BH :: u : BG :: MN : BC$, vous aurez, à cause des lignes, $AB$, $BH$, $BG$, $BC$, qui sont en proportion continue, vous aurez aussi, dis-je, $a$, $t$, $u$, $b$ en proportion continue.

On peut encore se servir de l'équerre pour construire d'autres problêmes solides. Par exemple, soit proposée l'équation cubique, $x^3 \pm px^2 + qx - r = 0$, dans laquelle on suppose que $q$ est toujours positif, $r$ toujours négatif, et $p$ positif ou négatif. Faites $AG = \frac{r}{q}$; partagez $AG$ en deux parties égales au point $F$, et prenez $FR = GL = \frac{1}{2}p$; portez $FR$ de $F$ vers $A$, et $GL$ de $G$ vers $A$, si vous avez $+p$, mais si vous avez $-p$, vous porterez ces deux lignes vers $P$; élevez au point $F$ la perpendiculaire $FD$, et sur cette perpendiculaire prenez $FQ = \sqrt{q}$; élevez encore au point $Q$ la perpendiculaire $QC$; prenez sur la jambe $ED$ de l'équerre les parties $ED$ et $EC$, respectivement égales à $AG$ et à $AR$, ensuite appliquez l'équerre sur la figure de manière que le point $D$ touche la droite $FD$, et le point $C$ la droite $QC$; alors si vous achevez le parallélogramme $BQ$, la droite $BL$ sera la valeur de $x$.

Jusqu'ici je n'ai employé, pour construire les problêmes solides, que des moyens mécaniques d'une pratique facile et expéditive.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

C'est ainsi que les anciens ayant déterminé, par composition, les lieux des problêmes solides, ont bientôt senti que de telles constructions resteraient inutiles, à cause de la difficulté de décrire les sections coniques; c'est ce qui les a engagés à en rechercher de plus faciles, ou par la conchoïde, ou par la cissoïde, ou en tendant des fils, ou enfin par quelques autres moyens mécaniques, préférant, comme nous l'apprend Pappus, une construction mécanique, mais d'une exécution aisée, à une autre géométrique, à la vérité, mais bonne uniquement en spéculation. C'est pour cette raison que le grand Archimède, négligeant la méthode trouvée par les géomètres ses prédécesseurs, d'opérer la trisection d'un angle par les sections coniques, enseigna dans ses lemmes un nouveau moyen d'exécuter ce problême; c'est celui que nous avons fait connaître ci-devant. Si les anciens, tout en regardant certaines courbes comme mécaniques, les ont cependant préférées pour la construction des problêmes, il me semble qu'il y a encore bien plus de raisons de les préférer pour cet usage, aujourd'hui que la plupart des géomètres les regardent comme tout aussi géométriques que les sections coniques elles-mêmes.

Au reste, je ne partage pas leur opinion à cet égard. Leur règle, qui est d'admettre pour la construction des problêmes toutes les espèces de lignes, selon le rang des dimensions de leurs équations, me paraît arbitraire, et sans aucune base solide en géométrie. Je dis plus même, c'est qu'elle est fausse; car, selon cette règle, le cercle serait du même ordre que les sections coniques, et cependant on s'accorde généralement à le ranger avec la ligne droite; et la certitude de cette règle une fois ébranlée, que devient celle d'admettre dans la géométrie toutes les lignes, selon l'ordre de leurs

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dimensions? N'est-elle pas sapée par les fondemens? Quant à moi, je crois qu'on ne doit admettre parmi les lignes planes que la droite et le cercle, à moins qu'on n'imagine auparavant un nouveau moyen de distinguer les lignes, tel que la droite et le cercle réunis par un caractère commun, soient distingués de toutes les autres. Et dans cette supposition même, le nombre des lignes planes ne pourrait être augmenté. En effet, toute ligne qu'on peut tracer sur un plan est réellement plane, et tout problême qu'on peut construire par une telle ligne est un problême plan. Supposons donc qu'on admette dans la géométrie plane les sections coniques, et d'autres courbes de dimensions plus élevées, il en résultera que les problêmes solides et d'autres même d'un ordre supérieur qui pourront être construits par ces courbes, deviendront des problêmes plans; donc les problêmes plans, les problêmes solides, etc. seront tous du même ordre, puisqu'ils seront tous construits par des courbes planes. La ligne droite est analytiquement plus simple que le cercle; mais malgré cette différence, les problêmes que l'on construit par l'une, sont du même ordre que ceux que l'on construit par l'autre. Par une seule *demande* de cette nouvelle méthode de diviser les lignes, la droite et le cercle sont ramenés au même ordre; l'ellipse s'y place encore plus facilement, puisqu'elle diffère moins du cercle que le cercle de la ligne droite; ainsi, en *demandant* que l'ellipse soit décrite sur un plan, elle est, par l'effet de cette seule *demande*, ramenée au même ordre que le cercle. Supposons que quelqu'un, en examinant les propriétés d'une ellipse, soit conduit à un problême solide, et qu'il lui soit possible de construire ce problême à l'aide de cette même ellipse et d'un cercle, ne paraîtrait-il pas raisonnable de regarder ce problême comme plan, puisqu'on suppose que déjà l'ellipse est

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tracée sur un plan, et qu'il ne s'agit plus, pour achever la construction, que de tracer un cercle? Par la même raison ne paraîtrait-il pas très-légitime de construire des problêmes plans par le moyen de l'ellipse déjà tracée? Par exemple ( *Pl.* XI, *Fig.* 1[re]. ) si cette ellipse est *ADFG*, et qu'on demande son centre *O*, je tracerai les deux parallèles *AB*, *CD*, qui rencontreront l'ellipse aux points *A*, *B*, *C*, *D*; je mènerai ensuite deux autres parallèles *EF*, *GH*, qui rencontreront l'ellipse aux points *E*, *F*, *G*, *H*; je couperai chacune de ces parallèles en deux parties égales aux points *I*, *K*, *L*, *M*; j'unirai les points *I* et *K*, *L* et *M* par des droites que je prolongerai jusqu'à leur point de rencontre en *O*; et cette construction d'un problême plan par l'ellipse ne serait-elle pas très-légitime? Peu importerait que cette courbe soit exprimée analytiquement par une équation de deux dimensions, ou qu'elle soit engendrée par la section d'un solide : la seule *supposition* qu'elle est déjà tracée sur un plan, suffirait pour rendre *plans* tous les problêmes solides que l'on construirait par son moyen; et réciproquement elle serait très-bien employée à construire tous les problêmes plans, car la demande n'est-elle pas réciproque (*)? Or ce qui peut se faire en vertu d'une *demande*, doit être regardé comme fait et accordé. La *demande* sera donc : qu'une ellipse soit décrite sur un plan, et dès lors tous les problêmes qui seront construits par le moyen de

---

(*) Dans cette méthode que suppose Newton, de diviser les courbes, la première *demande* est que tout problême construit par une courbe tracée sur un plan, soit regardé comme *plan*; et la seconde *demande*, ou plutôt la *demande* réciproque est, que tout problême plan puisse être construit par une courbe quelconque tracée sur un plan.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

cette ellipse, seront rangés parmi les problêmes plans; et réciproquement tous les problêmes plans pourront être construits par cette ellipse.

De tout ce qui précède, il faut nécessairement conclure ou que l'on doit confondre ensemble et ranger dans la même classe les problêmes plans et les problêmes solides, ou rejeter de la géométrie toutes les lignes, hors la droite et le cercle, et peut-être quelque autre encore qui, dans certains cas, pourrait servir à la construction de quelque problême. Maintenant peut-on supposer qu'il se trouve un géomètre qui veuille confondre tous les genres de problêmes? Non, sans doute. Eh bien donc, il faut rejeter de la géométrie plane les sections coniques, ainsi que toutes les autres espèces de lignes, excepté la droite, le cercle, et celles qui pourraient être données dans quelques cas particuliers. Ainsi cette pratique, si commune parmi les géomètres modernes, de décrire les sections coniques sur un plan, est entièrement contraire à l'esprit de la géométrie. Je ne prétends pas pourtant qu'on doive exclure de la géométrie les sections du cône; je dis seulement qu'on ne doit pas les décrire sur un plan, parce qu'elles n'y sont pas engendrées géométriquement. Elles naissent de l'intersection d'un solide géométrique avec un plan. Or, le cône se construit géométriquement, et sa section par un plan est une opération très-géométrique. Ainsi le segment du cône est une figure géométrique, qui tient dans la géométrie solide le même rang que le segment du cercle dans la géométrie plane; et par conséquent la base de ce segment du cône, qu'on appelle section conique, est une véritable figure de géométrie. Par conséquent une section conique n'est admise dans la géométrie que parce qu'elle est la surface d'un solide géométrique; et comme le seul moyen géométrique

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

géométrique d'obtenir ces courbes est de couper un solide, les anciens ne les ont jamais admises que dans la géométrie solide. On sent bien qu'une telle génération des sections coniques devient si difficile, qu'elle ne peut être d'aucune utilité pour la pratique; et cependant le principal but de la géométrie est de faciliter les méthodes de pratique. Aussi les anciens ont-ils eu recours à différentes courbes mécaniques décrites sur un plan, et c'est à leur exemple que j'ai construit les problêmes précédens. Ces constructions sont mécaniques, dira-t-on; je le sais. Mais la méthode moderne de construire par le moyen des sections coniques décrites sur un plan, n'est-elle pas aussi mécanique? Et si l'on veut que les constructions par les sections coniques soient géométriques, pourquoi donc ne le seraient pas également celles que l'on ferait par toute autre figure? Les unes et les autres ne sont-elles pas de l'ordre des problêmes plans? Je ne vois aucune raison de préférer les sections coniques aux autres figures, à moins que ce ne soit parce que les premières sont engendrées par les sections du cône; mais cette propriété est bien inutile pour la pratique. Au reste, pour ne pas omettre tout-à-fait les constructions par les sections coniques, je vais en donner ici quelques exemples, où je n'oublierai pas même d'indiquer des moyens très-propres à en faciliter l'usage.

De toutes les sections coniques, la plus simple est l'ellipse. Elle est aussi la plus connue, et celle qui a le plus d'affinité avec le cercle, enfin celle qui peut être le plus facilement décrite sur un plan. Cependant la plupart des géomètres lui préfèrent la parabole, parce que l'équation de celle-ci est plus simple. Mais par la même raison ils devraient donc aussi préférer la parabole au cercle, et c'est ce qu'ils ne font pas. Rien n'est donc plus dénué de fondement



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que cette classification des courbes selon la simplicité de leurs équations, et les géomètres modernes y ont trop d'égard. La simplicité des équations n'est qu'une simplicité analytique qui n'a rien de commun avec la composition. Les loix de celles-ci sont entièrement indépendantes de l'analyse : cette dernière nous mène comme par la main à la composition ; mais il n'y a de vraie composition qu'à l'instant où l'analyse a entièrement disparu, tant qu'il en reste la moindre trace, vous n'avez point encore de véritable composition. La simplicité des figures dépend et de la simplicité de leur description, et des idées qu'elles expriment. Une figure n'est point une équation ; c'est une peinture soit géométrique, soit mécanique, par laquelle on exprime ses idées pour les rendre faciles à concevoir. Nous donnerons donc le premier rang à l'ellipse, et nous enseignerons de quelle manière on peut construire les équations par son moyen.

*Soit proposée l'équation générale du troisième degré*, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, *où les quantités* $p$, $q$, $r$ *sont les coëfficiens connus des termes de l'équation, et peuvent être indifféremment positifs ou négatifs, et où l'un des deux termes* $p$, $q$, *et même tous les deux peuvent manquer, ou bien, ce qui est la même chose, être égaux à zéro.* La seule construction suivante pourra servir de formule pour construire toutes les équations cubiques.

( *Pl.* XI, *Fig.* 2 ). Sur une droite donnée quelconque, portez d'un même côté, à partir du point $B$, les droites $BC$ et $BE$, ainsi que $BD$ moyenne proportionnelle entre $BC$ et $BE$. Appelez $BC$, $n$ ; et faites $BA = \frac{q}{n}$, que vous porterez vers $C$, si $q$ est positif, et du côté opposé, s'il est négatif. Elevez au point $A$ une perpendi-

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

culaire $AI$; prenez sur cette perpendiculaire, $AF = p$, $FG = AF$, $FI = \frac{r}{n^2}$, et enfin faites la proportion, $BE : BC :: FI : FH$, et vous porterez $FH$ de $F$ en $H$. Les deux lignes $FH$ et $FI$ doivent se porter du même côté du point $F$, c'est-à-dire toutes les deux vers $G$, si $p$ et $r$ ont les mêmes signes, et toutes les deux vers $A$, s'ils ont des signes différens. Achevez les parallélogrammes $IACK$ et $HAEL$, et du point $K$, comme centre, avec $KG$ pour rayon, décrivez un cercle. Prenez sur la droite $HL$, d'un côté ou de l'autre du point $H$, une ligne $HR$ que vous déterminerez de longueur par cette proportion, $BE : BD :: HL : HR$; par les points $G$ et $R$, tirez la droite $GR$ jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque point $S$ la perpendiculaire $EL$; ensuite faites mouvoir la ligne $GRS$ de manière que son point $R$ glisse toujours sur la droite $HL$, et son point $S$ sur la droite $EL$; par ce mouvement, le point $G$ décrira une ellipse qui coupera le cercle, comme on peut le voir lorsque la ligne $GRS$ est arrivée dans la position $\gamma\rho\sigma$. Maintenant, si du point $\gamma$ on abaisse sur $AE$ la perpendiculaire $\gamma X$, la moitié de cette perpendiculaire sera une des racines de l'équation. Et l'extrémité $G$ ou $\gamma$ de la règle $GRS$ ou $\gamma\rho\sigma$, pourra rencontrer le cercle en autant de points qu'il y a de racines réelles dans l'équation. Toutes celles des racines qui seront situées, par rapport à $AE$, du même côté que $FI$ comptée du point $F$, seront positives, et toutes celles qui seront situées, par rapport à $AE$, dans un sens contraire à $FI$, seront négatives. Tout cela cependant dans la supposition que l'on a $-r$; car si l'on avait $+r$, ce serait tout le contraire.

Cette construction se démontre avec le secours des Lemmes suivans.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

LEMME I$^{er}$. *Tout étant supposé comme dans la construction précédente, on a,* $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI.$

Car on a, par la propriété du triangle rectangle, $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = (X\gamma - CK)^2$, ou bien, $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = (X\gamma - AI)^2$. Mais... $\overline{K\gamma}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{AC}^2$, et $\overline{CX}^2 = (AX - AC)^2 = \overline{AX}^2 - 2AX \times AC + \overline{AC}^2$. Donc $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AX \times AC$. Et par conséquent, $(X\gamma - AI)^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AC \times AX$, ou bien, $\overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + \overline{AI}^2 = \overline{GI}^2 - \overline{AX}^2 + 2AC \times AX$. Retranchons de part et d'autre $\overline{GI}^2$, et il restera, $\overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + \overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = 2AC \times AX - \overline{AX}^2$. Or (par la 4$^e$. prop. du 2$^e$. liv. des Elém.) on a, $\overline{AI}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GI + \overline{GI}^2$, et par conséquent, $\overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GI = 2AG\left(\frac{AG}{2} + GI\right)$. Or $\frac{1}{2}AG + GI = FI$. Donc $\overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = 2AG \times FI$. Donc enfin $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{X\gamma}^2 - 2X\gamma \times AI + 2AG \times FI$. C. Q. F. D.

LEMME II. *Tout étant supposé comme dans la construction précédente, on aura,* $2EA \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{X\gamma}^2 - \frac{2FI}{FH} \times X\gamma \times AH + 2AG \times FI.$

On sait, par la manière dont nous avons fait mouvoir ci-dessus, la règle $\gamma\rho\sigma$, que son point $\gamma$ décrit une ellipse, dont le centre est en $L$, et que les deux axes sont placés sur les droites $LE$ et $LH$. Celui de ces deux axes qui tombe sur $LE$, égale $2\gamma\rho$, ou $2GR$, et celui qui tombe sur $LH$, égale $2\gamma\sigma$, ou $2GS$. Les

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

triangles semblables $HGR$, $SRL$ nous donnent la proportion, $GR : RS :: RH : RL$, d'où nous tirons $GR : GR + RS :: RH : RH + RL$; ou bien, $GR : GS :: RH : HL$. Mais nous avons eu plus haut la proportion, $BE : BD :: HL : HR$. On conclut de ces deux proportions, celle-ci, $BD : BE :: 2GR : 2GS$. D'où il suit que le grand axe est à son paramètre $:: BE : BC$, ou bien $:: FI : FH$. (82). Ainsi $T\gamma$ étant une ordonnée à l'axe $HL$, on a par la propriété de l'ellipse, $\overline{GS}^2 - \overline{LT}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2$. (83). Mais $LT = AE - AX$, et $T\gamma = \gamma X - AH$. Ainsi $\overline{LT}^2 = \overline{AE}^2 - 2AE \times AX + \overline{AX}^2$; et $\overline{T\gamma}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2$. Substituons, à la place de ces deux quarrés, leurs valeurs dans l'équation $\overline{GS}^2 - \overline{LT}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2$, elle deviendra, $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 + 2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2)$. Mais $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = (GH + LS)^2$, parce que $GS$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont égaux, l'un à $AE$, et l'autre à $GH + LS$. Et à cause des triangles semblables $RGH$, $RSL$, on a, $LS : GH :: LR : HR$, et en composant, $LS + GH : GH :: LR + HR : HR$. Ou bien, $LS + GH : GH :: HL : HR$. D'où l'on tire...... $(LS + GH)^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Mais nous avons fait par construction, $BE : BD :: HL : HR$, ce qui donne, $\overline{BE}^2 : \overline{BD}^2 :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$; et en mettant pour $\overline{BD}^2$ sa valeur $BC \times BE$, nous aurons, $\overline{BE}^2 : BC \times BE :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Ou bien, $BE : BC :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$. Or $BE : BC :: FI : FH$, donc $FI : FH :: \overline{HL}^2 : \overline{HR}^2$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc aussi $(LS+GH)^2 : \overline{GH}^2 :: FI : FH$; d'où l'on tire... $(LS+GH)^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$. Et nous venons de voir que... $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = (LS+GH)^2$. Donc $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$. On aura donc, $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2 + 2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2)$. Retranchez de part et d'autre $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$, et il restera, $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + \overline{AH}^2 - \overline{GH}^2)$. Mais $AH = AG + GH$, donc $\overline{AH}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GH + \overline{GH}^2$. Et en retranchant de part et d'autre $\overline{GH}^2$, le reste sera, $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GH$, ou bien, $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = 2AG\left(\frac{AG}{2} + GH\right) = 2AG \times FH$. Ainsi on aura, $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{FI}{FH}(\overline{\gamma X}^2 - 2\gamma X \times AH + 2AG \times FH)$. Ou bien enfin....... $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{\gamma X}^2 - \frac{2FI \times \gamma X \times AH}{FH} + 2FI + AG$. C. Q. F. D.

LEMME III. *En supposant toujours que tout est comme dans la construction, on aura la proportion,* $AX : \gamma X - AG :: \gamma X : 2BC$.

Car si l'on retranche l'équation donnée par le premier Lemme de celle qui est donnée par le second, on aura pour reste.... $2AX \times CE = \frac{HI}{FH} \times \overline{\gamma X}^2 - \frac{2FI}{FH} \times AH \times \gamma X + 2AI \times \gamma X$. Et en multipliant chaque membre de cette équation par $FH$, il viendra, $2FH \times AX \times CE = HI \times \overline{\gamma X}^2 - 2FI \times AH \times \gamma X + 2AI \times FH \times \gamma X$. Mais $AI = AH + HI$. Ainsi $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$AH - 2FH \times AH - 2FH \times IH$. Ensuite $2FI \times AH - 2FH \times AH = 2AH \times HI$, et $2AH \times HI - 2FH \times HI = 2HI \times AF$. Donc $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$; par conséquent $2FH \times CE \times AX = HI \times \overline{\gamma X}^2 - 2HI \times AF \times \gamma X$. De cette équation l'on tire la proportion, $HI : FH :: 2AX \times CE : (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. Mais on a (*par const.*) $CE : BC :: HI : FH$. (*). Donc $CE : BC :: 2AX \times CE : (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. D'où l'on tire, $2AX \times BC = (\gamma X - 2AF) \times \gamma X$. Et enfin... $AX : \gamma X - 2AF :: \gamma X : 2BC$. C. Q. F. D.

LEMME IV. *Toujours dans les mêmes suppositions*, on a, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$.

Car si de l'équation résultant du troisième Lemme, $2BC \times AX = \overline{\gamma X}^2 - 2AF \times \gamma X$, on retranche l'équation résultant du premier Lemme, et qui est, $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$, il restera, $-2AB \times AX + \overline{AX}^2 = 2FI \times \gamma X - 2FI \times AG$, ou bien $AX(AX - 2AB) = 2FI(\gamma X - AG)$; d'où l'on tire la proportion, $2FI : AX - 2AB :: AX : \gamma X - AG$. Mais par le Lemme troisième on a, $AX : \gamma X - 2AF :: \gamma X : 2BC$, ou bien (à cause de $2AF = AG$), $AX : \gamma X - AG :: \gamma X : 2BC$. Donc, à cause de l'égalité des deux rapports, on a, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$. C. Q. F. D.

(*) Par construction on a, $BE : BC :: FI : FH$; d'où il est facile de tirer la proportion que Newton donne ici.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*Après avoir établi tous ces Lemmes, voici enfin de quelle manière on démontre la construction du problême.*

Par le Lemme quatrième on a cette proportion, $2FI : AX - 2AB :: \gamma X : 2BC$, ou bien $\gamma X : 2BC :: 2FI : AX - 2AB$; et (par la 1re. prop. du 6e. liv. des Elém.) cette proportion devient, $\gamma X : 2BC :: 2FI \times 2BC : 2BC(AX - 2AB)$, ou bien..... $\gamma X : 2BC :: 2FI \times 2BC : AX \times 2BC - 2AB \times 2BC$. Et par le Lemme troisième nous avons eu, $\gamma X : 2BC :: AX : \gamma X - 2AF$. Donc $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : \gamma X(\gamma X - 2AF) - 2BC \times 2AB$ (84). Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $\overline{\gamma X}^3 - 2AF \times \overline{\gamma X}^2 - 4BC \times AB \times \gamma X = 8\overline{BC}^2 \times FI$. Et en transportant tous les termes d'un même côté, $\overline{\gamma X}^3 - 2AF \times \overline{\gamma X}^2 - 4BC \times AB \times \gamma X - 8\overline{BC}^2 \times FI = 0$. Maintenant, dans la construction qu'il s'agissait de démontrer, nous avons appelé $\frac{1}{2}\gamma X$, $x$; $AF$, $p$; $BC$, $n$; $AB$, $\frac{q}{n}$; et $FI$, $\frac{r}{n^2}$. Ainsi $BC \times AB = q$, et $\overline{BC}^2 \times FI = r$, et en substituant toutes ces valeurs dans l'équation finale, on aura, $x^3 - px^2 - qx - r = 0$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. Si l'on suppose les lignes $AB$ et $AF$ égales à zéro, on aura, par le Lemme troisième, $AX : \gamma X :: \gamma X : 2BC$; et par le Lemme quatrième, $2FI : AX :: \gamma X : 2BC$. D'où l'on tire, $2FI : AX :: AX : \gamma X :: \gamma X : 2BC$. De là on déduit la méthode de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites quelconques $FI$ et $BC$.

*SCOLIE.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## *SCOLIE.*

Jusqu'ici je n'ai employé que l'ellipse pour construire l'équation du 3ᵉ degré; mais la règle est plus générale par sa nature; elle s'étend indifféremment à toutes les sections coniques. En effet, si, au lieu de l'ellipse, vous voulez employer l'hyperbole, portez les lignes $BC$ et $BE$ dans des sens opposés à partir du point $B$; déterminez ensuite, comme auparavant, les points $A$, $F$, $G$, $H$, $I$, $K$, $L$ et $R$, excepté seulement que $FH$ partant du point $F$, doit être portée du côté opposé à $FI$; et que $HR$ ne doit point être comptée sur $HL$, mais sur $AI$, et qu'il faut porter $HR$ de part et d'autre du point $H$; ensuite, au lieu de la ligne $GRS$, menez par le point $L$ et par les deux points $R$ et $R$ deux droites, elles seront les asymptotes de l'hyperbole. Au moyen de ces asymptotes, $LR$, $LR$, décrivez une hyperbole que vous ferez passer par le point $G$; ensuite décrivez aussi un cercle du point $K$ comme centre, et d'un rayon $KG$; et les moitiés des perpendiculaires abaissées de chaque point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle, sur la droite $AE$, seront les racines de l'équation proposée. La démonstration s'en fera comme ci-dessus, en observant de changer convenablement les signes + et —, selon qu'on a changé la position des lignes.

Si vous voulez employer la parabole, le point $E$ s'éloignera à l'infini, ainsi il ne se trouvera nulle part, et le point $H$ tombera sur le point $F$. Cette parabole aura pour axe $HL$ et $BC$ pour paramètre de l'axe; elle passera par les points $G$ et $A$; et son sommet sera situé par rapport à $F$ du même côté que $B$ est situé par rapport à $C$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Les constructions que l'on fait par la parabole sont les plus simples de toutes, en ne considérant que la simplicité analytique; viennent ensuite celles que l'on fait par l'hyperbole, et en dernier lieu, les constructions par l'ellipse. Mais si vous n'avez égard qu'à la simplicité pratique, à la facilité de décrire les figures, renversez cet ordre.

Il faut observer dans toutes ces constructions, qu'en général une ellipse ou une hyperbole est déterminée d'espèce par le rapport qui existe entre le paramètre de son axe, et l'axe même; et ce rapport étant le même que celui des lignes $BC$ et $BE$, on voit que connoissant celui-ci, on aura l'autre. Pour la parabole, il suffira de supposer $BE$ infini, et $BC$ sera le paramètre, ligne dont la connaissance suffit seule, pour construire la parabole. Ainsi l'on peut toujours construire une équation quelconque du troisième degré par le moyen de telle section conique qu'on voudra, lors même que la Figure en est déjà tracée, et par conséquent invariable. Et pour arriver de la Figure tracée à celle qui doit donner les racines de l'équation proposée, il faudra augmenter ou diminuer dans un rapport donné, toutes les dimensions de la première; je vais m'expliquer plus clairement.

*Soit proposé de construire l'équation quelconque du troisième degré* $x^3 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$, *par le moyen d'une section conique quelconque déjà tracée.*

D'un point quelconque $B$ (*Pl.* XI, *Fig.* 3 et 4), prenez sur la droite indéfinie $BCE$, deux droites d'une longueur arbitraire $BC$, $BE$, avec la condition pourtant qu'elles seront entre elles dans le rapport du paramètre de l'axe principal, à l'axe même de la section tracée; portez ces lignes d'un même côté du point $B$, si la section est une ellipse, et de côtés différens, si c'est une hyperbole. Faites

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$BC = n$; et $BA = \frac{q}{n}$, et portez $BA$ de $B$ vers $C$, si $q$ est positif, et du côté opposé, s'il est négatif; élevez au point $A$ une perpendiculaire $AI$, sur laquelle vous prendrez $AF = p$ et $FG = AF$. Enfin vous ferez $FI = \frac{r}{n^2}$; vous porterez $FI$ de $F$ vers $G$, si $p$ et $r$ ont les mêmes signes; mais s'ils ont des signes différens, vous porterez $FI$ de $F$ vers $A$. Faites ensuite la proportion $BE : BC :: FI : FH$. Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le quatrième l'est aussi; portez-le de $F$ vers $I$, si la section tracée est une ellipse, et dans le sens opposé, si c'est une hyperbole. Enfin achevez les parallélogrammes $IACK$, $AHLE$. Toutes ces lignes étant décrites, appliquez-les sur la section conique tracée, ou bien, ce qui revient au même, appliquez sur elles la section conique, de manière que son axe principal coïncide avec la droite $LH$, et que son centre tombe sur le point $L$. Ces choses étant ainsi disposées, unissez par des droites les points $L$ et $K$, ainsi que les points $L$ et $G$; la droite $LG$ coupera la section conique au point $g$. Ensuite prenez sur $LK$, à partir du point $L$, une quatrième proportionnelle que vous déterminerez en faisant la proportion $LG : Lg :: LK : Lk$; et du point $k$ comme centre, avec un rayon $kg$ décrivez un cercle; des points où ce cercle coupera la section conique superposée, abaissez sur $LH$ des perpendiculaires, telles que $\gamma T$; après quoi, portez de $T$ vers $\gamma$ une quatrième proportionnelle $TY$, que vous déterminerez par la proportion $Lg : LG :: T\gamma : TY$; prolongez $TY$ jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne $AB$ en un point $X$, et $\frac{1}{2}XY$ sera une des racines de l'équation proposée. Toutes les racines qui seront situées par rapport à $AB$ du même côté que $FI$ est situé par rapport au point $F$, toutes ces racines, dis-je, seront positives;



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et toutes celles qui seront situées dans un sens contraire, seront négatives; dans la supposition toutefois, que, dans l'équation, on a, $-r$; car si l'on avait $+r$, il faudrait dire tout le contraire.

C'est ainsi que, par le moyen d'ellipses ou d'hyperboles données, on construit toutes les équations du troisième degré. Si l'on veut construire par le moyen d'une parabole donnée, il faudra prendre $BC$ égale au paramètre de cette parabole; et après avoir déterminé, comme ci-dessus, les points $A$, $F$, $G$, $I$ et $K$, du point $K$ comme centre, avec un rayon $KG$, on décrira un cercle, et sur ces lignes ainsi tracées, on appliquera la parabole donnée, ou les lignes sur la parabole, de manière que celle-ci passe par les points $A$ et $G$, et que son axe passant par le point $F$, soit parallèle à $AC$, et que son sommet tombe, par rapport à $F$, du même côté que $B$ est situé par rapport à $C$. Toutes ces choses étant ainsi disposées, si, des points d'intersection du cercle avec la parabole, on abaisse des perpendiculaires sur la droite $BC$, les moitiés de ces perpendiculaires seront les racines de l'équation qu'il fallait construire.

Et remarquez que si le second terme de l'équation manque, et que le paramètre de la parabole soit le nombre 2, notre construction devient celle que Descartes a donnée dans sa géométrie, excepté que toutes les lignes sont ici doubles de celles de la construction de Descartes.

Telle est la règle générale des constructions. Mais lorsqu'il s'agit de construire des problêmes particuliers, il faut tâcher de le faire par les formules les plus simples possibles. Par exemple, j'ai introduit l'indéterminée $n$, par le moyen de laquelle on peut très-souvent simplifier la construction. Je vais en donner un exemple.

Soit donnée une ellipse, et qu'il s'agisse de trouver deux

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

moyennes proportionnelles entre $a$ et $b$. Soient, la première des deux moyennes $x$, et la seconde $\frac{x^2}{a}$; alors les quatre termes $a$, $x$, $\frac{x^2}{a}$, et $b$ seront en proportion continue, et l'on aura, $ab = \frac{x^3}{a}$, ou $x^3 = a^2 b$, et enfin $x^3 - a^2 b = 0$, équation qu'il s'agit de construire. On voit que dans cette équation les termes $p$ et $q$ manquent, et que $r = a^2 b$. Ainsi $BA$ et $AF$ sont ici nulles, et $FI = \frac{a^2 b}{n^2}$. Afin que le dernier terme devienne plus simple, je suppose que l'indéterminée $n = a$; alors $FI = b$; et voici comment se fait la construction.

Sur une ligne indéfinie $AE$ (*Pl.* XI, *Fig.* 5), prenez, à compter du point $A$, une ligne $AC = a$. Ensuite déterminez une ligne $AE$ par cette proportion: le paramètre du grand axe de l'ellipse est à cet axe, comme $AC$ est à $AE$; portez $AE$ du même côté que $AC$, à partir du point $A$. Elevez sur $AC$ et par le point $A$ une perpendiculaire, sur laquelle vous prendrez $AI = b$; déterminez ensuite une ligne $AH$ par cette proportion, $AE : AC :: AI : AH$; et achevez les parallélogrammes $IACK$, $HAEL$; tirez les droites $LA$, $LK$; appliquez sur tout ce tracé l'ellipse donnée, et supposez qu'elle coupe la droite $AL$ en un point $g$; faites la proportion, $LA : Lg :: LK : Lk$; du point $k$, comme centre, et d'un rayon $kg$, décrivez un cercle qui coupera l'ellipse en $\gamma$; du point $\gamma$ abaissez sur $AE$ la perpendiculaire $\gamma X$, qui rencontrera $HL$ en $T$; déterminez une ligne $TY$ par cette proportion, $Lg : LA :: T\gamma : TY$, et vous aurez, $\frac{1}{2} XY = x$; c'est-à-dire que $\frac{1}{2} XY$ sera la première des deux moyennes proportionnelles. C. Q. F. T.

*Fin de l'Arithmétique Universelle.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# NOTES

## SUR

# L'ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE

# DE NEWTON.

### NOTE (1), *pour la page* 47. *Tome I.*

SI une équation est le produit des facteurs $x-a=0$, $x+b=0$, $x-c=0$, ou qu'on ait, $(x-a)(x+b)(x-c)=0$, ou bien

$$x^3 \left.\begin{array}{l} -a \\ +b \\ -c \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} -ab \\ +ac \\ -bc \end{array}\right\} x + abc = 0,$$

il est évident que le dernier terme est le produit de toutes les racines, et qu'en substituant successivement à la place de $x$ et de ses puissances, chacun des facteurs du dernier terme $+a$, $-b$, $+c$, l'équation, dans tous ces cas, devient égale à zéro ; par conséquent elle est divisible par $x-a=0$, ou par $x+b=0$, ou par $x-c=0$ (mais comme on ne sait pas d'avance si les racines $a$, $b$, $c$ doivent être prises avec le signe $+$ ou le signe $-$, il est clair qu'il faut tenter la division successivement avec l'un et l'autre signes). On voit donc que, lorsqu'une équation littérale a des diviseurs commensurables, il est très-facile de les découvrir, mais il n'en est pas de même pour une équation numérique, parce que quelques-unes de ses racines, ou même toutes pouvant n'être pas des nombres premiers, le dernier terme qui est leur produit serait alors décomposable de plusieurs manières, sans qu'on sût quels

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sont ceux de tous ses facteurs qui sont les racines de l'équation. Soit, par exemple, l'équation $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ ; les diviseurs du dernier terme sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48, parmi lesquels se trouvent confondues les trois racines de l'équation 2, 4, 6, et c'est pour les reconnaître, que Newton, perfectionnant la règle de Descartes pour trouver les racines commensurables d'une équation, a donné la méthode que nous allons expliquer.

Supposons que l'équation $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$, etc. $+ K = 0$ soit divisible exactement par le facteur du premier degré $x \pm D = 0$, et que le quotient soit $x^{m-1} + Lx^{m-2} + Mx^{m-3} +$, etc. $+ N = 0$, il s'en suit que $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$ etc.................. $+ K = (x^{m-1} + Lx^{m-2} + Mx^{m-3} +$ etc. $+ N)(x \pm D)$. Je remarque d'abord que $x \pm D$ ne peut pas être un diviseur exact de la proposée, à moins que $D$ ne soit un facteur du dernier terme $K$ ; je remarque de plus, que la division s'étant faite sans supposer aucune valeur particulière à $x$, elle se fera encore en substituant pour $x$, une même valeur quelconque dans le dividende et dans le diviseur. En effet, substituons $a$ pour $x$ dans le dividende et dans le diviseur ; l'un sera transformé par cette substitution en.................. $(a^{m-1} + La^{m-2} + Ma^{m-3} +$ etc. $+ N)(a \pm D)$, et l'autre en $a \pm D$. Or l'on voit que cette dernière quantité divise encore exactement la première ; donc, etc.

Maintenant veut-on savoir si une équation quelconque est divisible par une équation du premier degré, telle que $x \pm D = 0$, $D$ étant un diviseur du dernier terme de la proposée ; il n'y a qu'à supposer successivement pour $x$ les termes de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, $-1$, $-2$, $-3$, dont la différence est l'unité ; chacune de ces suppositions transformera le dividende et le diviseur :

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et

et d'après ce que nous venons de dire plus haut, si la proposée était divisible par un diviseur, tel que $x \pm D$, une transformée quelconque de cette proposée sera encore divisible par la transformée correspondante du diviseur. Or, par ces suppositions, le diviseur est devenu successivement $3 \pm D$, $2 \pm D$, $1 \pm D$, $0 \pm D$, $-1 \pm D$, $-2 \pm D$, $-3 \pm D$, etc., progression arithmétique, dont la différence est 1. *Donc si la proposée est divisible par $x \pm D$, décomposez dans tous ses facteurs chacune des transformées de cette proposée. Écrivez*, 1°. *dans une même ligne horizontale tous les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de $x = 3$.* 2°. *Écrivez au-dessous dans une ligne horizontale les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de $x = 2$.* 3°. *Écrivez dans une troisième ligne horizontale, au-dessous de la seconde, tous les facteurs de la transformée qui provient de la supposition de $x = 1$, et ainsi de suite. Comparez maintenant les termes d'une ligne à l'autre, en essayant chaque terme en + et en —, et vous trouverez nécessairement une progression arithmétique, dont la différence sera l'unité.* Si vous ne trouviez aucune progression de cette espèce, ce serait une preuve que la proposée n'est pas divisible par $x \pm D$. La converse de cette règle n'est pas toujours vraie : c'est-à-dire, que si la proposée est divisible par un facteur du premier degré, on trouvera nécessairement parmi les facteurs de ses transformées une ou plusieurs progressions arithmétiques; mais de ce qu'on trouve une ou plusieurs progressions de cette espèce, on ne peut pas toujours conclure que la proposée soit divisible par un facteur du premier degré : c'est à cause de cette restriction, que Newton dit : que dans le cas où l'on trouve une ou plusieurs progressions, il faut *essayer* la division de la proposée.

Si, après avoir supposé successivement pour $x$ les termes de la



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

progression $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$, dont la différence est l'unité, on ne trouve parmi les facteurs des transformées que des progressions d'une tout autre différence $r$, il faut en conclure que le diviseur, s'il en existe, ne peut plus être $x \pm D$, mais $rx \pm D$. Car la progression trouvée étant, par supposition, $3r \pm D$, $2r \pm D$, $r \pm D$, $\pm D$, $-r \pm D$, $-2r \pm D$, $-3r \pm D$; il faut que le diviseur se transforme successivement en tous ces termes par la supposition de $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, etc., ce qui ne peut se peut faire qu'autant que le diviseur serait $rx \pm D$. Or, pour que ce diviseur soit possible, il faut que la plus haute puissance de $x$, dans la proposée, ait un coëfficient dont $r$ soit facteur. On comprendra encore mieux toute cette théorie par les notes que nous ferons sur les exemples de Newton.

## NOTE (2), *pour la page* 48. *Tome I.*

Il s'agit de chercher si l'équation $x^3 - x^2 - 10x + 6$ a quelque diviseur d'une dimension. Pour cela, à la place de $x$, je substitue successivement les termes de la progression arithmétique, $1, 0, -1$. En substituant $1$ pour $x$, l'équation se transforme en $-4$; $0$ pour $x$ la transforme en $+6$; enfin $-1$ pour $x$ la transforme en $+14$. Je place dans une première colonne les termes de la progression; dans une seconde colonne les transformées correspondantes, sans avoir égard à leurs signes. Ensuite sur la même ligne où se trouve chacun des nombres $4$, $6$, $14$, j'écris tous leurs diviseurs (tout cela se voit dans l'exemple ci-à-côté). Je cherche les

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 1, 2, 4 |
| 0 | 6 | 1, 2, 3, 6 |
| $-1$ | 14 | 1, 2, 7, 14 |

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

progressions que ces diviseurs peuvent me fournir, en essayant en $+$ et en $-$ chaque diviseur de 4 et le comparant aux diviseurs de 6 et de 14. Je prends donc d'abord 1 que je compare à 2 de la seconde ligne; mais il faudrait que le nombre 3 se trouvât dans la troisième ligne; et comme il n'y est pas, cette comparaison ne donne point de progression. Ensuite la comparaison de 1 avec 3 exigerait 5 dans la troisième ligne; et celle de 1 à 6 exigerait 11 dans la troisième ligne; et comme ces nombres ne s'y trouvent pas, il s'en suit que $+ 1$ de la ligne supérieure ne donne aucune progression. On trouvera de même que $- 1$ n'en donne aucune. Je répète les mêmes essais sur 2 et 4 de la ligne supérieure, et je trouve que 4 donne la progression 4, 3, 2, dont la différence est l'unité, et le nombre 3 qui répond à la supposition de $x = 0$, est pris en $+$; je tente donc la division par $x + 3$. Elle réussit, et donne pour quotient $x^2 - 4x + 2$.

## NOTE (3), *pour la page* 48. *Tome I.*

La quantité proposée étant $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, je substitue successivement 2, 1, 0, $-1$, $-2$, à la place de $y$, et en il résulte les transformées 30, 7, 20, 3, 34. Je dispose tout, comme dans l'exemple de Newton; et après avoir comparé en $+$ et en $-$ tous les diviseurs de 20 qui répond au terme 0 de la première colonne, après, dis-je, avoir comparé tous ses diviseurs à ceux qui se trouvent dans les lignes supérieures et inférieures, je ne trouve que la progression 10, 7, 4, 1, $-2$, tandis que les nombres substitués pour $y$ forment une progression dont la différence est l'unité. Donc *par le dernier alinéa de la note* (1), si la proposée

O 2

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

a un diviseur, il ne peut être que $3y+4$; car 3 est un diviseur du coëfficient 6 qui affecte la plus haute puissance de $y$. Et en effet, la division se fait par ce diviseur.

## NOTE (4), *pour la page* 49. *Tome I.*

Après avoir tout disposé comme dans l'exemple de Newton, J'ai trois progressions, 3, 1, −1, −3; 3, −1, −5, −9; et 7, 1, −5, −11.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 42 | 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. | 3 | 3 | 7 |
| 1 | 23 | 1, 23, | 1 | −1 | 1 |
| 0 | 30 | 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. | −1 | −5 | −5 |
| −1 | 297 | 1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297. | −3 | −9 | −11 |
| −2 | 2618 | 1, 2, 7, 11, 17, 1309, 2618. | | | |

La différence de la première est 2, diviseur exact du coëfficient 24 qui affecte $a^5$, et le terme de cette progression qui répond à la supposition de $a=0$ étant $-1$, on pourra tenter la division par $2a-1$.

La différence 4 de la seconde progression divisant exactement 24 coëfficient de $24a^5$, et $-5$ répondant à la supposition de $a=0$, on pourra tenter la division par $4x-5$.

La troisième progression ayant pour différence 6, diviseur exact de 24, et son terme $-5$ répondant à la supposition de $a=0$, on pourra tenter la division par $6x-5$.

On voit donc qu'il y a trois divisions à essayer. On peut s'en dispenser en faisant de nouvelles suppositions pour $a$, par exemple $a=-2$, qui donne pour résultat 2618, que je place avec tous ses diviseurs, comme on le voit dans l'exemple. Je cherche ensuite si, parmi tous ces diviseurs, il ne s'en trouverait pas quelques-uns

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qui fissent suite à quelques-unes des progressions déjà trouvées. Il ne s'en rencontre qu'un seul, c'est 17, qui, étant pris en —, continue la progression 7, 1, — 5, — 11, — 17. Je tente donc la division par le moyen de la seule progression qui me reste. Le diviseur à essayer est $6x - 5$, et la division réussit. Ce moyen, comme on voit, me dispense de tenter deux divisions qui n'auraient point eu de succès.

## NOTE (5), *pour la page* 50. *Tome I.*

Voici comment on démontre cette règle de Newton....

Soit proposée l'équation $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, et supposons qu'elle ait pour diviseur l'équation du second degré..... $Ax^2 + Bx - C = 0$ ($A$ étant un facteur du coëfficient qui affecte la plus haute puissance de la proposée). Je fais successivement $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, etc., et les résultats de la proposée seront respectivement 39, 6, 1, -6, -21, -26. Je les écris avec tous leurs diviseurs pris en plus et en moins, comme on le voit dans le tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 39 | 1, 3, 13, 39, −39 −13 −3 −1 |
| 2 | 6 | 1, 2, 3, 6, −6, −3, −2, −1 |
| 1 | 1 | 1, −1 |
| 0 | 6 | 1, 2, 3, 6, −6, −3, −2, −1 |
| −1 | 21 | 1, 3, 7, 21, −21, −7, −3, −1 |
| −2 | 26 | 1, 2, 13, 26, −26, −13, −2, −1 |

Maintenant je fais les mêmes suppositions pour $x$ dans le diviseur $Ax^2 + Bx - C$, et il devient respectivement $9A + 3B - C$, $4A + 2B - C$, $A + B - C$, $0A + 0B - C$, $A - B - C$, $4A - 2B - C$, etc. Il faut donc que $9A + 3B - C$ soit un des

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

diviseurs de 39; que $4A+2B-C$ soit un des diviseurs de 6, que $A+B-C$ soit un des diviseurs de 1; que $0A+0B-C$ soit un des diviseurs de 6; que $A-B-C$ soit un des diviseurs de 21; enfin que $4A-2B-C$ soit un des diviseurs de 26. Donc $9A+3B-C=1$, ou 3, ou 13, ou 39, ou $-39$, ou $-13$, ou $-3$, ou $-1$. Ce qui donne $-3B+C=9A-1$, ou $9A-3$, ou $9A-13$, ou $9A-39$, ou $9A+39$, ou $9A+13$, ou $9A+3$, ou $9A+1$. Chaque ligne du tableau précédent fournira un équation semblable, et on pourra les ordonner toutes comme on le voit ci-dessous.

| | ou | ou | ou | ou | ou | ou | ou | ou |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3B+C=$ | $9A-1$ | $9A-3$ | $9A-13$ | $9A-39$ | $9A+39$ | $9A+13$ | $9A+3$ | $9A+1$ |
| $-2B+C=$ | $4A-1$ | $4A-2$ | $4A-3$ | $4A-6$ | $4A+6$ | $4A+3$ | $4A+2$ | $4A+1$ |
| $-B+C=$ | $A-1$ | $A+1$ | | | | | | |
| $0B+C=$ | $0A-1$ | $0A-2$ | $0A-3$ | $0A-6$ | $0A+6$ | $0A+3$ | $0A+2$ | $0A+1$ |
| $+B+C=$ | $A-1$ | $A-3$ | $A-7$ | $A-21$ | $A+21$ | $A+7$ | $A+3$ | $A+1$ |
| $+2B+C=$ | $4A-1$ | $4A-2$ | $4A-13$ | $4A-26$ | $4A+26$ | $4A+13$ | $4A+2$ | $4A+1$ |

Or les premiers membres de ces équations formant une progression arithmétique, il s'en suit, que parmi les seconds membres, il doit nécessairement s'en trouver d'une ligne à l'autre, qui formeront aussi au moins une progression arithmétique. Actuellement, comme dans notre exemple, la proposée n'a pour multiplicateur de la plus haute puissance de l'inconnue que l'unité, il faut faire $A=1$, et si on prend, d'une ligne à l'autre, les termes $9A-13$, $4A-6$, $A-1$, $0A+2$, $A+3$, $4A+2$, ils donneront la progression arithmétique $-4$, $-2$, 0, 2, 4, 6. Et si on prend d'une ligne à l'autre, les termes $9A-3$, $4A-1$, $A-1$, $0A-3$, $A-7$, $4A-13$, on aura une seconde progression 6, 3, 0, $-3$, $-6$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

— 9. Voilà les deux progressions que Newton a trouvées dans le premier exemple qu'il donne de cette règle ; et chacune de ces progressions lui fournit un diviseur.

La seule inspection de nos équations précédentes suffit pour faire comprendre toutes les raisons sur lesquelles la règle est établie.

## NOTE (6), *pour la page* 53. *Tome I.*

Examinons d'abord la règle de Newton pour le cas des diviseurs d'une dimension.

Supposons que la proposée n'ait que trois lettres, $x$, $a$, $b$; que tous ses termes aient le même nombre de dimensions, et qu'elle soit divisible par le facteur du premier degré $mx + na + pb$ ($m$, $n$, $p$, représentant des nombres), et qu'après la division faite, le quotient soit $Z$; la proposée pourra s'écrire ainsi, $Z(mx + na + pb)$. Faisons successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, il est clair que la proposée se réduira aussi successivement à $Z(na + pb)$, $Z(mx + pb)$, $Z(mx + na)$; où l'on voit que le premier résultat est divisible par $na + pb$; le second par $mx + pb$, et le troisième par $mx + na$. Or, ces trois diviseurs sont tels, que le terme $na$ du premier se retrouve dans le troisième diviseur, et son autre terme $pb$, dans le second; enfin le terme $mx$ du deuxième diviseur se retrouve dans le troisième. De sorte qu'en faisant la somme de ces trois diviseurs, on a, $2mx + 2na + 2pb$, c'est-à-dire le double du diviseur $mx + na + pb$. Mais, par supposition, il n'y a en tout que trois lettres dans la proposée, et dans la somme des trois diviseurs on trouve deux fois le terme $mx$, deux fois le terme $na$, et deux fois le terme $pb$; c'est-à-dire que chacun d'eux s'y trouve autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée. Et c'est ce qu'exige

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la règle de Newton, lorsque les parties de chaque diviseur ne sont composées que d'une lettre.

Si la proposée a quatre lettres, $x$, $a$, $b$, $c$, et qu'elle soit divisible par l'équation d'une dimension, $mx + na + pb + qc$ ($m$, $n$, $p$, $q$, représentant des nombres), et que de plus le quotient soit $Z$, on pourra écrire la proposée de cette manière, $Z(mx + na + pb + qc)$. Supposons maintenant que $x$, $a$, $b$, $c$, deviennent successivement zéro; la proposée deviendra aussi successivement, $Z(na + pb + qc)$; $Z(mx + pb + qc)$; $Z(mx + na + cq)$; et $Z(mx + na + pb)$. Les quatre diviseurs partiels sont donc, $na + pb + qc$, $mx + pb + qc$, $mx + na + qc$, $mx + na + pb$; et le terme $na$ qui se trouve dans le premier, se retrouve dans le troisième et le quatrième; $pb$, autre terme du premier diviseur, se retrouve dans le second et le quatrième; et son dernier terme $qc$ se retrouve dans le second et dans le troisième diviseurs; enfin le terme $mx$ du second diviseur se retrouve dans le troisième et dans le quatrième; c'est-à-dire que chacune des parties d'un même diviseur se retrouve dans deux autres diviseurs, ou se trouve trois fois dans tous les diviseurs, ou se trouve dans tous les diviseurs autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée. Et c'est encore là ce que demande la règle de Newton. Rassemblez donc toutes ces parties, en les prenant une seule fois chacune, et vous aurez le diviseur à essayer, $mx + na + pb + qc$.

On suivrait la même marche, si l'équation littérale dont on cherche un diviseur du premier degré, avait cinq ou six, ou un plus grand nombre de lettres.

Enfin, si l'on a une équation littérale ne contenant que trois lettres, et qu'on se soit assuré, par la méthode précédente, qu'elle

n'a

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

n'a aucun diviseur du premier degré, il faudra chercher si elle n'en aurait pas un du second. Pour déterminer ce diviseur, voici ce qu'il faut observer. Supposons qu'une équation littérale, au moins de quatre dimensions, ayant tous ses termes homogènes, et ne renfermant que trois lettres, soit divisible par l'équation du second degré, $gx^2 + akx + lbx + ha^2 + rab + sb^2$ ($g$, $h$, $l$, $k$, $r$, $s$ étant censés désigner des nombres), et que le quotient soit $Z$. La proposée pourra donc s'écrire ainsi, $Z(gx^2 + akx + blx + ha^2 + rab + sb^2)$. Faisons successivement, $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, et la proposée se réduira aussi successivement à $Z(ha^2 + rab + sb^2)$.......... $Z(gx^2 + lbx + sb^2)$, $Z(gx^2 + akx + ha^2)$. On voit donc que les diviseurs des trois résultats de la proposée sont, $ha^2 + rab + sb^2$; $gx^2 + lbx + sb^2$, $gx^2 + akx + ha^2$; en examinant ces trois diviseurs, on voit que chacun ne contient que deux lettres de la proposée, c'est-à-dire le quarré de chacune de ces deux lettres, et le produit de l'une par l'autre; par exemple, le premier diviseur, $ha^2 + rab + sb^2$, ne contient que le quarré de $a$, celui de $b$, et le produit de $a$ par $b$; il en est de même des deux autres diviseurs. De plus, $ha^2$ qui est un quarré contenu dans le premier diviseur, se retrouve aussi dans le troisième; $sb^2$, autre quarré contenu dans le premier, se retrouve dans le second; tandis que le rectangle $rab$, contenu dans le premier, ne se retrouve dans aucun des deux autres. Et c'est là ce qu'exige la règle : « *Que les parties des diviseurs, composées d'une seule lettre, se répètent autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée; et que les parties des diviseurs, composées de deux lettres, se répètent autant de fois, moins deux, qu'il y a de lettres dans la quantité proposée.* Or les quarrés ne contiennent qu'une seule lettre, tandis que les rectangles en contiennent deux; donc les



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

premiers doivent se répéter autant de fois, moins une, qu'il y a de lettres dans la proposée, et les seconds, autant de fois, moins deux, comme nous l'avons trouvé.

Je crois avoir assez bien mis le lecteur sur la voie, pour que de lui-même il soit en état de suivre Newton dans la recherche de diviseurs plus compliqués. J'avais fait encore plusieurs autres notes sur ce sujet, mais je les supprime; elles me paraissent surabondantes.

## NOTE (7), *pour la page 63. Tome I.*

Les deux derniers exemples, $\sqrt[4]{a^3 x}$, et $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, ont besoin de deux mots d'éclaircissemens. On sait qu'il est indifférent d'écrire $\sqrt{a}$, ou bien $\sqrt[2]{a^1}$, ou bien $a^{\frac{1}{2}}$. Donc le premier exemple, $\sqrt[4]{a^3 x}$, peut s'écrire en cette manière, $a^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou bien $a^{\frac{2}{4}} a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou $a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, ou $\sqrt{a} \times \sqrt[4]{ax}$. Telle est la première forme que Newton donne à cette quantité. Si l'on multiplie et qu'on divise par $a^{\frac{1}{4}}$ la quantité $a^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{4}}$, elle deviendra, $\frac{a^{\frac{4}{4}} x^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$, ou bien, $a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}$, et c'est la seconde forme que Newton lui donne.

Quant au dernier exemple, $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, il devient sans difficulté, $a \sqrt[6]{a x^5}$, ou bien $a \sqrt[6]{\frac{a x^6}{x}} = ax \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$. Première forme que l'auteur lui donne; et il dit qu'on peut encore lui donner celle-ci, $\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{a^2 x}$. En effet, la quantité donnée étant, $\sqrt[6]{a^7 x^5}$, peut s'écrire ainsi, $a^{\frac{7}{6}} \times x^{\frac{5}{6}}$, ou bien $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, qui devient, en

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

remettant les signes, $\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{a^2 x}$. Et c'est la forme que Newton demande.

## NOTE (8), *pour la page 65. Tome I.*

Lorsqu'il s'agit de trouver la racine d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, on peut supposer que $g + 2\sqrt{gh} + h$, représente en général cette quantité, dont la racine est $\sqrt{g} + \sqrt{h}$. La partie rationnelle est représentée par $g + h$, et l'incommensurable par $2\sqrt{gh}$. Soit donc l'indéterminée..... $A = g + h$, et $B = 2\sqrt{gh}$. Nous aurons, $A^2 = g^2 + 2gh + h^2$, et $B^2 = 4gh$. Je commence d'abord par démontrer ce qu'annonce l'auteur, que $A$ est la partie la plus grande de la quantité proposée, et $B$ la plus petite. Or, si $A$ est plus grand que $B$, $A^2$ sera aussi plus grand que $B^2$; donc il faut qu'en général on ait, $A^2 - B^2$ égal à une quantitité positive, et c'est ce qui a lieu effectivement, car $A^2 - B^2 = g^2 - 2gh + h^2 = (g - h)^2$, quantité toujours positive; donc enfin $A > B$, comme le dit Newton. Maintenant, si nous ajoutons les deux équations $\sqrt{A^2 - B^2} = g - h$, et.. $A = g + h$, nous aurons, $A + \sqrt{A^2 - B^2} = 2g$, ou bien...... $g = \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$; et en retranchant l'une de l'autre, il viendra, $A - \sqrt{A^2 - B^2} = 2h$, ou bien $h = \frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$. Ainsi, pour que l'extraction de la racine soit possible, il faut évidemment que $g$ et $h$ soient des quantités rationnelles, et que par conséquent



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$A^2 - B^2$ soit un quarré parfait; s'il ne l'est pas, il est inutile de chercher la racine, on ne la trouverait pas, à moins que les deux parties de la quantité dont on cherche la racine ne soient incommensurables.

## Note (9), *pour la page 67. Tome I.*

Voici comment on démontre la méthode abrégée que Newton enseigne en cet endroit. Soit la quantité proposée $g + h + k + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gk} + 2\sqrt{hk}$, dont la racine est, $\sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{k}$. Il est clair que je connaîtrai cette racine, si je parviens à connaître chacune de ses parties, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{k}$. Or, multiplions l'un par l'autre les deux radicaux $2\sqrt{gh}$ et $2\sqrt{gk}$, et divisons le produit par l'autre radical $2\sqrt{hk}$, et nous aurons.................. $\frac{4\sqrt{g^2hk}}{2\sqrt{hk}} = 2g \times \frac{\sqrt{hk}}{\sqrt{hk}} = 2g$. Et en doublant, et tirant la racine du double, nous aurons, $2\sqrt{g}$, qui est précisément le double de $\sqrt{g}$, comme Newton l'a annoncé. On trouverait de la même manière le double de $\sqrt{h}$ et le double de $\sqrt{k}$. Donc, etc.

## Note (10), *pour la page 68. Tome I.*

Avant de chercher à expliquer les principes sur lesquels est fondée la règle que Newton donne ici, j'observe qu'il ne s'agira que des racines d'un degré impair; car si on voulait prendre la racine paire d'un binome, il est évident qu'on en pourrait tirer la racine quarrée par les règles précédentes qui ont été expliquées dans les notes

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

8 et 9, et qu'en répétant cette opération autant de fois qu'il est nécessaire, on arriverait toujours finalement à n'avoir à extraire qu'une simple racine quarrée, ou une racine d'un degré impair, selon que l'exposant de la racine serait un nombre pairement pair, ou pairement impair; or, le premier cas se rapporte aux règles précédentes, et le deuxième, à celle que nous allons expliquer. Il suffit donc de supposer que l'exposant $c$ de la racine dont il s'agit, représente des nombres impairs.

Je passe à l'explication de la règle. Le binome dont il faut extraire la racine $c$, étant $A \pm B$, Newton cherche un nombre $n$, et introduit un autre nombre indéterminé $Q$, tels qu'il obtienne l'équation $A^2 Q - B^2 Q = n^c$, ( $n$ étant le plus petit nombre dont la puissance $c$ soit divisible, sans reste, par $A^2 - B^2$ ), et de cette manière il trouve la racine $c$ du binome $(A + B) \sqrt{Q}$, qui, étant divisée par $\sqrt[c]{\sqrt{Q}}$, ou $\sqrt[2c]{Q}$, donne pour quotient, $\sqrt[c]{A + B}$, qui est précisément la racine cherchée. Pour entendre la raison de tout cela, il faut d'abord démontrer le théorême suivant.

THÉORÊME. Si on élève la somme et la différence de deux quantités $m$ et $p$ à une puissance $c$, et qu'on appelle $A$ la somme des termes impairs, et $B$ la somme des termes pairs, la différence des quarrés de $A$ et de $B$ sera égale à la différence des quarrés de $m$ et de $p$, élevée à la puissance $c$. En effet $(m + p)^c = m^c + c m^{c-1} p + c \cdot \frac{c-1}{2} m^{c-2} p^2 + c \cdot \frac{c-1}{2} \cdot \frac{c-2}{3} m^{c-3} p^3 + \text{etc.} = A + B$ ( en faisant $A$ égal à la somme des premier, troisième, cinquième, etc. termes, et $B$ à la somme des deuxième, quatrième, sixième, etc. termes ). On aura de même $(m - p)^c = m^c - c m^{c-1} p + c \cdot \frac{c-1}{2} m^{c-2} p^2 - c \cdot \frac{c-1}{2} \cdot \frac{c-2}{3} m^{c-3} p^3 + \text{etc.} =$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$A - B$. Donc $(m+p)^c \times (m-p)^c = (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, ou bien $((m+p)(m-p))^c = A^2 - B^2$, ou enfin $(m^2 - p^2)^c = A^2 - B^2$. C. Q. F. D.

Donc, lorsque $A^2 - B^2$ est une puissance parfaite du degré $c$, on est sûr de trouver la racine $c$ du binome $A \pm B$, puisqu'on a $A \pm B = (m \pm p)^c$, et il est inutile d'introduire l'indéterminée $Q$ dans la recherche de la racine, ou si on l'introduit, on la trouvera égale à 1, dans le cas toutefois où le premier terme du binome est rationnel. Mais il est rare que $A^2 - B^2$ soit une puissance parfaite du degré $c$, et c'est pour l'y amener que Newton la multiplie par une indéterminée $Q$, afin que son produit $(A^2 - B^2) \times Q$ égale une quantité $n^c$, qui est une puissance parfaite du degré $c$. C'est ainsi que dans son second exemple, où il s'agit de tirer la racine cubique d'un binome, il trouve $A^2 - B^2 = 250$; or 250 n'est point un cube parfait, mais en le multipliant par $Q = 4$, le produit est $1000 = 10^3$. Ainsi ce n'est plus de $A \pm B$, mais de $(A \pm B)\sqrt{Q}$ qu'il faut chercher la racine $c$.

Maintenant, supposons que $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ exprime la racine cherchée du binome $A\sqrt{Q} + B\sqrt{Q}$, et que $x\sqrt{y}$ représente la plus grande partie de la racine; il est évident, d'après le théorême qui vient d'être démontré, que $(x^2y - z)^c = (A^2 - B^2)Q = n^c$. Donc $x^2y - z = n$. Et de cette équation l'on tire la proportion continue décroissante, $x\sqrt{y} + \sqrt{z} : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : x\sqrt{y} - \sqrt{z}$. Mais on peut aussi faire la proportion, $r : \sqrt{n} :: \sqrt{n} : \frac{n}{r}$. Et comme $r > \sqrt{n}$ (*), on a aussi, $\sqrt{n} > \frac{n}{r}$. Or, nos deux proportions ayant les mêmes termes moyens, il s'en suit que si le premier terme $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$ de la première est plus grand que $r$, premier terme de la seconde, le dernier terme $\frac{n}{r}$ de la seconde sera plus grand que $x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, dernier terme de la première; et ce serait précisément le contraire, si le premier terme de la première était plus petit que le premier terme de la seconde. (**). Donc si $x\sqrt{y} + \sqrt{z} > r$, on aura aussi, $\frac{n}{r} > x\sqrt{y} - \sqrt{z}$. Je remarque, pour la première inégalité, que $r$ étant la racine la plus approchée en nombres entiers du binome $(A + B)\sqrt{Q}$, il ne peut pas différer d'une unité de $x\sqrt{y} + \sqrt{z}$, qui en est supposée

---

(*) Car $r = \sqrt[c]{(A + B)\sqrt{Q}}$, à moins d'une unité près; et ...... $\sqrt{n} = \sqrt[2c]{(A^2 - B^2)\,Q}$. Or $\sqrt[c]{(A + B)\sqrt{Q}} > \sqrt[2c]{(A^2 - B^2)\,Q}$, ou $\left((A+B)\sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{c}} > \left((A^2 - B^2)\,Q\right)^{\frac{1}{2c}}$, ou bien............ $\left((A+B)\sqrt{Q}\right)^{\frac{2}{2c}} > \left((A^2 - B^2)\,Q\right)^{\frac{1}{2c}}$, ou bien............. $(A+B)^2 \times Q > (A^2 - B^2)Q$, ou encore $(A+B)^2 > A^2 - B^2$, ou bien $A^2 + 2AB + B^2 > A^2 - B^2$, ce qui est de la dernière évidence. Donc enfin, $r > \sqrt{n}$. C. Q. F. D.

(**) En effet, si on a deux proportions continues décroissantes, $a : b :: b : c$, et $g : b :: b : f$, et qu'elles ayent le même moyen terme, je dis que si $a > g$, on aura, $f > c$. Car, à cause des deux proportions, on a l'équation, $ac = fg$, d'où $a : g :: f : c$. Mais, par hypothèse, $a > g$; donc $f > c$. Et réciproquement si $a < g$, on aura aussi, $f < c$, tout cela est bien évident.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la racine exacte. Donc $1 > x\sqrt{y} + \sqrt{z} - r$. Quant à la seconde inégalité, $\frac{n}{r} > x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, elle donne, $0 > x\sqrt{y} - \sqrt{z} - \frac{n}{r}$. Et en ajoutant ces deux inégalités, on a, $1 + 0 > 2x\sqrt{y} - r - \frac{n}{r}$, ou bien $\frac{1}{2} > x\sqrt{y} - \left(\frac{r + \frac{n}{r}}{2}\right)$. Or, $x\sqrt{y}$ étant la plus grande partie de la racine, on voit qu'elle ne diffère pas de $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$, ou, si l'on veut, que $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ exprime, à moins de $\frac{1}{2}$ près, la plus grande partie de la racine.

Nous avons deux cas à examiner.

1°. Lorsque $A\sqrt{Q}$ est rationnel, $x\sqrt{y}$, qui représente la plus grande partie de la racine, est aussi rationnel, et alors le radical $\sqrt{y}$, que Newton appelle $s$, devient égal à 1, et on a........
$x = \frac{r + \frac{n}{r}}{2} = \frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = t = ts$, à moins de $\frac{1}{2}$ près.

2°. Lorsque $A\sqrt{Q}$ est irrationnel, $x\sqrt{y}$ est aussi un nombre irrationnel; et si l'on extrait de $A\sqrt{Q}$ tout ce qu'il contient de rationnel, le radical qui restera, ou $\sqrt{y}$, étant ce que Newton appelle $s$, on a, $\sqrt{y} = s$. Mais nous avons vu plus haut qu'il ne s'en fallait pas de $\frac{1}{2}$ que $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ ne fût égal à $x\sqrt{y}$; donc si l'on divise chacune de ces quantités par $s$, ou par $\sqrt{y}$, nombre qui est plus grand que l'unité ( parce qu'on n'opère que sur des quantités qui ne contiennent point de fractions, puisqu'on a dû les faire disparaître préalablement ), les quotiens auront encore une différence

plus

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

plus petite. Donc $\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, ou bien $x$ et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ont entre elles une différence bien plus petite que $\frac{1}{2}$. Donc $x$ est un nombre entier extrêmement approchant de la valeur de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$. Or Newton a appelé $t$ cette valeur approchée en nombres entiers de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ; donc $t = x$. Mais nous avons aussi $s = \sqrt{y}$, donc $ts = x\sqrt{y}$, et $t^2 s^2 = x^2 y$. Mais nous avons trouvé plus haut l'équation $x^2 y - z = n$, d'où $x^2 y - n = z$, et en mettant pour $x^2 y$ sa valeur $t^2 s^2$, on a, $t^2 s^2 - n = z$, ou bien $\sqrt{z} = \pm\sqrt{t^2 s^2 - n}$. Donc, en ajoutant pour chacun des deux cas que nous venons d'examiner, la valeur de $\sqrt{z}$, ou la plus petite partie de la racine à l'expression de la plus grande, déjà trouvée, nous aurons, $ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}$, ou bien $x\sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}} = ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}$. Ou bien $\sqrt[c]{A+B} \times \sqrt[2c]{Q} = ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}$. Ou enfin..........

$$\sqrt[c]{A+B} = \frac{ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}}{\sqrt[2c]{Q}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La Note (11) ayant été oubliée dans l'impression, j'ai été obligé de conserver aux autres les numéros qui les désignaient.

## NOTE (12), *pour la page* 84. *Tome I.*

L'élimination est en général une opération très-pénible par la longueur des calculs, et qui demande beaucoup de précautions pour ne pas faire monter l'équation finale plus haut qu'elle ne doit. Je vais faire voir dans cette note-ci et dans la suivante, par quelle route Newton a pu arriver à ses équations finales.

Les deux équations proposées étant $ax^2 + bx + c = 0$, et



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$fx^2 + gx + h = 0$. Je multiplie la première par $f$, et la seconde par $a$, et je retranche le second produit du premier, ce qui donne pour reste $(bf - ag)x + cf - ah = 0$, d'où l'on tire...... $x = \frac{ah - cf}{bf - ag}$. Pour trouver une seconde valeur de $x$, je reprends les deux équations proposées, je multiplie la première par $h$, et la seconde par $c$, et je retranche le second produit du premier, et j'ai pour reste $(ah - fc)x^2 + (bh - cg)x = 0$, et en divisant tout par $x$, il vient $(ah - fc)x + (bh - cg) = 0$, d'où l'on tire, $x = \frac{cg - bh}{ah - fc}$. Et en comparant cette seconde valeur de $x$ à la première, nous aurons, $\frac{cg - bh}{ah - fc} = \frac{ah - fc}{bf - ag}$, équation où il n'y a plus d'$x$. Et en réduisant les deux membres au même dénominateur, ensuite multipliant tout par $(ah - fc)(bf - ag)$, nous aurons pour résultat $(cg - bh)(bf - ag) = (ah - fc)^2$. Et en faisant les opérations indiquées, et transportant tous les termes dans un seul membre, il viendra, $a^2h^2 - abgh - 2ahcf + b^2fh - bcgf + acg^2 + c^2f^2 = 0$. Les trois premiers termes ayant pour facteur commun $ah$, peuvent s'écrire ainsi, $(ah - bg - 2cf)ah$. Le quatrième et le cinquième ayant pour facteur $bf$, peuvent s'écrire ainsi, $(bh - cg) \times bf$. Et enfin le sixième et le septième peuvent se décomposer en cette manière, $(ag^2 + cf^2) \times c$. Rassemblant toutes ces parties, nous aurons $(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$. Ce qui est le résultat de Newton.

## NOTE (13), *pour la page* 85. *Tome I.*

Les deux équations proposées étant $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$, je multiplie la première par $h$, et la seconde par $d$, et je retranche le second produit du premier, le reste est, $ahx^3 + (bh - df)x^2 + (ch - dg)x = 0$, ou $ahx^2 + (bh - df)x +$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$ch - dg = 0$, en divisant tout par $x$. Pour abréger, je fais $ah = A$, $bh - df = B$, $ch - dg = C$, et en substituant, l'équation devient, $Ax^2 + Bx + C = 0$, que je traite de nouveau avec l'équation $fx^2 + gx + h = 0$; et comme elles sont maintenant du même degré, j'en obtiendrai deux valeurs de $x$ par les procédés de la première règle, indiqués dans la note précédente. Je multiplie donc la première équation $Ax^2 + Bx + C = 0$ par $f$, et la seconde, $fx^2 + gx + h = 0$ par $A$, et retranchant le second produit du premier, le reste est, $(Bf - Ag)x + Cf - Ah = 0$, d'où je tire, $x = \frac{Ah - Cf}{Bf - Ag}$. Ensuite je multiplie encore la première par $h$, et la seconde par $C$, et je retranche le second produit du premier, je divise tout par $x$, et j'ai, $x = \frac{Cg - Bh}{Ah - Cf}$. Je compare cette seconde valeur de $x$ à la première, et il vient, $\frac{Cg - Bh}{Ah - Cf} = \frac{Ah - Cf}{Bf - Ag}$, d'où l'on tire $(Cg - Bh)(Bf - Ag) = (Ah - Cf)^2$, qui devient, après avoir exécuté les opérations indiquées, et transporté tous les termes d'un même côté, $A^2h^2 - 2ACfh + C^2f^2 - BCfg + B^2fh + ACg^2 - ABgh = 0$. Maintenant si on remet, à la place de $A$, $B$, $C$, leurs valeurs respectives $ah$, $bh - df$, $ch - dg$, toutes les multiplications et réductions faites, il viendra, $a^2h^3 - abgh^2 - 2acfh^2 + b^2fh^2 - bcfgh - 2bdf^2h + acg^2h - adg^3 + c^2f^2h - cdf^2g + d^2f^3 + bdfg^2 + 3adfgh = 0$. Les 1er. 2e. et 3e. termes de cette équation peuvent se décomposer ainsi........ $(ah - bg - 2cf) \times ah^2$; les 4e. 5e. et 6e. ainsi............. $(bh - cg - 2df) \times bfh$; les 7e. 8e. 9e. et 10e. ainsi.......... $(ch - dg)(ag^2 + cf^2)$; les 11e. 12e. et 13e. ainsi........... $(3agh + bg^2 + df^2) \times df$. Toutes ces différentes quantités étant



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rassemblées, donnent, $(ah - bg - 2cf) \times ah^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(bh - cg - 2df) \times bfh + (ch - dg)(ag^2 + cf^2) + \ldots\ldots\ldots$ $(3agh + bg^2 + df^2) \times df = 0$. Résultat absolument le même que celui de Newton.

Pour parvenir aux formules qui composent les troisième et quatrième règles de Newton, il faudra procéder d'une manière entièrement semblable.

## NOTE (14), *pour la page* 87. *Tome I.*

Newton propose de faire évanouir les incommensurables de l'équation, $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, et pour cela, il fait, $t = \sqrt{ay}$, $v = \sqrt{a^2 - ay}$, et $x = \sqrt[3]{ay^2}$. Donc, en substituant $t$, $v$ et $x$ au lieu des quantités qu'elles représentent, la proposée deviendra, $t - v = 2a + x$; c'est de cette équation qu'il faut successivement éliminer les quantités $x$, $t$, $v$, pour n'avoir plus qu'une équation rationnelle en $y$ et en $a$. J'ai d'abord $x = t - v - 2a$, ou $x = t - r$ (en faisant $-v - 2a = -r$). Donc $(A)$ $x^3$, ou $ay^2 = t^3 - 3t^2r + 3tr^2 - r^3$. Et puisque $t = \sqrt{ay}$, on a ...... $t^2 = ay$ et $t^3 = tay$. Et en substituant pour $t^3$ et $t^2$ leurs valeurs dans l'équation $(A)$, elle devient $(B)$ $ay^2 = tay - 3ayr + 3tr^2 - r^3$. Nous avons fait $-r = -v - 2a$, donc $r^2 = v^2 + 4av + 4a^2$; et en mettant pour $v^2$ sa valeur $a^2 - ay$, on aura, en réduisant, $r^2 = 5a^2 + 4av - ay$. Ensuite, si dans l'équation, $-r^3 = -v^3 - 6av^2 - 12a^2v - 8a^3$, nous mettons encore au lieu de $v^2$ sa valeur $a^2 - ay$, et au lieu de $v^3$ aussi sa valeur $a^2v - avy$, nous aurons, $-r^3 = -14a^3 - 13a^2v + avy + 6a^2y$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

toute réduction faite. Substituant maintenant dans l'équation $(B)$ à la place de $-r$, de $+r^2$ et de $-r^3$ leurs valeurs, elle deviendra, $ay^2 = tay + 3ay(-v-2a) + 3t(5a^2 + 4av - ay) + (-14a^3 - 13a^2v + avy + 6a^2y)$. Faisant les multiplications indiquées, transposant dans le premier membre tous les termes affectés de $t$, et dégageant la valeur de $t$, on aura, $t = \frac{ay^2 + 14a^3 + 13a^2v + 2avy}{15a^2 - 2ay + 12av}$. Et en effaçant $a$ au numérateur et au dénominateur, $t = \frac{y^2 + 14a^2 + 13av + 2vy}{15a - 2y + 12v}$. Et en élevant tout au quarré, il vient, $t^2$ ou $ay = \left(\frac{y^2 + 14a^2 + 13av + 2vy}{15a - 2y + 12v}\right)^2$. Après avoir développé le quarré indiqué, fait évanouir le dénominateur, substitué à la place de $v^2$ sa valeur $a^2 - ay$, opéré toutes les réductions, et transporté dans le premier membre tous les termes affectés de $v$, on aura, en dégageant $v$, $v = \frac{y^4 - 8ay^3 + 184a^2y^2 - 486a^3y + 365a^4}{-4y^3 - 74ay^2 + 304a^2y - 364a^3}$, et en élevant chaque membre au quarré, $v^2$ ou................ $a^2 - ay = \left(\frac{y^4 - 8ay^3 + 184a^2y^2 - 486a^3y + 365a^4}{-4y^3 - 74ay^2 + 304a^2y - 364a^3)}\right)^2$. On voit que cette équation ne contenant plus que des valeurs rationnelles, si l'on dévelope le quarré, qu'on fasse évanouir la fraction, qu'on réduise, et transpose tous les termes dans un seul membre, on aura, $y^8 + 1008a^2y^6 - 1464a^3y^5 - 2762a^4y^4 + 3680a^5y^3 + 2916a^6y^2 - 972a^7y + 729a^8 = 0$.

## NOTE (15), *pour la page 99. Tome I.*

On pourrait encore résoudre ce problême d'une autre manière, en disant : puisque l'agent $A$ fait l'ouvrage en trois semaines, il est évident qu'il n'en fait que le $\frac{1}{3}$ en une semaine, et la septième partie d'un tiers ou $\frac{1}{21}$ en un jour. On trouvera, par le même raisonnement, que l'agent $B$ fait en un jour $\frac{3}{56}$ de l'ouvrage

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

demandé, et l'agent $C$, $\frac{5}{84}$. Il faut voir maintenant en combien de jours ces trois agens réunis feront l'ouvrage entier. Soit $x$ ce nombre de jours, nous aurons, $x\left(\frac{1}{21}+\frac{3}{56}+\frac{5}{84}\right)=1$, ou bien $\frac{x}{3}+\frac{3x}{8}+\frac{5x}{12}=7$. D'où l'on tire $x=6\frac{2}{9}$ de jours. Or $\frac{2}{9}$ de jour égalent 5 heures et $\frac{1}{3}$. Donc le temps employé par les trois agens réunis pour faire l'ouvrage, sera de 6 jours 5 $\frac{1}{3}$ heures.

## NOTE (16), *pour la page* 103. *Tome I.*

Ce problême a besoin de quelques éclaircissemens. Newton dit d'abord que la pesanteur spécifique de l'or est à celle de l'argent $:: 19 : \frac{31}{3}$. Effectivement un pouce cube d'or pèse $12\frac{2}{3}$ onces ou $\frac{38}{3}$ d'once, et un pouce cube d'argent pèse $6\frac{8}{9}$ onces, ou $\frac{62}{9}$ d'once. Or $\frac{38}{3}$ et $\frac{62}{9}$ sont dans le même rapport que 19 et $\frac{31}{3}$; et de plus, il suppose que la pesanteur spécifique de la couronne est comme 17; il dit ensuite que le volume de l'or est à celui de l'argent dans la couronne $:: 10 : 3 :: e-b : a-e :: A : B$. En voici la preuve. Le volume d'or $A$ est à celui de l'argent $B$ $:: e-b : a-e$, et en substituant dans cettte proportion, à la place de $a$, $b$, $e$ leurs valeurs respectives 19, $\frac{31}{3}$ et 17, on aura...... $17-\frac{31}{3} : 19-17 :: A : B$, ou $\frac{51-31}{3} : 19-17 :: A : B$, ou $\frac{20}{3} : 2 :: A : B$, ou $20 : 6 :: A : B$, ou enfin $10 : 3 :: A : B$. Donc on a, $10 : 3 :: e-b :: a-e :: A : B$. Il dit en troisième lieu, que le poids de l'or est au poids de l'argent dans cette même couronne $:: 190 : 31 :: 19 \times 10 : \frac{31}{3} \times 3 :: a(e-b) : b(a-e)$. En effet, il a nommé la pesanteur spécifique de l'or $a$ et celle de l'argent $b$, donc $19 : \frac{31}{3} :: a : b$; et en multipliant chaque terme de cette proportion par le terme correspondant de celle-ci, $10 : 3 :: e-b : a-e$, il

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

en résulte cette nouvelle proportion, $190 : 31 :: a(e-b) : b(a-e)$, dont le premier et le second termes expriment en valeurs numériques, le rapport des poids respectifs de l'or et de l'argent de la couronne; car 190 et 31 sont les produits terme à terme de 10 et 3, rapport des volumes, par 19 et $\frac{31}{3}$, rapport des pesanteurs spécifiques, ce qui donne le rapport des masses ou des poids absolus. Et les deux derniers termes $a(e-b)$ et $b(a-e)$ sont les mêmes poids exprimés algébriquement; enfin il dit que le poids de la couronne est au poids de l'argent qu'elle contient $:: 221 : 31$. Ce qui est facile à voir, puisque le poids de la couronne est au poids de l'argent, $:: 190+31 : 31$ ou $:: 221 : 31$.

Mais remarquez que dans tout cela on ne connaît que les rapports des volumes et des masses, mais nullement les volumes ou les masses mêmes; pour les connaître, il faudrait que le volume de la couronne fût connu.

## NOTE (17), *pour la page* 113. *Tome I.*

Si l'on doit à la fin de l'année une somme $a$, et qu'on l'acquitte au commencement, il est clair que l'on devra payer une somme moins forte, puisqu'il faut en déduire les intérêts des intérêts. Supposons que chaque livre de la somme $a$ doive se réduire à $x$, à combien se réduira la somme elle-même ? On le trouvera par cette proportion, $1 : x :: a : ax$. C'est donc $ax$ qu'il faut payer au commencement de l'année, au lieu de $a$ qu'on aurait payé à la fin. Supposons que l'on veuille avancer le paiement de deux ans; alors il faut chercher à quoi doit se réduire une somme $a$ que l'on ne doit qu'après deux années, si l'on veut s'acquitter au commencement

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de la première; mais j'arriverai au même résultat, si au lieu de regarder $a$ comme la somme qu'il faudrait payer au bout de deux ans, je regarde $ax$ comme celle que l'on doit au bout d'une année, et que je cherche à quoi elle doit se réduire si on la paie au commencement. Je trouverai donc sur-le-champ la somme réduite par cette proportion, $1 : x :: ax : ax^2$. Si le paiement devait être avancé de trois ans, je regarderais $ax^2$ comme la somme qu'il faudrait payer au bout de l'année, et $ax^3$ serait celle qu'il faudrait payer au commencement; et ainsi de suite. Et en rassemblant toutes ces sommes, on trouverait l'équation finale. Par exemple, si l'on ne doit une somme $a$ qu'au bout de cinq ans, et qu'on s'en acquitte au commencement de la première avec une somme $c$, on aura, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = \frac{c}{a}$, qui est l'équation de Newton.

## NOTE (18), *pour la page* 115. *Tome I.*

Pour avoir la valeur de $x$ par le moyen de l'équation........ $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$, je fais évanouir le diviseur $x^2$, ce qui me donne $\frac{1}{4}a^2x^2 + b^4 = b^2x^2$, ou bien $(\frac{1}{4}a^2 - b^2)x^2 = -b^4$, ou bien $(b^2 - \frac{1}{4}a^2)x^2 = b^4$, ou bien $(b + \frac{1}{2}a)(b - \frac{1}{2}a)x^2 = b^4$. Je cherche une moyenne proportionnelle $k$, entre $b + \frac{1}{2}a$ et $b - \frac{1}{2}a$, et l'équation devient $k^2x^2 = b^4$, ou $kx = b^2$, ou enfin $k : b :: b : x$.

## NOTE (19), *pour la page* 116. *Tome I.*

Pour tirer de l'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{b^4}{c^2} = b^2$ la valeur linéaire de $x$, je la mets d'abord sous cette forme $x^2 = 4b^2 - \frac{4b^4}{c^2}$, ou bien $x^2 = \frac{4b^2c^2 - 4b^4}{c^2} = \frac{4b^2(c^2 - b^2)}{c^2}$, et enfin $x^2 = \frac{4b^2}{c^2}(c + b)(c - b)$.

Je

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Je cherche une moyenne proportionnelle $k$ entre $c+b$ et $c-b$, et l'équation devient $x^2 = \frac{4b^2k^2}{c^2}$, ou $x = \frac{2bk}{c}$; d'où $c : 2b :: k : x$.

## NOTE (20), *pour la page* 116. *Tome I.*

L'équation $\frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$, devient, en réduisant et ordonnant, $x^4 - c^2x^2 = -\frac{1}{4}a^2c^2$. Cette équation du quatrième degré se résout comme celles du second, et donne $x^2 = \frac{c^2 \pm c\sqrt{c^2-a^2}}{2}$, ou bien $x^2 = \frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2-a^2})$. Et enfin................ $x = \pm\sqrt{\frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2-a^2})}$. On voit donc que $x$ a quatre valeurs, $x = +\sqrt{\frac{c}{2}(c+\sqrt{c^2-a^2})}$, ...................
$x = +\sqrt{\frac{c}{2}(c-\sqrt{c^2-a^2})}$, $x = -\sqrt{\frac{c}{2}(c+\sqrt{c^2-a^2})}$, $x = -\sqrt{\frac{c}{2}(c-\sqrt{c^2-a^2})}$, et de ces quatre racines, la première et la troisième sont égales et ne diffèrent que par leur signe; il en est de même de la seconde et de la quatrième. En effet, si au lieu de chercher le côté $CB$, ou le côté $BD$, nous avions cherché $AC$ ou $AD$, nous serions arrivés par les mêmes moyens, à la même équation finale $\frac{1}{4}a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$; donc cette équation doit nous donner les valeurs des quatre lignes $CB$, $BD$, $AC$, $AD$. Et l'on voit de plus que $CB$ et $BD$ sont égales en grandeur, et ne diffèrent qu'en ce que l'une étant positive, l'autre est nécessairement négative : il en est de même de $AC$ et de $AD$; donc l'équation a dû renfermer toutes ces conditions; et nous avons vu


IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qu'elle les renfermait effectivement. Et si on suppose que la base $CD$ du triangle soit égale au diamètre $AB$, alors on voit que les quatre lignes $CB$, $AC$, $BD$, $AD$ sont égales, et que les deux premières étant positives, les deux autres sont négatives; et c'est ce que l'équation nous apprendra encore. Car puisque $CD = AB$, on a $c = a$, donc $\sqrt{c^2 - a^2} = 0$, donc l'équation............ $x = \pm \sqrt{\frac{c}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - a^2})}$ se réduit à $x = \pm \frac{c}{\sqrt{2}} \pm 0$.

## Note (21), *pour la page* 140. *Tome I.*

Effectivement la somme des côtés est, ...................... $\frac{a-x+y}{2} + \frac{a-x-y}{2} = a - x$, et la base est $x$. Donc si de la somme des côtés $a - x$, on retranche la base $x$, on aura $a - 2x$, excès de la somme des côtés sur la base; et cette quantité devient $\frac{ab}{a+b}$, en substituant pour $x$ sa valeur $\frac{a^2}{2a+2b}$.

## Note (22), *pour la page* 141. *Tome I.*

L'équation $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$, devient en transposant tous les termes et ordonnant, ............ $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \begin{matrix} -2ab^2x - b^4 \\ -2b^3x + a^2b^2 \end{matrix} = 0$, quantité bien différente de celle que Newton donne, mais si l'on ajoute à chacun de ses membres $\begin{matrix} 2b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +4b^3 \\ +4ab^2 \end{matrix} \right\{ x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}$, alors elle devient

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +2b^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \right\{ x \begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 2b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +4b^3 \\ +4ab^2 \end{matrix} \right\{ x \begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}, \ldots$$

dont le premier membre est le quarré parfait du quatrinome.....

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$x^2+bx+b^2+ab$, et le second, le quarré de................
$(x+b)\sqrt{2ab+2b^2}$.

Quant à la manière dont il faut s'y prendre pour trouver les quantités qu'on doit ajouter à chaque membre de l'équation, afin de rendre l'extraction possible, on la trouvera dans le chapitre *de la réduction des équations par les diviseurs incommensurables*; on trouvera même à la fin de la note (73), l'opération détaillée pour réduire l'équation de cet article.

## NOTE (23), *pour la page* 141. *Tome I.*

Puisque $AB=\frac{1}{2}b$, $CB=\frac{1}{2}a$, $CD=\frac{1}{2}AB$, ou $CD=\frac{1}{4}b$, il s'en suit que $AC=\frac{b+a}{2}$. Et une moyenne proportionnelle $AE$ entre $b$ et $AC$ sera $AE=\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$, et comme $CE=AC-AE$, ou bien $CE=\frac{b+a}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$; et que $DE=DC-CE$, il s'en suit que $DE=\frac{1}{4}b-\left(\frac{b+a}{2}\right)+\ldots$ $\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$, ou bien $DE=-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$; d'où il résulte, qu'une moyenne proportionnelle $EF$ entre $b$ et $DE$ donnera $EF=\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab}$. Ensuite $BE=BC-CE$, ou bien $BE=\frac{1}{2}a-\left(\frac{b+a}{2}\right)+\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$, ce qui se réduit à $BE=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}$. Maintenant si nous ajoutons $EF$ à $BE$, et qu'ensuite nous l'en retranchions, nous aurons dans le premier cas....................................................

$$BE+EF=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}+\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab};$$

c'est la première valeur de $x$. Ensuite........................



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$BE - EF = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab}$, et c'est la seconde valeur de $x$. Or il est clair que les deux côtés $AC$ et $BC$ du triangle, se déterminant par les mêmes loix, on arrivera toujours à la même équation, quel que soit celui des deux que l'on cherche ; donc la même équation doit donner la valeur de chacun d'eux ; il est certain par conséquent que la première valeur de $x$ est celle du plus grand côté, et que la seconde est celle du plus petit.

## NOTE (24), *pour la page* 142. *Tome I.*

Newton fait $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ensuite il élève en $C$ la perpendiculaire $CD = b$, et il prolonge $CD$ jusqu'en $E$, afin d'avoir... $DE = AD$. Mais $AD = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc aussi $DE = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $CE = DE - CD = -b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Ensuite il prend une moyenne proportionnelle géométrique $CF$ entre $b$ et $CE$, ce qui donne $CF = \sqrt{-b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}$. Du point $F$ comme centre, et d'un rayon, $BC = \frac{1}{2}a$, il décrit un arc de cercle ; alors on voit que $CG = \sqrt{\overline{GF}^2 - \overline{CF}^2}$, ou bien ........................ $CG = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$, quantité qui est aussi égale à $CH$; donc $BC + CH$ ou $BH = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$, et $BC - CG$ ou $BG = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc $x = BH$, ou $x = BG$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (25), *pour la page* 144. *Tome I.*

Voici le développement de cette construction; $b+a : R :: R : b-a$, donc $R=\sqrt{b^2-a^2}$. Ensuite $R : S :: S : b-R$, donc....... $S=\sqrt{bR-R^2}$; enfin $\frac{1}{2}a+S : T :: T : \frac{1}{2}a-S$, donc....... $T=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-S^2}$. Substituons dans cette dernière équation, à la place de $S$, sa valeur, elle deviendra, $T=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-bR+R^2}$; et si l'on remet encore dans cette dernière la valeur de $R$, elle deviendra, $T=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2-a^2-b\sqrt{b^2-a^2}}$, qui se réduit à $T=\sqrt{b^2-\frac{3}{4}a^2-b\sqrt{b^2-a^2}}$. Donc les deux valeurs de $x$ sont, $x=\frac{1}{2}a+T$, et $x=\frac{1}{2}a-T$.

## NOTE (26), *pour la page* 147. *Tome I.*

Pour trouver la proportion $AB : AC+BC :: AE : AC$, que fait Newton, le lecteur se rappellera que lorsqu'on partage un angle en deux parties égales, la ligne qui le partage coupe la base en deux segmens proportionnels aux côtés correspondans; ainsi on a, $BC : AC :: BE : EA$; ce qui donne, $BC+AC : AC :: BE+AE$ ou $BA : EA$, et en rendant les moyens extrêmes........ $AB : BC+AC :: AE : AC$.

## NOTE (27), *page* 147. *Tome I.*

Ou plutôt ajoutez $\frac{1}{2}$ angle $C$ avec l'angle $CEA$, et retranchez cette somme de deux angles droits, et le reste sera la valeur de l'angle $A$. Pour avoir l'angle $B$, ajoutez $\frac{1}{2}$ angle $C$ avec l'angle $CEB$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et retranchez cette somme de deux angles droits, et le reste sera la valeur de l'angle *B*.

## NOTE (28), *pour la page* 147. *Tome I.*

Il est bien facile de prouver que $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$. D'abord $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, ensuite $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$, et en retranchant la valeur de $\overline{BC}^2$ de celle de $\overline{AC}^2$, on a, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$.

## NOTE (29), *page* 148. *Tome I.*

Voici comment Newton arrive à l'équation $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}$. $\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$ étant la différence de deux quarrés, peut se décomposer ainsi.......... $(AC + AD)(AC - AD)$. Or il a trouvé $AD = \frac{1}{2}a + \frac{b^2 - c^2}{2a}$, ou bien $AD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, et comme il a appelé $AC$, $b$, si nous substituons ces valeurs analytiques à la place de $AC$ et de $AD$ dans l'équation $\overline{DC}^2 = (AC + AD)(AC - AD)$, nous aurons, $\overline{DC}^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\right)$ ou........... $\overline{DC}^2 = \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$. Or, le premier facteur du second membre de cette équation est la même chose que $\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}$, et le second facteur est la même chose que... $\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$. On voit donc qu'en considérant $a + b$ comme une seule quantité, et $a - b$ aussi comme une seule quantité, chacun

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de ces deux facteurs est la différence de deux quarrés. On pourra donc écrire l'équation en cette manière..................... $\overline{DC}^2 = \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}\right)$, ou bien............... $\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$, formule qui est la même que celle de Newton.

## NOTE (30), *pour la page* 148. *Tome I.*

Il est bien évident que l'angle $ECD$ égale un demi-angle $A$, car (par const.) $AE = AC$, donc si de l'angle $A$ on mène sur $CE$ une perpendiculaire $AK$, les deux triangles $DCE$, $KAE$, qui ont chacun un angle droit, et l'angle commun $E$, sont semblables; donc l'angle $DCE$ = l'angle $EAK = \frac{1}{2}$ angle $A$.

## NOTE (31), *page* 148. *Tome I.*

Nous avons vu que................................. $\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}$, et que...... $DE = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}$. Cherchons une moyenne proportionnelle $F$, entre $c+a-b$, et $c-a+b$; alors $DE = \frac{F^2}{2a}$, et $\overline{DC}^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4a^2} \times F^2$. Cherchons encore une moyenne proportionnelle $H$, entre $a+b+c$, et $a+b-c$, nous aurons, $\overline{DC}^2 = \frac{H^2 \times F^2}{4a^2}$, ou bien $DC = \frac{H \times F}{2a}$, et $2a \times DC = H \times F$. D'un autre côté, $2a \times DE = F \times F$. Faisons des proportions avec ces deux équations. La première donne, $2a : F :: H : DC$, et la seconde, $2a : F :: F : DE$, donc $H : F :: DC : DE$, ou bien

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

une moyenne proportionnelle $H$, entre $a+b+c$, et $a+b-c$, est à une moyenne proportionnelle $F$, entre $c+a-b$, et $c-a+b$, comme $DC$ est à $DE$, comme le rayon est à la tangente de la moitié de l'angle $A$, ou comme la cotangente de la moitié du même angle $A$ est au rayon.

## NOTE (32), *pour la page* 148. *Tome I.*

Nous avons vu, par le théorême quatrième, que........... $\overline{CE}^2 = \frac{b}{a}(c+a-b)(c-a+b)$. Maintenant, si de l'angle $A$ nous abaissons une perpendiculaire sur $CE$, cette ligne $CE$ sera coupée en deux parties égales (puisque dans le théorême second on a fait $AE = AC$), et une de ces parties sera le sinus de la moitié de l'angle $A$, ce qui nous fournit la proportion...... $CA : \frac{1}{2}CE :: R : \sin. \frac{A}{2}$; donc $\frac{1}{2}CE = \frac{CA \times \sin. \frac{1}{2}A}{R}$, ou bien.. $CE = \frac{2b \times \sin. \frac{1}{2}A}{R}$, et $\overline{CE}^2 = \frac{4b^2 \times (\sin. \frac{1}{2}A)^2}{R^2}$. Comparons maintenant cette seconde valeur de $\overline{CE}^2$ avec la première, et nous aurons, $\frac{4b^2 \times (\sin. \frac{1}{2}A)^2}{R^2} = \frac{b}{a}(c+a-b)(c-a+b)$; ou bien........ $4ab \times (\sin. \frac{1}{2}A)^2 = R^2(c+a-b)(c-a+b)$. Et en faisant une proportion, $2a \times 2b : (c+a-b)(c-a+b) :: R^2 : (\sin. \frac{1}{2}A)^2$. Et en cherchant une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$, et une autre entre $c+a-b$ et $c-a+b$, substituant les quarrés de ces deux moyennes dans la proportion, et prenant la racine quarrée de tous les termes, on aura la proportion énoncée dans la première partie du théorême cinquième.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (33), *pour la page* 149. *Tome I.*

Cette seconde partie du théorême cinquième se tire de l'équation $4ab \times (\sin. \frac{1}{2}A)^2 = R^2 (c + a - b)(c - a + b)$, que nous avons trouvée dans la note précédente. En effet, en divisant tout par $4ab$, il vient $(\sin. \frac{1}{2}A)^2 = R^2 \times \frac{(c+a-b)}{2a} \times \frac{(c-a+b)}{2b}$, d'où $1 : \left(\frac{c+a-b}{2a}\right)\left(\frac{c-a+b}{2b}\right) :: R^2 : (\sin. \frac{1}{2}A)^2$. Donc si on prend une moyenne proportionnelle entre $\frac{c+a-b}{2a}$ et $\frac{c-a+b}{2b}$, que l'on en substitue le quarré dans la proportion, qu'ensuite on prenne la racine quarrée de tous les termes, on aura la proportion énoncée dans la seconde partie du théorême cinquième.

## NOTE (34), *pour la page* 149. *Tome I.*

Faisons d'abord la proportion, $CE : CD :: R : \cos. \frac{1}{2}A$, ou $\overline{CE}^2 : \overline{CD}^2 :: R^2 : (\cos. \frac{1}{2}A)^2$, d'où l'on tire, $\overline{CD}^2 = \frac{\overline{CE}^2 \times (\cos. \frac{1}{2}A)^2}{R^2}$, et en substituant, à la place de $\overline{CD}^2$ et de $\overline{CE}^2$, leurs valeurs analytiques données par les théorêmes premier et quatrième, on aura, $\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(\cos. \frac{1}{2}A)^2 \times \frac{b(c+a-b)(c-a+b)}{aR^2}$, ou bien................. $\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4a^2} = (\cos. \frac{1}{2}A)^2 \times \frac{b}{aR^2}$. Ou enfin........... $R^2 (a+b+c)(a+b-c) = 4ab \times (\cos. \frac{1}{2}A)^2$. Il n'y a plus maintenant aucune difficulté pour trouver l'énoncé du sixième théorême.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (35), *pour la page* 150. *Tome I.*

On a (*par const.*) $AC = AE = AF$, et $BC = BH = BG$. Donc $BC + AC - AB = BE + EH + AH + EH - AH - EH - BE = EH$; et $BC - AC + AB = BE + EH - AH - EH + AH + EH + BE = 2BE + EH$; mais $2BE + EH = BH + BE = EG$. Donc $\frac{(BC + AC - AB)(BC - AC + AB)}{2AB} = \frac{EH \times EG}{2AB}$.

## NOTE (36), *pour la page* 150. *Tome I.*

Newton dit que $DC$ est moyenne proportionnelle entre $DE$ et $DF$; pour le prouver, il suffit de démontrer que l'angle $FCE$ est droit. Or, il a été prouvé (Note 30) pour la figure 7, que l'angle $DCE = \frac{1}{2}$ angle $A$; et comme l'angle $DCE$ a été construit avec les mêmes conditions dans la figure 8, il s'en suit qu'il est égal à $\frac{1}{2} A$. De plus, à cause de $AC = FA$, l'angle $F = \frac{1}{2}$ angle $A$, donc $CFD = DCE$. Mais $FCD + CFD =$ un droit : donc $FCD + DCE =$ un droit, ou bien $FCE =$ un angle droit. Donc, etc.

## NOTE (37), *pour la page* 154. *Tome I.*

Les deux triangles $BCE$, $AEF$, étant tous deux rectangles (*par const.*), sont semblables, donc on a, $BE : EC :: AE : FE$, d'où l'on tire $BE : EC :: AE : FE :: BE + AE$ ou $AB : EC + FE$ ou $FC$. Donc $BE : EC :: AB : FC$. Mais on a par la propriété du triangle rectangle, $BE : EC :: BC : CD$. Mais (*par hypothèse*), $AB : AC :: BC : CD$; donc $AB : AC :: BE : EC$;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc aussi $AB : AC :: AB : FC$; donc $AC = FC$, c'est-à-dire, que le triangle $ACF$ est isocèle; or (*par const.*), l'angle $F$ est droit, donc aussi l'angle $FAC$ est droit, donc l'angle $ACF$ qu'il faut ajouter à $ACB$ ou en retrancher, pour que la somme ou la différence devienne égale à un droit, est nul; donc l'angle $ACB$ est droit.

## NOTE (38), *pour la page* 155. *Tome I.*

Par l'énoncé du problême, la base du triangle est moyenne proportionnelle arithmétique entre les côtés. Donc $2AB = BC + AC$. Retranchons $AB$ de part et d'autre, nous aurons $AB = BC + AC - AB$, ou bien $AB - AC = BC - AB$. Et si nous faisons $BC - AB = x$, nous aurons aussi $AB - AC = x$, et puisque $AB = a$, il en résulte que $BC = x + a$ et que $AC = a - x$.

## NOTE (39), *pour la page* 155. *Tome I.*

Voici comment on pourrait construire l'équation.............. $x = \frac{-2be^2 + d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2 + 3d^2}$. Soit $m$ le rayon d'un cercle, qu'on inscrive dans ce cercle un triangle équilatéral, et qu'on appelle $n$ le côté de ce triangle, on sait par la géométrie élémentaire qu'on aura l'équation $n^2 = 3m^2$. Cela posé, je passe à la construction. D'abord l'angle $E$ est donné, et Newton a supposé de plus qu'on avait $d : e :: DE : CD ::$ cos. $E$ : sin. $E$. Je ferai donc un triangle rectangle avec des côtés d'une longueur arbitraire, et dont un des angles aigus sera égal à $E$; le côté adjacent à l'angle $E$ représentera $d$, le côté adjacent à l'autre angle aigu, $e$; et en appelant $f$ l'hypothénuse, on aura $f^2 = e^2 + d^2$. Avec $f$ comme

S 2

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris un triangle équilatéral dont j'appelle le côté $g$, ce qui donne $g^2 = 3f^2 = 3e^2 + 3d^2$, ou $(A)\, g^2 = 3e^2 + 3d^2$. Ensuite avec $d$ comme rayon, je décris un cercle dans lequel j'inscris un triangle équilatéral, dont j'appelle le côté $h$, ce qui donne $h^2 = 3d^2$, ou $\frac{h^2}{4} = \frac{3d^2}{4}$, et retranchant membre par membre, cette dernière équation de l'équation $(A)$, le reste sera $g^2 - \frac{h^2}{4} = 3e^2 + 3d^2 - \frac{3}{4}d^2$, ou bien............ $g^2 - \frac{h^2}{4} = 3e^2 + \frac{9d^2}{4}$ $(B)$. Prenant ensuite une quatrième proportionnelle $k = \frac{be}{a}$, ce qui donne $k^2 = \frac{b^2e^2}{a^2}$, et décrivant un cercle avec $k$ comme rayon, j'y inscris un triangle équilatéral, dont j'appelle le côté $l$, ce qui donne $l^2 = 3k^2 = \frac{3b^2e^2}{a^2}$, ou... $l^2 = \frac{3b^2e^2}{a^2}$, je retranche, membre par membre, cette dernière équation, de l'équation $(B)$, et j'ai........................... $g^2 - \frac{h^2}{4} - l^2 = 3e^2 - \frac{3b^2e^2}{a^2} + \frac{9d^2}{4}$, ou bien................ $g^2 - \frac{h^2}{4} - l^2 = \frac{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9a^2d^2}{4}}{a^2}$ $(C)$. Maintenant je construis un triangle rectangle qui ait pour côtés $l$ et $\frac{1}{2}h$, et j'appelle son hypothénuse $p$; j'en construis un autre qui ait $p$ pour un de ses côtés, et $g$ pour son hypothénuse, et j'appelle son autre côté $q$. La première construction donne, $p^2 = \frac{1}{4}h^2 + l^2$; et la seconde, $q^2 = g^2 - p^2$; donc $q^2 = g^2 - \frac{1}{4}h^2 - l^2$. Et en substituant dans l'équation $(C)$, elle deviendra, $q^2 = \frac{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}{a^2}$, ou bien $a^2q^2 = 3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2$, ou $aq = \sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}$, ou bien $\frac{adq}{4e^2 + 3d^2} = \frac{d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{9}{4}a^2d^2}}{4e^2 + 3d^2}$ $(E)$, en multipliant

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tout par $\frac{d}{4e^2+3d^2}$. Mais nous avons vu plus haut que $h^2 = 3d^2$; donc en faisant un triangle rectangle qui ait pour côtés $h$ et $2e$, et appelant son hypothénuse $r$, il donnera, $r^2 = 4e^2 + 3d^2$; ensuite prenant une quatrième proportionnelle $s = \frac{aq}{r}$, et une autre quatrième proportionnelle $t = \frac{sd}{r}$, on aura.............

$t = \frac{aq}{r} \times \frac{d}{r} = \frac{aqd}{r^2} = \frac{adq}{4e^2+3d^2}$. Donc...................

$t = \frac{adq}{4e^2+3d^2} = \frac{d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2+3d^2}$. Actuellement, à cause de $\frac{2be^2}{4e^2+3d^2} = \frac{2be^2}{r^2}$, si l'on prend une quatrième proportionnelle $v = \frac{2be}{r}$, et une autre quatrième proportionnelle $\delta = \frac{ve}{r}$, on aura $\delta = \frac{2be^2}{r^2} = \frac{2be^2}{4e^2+3d^2}$. Donc enfin.....................

$t - \delta = \frac{-2be^2 + d\sqrt{3a^2e^2 - 3b^2e^2 + \frac{2}{4}a^2d^2}}{4e^2+3d^2} = x$; donc $t - \delta = x$.

## NOTE (40), *pour la page* 156. *Tome I.*

Car la diagonale $AD = \sqrt{2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$. Donc en élevant tout au quarré, $\overline{AD}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$, et en ajoutant à chaque membre le quarré de la diagonale $BC$, il viendra.....

$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

## NOTE (41), *pour la page* 167. *Tome I.*

(*Fig.* I^re. *pour les Notes*). Voici comment on peut trouver l'équation $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$. Prolongez indéfiniment la diagonale $AC$ dans l'angle $HAF$; du point $G$ milieu de $EF$ élevez une perpendiculaire $GK$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

sur ce prolongement, et du même point $G$ comme centre, avec le rayon $EG$ décrivez une circonférence de cercle, elle passera par les points $E$, $A$, $F$, et coupera le prolongement de la droite $CA$ en un point $T$, et la corde $AT$ sera divisée en deux parties égales $AK$ et $KT$, par la perpendiculaire $GK$. Maintenant si l'on unit les points $G$ et $T$, et les points $A$ et $G$ par des droites, elles seront des rayons du cercle, et les deux triangles $AKG$, $TKG$ seront égaux en tout; de plus l'angle $TAF = 45^\circ$, car la diagonale $CAT$ coupe l'angle droit $HAF$ en deux parties égales, et puisque $TAF$ a son sommet à la circonférence, il faut que l'arc $TF$, intercepté entre ses côtés, soit de $90^\circ$; donc l'angle $TGF$ qui a pour mesure tout l'arc $TF$ est droit, donc $TG$ est perpendiculaire sur $CG$, donc le triangle rectangle $CGT$ donne la proportion $CT : TG :: TG : TK$ ou $AK$. Or, l'hypothénuse $CT = CA + AK + KT = CA + 2AK$. Et en conservant aux lignes les noms que leur a imposés Newton, la proportion devient $CT\ (e+2y) : TG\ (b) :: TG\ (b) : TK$ ou $AK\ (y)$. D'où l'on tire $ey + 2y^2 = b^2$, ou bien $2y^2 = -ey + b^2$, et enfin $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$. Connaissant $y$ de cette manière, le reste s'achevera comme il a été dit dans le problême.

## NOTE (42), *pour la page* 173. *Tome I.*

Les deux ordonnées $CB$ et $DH$ ont pour expression commune l'équation $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2 z^2}{4b^2} + ar - rz}$, et comme elles ont des positions différentes par rapport à l'axe, elles doivent avoir des signes contraires; donc $CB$ étant prise avec un signe positif, $DH$ doit être prise avec un signe négatif. On aura donc........

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$BC-(-DH)=BC+DH$, ou $BC+BK$ pour la différence des deux ordonnées. Maintenant l'ordonnée $DH$ devant être négative, il est impossible que son radical soit affecté du signe $+$, on a donc nécessairement, $-DH=\frac{rz}{2b}-\sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2}+ar-rz}$. Donc il faut aussi que $BC=\frac{rz}{2b}+\sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2}+ar-rz}$. Donc en faisant la soustraction on aura, $BC+DH=2\sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2}+ar-rz}$. Ou bien $BC+DH=\sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2}+4ar-4rz}$, ainsi que Newton l'annonce.

## NOTE (43), *pour la page* 174. *Tome I.*

C'est-à-dire, que si l'on considère $AB$ comme le rayon du cercle, la droite $AK$ sera le cosinus de l'angle $BAK$; mais si on prend $AB$ comme diamètre, la droite $AK$ sera la corde du double du complément de l'angle $A$, ou ce qui revient au même, sera le double du cosinus de l'angle $A$. En effet, il est d'abord bien évident qu'en prenant $AB$ pour rayon, $AK$ est le cosinus de $A$; ce qui donne la proportion $AB : AK :: R : \cos. A$. Mais le rapport de $AB$ à $AK$ restera le même, si on multiplie les deux termes du dernier rapport par 2, ce qui donne $AB : AK :: 2R$ ou $D : 2 \cos. A$. Ainsi $AB$ représentant le diamètre, $AK$ représente ou le double du cosinus de $A$, ou ce qui est la même chose, la corde du double de son complément.

## NOTE (44), *pour la page* 175. *Tome I.*

En effet, si on demandait de partager en deux parties égales l'angle donné $LBC$, dont le double du cosinus est $BL$, on voit

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que l'angle cherché serait $A$, et que cet angle serait connu, si on connaissait le double de son cosinus $AK$ ou $x$. Or l'équation... $\frac{x^2}{r} - 2r = BL$ peut nous faire connaître $AK$, puisque $r$ et $BL$ sont connus. De même si on cherchait le tiers de l'angle donné $DCM$, alors $CM$ est connu, et $A$, tiers cherché de l'angle $DCM$, sera connu, si on détermine le double de son cosinus $AK$ ou $x$, et c'est ce qui sera facile par le moyen de l'équation........... $\frac{x^3}{r^2} - 3x = CM$; et ainsi du reste.

## NOTE (45), *pour la page* 181. *Tome I.*

Pour donner de ce problême une explication satisfaisante, il faut le reprendre dès son origine. Je commence donc par y ajouter une condition que Newton suppose tacitement; c'est que le plan sécant soit perpendiculaire au plan par son axe et par l'axe du solide, c'est-à-dire que le plan $IKLQ$ soit perpendiculaire au plan $GHM$. Maintenant $BHQ$ ou $GHO$ étant l'angle d'inclinaison de l'áxe $AB$ sur le plan de la section, et $L$ un point quelconque de rencontre de la droite $XY$ avec ce plan, menez $DF$ parallèlement à $AB$, et du point $L$ abaissez sur $AB$ la perpendiculaire $LG$, sur $DF$ la perpendiculaire $LF$, et sur $HO$ la perpendiculaire $LM$, et joignez les points $F$, $G$ et $M$, $G$. Remarquez ensuite que $DC$ étant la distance (c'est-à-dire la plus courte distance) entre $AB$ et $XY$, est nécessairement perpendiculaire à ces deux lignes. Or $FD$ a été menée parallèlement à $AB$; donc $CD$, perpendiculaire à $AB$, l'est aussi à sa parallèle $FD$. Nous venons de dire aussi que $CD$ était perpendiculaire à $XY$, donc $CD$ est perpendiculaire au plan $XDF$; donc le plan $DCGF$ passant par une droite $DC$ perpendiculaire

au

au plan $XDF$ est perpendiculaire à ce plan, et par conséquent toute ligne $LF$ menée dans le plan $XDF$ perpendiculairement à la section commune $FD$, sera perpendiculaire au second plan $FDCG$, ainsi qu'à toute droite $FG$ tracée dans ce second plan par le pié de la perpendiculaire; donc l'angle $GFL$ est droit. Je dis ensuite que l'angle $MGH$ est aussi droit, car le plan de la section $INQLK$ est (*par const.*) perpendiculaire au plan $AHO$, et $LM$ est aussi (*par const.*) perpendiculaire à leur section commune $OH$, donc $LM$ est perpendiculaire au plan $AHO$. Or d'un point $L$ de cette perpendiculaire, on a mené $LG$ perpendiculairement à $AB$, donc en unissant les points $M$ et $G$, $MG$ sera aussi perpendiculaire à $AB$, donc l'angle $MGH$ est droit.

Faites actuellement $CD=a$, $CH=b$, $MH=x$ et $ML=y$. Comme l'angle $GHO$ est donné, que l'angle $MGH$ est droit, les rapports des côtés dans ce triangle sont connus; soient donc..... $MH : HG :: d : e$, ou bien $x : HG :: d : e$, on aura..... $HG=\frac{ex}{d}$, et $GC=b+\frac{ex}{d}=FD$. Ensuite, à cause de l'angle connu $LDF$ (l'angle $LDF$ est connu, parce que l'inclinaison de la droite $XY$ sur le plan $GCDF$ est donnée), à cause, dis-je, de l'angle connu $LDF$, et de l'angle droit $LFD$, le rapport des côtés $FL$, $FD$ est connu; supposons donc que l'on ait $FD : FL :: g : h$, on aura, $\frac{FL}{FD}=\frac{h}{g}$, ou $FL=\frac{h}{g}\times FD$, et en mettant pour $FD$ sa valeur $b+\frac{ex}{d}$, il viendra........... $FL=\frac{bh}{g}+\frac{ehx}{dg}$. Au quarré de $FL$, ajoutons celui de $FG$, ou celui de $DC$, c'est-à-dire $a^2$, et il viendra................. $\overline{GL}^2=a^2+\frac{b^2h^2}{g^2}+\frac{2beh^2x}{dg^2}+\frac{e^2h^2x^2}{d^2g^2}$. $GL$ étant l'hypothénuse du


IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

triangle rectangle $GFL$, et aussi du triangle rectangle $GML$, si du quarré de cette hypothénuse, nous retranchons $\overline{MG}^2$, ou sa valeur $\overline{MH}^2 - \overline{GH}^2$, ou $x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}$, il restera................

$$\frac{a^2 g^2 + b^2 h^2}{g^2} + \frac{2 b e h^2}{d g^2} x + \left(\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2}\right) x = \overline{ML}^2 = y^2.$$

Cette équation qui exprime la relation entre $x$ et $y$, ne montant pas au-delà de deux dimensions, on sait que $INQLK$ est une section conique. Ce sera, dit Newton, une ellipse, si l'angle $MHG$ est plus grand que l'angle $LDF$, si, au contraire, il est plus petit, ce sera une hyperbole, et s'il lui est égal, une parabole: et si les deux points $C$ et $H$ se confondent, la section sera un parallélogramme.

Il s'agit de prouver ces quatre assertions. Nous commencerons par la parabole.

1°. Newton dit que si l'angle $MHG =$ l'angle $LDF$, la section $INQLK$ est une parabole. En effet, l'équation générale étant...

$$\frac{a^2 g^2 + b^2 h^2}{g^2} + \frac{2 b e h^2}{d g^2} x + \left(\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2}\right) \cdot x^2 = y^2,$$

on sait que, dans le cas de la parabole, le terme affecté de $x^2$ doit disparaître; il faut donc que son coëfficient soit égal à zéro, ou qu'on ait....

$\frac{h^2 e^2 - d^2 g^2 + e^2 g^2}{d^2 g^2} = 0$, ou bien $(h^2 + g^2) e^2 = d^2 g^2$. Et en mettant à la place des lettres, les lignes qu'elles représentent, on a......

$\overline{LD}^2 \times \overline{HG}^2 = \overline{MH}^2 \times \overline{FD}^2$, ou bien $LD \times HG = MH \times FD$; d'où l'on tire $LD : MH :: FD : HG$. Or les deux triangles $FLD$, $GMH$ ayant chacun un angle droit, les côtés autour d'un second angle proportionnels, et le troisième angle dans l'un et dans l'autre, étant nécessairement de même espèce, il s'en suit que les deux triangles sont semblables; donc l'angle $D =$ l'angle $H$. *Ce qu'il fallait d'abord prouver.*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2°. Pour que la section soit une ellipse, il faut que le coëfficient de $x^2$ soit négatif, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $d^2g^2 > (h^2+g^2)e^2$, ou que $\overline{MH}^2 \times \overline{FD}^2 > \overline{LD}^2 \times \overline{GH}^2$, ou que $MH \times FD > LD \times GH$. D'où l'on tire, $\frac{MH}{GH} > \frac{LD}{FD}$. Or, dans le cas de la parabole, on a, $\frac{MH}{GH} = \frac{LD}{FD}$, et nous venons de voir que si le premier membre $\frac{MH}{GH}$ s'accroît, le second membre $\frac{LD}{FD}$ restant le même, la courbe est une ellipse; or le rapport $\frac{MH}{GH}$ étant celui du rayon au cosinus de l'angle $MHG$, ce rapport ne peut s'accroître qu'autant que le cosinus diminue, et que par conséquent l'angle $MHG$ augmente, l'angle $FDL$ restant le même. Donc, lorsque l'angle $MHG > FDL$, la courbe est une ellipse. *Ce qu'il fallait prouver en second lieu.*

3°. On trouverait dans le cas du coëfficient positif de $x^2$, que $\frac{MH}{GH} < \frac{LD}{FD}$, or $\frac{MH}{GH}$, rapport du rayon au cosinus de l'angle $MHG$, ne peut devenir plus petit que $\frac{LD}{FD}$, l'angle $FDL$ restant toujours le même, à moins que le cosinus $HG$ n'augmente, et que par conséquent l'angle $MHG$ ne diminue. Donc, lorsque $MHG < FDL$, la section est une hyperbole. *Ce qui prouve la troisième assertion de Newton.*

4°. Enfin, dans le cas de la parabole, l'équation étant........ $\frac{a^2g^2+b^2h^2}{g^2} + \frac{2h^2be}{dg^2}x = y^2$, si l'on suppose que $CH$ ou $b$ devienne zéro, ou que l'axe de la section passe par le point $C$, alors cette équation se réduit (à cause de $b=0$) à $\frac{a^2g^2}{g^2} = y^2$,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ou $a^2 = y^2$, ce qui fait voir que toutes les $y$ sont constantes. Donc, lorsque l'angle $MHG =$ l'angle $FDL$, et que de plus l'axe de la section passe par le point $C$, la section est un parallélogramme. *Et c'est la quatrième assertion de Newton.*

A toute cette analyse, nous pouvons ajouter un cinquième cas, qui serait celui du cercle. Je dis donc que si l'angle $MHG$ est droit, la section est un cercle; car dans cette supposition, $e$ qui représente le cosinus de l'angle $MHG$, devient zéro, donc l'équation générale devient, $a^2 + \frac{b^2 h^2}{g^2} - x^2 = y^2$. Equation qui appartient visiblement au cercle.

## Note (46), *pour la page* 182. *Tome I.*

Voici comment Newton réduit l'équation, $2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}$. Il est d'abord évident que le premier membre est le quarré de $a + y$; et que le second, $x\sqrt{a^2 - y^2}$ est la même chose que $x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. L'équation pourra donc s'écrire ainsi; $(a+y)(a+y) = x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. Ou bien.............. $(a+y)\sqrt{a+y} \times \sqrt{a+y} = x\sqrt{a+y} \times \sqrt{a-y}$. Donc, en divisant tout par $\sqrt{a+y}$, on a, $(a+y)\sqrt{a+y} = x\sqrt{a-y}$, et en élevant tout au quarré et ordonnant, on trouvera l'équation finale de l'auteur.

## Note (47), *pour la page* 182. *Tome I.*

Pour saisir la suite de toutes ces égalités, on remarquera que l'angle $BCF$ étant extérieur au triangle isocèle $CKF$, l'angle $K$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

n'est que la moitié de $BCF$; mais les deux triangles $BCF$ et $FEG$ étant semblables, l'angle $BCF =$ l'angle $EGF$. Donc l'angle $EGF =$ le double de l'angle $K$, ou $K = \frac{1}{2} EGF$. Or, les deux triangles $DAG$, $FEG$ étant égaux, $DG = GF$. Donc le triangle $DGF$ est isocèle, donc l'angle $EGF$, extérieur à ce triangle, est double de l'angle $GFD$, donc l'angle $K = GFD$. Il faut montrer maintenant que $GFD = AMH$, c'est-à-dire que $HC$ est parallèle à $DF$. D'abord nous venons de prouver que l'angle $GFD$ ou $BFN = K$; donc les deux triangles rectangles $BFN$ et $BKF$ sont semblables, et par conséquent le triangle total $KFN$ est aussi rectangle en $F$; et l'angle $CFK$ est le complément à un droit de l'angle $CFN$. Mais l'angle $BFN$ ou son égal $CFK$ est aussi le complément à un droit de l'angle $BNF$ ou $CNF$. Donc l'angle $CNF =$ l'angle $CFN$, donc les deux droites $CN$ et $CF$ sont également inclinées sur la droite $DF$. Or $DH$ est parallèle à $CN$, donc $DH$ et $CF$ sont également inclinées sur $DF$; et comme $DH$ et $CF$ sont égales, il est clair que si par leurs extrémités $H$ et $C$ on tire la droite $HC$, elle sera parallèle à $DF$. Donc l'angle $GFD = AMH = MHI$, (car les droites $AF$ et $HI$ sont aussi parallèles). Maintenant il est facile de voir que l'angle $MHI =$ l'angle $CIL$, car le triangle $HIC$ est rectangle en $I$ (*par const.*), et $IL$ est aussi, par construction, perpendiculaire sur l'hypothénuse $HC$. Donc $MHI = CIL$; donc enfin, $CIL = K$, donc $K = \frac{1}{2} BCF = \frac{1}{2} EGF = GFD = AMN = MHI = CIL$.

## NOTE (48), *pour la page* 182. *Tome I.*

Montrons d'abord comment a lieu la proportion $BN : BK :: LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$. Nous ferons voir ensuite que $BN = 2a - y$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Les deux triangles rectangles semblables $BFN$ et $BKF$ donnent, $\overline{BF}^2 = BN \times BK$. Et les deux triangles semblables $BFN$, $LIC$ donnent, $BN : BF :: LC : LI$, d'où $BF = \frac{BN \times LI}{LC}$, ou $\overline{BF}^2 = \frac{\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2}{\overline{LC}^2}$, et les deux triangles semblables $LIC$, $LHI$ donnent, $LC : LI :: LI : LH$, ou bien $\overline{LI}^2 = LC \times LH$. Comparons les deux valeurs de $\overline{BF}^2$, nous aurons, $\frac{\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2}{\overline{LC}^2} = BN \times BK$, ou $\overline{BN}^2 \times \overline{LI}^2 = \overline{LC}^2 \times BN \times BK$, ou bien $BN \times \overline{LI}^2 = \overline{LC}^2 \times BK$, et en mettant, à la place de $\overline{LI}^2$, sa valeur $LC \times LH$, il vient, $BN \times LC \times LH = \overline{LC}^2 \times BK$, ou, en divisant tout par $LC$; $BN \times LH = LC \times BK$, d'où l'on tire, $BN : BK :: LC : LH$. Or, dans le triangle rectangle $HIC$, la droite $LI$ étant perpendiculaire sur l'hypothénuse, on a, $LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$, donc enfin, à cause du rapport commun, $BN : BK :: LC : LH :: \overline{CI}^2 : \overline{HI}^2$.

Maintenant, pour voir comment $BN = 2a - y$, rappelons-nous que, par construction, $BI$ ou $BN + NI = CF = a$, donc $BN = a - NI$. Mais $NI = IC - NC = IC - CF$ (car nous avons démontré dans la note 47, que le triangle $NCF$ est isocèle), donc $NI = y - a$, donc $BN = a - (y - a) = 2a - y$.

## NOTE (49), *pour la page* 182. *Tome I.*

Newton dit que le centre du cercle de la cissoïde est $A$, et que le rayon de ce cercle est $AH$. Comme il n'a tracé aucun cercle

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

dans sa figure, il est clair qu'il faut recourir à la manière dont les anciens décrivaient cette courbe pour comprendre ce qu'il dit.

(*Fig.* II, *des Notes*). Soit $BGH$ un cercle dont le rayon $AH = a$. Si, à l'extrémité $B$ de son diamètre, j'élève une perpendiculaire indéfinie $BT$, et que de l'autre extrémité $H$, je tire une droite $HS$ jusqu'à la ligne $BT$, et que je porte $OS$ de $H$ en $M$, le point $M$ sera à la cissoïde, et tous les points de cette courbe en dedans du cercle, se trouveront de la même manière. La ligne $HK$, qui passe par le milieu de la demi-circonférence, étant coupée en deux parties égales au point $G$, on voit que ce point est encore à la cissoïde. Pour trouver le point de la cissoïde sur la ligne $HT$, portez $TL$ de $H$ en $C$, et le point $C$ sera à la cissoïde. Cherchons maintenant l'équation de cette courbe. D'abord, $QB = PH$, car, à cause des parallèles, on a la proportion, $PH : MH :: QB : OS$. Mais (*par const.*) $OS = MH$, donc $QB = PH$, donc aussi $BP = QH$. Appelons, avec l'auteur, $AH$, $a$; $HI$ ou $NC$, $x$; et $CI$ ou $NH$, $y$; nous aurons, à cause des triangles semblables $HRL$, $HNC$, la proportion, $HR : RL :: HN : NC$. Or (*par const.*) $HR = BN = 2a - y$, et $RL = NV = \sqrt{y(2a-y)}$. La proportion précédente devient donc.....................
$2a - y : \sqrt{y(2a-y)} :: y : x$, et en élevant tout au quarré, $(2a-y)^2 : y(2a-y) :: y^2 : x^2$, ou bien, en divisant les termes du premier rapport par $2a - y$, $2a - y : y :: y^2 : x^2$, d'où l'on tire, $y^3 = 2ax^2 - x^2y$, qui est l'équation même de l'auteur. On conçoit maintenant sans difficulté ce que dit Newton, que le point $A$ est le centre du cercle de cette cissoïde, et que $AH$ ou $a$ est le rayon de ce cercle. On pourrait ajouter que $BT$ est l'asymptote de cette

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

courbe, ce qui est assez clair par la manière dont elle est construite; mais on peut le démontrer aussi par le moyen de l'équation, en faisant voir que $y$ ne peut devenir égal à $2a$ que lorsque $x$ est infiniment grand; c'est-à-dire que la courbe ne va toucher $BT$ qu'à un point infiniment éloigné. En effet, si dans l'équation $y^3 = 2ax^2 - x^2y$, on suppose $x = \infty$, l'équation se réduit à... $2ax^2 - x^2y = 0$, d'où $y = 2a$.

C'est Dioclès qui est l'inventeur de la cissoïde, mais c'est Newton qui a trouvé l'art de la décrire d'un mouvement continu, par le moyen d'une simple équerre,

## NOTE (50), *pour la page* 184. *Tome I.*

J'écris ainsi l'équation de l'auteur........................ $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$. Pour reconnaître si la section conique qui est représentée par cette équation est une ellipse, j'élève au quarré $2be$, coëfficient du terme qui contient le produit des deux indéterminées, et j'en retranche le quadruple du produit des coëfficiens des quarrés des deux indéterminées, le reste est, $4b^2e^2 - 4a^2b^2$, ou $4b^2(e^2 - a^2)$, or, comme l'a remarqué Newton, $e^2 - a^2$ est une quantité négative, donc $4b^2(e^2 - a^2)$ est aussi une quantité négative, et par conséquent l'équation appartient à l'ellipse. (Voyez l'Algèbre de Bezout, N°. 380 et suivans). Pour construire cette ellipse, je divise toute l'équation par $a^2$, ce qui donne $(A)$ $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 = 0$. Je fais évanouir le second terme par rapport à $y$, en supposant, $y - \frac{bex}{a^2} = t$, ce qui donne, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y = t^2 - \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$. Et en substituant dans

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'équation

dans l'équation ($A$), elle devient, $t^2 - \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4} + \frac{b^2 \times x^2}{a^2} - b^2 = 0$, qui peut s'écrire ainsi, $t^2 = b^2 + \frac{b^2 (e^2 - a^2) x^2}{a^4}$, ou parce qu'on a considéré $a$ comme le rayon, et $e$ comme le cosinus de l'angle $CBH$, on aura, en appelant $q$ le sinus du même angle, $e^2 - a^2 = - q^2$, ce qui, en substituant, change la dernière équation en celle-ci, $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2 x^2}{a^4}$ ($B$). Maintenant, comme le produit $xy$ des deux indéterminées se trouve dans l'équation ($A$), je fais, $x = \frac{lu}{n}$. En substituant dans l'équation ($B$), il vient, $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2}{a^4} \times \frac{l^2 u^2}{n^2}$. Mais n'ayant besoin que d'une seule indéterminée $n$, je puis supposer $l = a$, ce qui réduit mon équation à $t^2 = b^2 - \frac{b^2 q^2 u^2}{a^2 n^2}$, ou bien $t^2 = \frac{b^2 q^2}{a^2 n^2} \left( \frac{a^2 n^2}{q^2} - u^2 \right)$ ($C$). Pour trouver les diamètres et leur direction, je compare l'équation ($C$) à l'équation ordinaire de l'ellipse, $y^2 = \frac{f^2}{g^2} ( g^2 - x^2 )$, d'où il résulte, $\frac{f}{g} = \frac{bq}{an}$, et $g = \frac{an}{q}$, donc $f = \frac{bq}{an} \times g$, et en substituant pour $g$ sa valeur, $f = \frac{bq}{an} \times \frac{an}{q}$. Donc $f = b$. Donc le second demi-diamètre... $f = b = CD$. Pour avoir le premier diamètre $g$, il faut auparavant déterminer $n$, qui entre dans son expression. Pour cela, j'ai recours à l'équation $y - \frac{bex}{a^2} = t$, que je construis ainsi. Sur $AD$ (*Fig.* 3, *des Notes*) je prends une ligne arbitraire $AM$, et par le point $M$ je mène parallèlement à $AE$ une droite $MN$ telle, que j'aie la proportion, $a^2 : be :: AM : MN$, et je tire $ANP$ qui rencontre $BC$ en $O$. A cause des parallèles $MN$ et $BC$, j'aurai aussi, $AM : MN :: AB : BO$, ou $a^2 : be :: x : BO = \frac{bex}{a^2}$. Mais $CO = BC - BO = y - \frac{bex}{a^2} = t$,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc $CO = t$. C'est donc sur la droite $AO$ et parallèlement à $AE$ que se comptent les $t$. Ainsi $AO$ est la ligne des $u$, et par conséquent la direction du premier diamètre. Pour en déterminer la longueur, l'équation $x = \frac{lu}{n}$ me fait voir qu'en faisant $x = 0$, j'ai aussi $u = 0$, donc l'origine des $u$ est au point $A$. Ensuite, comme j'ai supposé $l = a$, $x = \frac{lu}{n}$ devient, $x = \frac{au}{n}$, ce qui donne, $x : a :: u : n$. Donc en prenant $x = a$, on aura aussi, $u = n$. Soit donc $x$ ou $AB = a = CE$, on aura, $u = AO = n$. Cette valeur de $n$ étant substituée dans l'équation $g = \frac{an}{q}$, la change en $g = \frac{CE \times AO}{q}$, dans laquelle tout est connu, puisque $q$ est le sinus de l'angle donné $A$, le rayon étant égal à $CE$. Donc on connaît aussi la longueur et la direction du premier demi-diamètre. L'ellipse est donc maintenant très-facile à construire. Supposons que ce soit $CLF$, et montrons que chaque point de cette courbe, par exemple le point $L$, satisfait à l'équation proposée. Pour le prouver, je mène par le point $L$, parallèlement à $AE$, la droite $LK$ qui rencontre $AP$ en $S$; et les triangles semblables $AMN$, $AKS$ me donnent la proportion, $AM : MN :: AK : KS$, ou $a^2 : be :: x : KS = \frac{bex}{a^2}$. Donc $LK - KS = SL = y - \frac{bex}{a^2} = t$. Mais, par la propriété de l'ellipse, $t^2$ ou $\left(y - \frac{bex}{a^2}\right)^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - u^2)$. Et comme nous avons trouvé $f = b$, $g = \frac{an}{q}$; que de plus l'équation $x = \frac{lu}{n} = \frac{au}{n}$ donne, $u = \frac{nx}{a}$, si nous substituons toutes ces valeurs, en nous rappelant encore que

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$q^2 = a^2 - e^2$, l'équation $t^2$ ou $\left(y - \frac{bex}{a^2}\right)^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - u^2)$ deviendra, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2e^2x^2}{a^4} = \frac{b^2q^2}{a^2n^2}\left(\frac{a^2n^2}{q^2} - \frac{n^2x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2(a^2-e^2)}{a^2n^2}\left(\frac{a^2n^2}{a^2-e^2} - \frac{n^2x^2}{a^2}\right) = b^2 - \frac{b^2a^2x^2}{a^4} + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$. Donc... $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y + \frac{b^2e^2x^2}{a^4} = b^2 - \frac{b^2a^2x^2}{a^4} + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}$, et en effaçant ce qui se détruit, $y^2 - \frac{2bex}{a^2}y = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, d'où l'on tire, $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, équation qu'il s'agissait de construire.

Nous remarquerons encore que si l'angle $EAD$ était droit, la ligne $BC$ serait perpendiculaire sur $AD$, et que dans ce cas $BH$ ou $e$ deviendrait zéro; alors l'équation proposée, $a^2y^2 - 2bexy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, serait réduite à $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, et les droites $AE$ et $AD$ seraient dans la direction des axes. De plus, l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, donne, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, ce qui fait voir que dans cette hypothèse, le premier demi-axe serait $CE$, et le second, $CD$.

## NOTE (51), *pour la page* 189. *Tome I.*

Il est assez facile de voir que le diamètre du cercle se trouve sur la droite $AB$, car les ordonnées $y$ ont deux valeurs égales, $y = +\sqrt{\frac{d^2a^2 - 2d^2ax}{e^2 - d^2} - x^2}$, et $y = -\sqrt{\frac{d^2a^2 - 2d^2ax}{e^2 - d^2} - x^2}$, l'une positive, et l'autre négative. Donc en regardant ces doubles ordonnées comme des cordes du cercle, la ligne $AB$ qui les coupe toutes par la moitié, et qui de plus leur est perpendiculaire, doit



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

passer par le centre du cercle. Pour trouver la longueur du diamètre, il faut observer qu'aux endroits où le cercle coupe la droite $AB$, on a $y = o$, donc si dans l'équation...................
$y = \pm \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2}$, nous faisons $y = o$, nous aurons $\pm \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2} = o$, ou bien $\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2 = o$; d'où on tire, $x = \frac{- a d^2 \pm a d e}{e^2 - d^2}$, ou bien $x = \frac{- a d (d \pm e)}{e^2 - d^2}$. Nous observerons maintenant qu'il faut que $e^2 - d^2$ soit une quantité négative, ou que l'on ait $d > e$, sans quoi une des valeurs de $x$ serait négative, et se compterait à gauche du point $A$, ce qui appartiendrait à une autre question. Nous regarderons donc $e^2 - d^2$ comme une quantité négative, par conséquent l'équation.......
$x = \frac{- a d (d \pm e)}{e^2 - d^2}$ devient $x = \frac{a d (d \pm e)}{d^2 - e^2}$, ou bien $x = \frac{a d (d \pm e)}{(d + e)(d - e)}$, ce qui donne deux valeurs de $x$, l'une $x = \frac{a d}{d + e}$, et l'autre $x = \frac{a d}{d - e}$. Il est clair que la première est $AE$, et que la seconde est $AF$, et que leur différence $EF$ est le diamètre cherché. En effet, lorsque $y = o$, le point $C$ tombe en $E$ ou en $F$. Dans le premier cas, on a $d : e :: AE : EB$, ou $d + e : d :: AE + EB$ ou $a : AE$, ce qui donne $AE = \frac{a d}{d + e} = x$. Dans le second cas, on a, $d : e :: AF : BF$, ou $d - e : d :: AF - BF$ ou $a : AF$, ce qui donne $AF = \frac{a d}{d - e} = x$, donc $AF - AE$ égale le diamètre cherché.

## NOTE (52), *pour la page* 193. *Tome I.*

(*Fig.* 4, *des Notes*). Il est clair, dit Newton, que si l'angle $ABF$ au lieu d'être comme dans le problême, égal à la différence des angles sur la base, est égal à leur somme, l'angle $D$ est donné. Effectivement dans ce cas-là, $BF$ tombe sur $BD$, et l'angle $ABF$ devient l'angle $ODA$. Car si l'on prend $BA$ pour la corde d'un cercle, et que le point $D$ soit placé successivement en différens points de l'arc (toujours au-dessus ou toujours au-dessous de la corde $BA$, car l'angle $D$ varierait si on le plaçait tantôt au-dessus tantôt au-dessous de $BA$), il est manifeste que l'angle $BDA$ aura par-tout la même valeur, et que son supplément $ODA$ aura aussi pour tous les différens points de l'arc une même valeur. Il n'est donc plus question que de voir si cette supposition satisfait à la première équation partielle de Newton, qui est $x^2 - ax + dy + y^2 = 0$, et c'est ce que nous allons voir en effet. Pour cela j'appelle $m$ et $n$ les deux parties de l'angle $D$, et je conserve aux autres quantités les mêmes dénominations qu'elles ont dans le problême. Je cherche d'abord les sinus et cosinus des angles $m$ et $n$, et j'ai $BD : BC :: r : \sin. m = \frac{r \times BC}{BD}$. Ensuite..........

$BD : DC :: r : \cos. m = \frac{r \times DC}{BD}$. Pour l'angle $n$, j'ai..........

$DA : CA :: r : \sin. n = \frac{r \times CA}{DA}$, et $DA : DC :: r : \cos. n = \frac{r \times DC}{DA}$.

De sorte que $\sin. (m+n) = \frac{r \times BC}{BD} \times \frac{r \times DC}{DA} + \frac{r \times DC}{BD} \times \frac{r \times CA}{DA} =$

$\frac{r^2 (BC \times DC + DC \times CA)}{BD \times DA} = \frac{r^2 \times DC(BC + CA)}{BD \times DA}$, donc.. ...........

$\sin. (m+n) = \frac{r^2 \times DC(BC+CA)}{BD \times DA} = \sin. BDA$. On a aussi.....

$\cos. (m+n) = \frac{r \times DC}{BD} \times \frac{r \times DC}{DA} - \frac{r \times BC}{BD} \times \frac{r \times CA}{DA} = \frac{r^2 (\overline{DC}^2 - BC \times CA)}{BD \times DA}$.

Donc $\cos. (m+n) = \frac{r^2 (\overline{DC}^2 - BC \times CA)}{BD \times DA} = \cos. BDA$. Or.......

tang. $BDA$, ou tang. $(m+n) = \frac{\sin. (m+n)}{\cos. (m+n)} = \frac{DC(BC+CA)}{DC^2 - BC \times CA} =$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

tang. $BDA$. Et en mettant à la place des lignes leurs valeurs analytiques, on a, tang. $BDA = \frac{ay}{y^2 - ax + x^2}$. Mais ce n'est pas la tangente de $BDA$ que nous cherchons, c'est celle de son supplément $ODA$, puisque c'est celui-ci qui dans le cas qui nous occupe, tient la place de l'angle $ABF$ du problême. Or, $ODA$ étant le supplément de l'angle $BDA$, a la même tangente, mais prise avec un signe contraire. Donc tang. $ODA = \frac{-ay}{y^2 - ax + x^2}$. Et comme l'angle $ODA$ tient dans notre figure la même place que l'angle $ABF$ dans la figure du problême; et que dans le problême Newton a fait $BC : CG :: d : a$, ou bien $r$ : tang. $ABF :: d : a$; nous aurons aussi pour l'angle $ODA$, $DO : OA :: d : a$, ou bien $r$ : tang. $ODA :: d : a$; d'où

tang. $ODA = \frac{r \times a}{d} = \frac{a}{d}$ (en faisant $r = 1$); donc $\frac{a}{d} = \frac{-ay}{y^2 - ax + x^2}$, et en divisant tout par $a$ et réduisant, il viendra $x^2 - ax + y^2 + dy = 0$, qui est absolument la même équation que celle de Newton, et qui appartient visiblement au cercle; voila ce qu'il fallait d'abord démontrer.

Veut-on maintenant construire le cercle qui appartient à cette équation; on commencera par faire disparaître le second terme par rapport à $x$, en supposant $x - \frac{1}{2}a = z$, ce qui donne...... $x^2 - ax = z^2 - \frac{1}{4}a^2$. Et en substituant dans l'équation $x^2 - ax + dy + y^2$, elle devient $z^2 - \frac{a^2}{4} + dy + y^2 = 0$. Je fais aussi disparaître le second terme par rapport à $y$, en supposant $y + \frac{1}{2}d = t$, ce qui donne $y^2 + dy = t^2 - \frac{1}{4}d^2$; et en substituant dans la dernière équation, elle devient $z^2 - \frac{1}{4}a^2 + t^2 - \frac{1}{4}d^2 = 0$; d'où l'on tire $t^2 = \frac{a^2 + d^2}{4} - z^2$. C'est-là l'équation qu'il faut construire.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Je remarque d'abord que l'équation $x - \frac{1}{2}a = z$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $x$, me donne, dans la supposition de $x = 0$, $z = -\frac{1}{2}a$; et dans la supposition de $x = a$, j'ai $z = \frac{1}{2}a$. Donc l'origine des $z$ est au milieu de $AB$. Ainsi je partage $AB$ en deux parties égales au point $K$, et c'est de ce point que se compteront les $z$. La seconde équation $y + \frac{1}{2}d = t$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $y$, me donne dans la supposition de $y = 0$, $t = \frac{1}{2}d$; ce qui me fait voir que les $t$ prennent leur origine sur une ligne parallèle à $AB$, et qui en est éloignée d'un $\frac{1}{2}d$. Pour déterminer cette ligne, je tire par le point $B$ une droite $BLM$, formant avec $AB$ un angle $ABM =$ l'angle $DAO$, et je mène du point $A$ perpendiculairement à $AB$ la droite $AM$. Les deux triangles rectangles $DOA$, $BAM$, étant semblables, donnent la proportion $DO : AO :: AM : AB$. Or, $DO : AO :: d : a$, donc $AM : AB :: d : a$; mais $AB = a$, donc $AM = d$. Par conséquent si par le point $K$ milieu de $AB$, je mène parallèlement à $AM$ la droite $KL$, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point $L$ la droite $BM$, on aura $KL = \frac{1}{2}d$. Et si par le point $L$ on mène $ST$ parallèlement à $AB$, ce sera sur $ST$ que se compteront les $t$, puisque $DE = DC + CE = y + \frac{1}{2}d = t$. Actuellement si du point $L$ comme centre, et d'un rayon $BL$ je trace un cercle, l'arc $BDA$ de ce cercle contiendra les lieux de l'angle $ODA$, et tous les points de cet arc satisferont à l'équation $t^2 = \frac{a^2 + d^2}{4} - z^2$. Car $SLT$ étant le diamètre du cercle, $L$ son centre, $DE$ une ordonnée; on a pour l'équation du cercle, lorsque les abscisses sont comptées du centre, $\overline{DE}^2 = \overline{SL}^2 - \overline{EL}^2$, ou bien en mettant au lieu de $SL$ son égal $BL$, $\overline{DE}^2 = \overline{BL}^2 - \overline{EL}^2$. Mais..........

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\overline{BL}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KL}^2 = \frac{a^2+d^2}{4}$; et $\overline{EL}^2 = \overline{CK}^2 = z^2$. Donc........

$\overline{DE}^2\,(t^2) = \frac{a^2+d^2}{4} - z^2$. C. Q. F. D.

Si on voulait retrouver dans cette construction, l'équation même de Newton, cela serait très-facile, car $t = y + \frac{1}{2}d$, et $z = x - \frac{1}{2}a$; donc en substituant ces valeurs de $t$ et de $z$ dans l'équation...... $t^2 = \frac{a^2+d^2}{4} - z^2$, elle deviendra..................... $y^2 + dy + \frac{d^2}{4} = \frac{a^2+d^2}{4} - \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)$. Après avoir effacé ce qui se détruit, et transporté tous les termes dans un seul membre, on a $x^2 - ax + dy + y^2 = 0$, qui est l'équation même de Newton.

## NOTE (53), *pour la page* 193. *Tome I.*

Newton dit que l'équation $x^2 - ax + \frac{2dxy}{a} - y^2 - dy = 0$, appartient à une hyperbole; et cela est évident puisque les quarrés des deux variables, $x^2$ et $y^2$ ont des signes différens dans le même membre de l'équation. Il s'agit à présent de démontrer la construction qu'il en donne, pour cela je change tous les signes de l'équation, et j'ai $(A)\ y^2 + dy - \frac{2dxy}{a} + ax - x^2 = 0$. Je commence par faire disparaître le second terme par rapport à $y$, en faisant $y + \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a} = t$; ce qui donne.......................... $y^2 + dy - \frac{2dxy}{a} = t^2 - \frac{d^2}{4} + \frac{d^2x}{a} - \frac{d^2x^2}{a^2}$. Le second membre de cette équation étant substitué à la place du premier dans l'équation $(A)$, elle devient $t^2 + \left(\frac{d^2}{a} + a\right)x - \left(\frac{d^2}{a^2} + 1\right)x^2 - \frac{d^2}{4} = 0$,

et

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et en changeant tous les signes, et ordonnant par rapport à $x$, on a, $x^2 - ax - \frac{a^2 t^2}{a^2 + d^2} + \frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)} = 0$. $(B)$ Je fais encore disparaître dans cette équation le second terme par rapport à $x$, en supposant $x - \frac{1}{2}a = \frac{a u}{2 n}$ ($n$ étant une indéterminée dont la valeur sera fixée par les opérations subséquentes), ce qui donne $x^2 - ax = \frac{a^2 u^2}{4 n^2} - \frac{1}{4}a^2$. Et en substituant le second membre de cette équation à la place du premier dans l'équation $(B)$, elle devient $\frac{a^2 u^2}{4 n^2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 t^2}{a^2 + d^2} + \frac{a^2 d^2}{4(a^2+d^2)} = 0$. Et en dégageant la valeur de $t^2$, on a $t^2 = \frac{d^2}{4} - \left(\frac{a^2+d^2}{4}\right) + \left(\frac{a^2+d^2}{4n^2}\right) u^2$, qui se réduit à $t^2 = -\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2+d^2}{4n^2}\right) u^2$. Et en dégageant $u^2$ du coëfficient qui le multiplie, j'aurai $t^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2}\left(u^2 - \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2}\right)$. Je compare maintenant cette équation particulière à l'équation générale de l'hyperbole par rapport à ses diamètres conjugués, $y^2 = \frac{f^2}{g^2}(x^2 - g^2)$. Et cette comparaison me donne.......... $\frac{f^2}{g^2} = \frac{a^2+d^2}{4n^2}$, et $g^2 = \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2}$, donc $g = \frac{an}{\sqrt{a^2+d^2}}$. Mais la première donne $f^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2} \times g^2$. Donc $f^2 = \frac{a^2+d^2}{4n^2} \times \frac{a^2 n^2}{a^2+d^2} = \frac{a^2}{4}$; donc $f = \frac{a}{2}$, et $g = \frac{an}{\sqrt{a^2+d^2}}$. C'est-à-dire que le second demi-diamètre $f$ auquel les nouvelles ordonnées $t$ sont parallèles, est égal à $\frac{AB}{2}$; donc $2f = AB$. Quant à la valeur du demi-diamètre principal $g$, nous ne pourrons la connaître qu'après avoir déterminé $n$. Pour y parvenir je considère l'équation $y + \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a} = t$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $y$. Si je suppose $y = 0$,



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

elle devient $t = \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a}$. Mais dans cette supposition de $y = 0$, on voit que la courbe rencontre $AB$ aux points $A$ et $B$. Or, pour le point $A$, on a $x = 0$, et pour le point $B$, $x = a$, donc dans l'équation $y + \frac{1}{2}d - \frac{dx}{a} = t$, si l'on fait $y = 0$, on aura ou $t = \frac{1}{2}d - \frac{da}{a}$, ce qui donne $t = -\frac{1}{2}d$; ou $t = \frac{1}{2}d - \frac{d \times 0}{a}$, ce qui se réduit à $t = \frac{1}{2}d$. Donc au point $A$ on a $t = \frac{1}{2}d$, et au point $B$, $t = -\frac{1}{2}d$. Déterminons maintenant la valeur de $d$. Pour cela je mène par le point $P$ milieu de $AB$, (*Fig.* 5, *pour les Notes.*) une droite $PL$, faisant avec $PA$ un angle égal à $BGC$, et du point $A$ je mène $AL$ perpendiculairement à $AB$; ainsi les deux triangles rectangles $BCG$, $PAL$ sont semblables; on a donc $BC : CG :: d : a ::$ $AL : AP$. Or, $AP = \frac{1}{2}a$, donc $AL = \frac{1}{2}d$. Et si par le point $B$ on mène $BD$ parallèlement à $AL$, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point $D$ la droite $PL$ prolongée, $BD$ sera égal à $-\frac{1}{2}d$. Or, nous avons trouvé pour la supposition de $y = 0$, $t = \frac{1}{2}d$, et $t = -\frac{1}{2}d$, donc les nouvelles ordonnées $t$ ont leur origine sur la droite $DL$; c'est donc aussi sur cette droite que doivent se compter les abscisses. Déterminons maintenant la valeur de $n$. Pour cela j'ai recours à l'équation $x - \frac{1}{2}a = \frac{au}{2n}$ qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $x$. A la seule inspection de cette équation, on voit qu'en faisant $x = \frac{1}{2}a$, on a $u = 0$, donc l'origine des $u$ est au point $P$, et de plus nous avons vu qu'ils doivent se compter sur $DL$. Prenons donc sur $PA$ une ligne arbitraire $PN$, et par le point $N$ tirons $NO$ parallèlement à $AL$, les deux triangles semblables $PAL$, $PNO$, nous donneront $PA\ (\frac{1}{2}a) : PL :: PN : PO\ (u)$. Donc $PL \times PN = \frac{au}{2}$, ou...

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$PN = \frac{au}{2 \times PL}$. Or, $PN$ a été pris à volonté, je puis donc supposer que $PN = PC = x - \frac{1}{2}a$, d'où il résultera que.......... $PN = x - \frac{1}{2}a = \frac{au}{2n}$. Donc $\frac{au}{2n} = \frac{au}{2PL}$, donc $n = PL$. Mais $PL = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{4}}$, donc $n = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{4}}$. Substituons cette valeur de $n$ dans l'équation $g = \frac{an}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, il viendra................ $g = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{2}$, ce qui donne $g = \frac{a}{2}$. Donc le demi-diamètre principal est égal à $\frac{AB}{2}$; et nous avons vu que le second demi-diamètre était aussi égal à $\frac{AB}{2}$. Donc les deux diamètres conjugués sont égaux chacun à $AB$, donc l'hyperbole est équilatère; car en appelant $a$ et $b$ les deux demi-axes de cette hyperbole, $g$ et $f$ les deux demi-diamètres conjugués, on a cette équation bien connue $a^2 - b^2 = g^2 - f^2$, et puisque $f = g$, il en résulte que $a^2 - b^2 = 0$, ou bien $a = b$. Donc l'hyperbole est équilatère; et par conséquent ses asymptotes font entre elles un angle droit, et comme l'angle des asymptotes est toujours coupé en deux parties égales par le premier axe, tâchons au moyen de cette propriété, de déterminer la direction des asymptotes. Nous avons vu que le diamètre principal $g$ était dans la direction de $DL$, donc en prenant de part et d'autre du point $P$ des parties $PO$ et $PO'$ égales chacune à $\frac{1}{2}a$, $OO'$ sera la longueur du diamètre principal. Mais $BA$ qui est un autre diamètre principal, ou appartenant à la même branche de courbe est aussi égal à $a$ ou bien à $OO'$, d'où il suit que ces deux diamètres $AB$ et $OO'$ se trouvent situés de différens côtés de l'axe, et sont par là même également inclinés et sur l'axe et sur les asymptotes. Donc les asymptotes font chacune avec chacun de ces



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

diamètres des angles égaux. Mais l'angle des asymptotes est droit, et dans le triangle rectangle $PAL$ la somme des angles $PLA + APL$ vaut aussi un angle droit, donc si on retranche de l'angle des asymptotes, l'angle $LPA$, le reste sera égal à l'angle $PLA$, ou $CBG$. Donc si du point $P$ on tire une droite $PQ$ faisant avec $BA$ un angle $BPQ = \frac{1}{2} CBG$, la droite $PQ$ sera une asymptote, et en menant $PR$ perpendiculairement sur $PQ$ ce sera l'autre asymptote. Il est bien facile maintenant de décrire la courbe.

Il ne s'agit plus que de faire voir que l'équation de cette hyperbole est la même que l'équation qu'il fallait construire.

D'un point quelconque $M$ du diamètre $DPL$, j'abaisse sur $BA$ une perpendiculaire $MC$ qui rencontre la courbe en un point $V$, de sorte que $MV = t$. Newton a appelé $AC$, $x$; $CP$, $x - \frac{1}{2}a$; et $CV$, $y$; et nous avons vu que $AL = \frac{1}{2}d$. Donc à cause des triangles semblables $PAL$, $PCM$, on a.......................

$AP\left(\frac{1}{2}a\right) : AL\left(\frac{1}{2}d\right) :: PC\left(x - \frac{1}{2}a\right) : CM = \frac{dx}{a} - \frac{1}{2}d$. Donc $MV = CM - VC = \frac{dx}{a} - \frac{1}{2}d - y$. Ensuite.................

$AP\left(\frac{1}{2}a\right) : PL\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2}\right) :: PC\left(x - \frac{1}{2}a\right) : PM = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 + d^2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2}$, ce qui donne $\overline{PM}^2 = x^2 + \frac{d^2 x^2}{a^2} - ax - \frac{d^2 x}{a} + \frac{a^2 + d^2}{4}$.

Mais à cause de l'hyperbole équilatère, on a $\overline{MV}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{PO}^2$, ce qui donne, en substituant, $\frac{d^2 x^2}{a^2} - \frac{d^2 x}{a} + \frac{d^2}{4} - \frac{2dxy}{a} + dy + y^2 = x^2 + \frac{d^2 x^2}{a^2} - ax - \frac{d^2 x}{a} + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Et en effaçant ce qui se détruit, il reste $-\frac{2dxy}{a} + dy + y^2 = x^2 - ax$, et en transposant tous les termes d'un même côté, on a......

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$x^2 - ax + \frac{2dxy}{a} - dy - y^2 = 0$ ; c'est l'équation même de Newton, qu'il fallait construire.

## NOTE (54), *pour la page* 194. *Tome I.*

Il est facile de voir que les deux angles $DQP$, $DMP$ sont égaux, car $QPA = BPM$, et (*par const.*) chacun de ces angles est la moitié de la différence des angles $DBP$, $DAP$. Donc $DBP = DAP + QPA + BPM$. Mais $DBP = BMP + BPM$. Donc $DAP + QPA + BPM = BMP + BPM$, et en effaçant de part et d'autre $BPM$, il reste $DAP + QPA$ ou $DQP = BMP$, ou bien $DQM = DMQ$.

## NOTE (55), *pour la page* 195. *Tome I.*

Les deux proportions desquelles Newton déduit son théorême, sont, $DO - BN : DO :: ON : MO$; et $DO + AR : DO : OR : QO$. Donc si on alterne les moyens, en se souvenant que $MO = QO$, et que $AR = BN$, on aura $DO - BN : ON :: DO : MO$; et $DO + BN : OR :: DO : QO$ ou $MO$; donc $DO - BN : DO + BN :: ON : OR$. Si on ajoute les antécédens aux conséquens, et qu'ensuite on les en retranche, la dernière proportion donnera... $2DO : 2BN :: OR + ON : OR - ON$, et en divisant tout par 2, $DO : BN :: \frac{OR+ON}{2} : \frac{OR-ON}{2}$. Mais $\frac{OR+ON}{2} = \frac{NR}{2} = PR = PN$; car, à cause des deux triangles rectangles semblables $PNB$, $PRA$, on a, $PN : PB :: PR : PA$; mais (*par const.*) $PB = PA$, donc aussi $PN = PR$; donc $\frac{OR+ON}{2} = PN$. Ensuite $\frac{OR-ON}{2} = PO$; car $OR = PR + PO = PN + PO = ON + 2PO$, donc $OR = ON + 2PO$, donc $OR - ON = ON +$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$2PO - ON = 2PO$, donc $\frac{OR-ON}{2} = PO$. En substituant donc respectivement $PN$ et $PO$ au lieu de $\frac{OR+ON}{2}$, et de $\frac{OR-ON}{2}$, dans la dernière proportion, elle devient, $DO : BN :: PN : PO$, d'où l'on tire $DO \times PO = BN \times PN$, qui est l'équation de Newton.

## NOTE (56), *pour la page* 195. *Tome I.*

Il faut montrer que l'angle $DMQ$ sera double de l'angle $DQM$ dans l'hypothèse. En effet, soit $G$ l'angle donné dont $DBA$ surpasse le double de $DAB$, on aura $DBA = 2DAB + G$. Ensuite $DBA = DMQ + BPM$. Mais $BPM = \frac{G}{3}$ ( par construction). Donc $DBA = DMQ + \frac{G}{3}$. Donc en comparant cette seconde valeur de $BDA$ à la première, nous aurons........... $2DAB + G = DMQ + \frac{G}{3}$, ou bien $6DAB + 3G = 3DMQ + G$, ou bien $6DAB + 2G = 3DMQ$. D'un autre côté............ $DQM = DAB + APQ$, ou bien $DQM = DAB + \frac{G}{3}$, ou bien $3DQM = 3DAB + G$, et encore $6DQM = 6DAB + 2G$. Et en comparant cette valeur de $6DAB + 2G$ à celle qui a été trouvée plus haut, il viendra, $6DQM = 3DMQ$, ou bien $DMQ = 2DQM$. C. Q. F. D.

## NOTE (57), *pour la page* 196. *Tome I.*

On sait par les élémens de la géométrie qu'un angle quelconque $M$, d'un triangle $DMO$ étant coupé en deux parties

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

égales par une droite $MS$, les deux segmens de la base, $OS$ et $DS$ sont proportionnels aux côtés qui leur correspondent, et qu'ainsi on a la proportion $DS : OS :: DM : MO$.

## NOTE (58), *pour la page* 197. *Tome I.*

Dans le problême pris dans toute sa généralité, on suppose que l'angle $DBA$ surpasse le double de l'angle $DAB$, d'un angle donné quelconque $G$, et l'on suppose aussi que $BPM = \frac{G}{3}$. Or, si $BPM$ ou $\frac{G}{3} = 0$, il est clair que $G$ lui-même est zéro; donc dans le cas où $BPM = 0$, on a simplement $DBA = 2DAB$, et c'est-là le cas où la courbe de trois dimensions devient une hyperbole.

## NOTE (59), *pour la page* 197. *Tome I.*

Il sera facile de comprendre le théorême que Newton établit dans ce paragraphe, en construisant l'équation, $y^2 = 3x^2 + 2cx - c^2$, qu'il a trouvée plus haut.

Je remarque d'abord qu'elle n'a point de second terme par rapport à $y$, et que les $y$ sont perpendiculaires à l'axe des $x$, je n'introduirai donc pas une nouvelle indéterminée à la place de $y$; mais comme il y a un second terme par rapport à $x$, il faut le faire disparaître. J'écris d'abord l'équation de cette manière.... (A) $x^2 + \frac{2cx}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$. Ensuite je fais, $x + \frac{c}{3} = u$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

ce qui donne, $x^2 + \frac{2cx}{3} = u^2 - \frac{c^2}{9}$, et en substituant à la place de $x^2 + \frac{2cx}{3}$, sa valeur, dans l'équation ($A$), elle devient.... $u^2 - \frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$, ou $\frac{y^2}{3} = u^2 - \frac{4c^2}{9}$, ou enfin.. $y^2 = 3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right)$ ($B$). Telle est l'équation qu'il faut construire. Je commence par chercher en quels endroits la courbe rencontre la droite sur laquelle se comptent les $u$ (et remarquez que c'est la même sur laquelle se comptent les $x$, puisque les ordonnées pour les $u$ comme pour les $x$, sont toujours les $y$). Je fais donc.... $3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right) = 0$, d'où $u^2 = \frac{4c^2}{9}$, ou bien $u = \pm \frac{2c}{3}$. Et en substituant à la place de $u$ sa valeur $x + \frac{c}{3}$, il viendra..... $x + \frac{c}{3} = \pm \frac{2c}{3}$, ce qui donne deux valeurs de $x$, la première $x = \frac{c}{3}$, et la seconde $x = -c$. D'où l'on voit que la courbe rencontre l'axe des $x$ ou des $u$ en deux points, dont le premier est éloigné du point $P$ vers la gauche de $\frac{1}{3}c$, et le second vers la droite d'une quantité $c$. La longueur de l'axe des $u$ est donc en tout de $\frac{4}{3}c$. Je fais en conséquence (*Fig.* 6, *pour les Notes*) $VR = \frac{4}{3}c$. Voyons maintenant en quel point commencent les $u$. Pour cela j'emploie l'équation $x + \frac{1}{3}c = u$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $x$. Dans la supposition de $u = 0$, j'ai $x = -\frac{c}{3}$, donc il faut porter à droite du point $P$, de $P$ en $C$, une quantité égale à $\frac{c}{3}$, et le point $C$ sera l'origine des $u$, et par conséquent le centre de l'hyperbole. Il faut chercher actuellement la longueur des diamètres conjugués ; mais comme les

co-ordonnées

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

co-ordonnées sont perpendiculaires entre elles, ces diamètres seront les axes mêmes. Je compare donc l'équation particulière...... $y^2 = 3\left(u^2 - \frac{4c^2}{9}\right)$ à l'équation de l'hyperbole par rapport à ses axes, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. Le résultat de cette comparaison me donne, $\frac{b^2}{a^2} = 3$, et $a^2 = \frac{4c^2}{9}$. Je tire de la seconde, $a = \pm \frac{2c}{3}$. C'est-à-dire que le premier demi-axe est égal à $\frac{2}{3}c$, donc le premier axe tout entier $= \frac{4}{3}c$. La première équation donne, $b^2 = 3 \times a^2$, ou bien $b^2 = 3 \times \frac{4c^2}{9} = \frac{4c^2}{3}$. Donc $b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire que le second demi-axe $= \frac{2c}{\sqrt{3}}$, donc l'axe tout entier $= \frac{4c}{\sqrt{3}}$. J'aurais pu me dispenser de chercher la longueur du premier axe $2a$ ou $\frac{4}{3}c$, puisqu'elle avait déjà été déterminée précédemment, mais la seconde méthode étant générale, j'ai cru devoir l'indiquer. Rien n'est plus facile maintenant que la construction de la courbe. J'élève à l'extrémité $V$ du premier axe, une perpendiculaire.... $VK = b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, et je tire la droite $CK$; elle sera l'asymptote de la courbe. Et pour faire voir que l'angle des asymptotes est de 120°, il suffit de démontrer que l'angle que fait l'asymptote $CK$ avec l'axe $VR$ est de 60°. Or $VC = a = \frac{2}{3}c$, et $VK = b = \frac{2c}{\sqrt{3}}$, donc $VC : VK :: \frac{2c}{3} : \frac{2c}{\sqrt{3}} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} :: \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 :: 1 : \sqrt{3}$. Donc $VC : VK :: 1 : \sqrt{3}$. Mais on a aussi, $VC : VK :: R :$ tangente $VCK$. Donc $1 : \sqrt{3} :: R :$ tangente $VCK$, d'où tangente $VCK = \frac{R \times \sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ (parce que je suis toujours maître de



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

supposer $R$ égal à l'unité), et en employant les logarithmes, on trouve tang. $VCK = 0{,}2385606$ (logarithme de la tangente d'un angle de 60°), donc l'angle $VCK$ est de 60°, donc l'angle total des asymptotes $KCT$ est de 120°.

Mais peut-être vaut-il mieux démontrer cela directement par la construction que Newton indique. Je porte donc $VC$ de $V$ en $N$, et je tire $NK$, qui est visiblement égal à $CK$. A cause du triangle rectangle $VCK$, j'ai, $\overline{CK}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{VK}^2$, ou............... $\overline{CK}^2 = \frac{4c^2}{9} + \frac{4c^2}{3} = \frac{16c^2}{9}$. Ce qui donne, $CK = \frac{4c}{3}$. Mais $CN = CV + VN = 2CV$ (*par const.*) $= \frac{4c}{3}$. Donc $CN = CK = NK$. Par conséquent, le triangle $KNC$ est équilatéral, et chacun de ses angles vaut 60°. Donc l'angle $KCN = 60°$. Donc l'angle total des asymptotes $= 120°$. Donc (*Pl.* V, *Fig.* 6), si des points $B$ et $A$ on mène des droites $BD$ et $AD$ à un même point $D$ de l'hyperbole décrite comme il vient d'être indiqué, l'angle $ABD$ sera double de l'angle $BAD$. Par conséquent, l'angle $EDA$ égalera le triple de l'angle $BAD$. On peut donc encore, par ce problême, opérer la trisection de l'angle.

## NOTE (60), *pour la page* 198. *Tome I.*

(*Fig.* 7, *pour les Notes*). L'équation qui résout le problême étant, $x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$, voici comment on peut la construire. Soit prolongée la droite $BD$ jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point $H$ la droite $FE$ aussi prolongée; et les triangles semblables $FCE$, $FDH$ donneront la proportion, $FC : CE :: d : e :: FH : HD$. Donc, si je suppose que $FH = d$, j'aurai $HD = e$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et $\overline{FH}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{FD}^2 (b^2) = d^2 - e^2$. Sur $DH$, comme diamètre, je décris un demi-cercle $HKD$, dans lequel j'inscris la corde $HK = DB = a$, et je tire la corde $DK = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{e^2 - a^2}$. Je porte $DK$ sur la droite $DF$ de $D$ en $O$, et je mène $OP$ parallèlement à $DH$, ce qui donne la proportion, $DF : FH :: DO$ ou $DK : PH$, ou bien $b : d :: \sqrt{e^2 - a^2} : PH = \frac{d\sqrt{e^2 - a^2}}{b}$, ou, en multipliant et divisant le second membre par $b$, $PH = \frac{db\sqrt{e^2 - a^2}}{b^2} = \frac{d\sqrt{b^2 e^2 - a^2 b^2}}{b^2}$, ou bien, en mettant pour $b^2$ sa valeur $d^2 - e^2$ trouvée plus haut, en la mettant, dis-je, dans le second terme sous le radical, ainsi qu'au diviseur, on aura, $PH = \frac{d\sqrt{b^2 e^2 - a^2(d^2 - e^2)}}{d^2 - e^2}$, ou $PH = \frac{d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$. Ainsi $PH$ égale la partie radicale de $x$, quant à la partie rationnelle $-\frac{be^2}{d^2 - e^2}$, voici comment elle se trouvera : j'élève au point $H$ une ligne $HL$ perpendiculairement à $FE$, jusqu'à ce qu'elle rencontre $FD$ prolongée en un point $L$, et à cause de $HD$ perpendiculaire à $FL$ (*par const.*), on a la proportion........... $FD\ (b) : DH\ (e) :: DH\ (e) : DL = \frac{e^2}{b} = \frac{be^2}{b^2} = \frac{be^2}{d^2 - e^2}$. Donc $DL = \frac{be^2}{d^2 - e^2}$. Donc si je porte $PH$ de $L$ en $C$, j'aurai, $CD = CL - DL = PH - DL = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2} = x$.

## NOTE (61), *pour la page* 208. *Tome I.*

(*Fig.* 8, *pour les Notes*). Il est très-aisé d'obtenir le point $E$ sans faire d'équation. En effet, soient $E : D :: FE : AE :: g : d$. Menons



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la perpendiculaire $FG$, et appelons $e$ la pesanteur relative du poids $E$ qui le fait descendre selon $EG$, nous aurons $FE : EG :: g : e$. Donc à cause de la proportion $FE : AE :: g : d$, on aura aussi, $AE : EG$ ou $BE :: d : e$. Maintenant, dans le triangle rectangle $BEA$ nous connaissons le côté $BA$, et le rapport des côtés $BE$ et $AE$, cela suffit pour déterminer aussi la grandeur absolue de ces côtés. Pour cela je prends une unité arbitraire, et une ligne $BK$ qui contienne autant d'unités qu'il y en a dans $e$; ensuite du point $K$ comme centre, et avec une ouverture de compas qui contienne autant de ces unités qu'il y en a dans $d$, je trace un arc de cercle qui coupe $AB$ au point $L$. Il est évident que cette construction donne $LK : BK :: d : e$. Donc si par le point $A$, je mène $AE$ parallèlement à $LK$, le point $E$ où cette parallèle rencontre la droite $BG$, sera le point cherché; car, à cause des parallèles, on a, $LK : BK :: d : e :: AE : BE$; et comme le triangle $BEA$ contient le côté donné $AB$, il s'en suit qu'il est le triangle cherché, et que par conséquent le point $E$ satisfait au problême. Au reste, la construction de l'équation de l'auteur nous aurait menés au même but par le même chemin.

## NOTE (62), *pour la page* 238. *Tome I.*

(*Fig.* 9, *pour les Notes*). Newton dit que le triangle $CHK$ est donné d'espèce. En effet, le premier point $D$ étant donné de position, le premier point $C$ l'est aussi nécessairement. Donc l'angle $CAB$ est déterminé, ainsi que son égal $eAd$. Mais (*par const.*) l'angle $Ade$ = l'angle $ADE$, et $AD = Ad$: donc tout est connu dans le triangle $Ade$; et puisqu'on a mené $CH$ parallèlement à $de$, l'angle $CHK$ est le supplément de l'angle connu $deA$. Par un

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

raisonnement semblable, on prouvera que tout est connu dans le triangle $B\delta f$, et comme $CK$ est parallèle à $f\delta$ (*par const.*) l'angle $CKH$ est le supplément de l'angle connu $Bf\delta$. Donc dans le triangle $HCK$ tous les angles sont connus, donc le triangle est donné d'espèce. Il en serait de même d'un autre triangle $C'K'H'$ formé d'après la même loi, puisque les lignes $ed$, $f\delta$ sont immobiles.

## NOTE (63), *pour la page* 239. *Tome I.*

(*Fig.* 9, *pour les Notes*). La Figure que donne Newton suffit pour faire voir comment on doit s'y prendre pour déterminer l'équation du point $C$, mais on ne voit pas avec la même évidence, comment elle pourrait servir à déterminer un second, un troisième points $C$. Pour le faire comprendre, j'ai fait la Figure 9 des Notes, dans laquelle il y a un second point $C'$ dont nous allons chercher l'équation.

En conservant à toutes les lignes les noms qu'elles ont dans le problême, supposons que l'angle $CAD$ soit venu à la position $C'AD'$, et que l'angle $CBD$ soit venu à la position $C'BD'$. Prolongeons $C'A$ jusqu'en $d'$, et $C'B$ jusqu'en $\delta'$, et remarquons que, par le mouvement angulaire, l'angle $DAD'$ = l'angle $CAC'$ = l'angle $dAd'$. Mais (*par const.*) l'angle $Ade$ = l'angle $ADE$, et... $AD = Ad$. Donc les deux triangles $dAd'$ et $DAD'$ sont égaux en tout, donc $dd' = DD'$. On prouvera, par un semblable raisonnement, que le triangle $DBD'$ = le triangle $B\delta\delta'$, donc on aura, $\delta\delta' = DD'$; donc $\delta\delta' = dd'$. Or (*par const.*) $\delta f = dG$, donc $f\delta' = Gd'$. Les triangles semblables $BK'C'$, $Bf\delta'$ donnent la proportion $BK'$ $(x)$ : $C'K'$ $(y)$ :: $Bf$ $(c)$ : $f\delta' = \frac{cy}{x} = d'G$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Et $ed' = eG - d'G = b - \frac{cy}{x}$; et le triangle $C'H'K'$ qui est donné d'espèce, a ses côtés dans un rapport connu; soient donc $C'K' : C'H' :: d : e$, ou bien $y : C'H' :: d : e$, d'où $C'H' = \frac{ey}{d}$. Et $C'H' \left(\frac{ey}{d}\right) : H'K' :: e : f$, d'où $H'K' = \frac{fy}{d}$. Donc..... $AH' = AB - BK' - H'K' = m - x - \frac{fy}{d}$. Et les triangles semblables $AH'C'$, $Aed'$ donnent la proportion..............
$AH' \left(m - x - \frac{fy}{d}\right) : H'C' \left(\frac{ey}{d}\right) :: Ae\ (a) : ed' \left(b - \frac{cy}{x}\right)$.
Cette proportion est la même que celle que Newton a obtenue pour le point $C$, elle conduira donc à la même équation, et c'est ce que nous nous proposions de faire voir.

## NOTE (64), *pour la page* 241. *Tome I.*

(*Fig.* 10, *pour les Notes*). L'équation $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$, donnant deux valeurs de $f$, il s'en suit que si on substitue successivement chacune de ces valeurs dans l'équation................
$y = -\frac{a}{2} + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$, on aura pour $y$ quatre valeurs différentes, ce qui nous fait voir qu'il y a deux paraboles qui peuvent passer par les quatre points donnés. Je commence par construire l'équation $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$. Newton a mené à $BD$ la parallèle $CH$, et il a pris $DK$ moyenne proportionnelle entre $DG$ et $DH$; menons encore à $BD$ une autre parallèle $AF$, et les triangles semblables $HCG$, $GAF$ nous donneront la proportion $AG\,(c) : GF\,(d-a) :: GC\,(k) : GH$, d'où.........

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$GH = \frac{dk - ak}{c}$; et $DH = DG + GH = \frac{dc + dk - ak}{c}$. Et en prenant une moyenne proportionnelle $DK$ entre $DH$ et $DG$, on a, $DG\ (d) : DK :: DK : DH \left(\frac{dc + dk - ak}{c}\right)$, donc....... $DK = \pm \sqrt{\frac{d^2 c + d^2 k - adk}{c}}$. Donc........................ $DG \pm DK = d \pm \sqrt{\frac{d^2 c + d^2 k - adk}{c}}$. Or $DG + DK = 2DG + GK$, et $DG - DK = -GK$. Donc............ $\frac{2DG + GK}{GC} = \frac{d}{k} + \sqrt{\frac{d^2 c + d^2 k - adk}{ck^2}}$; et................. $-\frac{GK}{GC} = \frac{d}{k} - \sqrt{\frac{d^2 c + d^2 k - adk}{ck^2}}$. Voilà les deux valeurs de $f$ au moyen desquelles nous pouvons construire les deux paraboles qui passeraient chacune par les quatre points donnés. Je me bornerai à en construire une, en prenant la seconde valeur de $f$, qui est $f = -\frac{GK}{GC} = -\frac{p}{k}$ (en faisant $p = GK$). Cette valeur de $f$ étant substituée dans l'équation $y = -\frac{a}{2} + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2 bx - fax}$, la change en celle-ci, $y = -\frac{1}{2}a - \frac{px}{k} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{p^2 bx}{k^2} + \frac{apx}{k}}$, ou en élevant tout au quarré, réduisant et transposant, il vient, $y^2 + \left(a + \frac{2px}{k}\right) y = \frac{bp^2 x}{k^2} - \frac{p^2 x^2}{k^2}$ $(A)$. Je fais $y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, ce qui donne $y^2 + \left(a + \frac{2px}{k}\right) y = t^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{apx}{k} - \frac{p^2 x^2}{k^2}$; si on substitue le second membre de cette équation à la place du premier dans l'équation $(A)$ on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, $t^2 - \frac{apx}{k} - \frac{a^2}{4} = \frac{bp^2 x}{k^2}$, ou $t^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right) x$. $(B)$. Pour ramener cette équation à la forme ordinaire de celle de la parabole, je fais $\frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right) x = mz$; $m$ étant une indéterminée dont

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la valeur sera fixée par les opérations subséquentes. Et en substituant $mz$ au lieu de sa valeur dans l'équation ($B$), on aura, $t^2 = mz$, équation ordinaire de la parabole, et qu'il faut construire. D'abord je cherche la ligne sur laquelle les $t$ prennent leur origine; pour cela je construis l'équation $y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, qui a servi à faire disparaître le second terme par rapport à $y$. Par le milieu $E$ de $AB$ je tire $EN$ parallèlement à $AC$, et $EI$ parallèlement à $CK$. Les deux triangles semblables $ENI$, $CGK$ donnent $CG\,(k) : GK\,(p) :: EN$ ou $AG\,(x) : NI = \frac{px}{k}$; si à $NI$ on ajoute $GN = AE = \frac{1}{2}a$, et $qG = y$, la somme sera $qI = qG + GN + NI = y + \frac{1}{2}a + \frac{px}{k} = t$, donc $qI = t$. Donc $EI$ est le diamètre des co-ordonnées $t$ et $z$. Il faut chercher maintenant l'origine de ce diamètre. Pour cela j'emploie l'équation, $\frac{a^2}{4} + \left(\frac{apk + bp^2}{k^2}\right)x = mz$, qui donne........ $x + \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2mz}{apk + bp^2}$. Et je remarque que $z$ devient zéro, lorsque $x = \frac{-a^2k^2}{4(apk + bp^2)}$. Je porte donc sur la droite $AG$, à partir du point $A$, et dans le sens opposé à $G$, une ligne $AL = \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)}$, par le point $L$ je tire, parallèlement à $GD$, la droite $LV$, et le point $V$ où elle rencontre $EI$ prolongée est l'origine des $z$. Or si dans l'équation $x + \frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2mz}{apk + bp^2}$, on suppose $x = 0$, la valeur correspondante de $z$ est $VE$, et l'équation devient, $\frac{a^2k^2}{4(apk + bp^2)} = \frac{k^2m \times VE}{apk + bp^2}$, ou bien....... $\frac{a^2}{4} = m \times VE$, ou $\overline{BE}^2 = m \times VE$. Donc le paramètre $m$ de cette parabole est déterminé, et il est égal à $\frac{\overline{BE}^2}{VE}$, ainsi que Newton l'a trouvé. C. Q. F. D.

NOTE

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (65), *pour la page* 242. *Tome I.*

La proportion sur laquelle Newton établit la résolution de son problême dépend d'un théorême, fort élégant, qu'on trouve dans un petit ouvrage du citoyen Prony, intitulé : *Exposition d'une Méthode de construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques.*

(*Fig.* 11, *pour les Notes*). Soit la courbe $GADE$ rapportée aux deux axes $MX$, $MY$, faisant entre eux un angle quelconque, et ayant pour équation $y^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$; qu'on pourra écrire ainsi, $y^2+(bx+d)y+cx^2+ex+f=0$. $(A)$.

Si nous cherchons les racines par rapport à $y$, on sait que $bx+d$, pris avec un signe contraire, est égal à leur somme, c'est-à-dire, que $-bx-d=HB+HE$, et que le dernier terme $cx^2+ex+f$, est égal au produit de ces racines, ainsi on a $cx^2+ex+f=HB\times HE$. Supposons que les facteurs du trinome $x^2+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c}$ soient $x-m=0$, $x-n=0$; nous aurons..................

$$x^2+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c}=(x-m)(x-n)=\frac{1}{c}\times HB\times HE\ (B).$$

Lorsque $y=0$, l'équation $(A)$ se réduit à $cx^2+ex+f=0$, ou $x^2+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c}=0$. Donc dans ce cas, $(x-m)(x-n)=0$, ce qui donne $x=m$, $x=n$. Or, on voit dans la figure que, $y=0$ répond au point $C$ ou au point $A$, et que les valeurs correspondantes de $x$ sont $MC$, $MA$ : donc $MC=m$, et $MA=n$. Donc $x-m=MH-MC$, ou bien $x-m=CH$, et $x-n=MH-MA$, ou $x-n=AH$. Donc en substituant ces valeurs de $x-m$ et



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de $x - n$ dans l'équation ($B$) on aura, $CH \times AH = \frac{1}{c} \times HB \times HE$. D'où l'on tire $\frac{AH \times CH}{BH \times HE} = \frac{1}{c}$ ($D$).

On voit que le théorême s'applique à toutes les sections coniques, puisque la seule condition que nous ayions imposée à la courbe $GADE$, c'est qu'elle soit exprimée par l'équation....... $y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, qui appartient à toutes les sections coniques. Il résulte donc de là, cette propriété commune à toutes les courbes qui se rapportent à l'équation ($A$)....

*Si une ligne droite rencontrant une ligne du second ordre en deux points, est elle-même coupée par plusieurs droites parallèles qui chacune rencontrent aussi la courbe en deux points, le rectangle de la partie de la première droite comprise entre une quelconque des parallèles, et un point de la courbe, par la partie aboutissante de la même parallèle, à l'autre point d'intersection avec la courbe, sera toujours en raison constante, avec le rectangle des deux parties de la parallèle, prises de la même manière.*

(*Fig.* 12, *pour les Notes*). Dans la figure 12 on a, en vertu du théorême qui vient d'être démontrée.......................... $\frac{AH \times HC}{BH \times HE} = \frac{1}{c}$; $\frac{AI \times IC}{FI \times ID} = \frac{1}{c}$; $\frac{EK \times KG}{FK \times KD} = \frac{1}{c}$. De tous ces rapports égaux, on tire la proportion $AH \times HC : BH \times HE :: AI \times IC : FI \times ID :: EK \times KG : FK \times KD$; et c'est la proportion même de Newton.

1°. Il est bon d'observer que si le produit $AH \times HC$ des deux parties d'une ligne parallèle à l'axe des $x$, forme le premier antécédent, et le produit $BH \times HE$ des deux parties d'une ligne parallèle à l'axe de $y$, le premier conséquent; les produits des

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

deux parties de toutes les lignes parallèles à l'axe des $x$ seront tous antécédens, et les produits des deux parties de toutes les lignes parallèles à l'axe des $y$, tous conséquens, ou bien réciproquement.

2°. Lorsqu'on prend les parties d'une ligne à partir d'un même point $H$ vers un même côté, comme dans les rectangles $AH \times CH$, ou $BH \times EH$ (*Fig.* 11), c'est une preuve que le point $H$ est hors de la courbe. Mais lorsqu'on prend les parties d'une ligne à partir d'un même point $H$ vers des côtés différens de ce point, comme dans les produits $AH \times HC$, ou $BH \times HE$ (*Fig.* 12), c'est une preuve que le point $H$ est au-dedans de la courbe.

Continuons à suivre Newton. Il dit que si le point $H$ tombe entre tous les points $A$, $C$, $B$, $E$, ou hors de tous ces points, le point $I$ devra tomber entre tous les points $A$, $C$, $D$, $F$, ou bien entièrement au-dehors, et le point $K$ entre tous les points $D$, $F$, $E$, $G$, ou entièrement au-dehors. En effet, dans la Figure 12, le point $H$ tombe entre tous les points $A$, $C$, $B$, $E$, et le point $I$ tombe entre tous les points $A$, $C$, $D$, $F$, et le point $K$ entre tous les points $D$, $F$, $E$, $G$; mais dans la Figure 11, où le point $H$ tombe hors de tous les points $A$, $C$, $B$, $E$, le point $I$ tombe aussi hors de tous les points $A$, $C$, $D$, $F$, et le point $K$ hors de tous les points $D$, $F$, $E$, $G$.

Quant à ce qu'il ajoute, *que si le point* $H$ *tombe entre les deux points* $A$, $C$, *et hors des deux autres* $B$, $E$, ou entre les deux points $B$, $E$, et hors des deux autres $A$, $C$, le point $I$ devra tomber entre deux quelconques des quatre points $A$, $C$, $F$, $D$, et hors des deux autres; et que de même le point $K$ devra tomber entre



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

deux quelconques des quatre points $D$, $F$, $E$, $G$, et hors de deux de ces mêmes quatre points; ces cas ont lieu lorsque la courbe qui passe par les points donnés $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, et par les points trouvés $F$ et $G$, est une hyperbole, et qu'une partie de ces points est placée sur une des branches de la courbe, et l'autre partie sur la branche opposée. Le premier cas se comprendra facilement par la seule inspection de la Figure 13 pour les Notes ; et le second cas, par l'inspection de la Figure 14.

Je dois l'explication de ces deux derniers cas, ainsi que les Figures 13 et 14 qui servent à les expliquer, à la bonté du citoyen Prony, à qui j'en témoigne ici toute ma reconnaissance.

## NOTE (*66*), *pour la page* 244. *Tome I.*

En lisant avec attention la Note 65, la proportion que Newton fait ici, n'offrira plus aucune difficulté. En effet, la droite $EA$ étant tangente en $A$, il s'en suit que le point $A$ appartient aux deux branches de la courbe; et puisque le point $E$ est hors de la courbe, tandis que les points $D$, $C$, sont à la courbe, il s'en suit qu'on doit avoir $\frac{AE \times AE}{DE \times CE}$ = une quantité constante; et comme le point $F$ est hors de la courbe, et que le point $B$ est sur la courbe, si l'on fait $\frac{AF \times AF}{BF \times FG}$ = la même quantité constante, ce qui donnera $\frac{\overline{AE}^2}{DE \times CE} = \frac{\overline{AF}^2}{BF \times FG}$, il est bien évident que le point $G$ sera à la courbe. On fera un semblable raisonnement pour prouver que le point $H$ y est aussi.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (67), *pour la page* 10. *Tome II.*

Plusieurs géomètres ont donné des démonstrations de cette règle de Newton, entre autres Mac-Laurin et Campbell. Le citoyen Lagrange a aussi donné une méthode pour reconnaître les racines imaginaires qu'une équation peut contenir, dans un traité sur *la Manière de résoudre les équations numériques de tous les degrés.* Mais comme il suit une marche différente de celle de Newton, je n'ai pu, à mon grand regret, m'aider de son travail. La démonstration qu'on va lire, de la règle de Newton, est presque entièrement de Campbell; je n'ai fait qu'en développer quelques parties, afin de la rendre plus claire. Quant à la seconde méthode de découvrir les racines imaginaires, qui se trouve à la fin de cette note, elle est de Mac-Laurin. Je l'ai considérablement raccourcie sans lui rien faire perdre, je crois, de sa clarté.

LEMME I^er^. Dans toute équation affectée (*) du second degré $ax^2 - Bx + A = 0$ dont les racines sont réelles, la quatrième partie du quarré du coëfficient du second terme est plus grande que le rectangle du coëfficient du premier terme par le dernier. C'est-à-dire, que $\frac{1}{4}B^2 > aA$, et réciproquement si $\frac{1}{4}B^2 > aA$, les racines de l'équation seront réelles. Mais si $\frac{1}{4}B^2 < aA$, les racines seront imaginaires, car les deux racines de l'équation sont......
$x = \frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - aA}}{a}$, et $x = \frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - aA}}{a}$.

(*) On appelle équation affectée, celle dans laquelle l'inconnue monte à plusieurs degrés différens. Ainsi $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, est une équation affectée, parce qu'il s'y trouve différentes puissances $x^3$, $x^2$, $x$, de l'inconnue. Mais l'équation $x^n \pm B = 0$, est une équation non-affectée.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

LEMME II. Quel que soit le nombre des racines impossibles d'une équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{-3} +$, etc.......... $\pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$, si on prend une autre équation dont les racines soient réciproques de celles de la première, on trouvera dans la seconde équation le même nombre de racines imaginaires que dans la première. En effet, mettons $\frac{1}{x}$ au lieu de $x$ dans la proposée, elle deviendra......................
$\frac{1}{x^n} - \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} - \frac{D}{x^{n-3}} +$, etc. $\pm \frac{d}{x^3} \mp \frac{c}{x^2} \pm \frac{b}{x} \mp A = 0$. Ou bien, en multipliant tous les termes par $x^n$, $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} +$, etc. $\pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp 1 = 0$; les racines de cette dernière équation sont les réciproques de celles de la première, et si la première a des racines imaginaires, la seconde en a autant. Soit, par exemple, l'équation $x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$, dont les racines sont, $a$, $b$, $c$, $d$, parmi lesquelles $c$ et $d$ sont imaginaires, l'équation $Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$, dont les racines sont, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, a aussi deux racines imaginaires, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.

LEMME III. Si on multiplie chaque terme d'une équation du degré $n$ par l'exposant de $x$ dans ce terme, on abaissera l'équation d'un degré; si on réitère la même opération sur le produit, on l'abaissera encore d'un degré, et ainsi successivement. Il résulte de là qu'une équation $(A)$ $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4}$, — etc. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, pourra toujours être ramenée à une équation du second degré qui aura cette forme........ $n \cdot \frac{n-1}{2} x^2 - (n-1)Bx + C = 0$. En effet, puisque l'équation $(A)$ est du degré $n$, et qu'on veut, par des opérations

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

successives, l'abaisser au second degré, il est évident qu'il faudra faire $n-2$ opérations successives, et que chaque coëfficient sera composé de $n-2$ facteurs. Par la première opération, l'équation $(A)$ devient, $nx^{n-1}-(n-1)Bx^{n-2}+(n-2)Cx^{n-3}-(n-3)Dx^{n-4}+(n-4)Ex^{n-5}-$, etc. $\pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b=0$. Et celle-ci devient, par une seconde opération, $n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Bx^{n-3}+(n-2)(n-3)Cx^{n-4}-\ldots\ldots\ldots (n-3)(n-4)Dx^{n-5}+(n-4)(n-5)Ex^{n-6}-$, etc. $\pm 12ex^2 \mp 6dx \pm 2c=0$, qui se réduit, en divisant tous ses termes par le coëfficient 2 de son dernier terme $2c$, à........ $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)Bx^{n-3}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)Cx^{n-4}-(n-3)\left(\frac{n-4}{2}\right)Dx^{n-5}+$, etc. $\pm 6ex^2 \mp 3dx \pm c=0$. Et en opérant de nouveau sur celle-ci, on a:.................... $n\left(\frac{n-1}{2}\right)(n-2)x^{n-3}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)(n-3)Bx^{n-4}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)(n-4)Cx^{n-5}-$, etc. $\pm 12ex \mp 3d=0$, ou, en divisant tous ses termes par 3, coëfficient de son dernier terme $3d$, il vient.................................. $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)Bx^{n-4}+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)Cx^{n-5}-$, etc. $\pm 4ex \mp d=0$. Il est bien facile de voir qu'en opérant de même sur ce dernier résultat, on aurait, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4}-\ldots\ldots\ldots (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)Bx^{n-5}+\ldots\ldots\ldots (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)Cx^{n-6}-$, etc. $\pm e=0$, et ainsi de suite. Donc si on abaisse l'équation $(A)$ jusqu'au second

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

degré, le coëfficient du premier terme aura $n-2$ facteurs dont les numérateurs vont en diminuant d'une unité, à commencer du deuxième facteur inclusivement; de sorte qu'il y a en tout $n-1$ diminutions; ainsi le numérateur du dernier facteur est $n-(n-1)$. Et comme les dénominateurs dans chaque facteur sont d'une unité plus grands que le nombre diminué dans ce même facteur, il s'en suit que le dernier facteur est, $\frac{n-(n-1)}{n-2}$. Donc le premier terme de l'équation du second degré est, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\frac{n-(n-1)}{n-2}x^2$, ou bien $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{n-2}\right)x^2$, où l'on voit que de numérateurs à dénominateurs tous les termes se détruisent, excepté les deux premiers; ainsi on a, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2$. Le coëfficient du second terme contenant aussi $n-2$ facteurs, et chaque facteur allant en diminuant d'une unité, à commencer par le premier, il est clair que le nombre des unités diminuées est de $n-2$, et que le coëfficient du second terme est de cette forme, $-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\frac{n-(n-2)}{n-2}Bx$, ou bien...... $-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\left(\frac{2}{n-2}\right)Bx$, où tous les termes se détruisent de numérateurs à dénominateurs, excepté le premier. En sorte que le second terme est, $-(n-1)Bx$. Par le même raisonnement on trouvera que le coëfficient du troisième terme est, $+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-(n-3)}{n-2}\right)C$, ou bien..... $+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\ldots\left(\frac{3}{n-2}\right)C$, qui se réduit à $+C$. Donc enfin l'équation $(A)$, abaissée par des opérations successives au second degré, aura cette forme........................

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0.$$

COROLLAIRE.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

COROLLAIRE. En considérant attentivement dans le Lemme précédent de quelle manière on est descendu de l'équation ($A$), à l'équation du second degré $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, on verra facilement quelle forme il faudrait donner aux équations réascendantes, pour remonter, par des opérations successives, de l'équation du second degré à l'équation ($A$).

Par exemple, si je veux remonter au troisième degré, je multiplie tous les termes de l'équation du second, par le facteur $n-2$, et je divise ce facteur par 3 pour le premier terme, par 2 pour le second, par 1 pour le troisième, ensuite j'ajoute un nouveau coëfficient $D$, auquel je donne un signe différent de celui de $C$. J'ai donc, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)x^3-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)Bx^2+(n-2)Cx-D=0$. Pour remonter au quatrième degré, je multiplierai tous les termes de cette dernière équation par $n-3$, que je diviserai par 4 pour le premier terme, par 3 pour le second, par 2 pour le troisième, par 1 pour le quatrième, ensuite j'ajouterai un nouveau coëfficient $E$, auquel je donnerai un signe différent de celui de $D$, et j'aurai, $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)x^4-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)Bx^3+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)Cx^2-(n-3)Dx+E=0$.

Maintenant, si $M$ désigne un coëfficient quelconque, $L$ et $N$ désigneront les coëfficiens les plus voisins, en sorte que $m$ étant l'exposant de $M$, $m-1$ sera l'exposant de $L$, et $m+1$ l'exposant de $N$ (j'entends par exposant d'un coëfficient, le nombre qui désigne le rang qu'il occupe dans l'équation; ainsi dans l'équation précédente, 1 est l'exposant de $B$, 2 celui de $C$, 3 celui de $D$, etc.). Supposons que je veuille faire remonter l'équation du second degré à une équation dont le dernier coëfficient soit $N$, il est clair, par ce qui vient d'être dit, que le degré



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de cette équation sera $m+1$, et que l'équation immédiatement inférieure, qui avait pour dernier terme $M$, était du degré $m$. Or, on vient de voir plus haut que lorsque j'ai voulu faire remonter l'équation au quatrième degré, j'ai multiplié tous les termes de l'équation du troisième par le facteur $n-3$, que j'ai divisé par 4 pour le premier terme, par 3 pour le second, etc. Donc, pour avoir l'équation du degré $m$, je multiplierai tous les termes de l'équation immédiatement inférieure par $n-(m-1)$, de sorte que les deux derniers termes de l'équation du degré $m$, seront, $\pm(n-(m-1)Lx\mp M$, ou bien $\pm(n-m+1)Lx\mp M$. Et les trois derniers termes de l'équation du degré $m+1$, ou de l'équation dont le dernier terme est $N$, seront...............
$\pm(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)Lx^2\mp(n-m)Mx\pm N$. Ainsi l'équation réascendante qui aura pour dernier terme $N$, sera de cette forme,

$$(B)\, n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m+1}\right)x^{m+1}-(n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots$$
$$\left(\frac{n-m}{m}\right)Bx^m+(n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m-1}\right)Cx^{m-1}-, \text{ etc.}$$
$$\pm(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)Lx^2\mp(n-m)Mx\pm N=0.$$

LEMME IV. Si l'équation $(A)$ du Lemme troisième a toutes ses racines réelles, toutes ses équations descendantes auront aussi leurs racines réelles (voyez le n°. 143 de l'analyse démontrée du Père Reyneau), et par conséquent l'équation.......................
$n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, aura aussi ses racines réelles, puisqu'elle est une des descendantes de l'équation $(A)$. Mais cette proposition n'a point de converse, c'est-à-dire, que les racines d'une équation descendante quelconque, par exemple...............

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, peut avoir toutes ses racines réelles, sans qu'on puisse en conclure que l'équation ($A$) ait toutes ses racines, ni même aucune de ses racines réelles. (Voyez la remarque $X$ du n°. 143 de l'ouvrage cité).

Mais quel que soit le nombre des racines imaginaires qui se rencontre, dans une des équations descendantes, il s'en trouvera au moins autant dans l'équation ($A$).

PROPOSITION. Si l'équation ($A$) $x^n-Bx^{n-1}+Cx^{n-2}-Dx^{n-3}+Ex^{n-4}-$ etc. $\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A=0$, a toutes ses racines réelles, et que $M$ soit un coëfficient quelconque de cette équation, $L$ et $N$ les deux coëfficiens adjacens, $m$ l'exposant de $M$; je dis que le quarré du coëfficient $M$ multiplié par la fraction $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$ donnera un produit plus grand que le rectangle $L\times N$ des coëfficiens adjacens. C'est-à-dire qu'on aura, $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}\times M^2>L\times N$.

DÉMONSTRATION. Si toutes les racines de l'équation ($A$) sont réelles, par le Lemme IV, les racines de l'équation descendante $n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^2-(n-1)Bx+C=0$, sont aussi réelles. Or, en la résolvant on a, $x=\frac{B}{n}\pm\sqrt{\frac{B^2}{n^2}-\frac{2C}{n(n-1)}}$. Il faut donc pour que les racines de cette équation soient réelles, que $\frac{B^2}{n^2}>\frac{2C}{n(n-1)}$, ou que $\frac{B^2}{n}>\frac{2C}{n-1}$, ou enfin que.......... $\frac{n-1}{2n}\times B^2>1\times C$. Ainsi dans l'équation ($A$) dont toutes les racines sont réelles, le produit du quarré du coëfficient de son second terme par un fraction dont le numérateur est l'exposant du

Aa 2

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

degré de cette équation diminué d'une unité, et le dénominateur, le double de ce même exposant, ce produit, dis-je, est plus grand que le produit du coëfficient du premier terme par le coëfficient $C$ du troisième; car tout ce discours n'est que la traduction de cette expression analytique, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$. Maintenant, par le Lemme II, si toutes les racines de l'équation ($A$) sont réelles, celles de l'équation $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + ex^{n-4} -$, etc. $\pm Ex^4 \mp Dx^3 \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0$, ou $x^n - \frac{b}{A} x^{n-1} + \frac{c}{A} x^{n-2} - \frac{d}{A} x^{n-3} + \frac{e}{A} x^{n-4} -$ etc., $\pm \frac{E}{A} x^4 \mp \frac{D}{A} x^3 \pm \frac{C}{A} x^2 \mp \frac{B}{A} x \pm \frac{1}{A} = 0$, seront aussi toutes réelles, puisqu'elles sont les réciproques des racines de l'équation ($A$). Donc d'après ce qui vient d'être démontré, on aura aussi $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A^2} > 1 \times \frac{c}{A}$, ou bien $\frac{n-1}{2n} \times \frac{b^2}{A} > 1 \times c$, ou enfin $\frac{n-1}{2n} \times b^2 > A \times c$. Donc dans l'équation ($A$) dont toutes les racines sont réelles, $b^2$ quarré du coëfficient de $x$ multiplié par la fraction $\frac{n-1}{2n}$, donne un produit plus grand que le rectangle de $c$ coëfficient de $x^2$ par le dernier terme $A$.

Il a été dit dans le Lemme IV que si toutes les racines de l'équation ($A$) sont réelles, celles de toutes ses équations descendantes seront aussi réelles; mais nous avons prouvé dans le corollaire du Lemme III que l'équation ($B$) $n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m+1}\right)x^{m+1} - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m}\right)Bx^m + (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{n-m}{m-1}\right)Cx^{m-1} -$ etc.................

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\pm (n - m + 1)\left(\frac{n-m}{2}\right) Lx^2 \mp (n - m) Mx \pm N = 0$, était une des descendantes de l'équation $(A)$, donc toutes ses racines sont aussi réelles, donc d'après ce qui vient d'être prouvé, on a, $\frac{m}{2(m+1)} (n-m)^2 M^2 > (n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right) L \times N$, ou bien en multipliant chaque membre par 2, ensuite en divisant par $(n-m)(n-m+1)$, il viendra $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)} \times M^2 > L \times N$. C. Q. F. D.

Corollaire. Si l'on fait successivement $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc. l'équation $(B)$ deviendra aussi successivement chacune des descendantes de l'équation $(A)$, à partir de l'équation du second degré, et en remontant par tous les degrés successifs, de sorte qu'au moment où on fera $m = n - 1$, l'équation $(B)$ se confondra avec l'équation $(A)$, et lorsque l'équation $(B)$ représentera l'équation du second degré, le coëfficient $M$ représentera le coëfficient $B$, $L$ représentera 1, et $N$, $C$; lorsque l'équation $(B)$ représentera l'équation descendante du troisième degré, le coëfficient $M$ représentera $C$, $L$ représentera $B$, et $N$ représentera $D$, et ainsi de suite. Donc $M$ aura représenté successivement tous les coëfficiens de l'équation $(A)$, et $L$ et $N$ les coëfficiens adjacens; or, comme dans tous ces cas, l'inégalité $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)} \times M^2 > L \times N$ a toujours lieu, on en conclut généralement, que si une équation $(A)$ a toutes ses racines réelles, le produit du quarré d'un quelconque de ses coëfficiens par la fraction $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$, ($m$ étant l'exposant de ce coëfficient, et $n$ l'exposant du degré de l'équation), ce produit, dis-je, sera toujours plus grand que le produit des deux coëfficiens adjacens.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Il ne s'agit plus maintenant que de démontrer de quelle manière on déduit de la théorie précédente les fractions qui doivent être écrites, d'après la règle de Newton, au-dessus de chaque terme intermédiaire de l'équation ; or, nous avons vu, que si on fait dans l'équation $(B)$, $m = 1$, $M$ représente le coëfficient $B$ de l'équation $(A)$, mais dans ce cas la fraction générale $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$, devient $\frac{n-1}{2n}$; si on fait $m = 2$, $M$ représente $C$, et la fraction générale devient $\frac{2(n-2)}{3(n-1)}$; si on fait $m = 3$ dans l'équation $(B)$, $M$ représente $D$, et la fraction générale devient $\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$; de même si on fait $m = 4$, $m = 5$, $m = 6$, etc., $M$ représentera respectivement $E$, $F$, $G$, etc., et la fraction générale deviendra aussi successivement $\frac{4(n-4)}{5(n-3)}$, $\frac{5(n-5)}{6(n-4)}$, $\frac{6(n-6)}{7(n-5)}$, etc.; et en écrivant chacune de ces fractions au-dessus de leur terme correspondant dans l'équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} +$, etc.... $\pm A = 0$, on aura.......................................

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{n-1}{2n} & \frac{2(n-2)}{3(n-1)} & \frac{3(n-3)}{4(n-2)} & \frac{4(n-4)}{5(n-3)} & \frac{5(n-5)}{6(n-4)} \\ x^n & - Bx^{n-1} & + Cx^{n-2} & - Dx^{n-3} & + Ex^{n-4} & - Fx^{n-5} - \text{, etc.....} \end{array}$$

$\pm A = 0$, et d'après ce qui a été démontré dans la proposition, on aura, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$; $\frac{2(n-2)}{3(n-1)} \times C^2 > B \times D$; $\frac{3(n-3)}{4(n-2)} \times D^2 > C \times E$, et ainsi de suite, si toutes les racines de l'équation $(A)$ sont réelles : mais si quelqu'une de ces inégalités avait lieu en sens contraire, ce serait une preuve que l'équation $(A)$ contiendrait quelques racines imaginaires. La règle est donc complettement démontrée.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Examinons encore ce que dit Newton sur la manière de reconnaître le nombre des racines imaginaires par le nombre des variations des signes souscrits. Supposons qu'on ait $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > 1 \times C$, c'est une preuve que la dernière équation descendante, ou celle du second degré, a ses deux racines réelles; supposons encore que $\frac{2(n-2)}{3(n-1)} \times C^2 < B \times D$, c'est une preuve que l'équation descendante du troisième degré a quelque racine imaginaire, donc elle en a deux. Or nous avons vu, par le Lemme IV, que cela était possible, lors même que l'équation descendante du second degré a ses deux racines réelles. Donc en vertu de la règle, les signes souscrits dans cette équation du troisième degré seront $+$ sous le premier terme, $+$ sous le second, $-$ sous le troisième, et $+$ sous le quatrième; ainsi les signes souscrits seront $++-+$, où l'on voit que du second au troisième il y a une variation, et une autre du troisième au quatrième, donc il y a deux variations, donc, par la règle de Newton, il doit y avoir deux racines imaginaires, et nous avons vu qu'elles y sont en effet. Le lecteur appliquera facilement la même règle sur les autres équations descendantes, en remontant de proche en proche jusqu'à l'équation ($A$).

La règle de Newton que nous venons de démontrer est souvent moins propre que la suivante à faire reconnaître les racines imaginaires qui se trouvent dans une équation.

## *Seconde méthode de reconnaître les racines imaginaires qu'une équation peut contenir.*

DÉFINITIONS. Soit l'équation $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + Gx^{n-6} - Hx^{n-7} + Ix^{n-8} - Kx^{n-9} +$, etc. $= 0$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et que ses racines soient, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$, $k$, etc. j'appelle $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. les termes ou les parties du coëfficient $B$; et par la même raison, $ab$, $ac$, $ad$, $bc$, $bd$, etc. les termes ou les parties du coëfficient $C$; $abc$, $abd$, $bcd$, etc. les parties ou les termes du coëfficient $D$, et ainsi du reste. J'entends par dimensions d'un terme, ce que j'ai appelé précédemment exposant d'un coëfficient, ainsi $D$ est de trois dimensions, parce que chacune de ses parties $abc$, $abd$, etc. est le produit de trois racines. Lorsque dans un terme $abcdef$ du coëfficient $G$ on trouve une partie entière $abc$ du coëfficient $D$, j'appelle $abcdef$ et $abc$ les parties *semblables* de $D$ et de $G$; de même $abcd$, et $abcdefg$ sont les parties *semblables* de $E$ et de $H$, puisque $H$ contient toutes les racines de la partie de $E$. J'appelle parties *dissemblables*, celles qui n'ont aucune racine commune; ainsi $abc$ et $defgh$ sont des parties *dissemblables* de $D$ et de $F$. L'expression $C' \times G'$ dans laquelle $C$ et $G$ sont marqués d'un accent, cette expression, dis-je, indiquera la somme des produits qu'on peut obtenir en multipliant les parties d'un coëfficient $C$ par les parties semblables d'un autre coëfficient $G$; de même $D' \times F'$ exprimera la somme des produits qu'on peut obtenir en multipliant entre elles les parties semblables de $D$ et de $F$. L'expression $C' \times C'$ indique la somme des quarrés de tous les termes du coëfficient $C$; mais $C' \times C$ exprime la somme de tous les produits qu'on peut faire en multipliant l'un par l'autre deux termes quelconques de $C$; d'où il résulte que $C^2 = C' \times C' + 2\,C'\,C$. Tout cela bien compris, il sera facile d'entendre la proposition suivante.

PROPOSITION I$^{ere}$. *Si on appelle m la différence des dimensions de deux coëfficiens quelconques D et F, je dis qu'on aura..........*

$D \,.\, F$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$D \times F = D' \times F' + (m+2)\ C' \times G' + \left(\frac{m+3}{1}\right)\left(\frac{m+4}{2}\right) B' \times H' +$ $\left(\frac{m+4}{1}\right)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+6}{3}\right) 1 \times I$, ($C$ et $G$ étant les coëfficiens adjacens à $D$ et $F$; $B$ et $H$ les coëfficiens adjacens à $C$ et à $G$; enfin 1 et $I$, les coëfficiens adjacens à $B$ et à $H$).

DÉMONSTRATION. 1°. On sait que $D = abc + abd + abe + abf + abg +$, etc., et $F = abcde + abcdf + abcdg + bcdef + bcdeg +$, etc. On sait encore que dans l'expression du produit $D \times F$, chaque terme de $D' \times F'$, tel que $a^2 b^2 c^2 de$, ou tel que $a^2 b^2 c^2 df$, ou, etc., ne s'y trouve qu'une fois;

2°. Que chaque terme de $C' \times G'$, tel que $a^2 b^2 cdef$, peut être le produit, ou de $abe$ par $abcdf$, ou celui de $abf$ par $abcde$, ou celui de $abc$ par $abdef$, enfin il peut être le produit d'un terme quelconque de $D$ qui, outre les racines $a$, $b$, contienne une des autres racines $c$, $d$, $e$, $f$, multiplié par un terme de $F$ qui outre les racines $a$, $b$ contienne les trois autres; c'est-à-dire que le produit $a^2 b^2 cdef$ doit se trouver autant de fois qu'il contient de racines outre $a$ et $b$; ou en général, autant de fois qu'il y a d'unités dans la différence des dimensions de $C$ et $G$. Or, la différence des dimensions de $D$ et $F$ étant $m$, celle de $C$ et $G$ sera $m+2$. Ainsi dans l'expression de la valeur du produit $D \times F$, le second terme $C' \times G'$, aura pour coëfficient $m+2$.

3°. Chaque terme du produit $B' H'$, tel que $a^2 bcdefg$, peut être le produit d'une partie de $D$ qui outre la racine $a$ contienne deux quelconques des autres racines $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, etc. (dont le nombre égale la différence des dimensions de $B$ et de $H$, c'est-à-dire, $m+4$) multipliée par une partie de $F$, qui outre la racine $a$ contienne



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

les quatre autres. Ainsi $a^2bcdefg$, ou tout autre terme du produit $B'H'$, doit se trouver autant de fois qu'un nombre $m+4$ de quantités peut donner de produits différens, ces quantités étant multipliées deux-à-deux; or le nombre des produits différens est exprimé par $(m+4)\left(\frac{m+4-1}{2}\right)$, ou bien $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)$. Donc dans l'expression de la valeur du produit $D\times F$, le coëfficient du troisième terme $B'\times H'$ sera $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)$ (*).

4°. Chaque terme du produit $1\times I$, comme $abcdefghi$, peut être le produit d'une partie quelconque de $D$, qui contienne trois des racines de $I$ par une partie de $F$ qui contienne toutes les autres; ainsi le produit de $1$ par $I$ doit se trouver dans l'expression de la valeur de $D\times F$, autant de fois qu'un nombre $m+6$ de quantités multipliées trois-à-trois peuvent donner de produits différens. Or, ce nombre de produits est, $(m+6)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+4}{3}\right)$. Ainsi le coëfficient du quatrième terme dans l'expression de la valeur du produit $D\times F$, sera, $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)\left(\frac{m+5}{3}\right)$.

---

(*) En effet, la différence $m$ des dimensions de $D$ et de $F$ étant $2$ ........ $(m+3)\left(\frac{m+4}{2}\right)=15$, mais les parties de $D$ qui, outre la racine $a$, contiennent deux quelconques des autres racines $b, c, d, e, f, g$, sont $abc$, $abd$, $abe$, $abg$, $abf$, $acd$, $ace$, $acg$, $acf$, $ade$, $adg$, $adf$, $aef$, $aeg$, $agf$, qui sont au nombre de 15, et si on multiplie chacune de ces parties qui contiennent $a$ et deux autres lettres, par chacune des parties de $F$, qui, outre la lettre $a$, contiennent le reste des quatre autres lettres, on trouvera quinze fois le même produit $B'H'$ ou $a^2bcdefg$; par exemple, on multipliera $abc$ par $adefg$, ou $abd$ par $acefg$, ou $abe$ par $abcdfg$, etc., et on voit que tous ces produits sont toujours $a^2bcdefg$, et que ce même produit se trouvera quinze fois.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Et en général, si dans l'expression de la valeur d'un produit de deux coëfficiens quelconques $D$ et $F$, $x$ exprime l'ordre d'un terme quelconque de cette valeur, par exemple de $B' \times H'$, c'est-à-dire si $x$ exprime le nombre des termes qui précèdent $B' \times H'$, le coëfficient du terme $B' \times H'$ sera, $\left(\frac{2x+m}{1}\right)\left(\frac{2x+m-1}{2}\right)\left(\frac{2x+m-2}{3}\right)$, etc. en prenant autant de fractions dans cette série qu'il y a d'unités dans $x$.

Donc enfin, en rassemblant toutes les parties que nous avons trouvées, nous aurons, $D \times F = D' \times F' + (m+2)\, C' \times G' + \left(\frac{m+3}{1}\right)\left(\frac{m+4}{2}\right) B' \times H' + \left(\frac{m+4}{1}\right)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+6}{3}\right) 1 \times I$. C. Q. F. D.

Corollaire I. Si par le moyen de la proposition qui vient d'être démontrée, on cherche le quarré de quelque coëfficient, comme $E$, par exemple, alors $m = 0$; car, puisque c'est le coëfficient $E$ qu'on multiplie par lui-même, il est évident que la différence de dimensions des coëfficiens est nulle, et qu'on aura..... $\overline{E}^2 = E' \times E' + 2 D' \times F' + 3 \times \frac{4}{2} C' \times G' + 4 \times \frac{5}{2} \times \frac{6}{3} B' \times H' + 5 \times \frac{6}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{8}{4} \times I = E' \times E' + 2 D' \times F' + 6 C' \times G' + 20 B' \times H' + 70\, I$. Or, nous avons dit dans les définitions que $E' \times E$ exprimait la somme des produits de deux parties quelconques de $E$, donc $E^2 = E' \times E' + 2 E' \times E$, donne $E' \times E = \frac{E^2}{2} - \frac{E' \times E'}{2}$. Et en substituant à la place de $\frac{E^2}{2}$ sa valeur trouvée plus haut, il viendra, $E' \times E = D' \times F' + 3 C' \times G' + 10 B' \times H' + 35\, I$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

COROLLAIRE II. Nous tirerons encore de la même proposition les théorêmes suivans :

THÉOR. (1). $E^2 = E' \times E' + 2D' \times F' + 6C' \times G' + 20B' \times H' + 70I.$

THÉOR. (2). $D \times F = \ldots\ldots\ldots D' \times F' + 4C' \times G' + 15B' \times H' + 56I.$

THÉOR. (3). $C \times G = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C' \times G' + 6B' \times H' + 28I.$

THÉOR. (4). $B \times H = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B' \times H' + 8I.$

COROLLAIRE III. Par le moyen des théorêmes du corollaire II, nous trouverons facilement cette équation.................... $E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B \times H + 2I.$ Car le théor. (1) donne, $(A)\ E' \times E' = E^2 - 2D' \times F' - 6C' \times G' - 20B' \times H' - 70I.$ Et le théorême (2) donne.................................. $2D' \times F' = 2D \times F - 8C' \times G' - 30B' \times H' - 112I.$ Et en substituant cette valeur de $2D' \times F'$ dans l'équation $(A)$, elle deviendra, $(B)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C' \times G' + 10B' \times H' + 42I.$ Le théorême (3) donne, $2C' \times G' = 2C \times G - 12B' \times H' - 56I$, et en substituant à la place de $2C' \times G'$ sa valeur, dans l'équation $(B)$, elle devient $(C)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B' \times H' - 14I.$ Le théorême (4) donne, $2B' \times H' = 2B \times H - 16I$, et en substituant dans l'équation $(C)$, elle devient enfin.................. $(D)\ E' \times E' = E^2 - 2D \times F + 2C \times G - 2B \times H + 2 \times I.$ On trouverait de même.......................................

$$D' \times F' = D \times F - 4C \times G + 9B \times H - 16I.$$

$$C' \times G' = \ldots\ldots\ldots\ldots C \times G - 6B \times H + 20I.$$

$$B' \times H' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B \times H - 8I.$$

PROPOSITION II. *Soit* $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. *en prenant autant de fractions que le coëfficient* E *a de dimensions, on aura toujours*,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$\frac{l-1}{2l} \times E^2 > D \times F - C \times G + B \times H - I$, *si les racines de l'équation sont toutes réelles.*

J'entends par $l$, le nombre de termes ou de parties dont est composé un coëfficient quelconque $E$.

Nous avons vu (*dans l'unique proposition de la première partie de cette Note, page* 187) que dans le cas où toutes les racines d'une équation sont réelles, on a toujours, $\frac{n-1}{2n} \times B^2 > C$, $n$ désignant le degré quelconque d'une équation, $B$ le coëfficient du second terme, et $C$ celui du troisième; d'où il résulte que $n$ peut représenter tous les nombres entiers positifs, donc si je désigne par $l$ un nombre entier positif quelconque, j'aurai aussi, $\frac{l-1}{2l} \times B^2 > C$, ou bien..... $(l-1)B^2 > 2l \times C$. Mais $B$ désigne la somme des racines prises avec un signe contraire, et $C$ les produits deux-à-deux de toutes les racines; donc cette inégalité prouve d'une manière générale que le quarré d'un certain nombre de quantités, multiplié par $l-1$, est plus grand que la somme de leurs produits deux-à-deux, multipliée par $2l$. Donc $(l-1)E^2 > 2l \times E' \times E$ (car $E' \times E$ est le produit deux-à-deux de tous les termes de $E$. *Voyez les définitions*). Ou bien $\frac{l-1}{2l} \times E^2 > E' \times E$. Mais on a (*par la définition*).... $E^2 = E' \times E' + 2E' \times E$, d'où l'on tire, $2E' \times E = E^2 - E' \times E'$. Or, l'équation ($D$) trouvée dans le corollaire III, donne....... $E^2 - E' \times E' = 2D \times F - 2C \times G + 2B \times H - 2I$, donc $2E' \times E = 2D \times F - 2C \times G + 2B \times H - 2I$. Ou bien....... $E' \times E = D \times F - C \times G + B \times H - I$. Donc enfin on a....... $\frac{l-1}{2l} \times E^2 > D \times F - C \times G + B \times H - I$, lorsque toutes les racines de l'équation sont réelles. C. Q. F. D.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CONCLUSION. Nous avons désigné par $l$ le nombre des parties dont un coëfficient quelconque est composé, et nous avons fait, $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. en prenant autant de fractions que le coëfficient $E$ a de dimensions, en sorte que si $E$ est le premier coëfficient, $l$ désignera le nombre des racines de l'équation, et on aura, $l = n$; si $E$ représente le deuxième coëfficient, ou $C$, $l$ désignera le nombre des produits deux-à-deux, et on aura, $l = n \times \frac{n-1}{2}$; si $E$ désigne le troisième coëfficient, ou $D$, $l$ désignera le nombre des produits trois-à-trois de toutes les racines, et on aura, $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, et ainsi de suite; donc $l$ désigne successivement les coëfficiens des différens termes du produit d'un nombre $n$ de binomes multipliés les uns par les autres, ou bien les différens coëfficiens d'un binome élevé à la puissance $n$; et on aura la fraction, $\frac{l-1}{2l}$, par laquelle il faut multiplier le quarré du coëfficient qu'on examine, on aura, dis-je, cette fraction, en diminuant d'une unité le coëfficient correspondant d'un binome élevé à une puissance $n$ de même degré que l'équation, et divisant le reste par le double de ce même coëfficient du binome.

Tout cela s'entendra mieux par un exemple. Soit l'équation.... $x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - H = 0$, dont les racines sont, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$; dans ce cas, $n = 7$; et si on élève un binome quelconque à la septième puissance, les coëfficiens des termes intermédiaires seront, 7, 21, 35, 35, 21, 7, et en diminuant chacun de ces coëfficiens d'une unité, et divisant chaque reste par le double de ce même coëfficient, on aura.......... $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{6}{14}$ (*), ou bien $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{3}{7}$. Et en

(*) Ainsi $\frac{l-1}{2l}$ représente successivement $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, etc.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

écrivant toutes ces fractions sur les termes moyens de l'équation, on aura, $x^7 - \overset{\frac{3}{7}}{B}x^6 + \overset{\frac{10}{21}}{C}x^5 - \overset{\frac{17}{35}}{D}x^4 + \overset{\frac{17}{35}}{E}x^3 - \overset{\frac{10}{21}}{F}x^2 + \overset{\frac{3}{7}}{G}x - H = 0$, et d'après ce qui a été démontré, si toutes les racines de cette équation sont réelles, il viendra, $\frac{3}{7}B^2 > C$; $\frac{10}{21}C^2 > B \times D - C$; $\frac{17}{35}D^2 > C \times E - B \times F + G$; $\frac{17}{35}E^2 > D \times F - C \times G + B \times H$; $\frac{10}{21}F^2 > G \times E - D \times H$; $\frac{3}{7}G^2 > F \times H$.

Cette méthode, comme nous l'avons dit en commençant, fait souvent découvrir plus de racines imaginaires que la règle de Newton, ou même en fait découvrir dans de certaines équations où la règle n'en fait appercevoir aucunes.

## NOTE (68), *pour la page 23. Tome II.*

Ce beau théorême de Newton, qui est d'un usage si étendu dans la haute géométrie, n'a été démontré d'une manière générale que bien du temps après la première publication de l'Arithmétique universelle. Ceux qui paraissent en avoir trouvé les premiers la démonstration sont Mac-Laurin dans son Algèbre, Castillon dans ses Commentaires sur l'Arithmétique universelle, et Frédéric Baermann. Les deux premiers n'ont employé que les moyens de l'algèbre ordinaire, le troisième a eu recours au calcul des différences finies. Celle que j'offre au lecteur, et qui m'a paru aussi facile qu'élégante, est extraite des Notes que le citoyen Labay a publiées à la suite de son excellente traduction de l'Introduction à l'Analyse infinitesimale d'Euler; j'y ai fait des développemens qui m'ont paru nécessaires pour la classe de lecteurs que j'ai eue principalement en vue dans mes Notes.

Soit $Z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 +$ etc. ........................

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$= (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)$, etc., et soit $Z'$ ce que deviennent ces quantités lorsqu'on met $z+y$ à la place de $z$. On aura......

$$l\frac{Z'}{Z} = l\frac{1+\alpha z+\alpha y}{1+\alpha z} + l\frac{1+\beta z+\beta y}{1+\beta z} + l\frac{1+\gamma z+\gamma y}{1+\gamma z} +, \text{etc.}\ldots$$

Mais $\frac{1+\alpha z+\alpha y}{1+\alpha y} = \frac{1+\alpha z}{1+\alpha z} + \frac{\alpha y}{1+\alpha z} = 1 + \frac{\alpha y}{1+\alpha z}$. Donc....

$$(K)\ l\frac{Z'}{Z} = l\left(1+\frac{\alpha y}{1+\alpha z}\right) + l\left(1+\frac{\beta y}{1+\beta z}\right) + l\left(1+\frac{\gamma y}{1+\gamma z}\right) +, \text{etc.}$$

La valeur de $Z'$ donne:..............................

$$Z' = 1 + A(z+y) + B(z+y)^2 + C(z+y)^3 + D(z+y)^4 +, \text{etc.}$$
$$= 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +, \text{etc.}$$
$$+ y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.})$$
$$+ y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})$$

Donc $Z' = Z + y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.})$........... $+ y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})$ etc. Et en divisant les deux membres de cette équation par $Z$, il viendra....................

$$(L)\ \frac{Z'}{Z} = 1 + \frac{y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.}) + y^2(B + 3Cz + 6Dz^2 +, \text{etc.})}{Z}.$$

Appelons $X$ tous les termes du second membre de cette équation, à l'exception du premier, et elle pourra s'écrire ainsi, $\frac{Z'}{Z} = 1 + X$; donc $(M)\ l\frac{Z'}{Z} = l(1+X)$. Or on sait par la théorie des logarithmes que $l(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} +$, etc. Donc en remettant dans l'équation $(M)$ à la place de $l(1+X)$ sa valeur, nous aurons, $l\frac{Z'}{Z} = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}, -$ etc. Et enfin en remettant dans cette dernière à la place de $X$ et de ses puissances les quantités qu'elles représentent, il viendra...........

$$l\frac{Z'}{Z} = \frac{y(A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 +, \text{etc.}) + y^2(B + 3Cz +, \text{etc.})}{Z} \ldots\ldots$$
$$- \frac{y^2(A^2 + 4ABz +. \text{etc.})}{2Z^2} +, \text{etc.}$$

Égalons maintenant le second membre

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

membre de cette équation au second membre de l'équation $(K)$ ; en développant en série logarithmique chacun des termes de ce second membre, et nous bornant aux deux premiers termes de chaque série, nous aurons, $\frac{y(A+2Bz+3Cz^2+\text{etc.})+y^2(B+3Cz^2+\text{etc.})}{Z}$ .......
$-\frac{y^2}{2Z^2}(A^2+4ABz+\text{etc.})+\text{etc.}=\frac{\alpha y}{1+\alpha z}-\frac{\alpha^2 y^2}{2(1+\alpha z)^2}+\text{etc.}$
$+\frac{\beta y}{1+\beta z}-\frac{\beta^2 y^2}{2(1+\beta z)^2}+\text{etc.}+\frac{\gamma y}{1+\gamma z}-\frac{\gamma^2 y^2}{2(1+\gamma z)^2}+\text{etc.}+\text{etc.}$
Divisons les deux membres de cette équation par $y$, et ensuite supposons $y=0$, (ce qui est permis, puisque l'équation est vraie indépendamment d'aucune valeur de $y$), il viendra............
$\frac{A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+5Ez^4+\text{etc.}}{Z}=\frac{\alpha}{1+\alpha z}+\frac{\beta}{1+\beta z}+\frac{\gamma}{1+\gamma z}+$
$\frac{\delta}{1+\delta z}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon z}+\text{etc.}$, ou en multipliant tout par $Z$.........
$(N)$ $A+2Bz+3Cz^2+4Dz^3+5Ez^4+\text{etc.}$...............
$=Z\left(\frac{\alpha}{1+\alpha z}+\frac{\beta}{1+\beta z}+\frac{\gamma}{1+\gamma z}+\frac{\delta}{1+\delta z}+\text{etc.}\right)$ Soit maintenant l'équation $\frac{\alpha}{1+\alpha z}=H+Iz+Kz^2+Lz^3+\text{etc.}$ ; si on la multiplie par $1+\alpha z$, on aura..........................

$$\alpha=H\begin{array}{l}+\;I\\+\;H\alpha\end{array}\Bigg|\,z\begin{array}{l}+\;K\\+\;\alpha I\end{array}\Bigg|\,z^2\begin{array}{l}+\;L\\+\;\alpha K\end{array}\Bigg|\,z^3\begin{array}{l}+\text{etc.}\\+\text{etc.}\end{array}$$

d'où l'on tire..........
$H=\alpha$ ; $I=-\alpha^2$ ; $K=\alpha^3$ ; $L=-\alpha^4$, et ainsi de suite. Donc $\frac{\alpha}{1+\alpha z}=\alpha-\alpha^2 z+\alpha^3 z^2-\alpha^4 z^3+\alpha^5 z^4-\text{etc.}$ On trouverait de même $\frac{\beta}{1+\beta z}=\beta-\beta^2 z+\beta^3 z^2-\beta^4 z^3+\beta^5 z^4-\text{etc.}$, et enfin on trouverait de pareilles séries pour tous les autres termes. Donc en substituant toutes ces valeurs dans l'équation $(N)$, et ordonnant par rapport aux puissances de $z$, on aura................



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$$A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \text{etc.} \ldots\ldots$$

$$= Z\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
\alpha - \alpha^2 & z + \alpha^3 & z^2 - \alpha^4 & z^3 + \alpha^5 & z^4 - \alpha^6 & z^5 + \text{etc.}\\
+\beta - \beta^2 & +\beta^3 & -\beta^4 & +\beta^5 & -\beta^6 & +\text{etc.}\\
+\gamma - \gamma^2 & +\gamma^3 & -\gamma^4 & +\gamma^5 & -\gamma^6 & +\text{etc.}\\
+\delta - \delta^2 & +\delta^3 & -\delta^4 & +\delta^5 & -\delta^6 & +\text{etc.}\\
+\varepsilon - \varepsilon^2 & +\varepsilon^3 & -\varepsilon^4 & +\varepsilon^5 & -\varepsilon^6 & +\text{etc.}\\
\text{etc.}\quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}\right.$$

Et enfin en remettant à la place de $Z$ sa valeur ............... $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$, on aura ..........................

$$(O)\ A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \text{etc.} = (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.})$$

$$\times\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
\alpha - \alpha^2 & z + \alpha^3 & z^2 - \alpha^4 & z^3 + \alpha^5 & z^4 - \alpha^6 & z^5 + \text{etc.}\\
+\beta - \beta^2 & +\beta^3 & -\beta^4 & +\beta^5 & -\beta^6 & +\text{etc.}\\
+\gamma - \gamma^2 & +\gamma^3 & -\gamma^4 & +\gamma^5 & -\gamma^6 & +\text{etc.}\\
+\delta - \delta^2 & +\delta^3 & -\delta^4 & +\delta^5 & -\delta^6 & +\text{etc.}\\
+\varepsilon - \varepsilon^2 & +\varepsilon^3 & -\varepsilon^4 & +\varepsilon^5 & -\varepsilon^6 & \\
\text{etc.}\quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}\right.$$

Supposons $P$ égal à la somme des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc.; $Q$ égal à la somme des quarrés de ces mêmes quantités; $R$ égal à la somme de leurs cubes, et ainsi du reste, l'équation $(O)$ deviendra, $(P)\ A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \text{etc.}$ .......... $= (1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.})(P - Qz + Rz^2 - Sz^3 + Tz^4 - Vz^5 + \text{etc.})$; ou bien en faisant les multiplications indiquées dans le second membre, et ordonnant les produits par rapport aux puissances de $z$, il viendra, $A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \text{etc.}$ ......

$$= \left|\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
P + AP & z + BP & z^2 + CP & z^3 + DP & z^4 + EP & z^5 + \text{etc.}\\
\quad - Q & \quad - AQ & \quad - BQ & \quad - CQ & \quad - DQ & \quad - \text{etc.}\\
 & \quad + R & \quad + AR & \quad + BR & \quad + CR & \quad + \text{etc.}\\
 & & \quad - S & \quad - AS & \quad - BS & \quad - \text{etc.}\\
 & & & \quad + T & \quad + AT & \quad + \text{etc.}\\
 & & & & \quad - V & \quad - \text{etc.}\\
 & & & & & \quad + \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Et si on égale d'un membre à l'autre de cette équation, les termes qui sont affectés des mêmes puissances de $z$, on trouvera les

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

équations partielles suivantes, $P = A$; $2B = AP - Q$; $3C = BP - AQ + R$; $4D = CP - BQ + AR - S$; $5E = DP - CQ + BR - AS + T$; $6F = EP - DQ + CR - BS + AT - V$, et ainsi du reste. De toutes ces équations on tire celles qui suivent.................................................

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - PB + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F.$$

Et en général si on représente par $S^n$, $S^{n-1}$, $S^{n-2}$ ... $S$, la somme des puissances $n$, $n-1$, $n-2$, ... $1$ d'un nombre de quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc., on aura l'équation..........................
$S^n = AS^{n-1} - BS^{n-2} + CS^{n-3}$ — etc. ... $\mp LS \pm nM$.

Remarquons que dans ces équations qui sont des séries récurrentes, $P$ représente la somme des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc. $Q$ représente la somme de leurs quarrés; $R$, la somme de leurs cubes; $S$, la somme de leurs quatrièmes puissances; $T$, la somme de leurs cinquièmes puissances, et ainsi de suite. Et quant aux premières lettres de l'alphabet, $A$ représente la somme des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc.; $B$, la somme de leurs produits deux-à-deux; $C$, la somme de leurs produits trois-à-trois; $D$, celle de leurs produits quatre-à-quatre, et ainsi du reste. Donc pour avoir la somme des puissances d'un certain ordre des racines d'une équation, la somme des quarrés, par exemple, la formule $Q = AP - 2B$ nous fait voir qu'il faut multiplier le coëfficient du second terme



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de l'équation par lui-même, et retrancher du produit le double du coëfficient du troisième terme; pour avoir la somme des cubes des racines, la formule $R = AQ - PB + 3C$, nous montre qu'il faut multiplier la somme de leurs quarrés par le coëfficient du second terme, retrancher de ce produit celui du coëfficient du troisième terme par le coëfficient du second, et ajouter à la différence le triple du coëfficient du quatrième terme, et ainsi de suite. D'où il résulte que si une équation n'a que deux racines, on pourra obtenir la somme de leurs quarrés, mais nullement celle de leur cubes; si elle a trois racines, on pourra obtenir la somme de leurs quarrés, celle de leurs cubes, mais non pas celle de leurs quatrièmes puissances; enfin si l'équation a $n$ racines, on pourra obtenir la somme des différentes puissances de ses racines, jusqu'à la somme des puissances de l'ordre $n$, mais non la somme des puissances d'un ordre supérieur. En effet, pour avoir la somme des puissances de l'ordre $n$ d'un nombre $n$ de racines, nous aurons recours à l'équation $S^n = AS^{n-1} - BS^{n-2} + CS^{n-3} \ldots \mp LS \pm nM$, dont le dernier terme du second membre, d'après ce qui a été dit, est la somme des produits d'un nombre $n$ de termes pris $n$ à $n$. Et si l'on voulait la somme des puissances de l'ordre $n + 1$, le dernier terme du second membre serait $\mp (n + 1) N$, dans lequel $N$ devrait représenter la somme des produits d'un nombre $n$ de quantités prises $n + 1$ à $n + 1$; ce qui est impossible puisque ces quantités ne sont qu'au nombre $n$.

## NOTE (69), *pour la page* 23. *Tome II.*

Pour la simplicité des calculs, je prends seulement deux racines $a$ et $b$, l'une positive et l'autre négative, et il sera facile de voir que si on en prenait un plus grand nombre, on arriverait toujours aux mêmes

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

résultats. Le théorême de Newton sera démontré, si on prouve que $(a^{2m}+b^{2m})^{\frac{1}{2m}} > (a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{\frac{1}{2(m+1)}}$, ou bien que $(a^{2m}+b^{2m})^{\frac{m+1}{m}} > (a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{1}$, ou enfin que...... $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1} > (a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m}$, $m$ étant un nombre entier positif quelconque; car il est clair que, si cette dernière inégalité a lieu, toutes les autres auront lieu également. Soit donc $a > b$, et développons en série le binome $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1}$, nous aurons.... $(a^{2m}+b^{2m})^{m+1} = a^{2m(m+1)} + (m+1)\, a^{2m(m)}\, b^{2m} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(m+1)\frac{m}{2}\, a^{2m(m-1)}\, b^{4m} + (m+1)\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\, a^{2m(m-2)}\, b^{6m} +$, etc. $(A)$.

Développons également en série l'autre quantité $(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m}$, et nous aurons $(a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)})^{m} = a^{2m(m+1)} + \ldots\ldots\ldots$ $m\, a^{2(m+1)\,(m-1)}\, b^{2(m+1)} + m.\frac{m-1}{2}\cdot a^{2(m+1)\,(m-2)}\, b^{4(m+1)} + \ldots\ldots$ $m.\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\, a^{2(m+1)(m-3)}\, b^{6(m+1)} +$, etc. $(B)$.

Comparons terme à terme les séries $(A)$ et $(B)$. Je vois d'abord que la première a un terme de plus que la seconde, ensuite que les premiers termes sont égaux de part et d'autre, enfin que les seconds termes sont $(m+1)\, a^{2mm}\, b^{2m}$, ou.................. $(m+1)\, a^{2m^2}\, b^{2m}$ pour $(A)$ et $m\, a^{2(m+1)(m-1)} b^{2(m+1)}$, ou....... $m\, a^{2m^2-2} b^2 . b^{2m}$ pour $(B)$. Or il est évident que $(m+1)\, a^{2m^2} b^{2m} > m\, a^{2m^2-2} b^2 b^{2m}$, ou $(m+1)\, a^{2m^2} . b^{2m} > \frac{m\, a^{2m^2}}{a^2}\, b^2\, b^{2m}$, car en divisant de part et d'autre par $a^{2m^2} . b^{2m}$, les quotiens sont $(m+1)$, et $\frac{m\, b^2}{a^2}$, et en les multipliant l'un et l'autre par $a^2$, on a enfin..... $(m+1)\, a^2 > m b^2$, à cause de $m+1 > m$, et de $a > b$.

En comparant les troisièmes termes des deux séries, on trouverait, toute réduction faite, qu'ils sont respectivement comme........ $(m+1).\frac{m}{2}\, a^4$ et $m.\frac{m-1}{2}\, b^4$, et il est clair que le premier est plus grand que le second. Et à cause de la marche régulière des deux séries, on voit en général, qu'un terme $n$ de la série $(A)$ est au terme



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$n$ de la série $(B)$ comme $(m+1)\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\ldots a^{2(n-1)}$ est à.... $m.\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots b^{2(n-1)}$, et que le premier est plus grand que le second. Donc un terme quelconque de la série $(A)$ est plus grand que le terme correspondant de la série $(B)$; donc $(A) > (B)$; donc enfin, $\sqrt[2m]{a^{2m}+b^{2m}} > \sqrt[2(m+1)]{a^{2(m+1)}+b^{2(m+1)}}$. C. Q. F. D.

Conclusion. Donc puisque $\sqrt[2]{a^2+b^2} > a$; que......... $\sqrt[4]{a^4+b^4} > a$; que $\sqrt[6]{a^6+b^6} > a$, etc., et qu'il vient d'être prouvé généralement que............................... $\sqrt[2]{a^2+b^2} > \sqrt[4]{a^4+b^4} > \sqrt[6]{a^6+b^6} > \sqrt[8]{a^8+b^8}$, etc.; il s'en suit que $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ surpasse $a$; mais d'une quantité moins grande que $a$ n'est surpassé par $\sqrt[2]{a^2+b^2}$. De même les quantités $\sqrt[6]{a^6+b^6}$ et $\sqrt[4]{a^4+b^4}$ surpassent toutes deux $a$, mais la première moins que la seconde, et ainsi de suite. Donc on approchera d'autant plus près de la valeur de $a$, qu'on prendra une racine plus élevée de la somme des puissances de pareil degré de toutes les racines. Et c'est-là ce qu'annonce la règle de Newton.

## Note (70), *pour la page 24. Tome II.*

Newton dit que : *Si entre la somme des quarrés et la somme des quatrièmes puissances, on prend une moyenne proportionnelle géométrique, elle sera un peu plus grande que la somme des cubes des racines prises toutes avec un signe positif.*

Prenons, comme dans la Note précédente, les deux racines $a$ et $b$. La somme de leurs quarrés est $a^2+b^2$, et celle de leurs quatrièmes puissances $a^4+b^4$. Appelons $q$ la moyenne proportionnelle, et nous aurons $q^2=(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$. Donc

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$q = \sqrt{a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6}$. La somme des cubes avec des signes positifs est $a^3 + b^3 = \sqrt{a^6 + 2a^3 b^3 + b^6}$. Maintenant je dis qu'on a toujours $\sqrt{a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6} > \sqrt{a^6 + 2a^3 b^3 + b^6}$, ou bien que $a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6 > a^6 + 2a^3 b^3 + b^6$, ou bien que... $a^4 b^2 + a^2 b^4 > 2a^3 b^3$, ou, en divisant tout par $a^2 b^2$, que..... $a^2 + b^2 > 2ab$, ou bien que $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, ou bien enfin, $(a - b)^2 > 0$. Or $(a - b)^2$ est toujours une quantité positive, donc elle est toujours plus grande que zéro. Donc la dernière inégalité ayant toujours lieu, les autres ont aussi toujours lieu. Par conséquent, on a en général.............................. $\sqrt{a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6} > \sqrt{a^6 + 2a^3 b^3 + b^6}$, ou bien....... $q > \sqrt{a^6 + 2a^3 b^3 + b^6}$, ou $q > a^3 + b^3$. C. Q. F. D.

## NOTE (71), *pour la page 24. Tome II.*

*Si l'on ajoute*, dit Newton, *à la moyenne proportionnelle, la somme des cubes prise avec son propre signe, et qu'ensuite on l'en retranche, et qu'on prenne la demi-somme et la demi-différence de ces deux quantités; la demi-somme sera plus grande que la somme des cubes de toutes les racines positives de l'équation, et la demi-différence plus grande que la somme des cubes de toutes les racines négatives.*

Soient toujours les deux racines $a$ et $b$, la première positive, et la seconde négative; $a^3 - b^3$ sera la somme des cubes prise avec son propre signe. Or il est clair que $\frac{a^3 + b^3 + a^3 - b^3}{2} = a^3$; mais nous avons vu dans la Note précédente, que $q > a^3 + b^3$, donc...... $\frac{q + a^3 - b^3}{2} > a^3$; c'est-à-dire, que si, à la moyenne proportionnelle $q$, on ajoute la somme des cubes, prise avec son propre signe, et

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

qu'on prenne la moitié de cette quantité, elle sera plus grande que la somme des cubes des racines positives de l'équation. Ce qu'il fallait 1°. démontrer.

Ensuite $\frac{a^3 + b^3 - (a^3 - b^3)}{2} = b^3$; et comme $q > a^3 + b^3$, il s'en suit que $\frac{q - (a^3 - b^3)}{2} > b^3$. C'est-à-dire que, si de la moyenne proportionnelle $q$, on retranche la somme des cubes, prise avec son propre signe, et qu'on prenne la moitié de cette différence, elle sera plus grande que la somme des cubes des racines négatives. Ce qu'il fallait, 2°. démontrer.

CONCLUSION. Il est facile maintenant de saisir la vérité de ces paroles de l'auteur : *Donc la plus grande des racines positives de l'équation sera plus petite que la racine cubique de cette demi-somme, et la plus grande des racines négatives sera plus petite que la racine cubique de cette demi-différence.* En effet, supposons maintenant que $a^3$ représente la somme des cubes de toutes les racines positives, et $b^3$ la somme des cubes de toutes les racines négatives, on aura toujours les inégalités, $\frac{q + a^3 - b^3}{2} > a^3$, et $\frac{q - (a^3 - b^3)}{2} > b^3$, ce qui donne... $a < \sqrt[3]{\frac{q + a^3 - b^3}{2}}$, et $b < \sqrt[3]{\frac{q - (a^3 - b^3)}{2}}$. Or, dans l'hypothèse actuelle, $a$ est plus grand que la plus grande racine positive, donc, à plus forte raison, la plus grande racine positive sera plus petite que $\sqrt[3]{\frac{q + a^3 - b^3}{2}}$. Et par le même raisonnement, la plus grande racine négative sera plus petite que $\sqrt[3]{\frac{q - (a^3 - b^3)}{2}}$. Donc, etc.

Newton suit la même marche pour approcher encore de plus près de la valeur des racines, en employant des puissances plus élevées. Mais je me crois dispensé d'aller plus loin par ces paroles mêmes de l'auteur

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'auteur qui se trouvent un peu plus bas : « *Ces méthodes de trouver les limites des racines des équations, ne sont pas d'un grand usage, tant à cause de la difficulté des calculs, que parce qu'elles ne peuvent s'appliquer aux équations qui contiennent des racines imaginaires* ».

## NOTE (72), *pour la page 26. Tome II.*

Voici comment on peut démontrer cette règle de Newton. Si on a une équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} -$ etc. $= 0$, et qu'on fasse $x - e = y$, ou bien $x = y + e$, ce qui donnera $x^n = (y+e)^n$, $Ax^{n-1} = A(y+e)^{n-1}$, $Bx^{n-2} = B(y+e)^{n-2}$, etc. en substituant dans la proposée, à la place de $x$ et de ses puissances $y + e$, et ses puissances, on aura, en renversant l'ordre des termes, une équation transformée de cette forme, $(A)$........

$$\begin{array}{llll}
e^n & + ne^{n-1}y & + n.\frac{n-1}{2}.e^{n-2}y^2 & - \text{etc.} \\
- Ae^{n-1} & - (n-1)Ae^{n-2}y & - (n-1)\frac{(n-2)}{2}Ae^{n-3}y^2 & - \text{etc.} \\
+ Be^{n-2} & + (n-2)Be^{n-3}y & + (n-2)\frac{(n-3)}{2}Be^{n-4}y^2 & - \text{etc.} \\
- Ce^{n-3} & - (n-3)Ce^{n-4}y & - (n-3)\frac{(n-4)}{2}Ce^{n-5}y^2 & - \text{etc.} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Voici les observations qu'on peut faire sur cette transformée...

1°. C'est que son premier terme, dans l'ordre renversé........ $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} +$ etc., n'est autre chose que la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$ etc., dans laquelle on aurait mis $e$ au lieu de $x$.

2°. Le coëfficient du second terme........................ $ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - (n-3)Ce^{n-4}$, etc. s'obtiendrait en multipliant chaque partie du terme précédent par



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'exposant de $e$ dans cette partie, et en divisant le produit par $e$. En effet, le terme précédent étant $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} +$ etc., multiplions chacune de ses parties par l'exposant de $e$ dans cette partie, nous aurons $ne - (n-1)Ae^{n-1} + (n-2)Be^{n-2} -$ etc., et en divisant tout par $e$, on a ..............................

$ne^{n-1} - (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} - (n-3)Ce^{n-4} +$ etc.

qui est précisément le coëfficient du second terme de la transformée.

3°. Le coëfficient du troisième terme peut s'obtenir en multipliant de même chaque partie du coëfficient du second terme par l'exposant de $e$ dans cette partie, et divisant le produit par $2e$. Et en général, le coëfficient d'un terme quelconque de la transformée, par exemple du terme $y^r$, peut se déduire du coëfficient du terme précédent, c'est-à-dire, du terme $y^{r-1}$, en multipliant chaque partie du coëfficient de ce dernier terme par l'exposant de $e$ dans cette partie, et en divisant le produit par $re$, c'est-à-dire par $e$ multiplié par l'exposant de $y$ dans le terme dont on cherche le coëfficient. Nous pouvons donc remonter ainsi, de proche en proche, jusqu'au coëfficient de l'avant-dernier terme, c'est-à-dire jusqu'au coëfficient du second terme, en prenant les termes dans l'ordre direct.

Faisons encore quelques réflexions sur cette transformée. D'abord puisqu'on a substitué $y + e$ au lieu de $x$, on a $x - e = y$; mais $y$ désignant les racines de la transformée, et $x$ celles de la proposée, il résulte de l'équation $x - e = y$, que toutes les racines positives de la transformée sont plus petites que les racines positives de la proposée, d'une quantité connue $e$, et qu'au contraire, ses racines négatives sont plus grandes que les négatives de la proposée, de la même quantité $e$.

Donc lorsque $e$ est plus grand que la plus grande racine positive

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

de la proposée, la racine correspondante de la transformée devient négative, donc à plus forte raison, toutes les autres racines de la transformée seront négatives. Tout cela est évident à la seule inspection de l'équation $x - e = y$. Donc dans ce cas, toutes les racines de la transformée sont négatives, et par conséquent tous ses termes sont affectés de signes positifs. Donc réciproquement, lorsque tous les signes de la transformée sont positifs, on doit conclure que $e$ est plus grand que la plus grande racine positive de la proposée.

Lorsque $e$ est plus petit que la plus petite racine positive de la proposée, les racines de la transformée conservent les mêmes signes que leurs correspondantes dans la proposée.

Si au lieu de substituer $y + e$ à la place de $x$, on substitue $y - e$, l'équation $y - e = x$, ou $x + e = y$ fait voir, que toutes les racines positives de la proposée sont augmentées dans la transformée, de la quantité $e$, et qu'au contraire ses racines négatives sont diminuées dans la transformée, de la quantité $e$. D'où il suit, que si $e$ surpasse la plus grande racine négative de la proposée, la racine correspondante de la transformée sera positive, et à plus forte raison, toutes les autres. Donc cette transformée aura alternativement les signes + et —. Donc réciproquement si tous les signes de la transformée sont alternativement + et —, c'est une preuve que la quantité connue $e$, est plus grande que la plus grande racine négative de la proposée.

Il est encore évident que si $e$ est une quantité réelle, les racines imaginaires qui se trouvent dans la proposée, se retrouvent également dans la transformée; seulement elles y seront augmentées ou diminuées de la quantité réelle $e$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Il en sera de même des racines incommensurables.

Après tout ce qui vient d'être dit, il est facile de démontrer la règle. En effet, nous avons vu au commencement de cette Note, que le premier terme de la transformée ($A$) (les termes étant pris dans un ordre renversé) était la proposée elle-même, dans laquelle on aurait substitué $e$ au lieu de $x$; et qu'en multipliant chaque partie de ce premier terme par l'exposant de $e$ dans cette partie, et divisant le produit par $e$, nous aurions le coëfficient du second terme, et ainsi de suite pour les coëfficiens des termes suivans. Nous trouverions donc par ce moyen le coëfficient de l'avant-dernier terme, qui serait celui du second terme dans l'ordre direct. Or, si dans la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$, etc., nous substituons pour $x^n$, $(y+e)^n$, nous aurons pour les deux premiers termes dans l'ordre direct $y^n + ney^{n-1}$. Et en substituant pour $-Ax^{n-1}$, $-A(y+e)^{n-1}$, nous aurons $-Ay^{n-1}$, donc les deux premiers termes de la transformée sont, dans l'ordre direct, $y^n + (ne - A)y^{n-1}$, donc le coëfficient du second terme est $ne - A$, c'est à ce coëfficient que nous serions parvenus par une marche inverse. On voit que toutes les opérations que nous faisons sur la transformée pour arriver à ce dernier coëfficient, sont précisément celles que Newton veut que l'on fasse sur la proposée $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} +$, ect. $= 0$, pour la réduire à deux termes. En effet, en multipliant chaque terme de cette équation par l'exposant de $x$, dans ce terme, et divisant le résultat par $x$, ensuite multipliant chaque terme de ce premier résultat par l'exposant de $x$ dans ce terme, et divisant le produit par $2x$, et continuant d'opérer sur le second résultat comme sur le premier, notre équation finirait par être réduite à ces deux termes

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$nx - A = 0$, qui serait le coëfficient du second terme de notre transformée, en mettant $e$ pour $x$. Donc nous pouvons regarder les coëfficiens des termes de la transformée, comme les résultats que Newton obtient par ses opérations successives sur la proposée elle-même, ensorte que le premier terme de la transformée (les termes étant pris dans un ordre inverse) est la proposée même, dans laquelle on aurait mis $e$ pour $x$; le coëfficient du second terme de la transformée, est le résultat de la première opération sur la proposée, et ainsi de suite. Donc si l'on a substitué $y + e$ à la place de $x$, ce qui donne $x - e = y$, et que $e$ soit une quantité plus grande que la plus grande racine positive de la proposée, toutes les racines de la transformée seront négatives; donc tous ses termes auront le signe $+$, donc tous ses coëfficiens seront positifs; donc tous les résultats de la proposée (qui sont identiques avec les coëfficiens de la transformée, en changeant $x$ en $e$) seront affectés du signe $+$. Donc réciproquement si on met dans tous ces résultats au lieu de $x$, un nombre $e$ tel, qu'ils deviennent tous positifs, ce sera une preuve que le nombre $e$ est plus grand que la plus grande racine positive de l'équation. Donc $e$ sera une limite supérieure à la plus grande racine. Mais comment déterminer $e$ de manière à avoir la limite supérieure la plus petite possible? le voici. Puisque vous voulez convertir tous les coëfficiens de la transformée en quantités positives, il faut d'abord que le coëfficient de son second terme $ne - A$ (qui est la même chose que le dernier reste de Newton) soit une quantité positive; il faut donc que $ne > A$, ou que $e > \frac{A}{n}$. En effet, la proposée étant du dégré $n$, à un nombre $n$ de racines, et $A$ coëfficient de son second terme étant égal à la somme de toutes ces racines, il

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

s'en suit que la plus grande racine positive est plus grande que $\frac{A}{n}$, donc il faudra prendre pour $e$ le nombre immédiatement supérieur à $\frac{A}{n}$, et s'il convertit tous les résultats en quantités positives, c'est une preuve que $e$ est la limite cherchée ; mais si tous, ou quelques-uns des résultats étaient encore négatifs, il faudrait prendre un nombre immédiatement supérieur au premier, et continuer ainsi, en augmentant par les plus petits degrés possibles, jusqu'à ce qu'on fût parvenu à rendre tous les résultats positifs.

## NOTE (73), *pour la page* 31. *Tome II.*

Je dois cette Note à Mac-Laurin : mais j'y ai fait des développemens assez considérables.

Supposons l'équation du quatrième degré, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, dans laquelle $p$, $q$, $r$, $s$ sont des coëfficiens donnés avec leurs signes. Si l'on peut faire de cette équation un quarré complet, on doit avoir, comme le dit Newton, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + nk^2x^2 + 2nklx + nl^2 = nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$. Le premier membre sera donc, par supposition, le quarré exact de $x^2 + \frac{1}{2}px + Q$; donc on aura l'équation, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s + nk^2x^2 + 2nklx + nl^2 = (x^2 + \frac{1}{2}px + Q)^2$. Et en développant le quarré du second membre, et rassemblant les quantités qui multiplient les mêmes puissances de $x$, il viendra, $x^4 + px^3 + (q + nk^2)x^2 + (r + 2nkl)x + s + nl^2 = x^4 + px^3 + (2Q + \frac{1}{4}p^2)x^2 + pQx + Q^2$. Comparons maintenant les coëfficiens qui affectent les mêmes puissances de $x$ dans les deux membres, nous en tirerons les trois équations suivantes, $(A)\ q + nk^2 = 2Q + \frac{1}{4}p^2$ ; $(B)\ r + 2nkl = pQ$;

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

(C) $s + nl^2 = Q^2$. Or il y a, dans ces trois équations, quatre inconnues; on ne pourra donc en trouver la valeur qu'en tâtonnant.

Par le moyen des équations (A) et (B), j'élimine Q, ce qui me donne l'équation, $\frac{q + nk^2 - \frac{1}{4}p^2}{2} = \frac{r + 2nkl}{p}$, d'où je tire.... $n = \frac{pq - \frac{1}{4}p^3 - 2r}{4kl - pk^2}$, ou bien $n = \frac{\frac{1}{2}pq - \frac{1}{8}p^3 - r}{2kl - \frac{1}{2}pk^2} = \frac{r + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{2}pq}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)} = \frac{r + \frac{1}{2}p(\frac{1}{4}p^2 - q)}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Donc $n = -\frac{r + \frac{1}{2}p(\frac{1}{4}p^2 - q)}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Et comme Newton a fait $q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha$, si nous substituons dans la valeur de $n$, il viendra, $n = \frac{r - \frac{1}{2}p\alpha}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. Mais il a fait aussi, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$; donc enfin $n = \frac{\beta}{k(\frac{1}{2}pk - 2l)}$. D'où l'on tire, $\beta = n \times k(\frac{1}{2}pk - 2l)$, et $\frac{\beta}{n} = k(\frac{1}{2}pk - 2l)$. Ces deux dernières équations nous font voir, la première, que $n$ doit être un diviseur de $\beta$, et la seconde, que $k$ doit être un diviseur de $\frac{\beta}{n}$, qui donne pour quotient.... $\frac{1}{2}pk - 2l$; retranchez ce quotient de $\frac{1}{2}pk$, et le reste sera $+ 2l$, dont la moitié donnera la valeur de $l$, et c'est encore ce qu'exige la règle. Ensuite l'équation (A) nous donne, $Q = \frac{q - \frac{1}{4}p^2 + nk^2}{2}$, et en mettant pour $q - \frac{1}{4}p^2$ sa valeur $\alpha$, on a, $Q = \frac{\alpha + nk^2}{2}$, ou bien $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$; et l'équation (C) donne, $l^2 = \frac{Q^2 - s}{n}$. Cette dernière équation nous fait voir encore la raison de deux conditions de la règle, c'est qu'il faut que $Q^2 - s$ soit divisible par le nombre qu'on aura pris pour $n$, et que de plus le quotient soit un quarré parfait, dont la racine soit égale au nombre qu'on a

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

déjà trouvé pour $l$. Et si, dans $l^2 n = Q^2 - s$, à la place de $Q^2$, on substitue sa valeur obtenue par l'équation $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$, on aura, $nl^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{\alpha n k^2}{2} + \frac{n^2 k^4}{4} - s$, ou bien.............
$nl^2 - \frac{\alpha n k^2}{2} - \frac{n^2 k^4}{4} = \frac{1}{4}\alpha^2 - s$, ou bien...................
$n \cdot \frac{(2l^2 - \alpha k^2 - \frac{1}{2}nk^4)}{2} = \frac{1}{4}\alpha^2 - s$, ou bien, $n(\alpha k^2 + \frac{1}{2}nk^4 - 2l^2) = 2(s - \frac{1}{4}\alpha^2)$. Mais Newton a fait, $s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta$, donc.......
$n(\alpha k^2 + \frac{1}{2}nk^4 - 2l^2) = 2\zeta$, et cette équation nous montre que $n$ doit être un diviseur de $2\zeta$, comme nous avons déjà vu qu'il devait en être un de $\beta$, et en effet la règle exige qu'il soit diviseur commun de ces deux quantités.

Je cherche maintenant les raisons de quelques limitations que Newton a mises à sa règle.

Il dit, 1°. que $n$, diviseur commun de $\beta$ et de $2\zeta$, doit être un nombre entier, mais non un quarré. Effectivement, puisqu'on cherche à réduire l'équation par un diviseur incommensurable, c'est que sans doute on a déjà tenté inutilement de la réduire par un diviseur rationnel de deux dimensions, selon la méthode qui a été enseignée (*page* 49, *tome I*); or, si $n$ était quarré, le facteur $(kx + l)\sqrt{n}$ serait rationnel, et par conséquent l'équation pourrait être réduite par un facteur rationnel; mais ce ne serait plus le cas de la règle actuelle, qui n'est destinée qu'à enseigner à réduire les équations par des diviseurs incommensurables, lorsqu'on ne peut pas les réduire autrement; donc $n$ doit être un nombre entier non-quarré.

Il dit, 2°. que dans le cas où un des deux coëfficiens $p$ et $r$ est impair, $n$ doit être un nombre impair, et qu'étant divisé par 4, il doit laisser l'unité pour reste.

Supposons

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Supposons donc que $p$ soit pair, et $r$ impair; à cause de l'équation $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, ou $\beta + \frac{1}{2}\alpha p = r$, il faut nécessairement que l'un des deux nombres $\beta$ ou $\frac{1}{2}\alpha p$ soit pair, et l'autre impair, puisque leur somme $r$ doit être impaire; si c'est $\beta$ qui est impair, son diviseur $n$ doit l'être aussi. Donc, dans ce cas, la condition de la règle est évidente. Soit maintenant $\beta$ pair, alors il faut que $\frac{1}{2}\alpha p$ soit impair, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que $\frac{1}{2}p$ et $\alpha$ sont tous deux impairs, car s'ils étaient tous deux pairs, ou l'un pair et l'autre impair, leur produit $\frac{1}{2}\alpha p$ serait toujours pair. Donc $\frac{1}{2}p$ et $\alpha$ sont tous deux impairs; mais si $\alpha$ est impair, $\frac{1}{2}\alpha^2$ sera aussi un nombre impair de la forme $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{25}{2}$, etc. (*); donc, à cause de l'équation...... $2\zeta = 2s - \frac{1}{2}\alpha$, dans laquelle $2s$ est un nombre pair, le second membre sera un nombre de la forme $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. donc $2\zeta$ sera égal à la moitié d'un nombre impair, donc son diviseur $n$ sera impair.

Et dans ce cas, je dis que $Q$ et $l$ doivent être des moitiés de nombres impairs. Pour le prouver, supposons que $Q$ soit entier, alors à plus forte raison $l$ serait entier, car on a, $nl^2 = Q^2 - s$, ou $l^2 = \frac{Q^2 - s}{n}$, et comme $l$ doit être rationnel, il s'en suit que $\frac{Q^2 - s}{n}$ doit être un quarré parfait, et il ne peut pas être celui d'une fraction, car pour cela il faudrait que son numérateur et son dénominateur fussent des quarrés, et nous avons vu, par la première limitation, que $n$ ne pouvait pas être quarré; donc il faut

(*) Cela est fondé sur ce principe; qu'un nombre impair élevé à une puissance quelconque, donne toujours un résultat impair.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que $n$ divise exactement $Q^2 - s$, et que le quotient soit un quarré; donc $l$ serait un nombre entier, dans le cas où $Q$ serait un nombre entier. Mais $Q$ et $l$ étant des entiers, $pQ$ serait un nombre pair; or, l'équation $(B)$ étant, $r + 2nkl = pQ$, il s'en suivrait, que son premier membre serait impair et le second pair, ce qui serait absurde. Il est donc impossible que $Q$ soit un nombre entier, il est donc nécessairement une fraction, et il satisfera à toutes les conditions, si on le suppose égal à la moitié d'un nombre impair, et dans ce cas, $l$ sera aussi la moitié d'un nombre impair; car soit $Q = \frac{2m-1}{2}$, on aura.......... $Q^2 = \frac{4m^2-4m+1}{4}$, et en substituant dans l'équation, $nl^2 = Q^2 - s$, elle deviendra, $nl^2 = \frac{4m^2-4m+1-4s}{4} = \frac{4m^2-4m-4s+1}{4}$ ou... $l^2 = \frac{4m^2-4m-4s+1}{4 \times n}$, où l'on voit que le numérateur est impair et le dénominateur pair, donc la division ne peut pas se faire exactement; il faudrait donc pouvoir extraire la racine exacte du numérateur et du dénominateur; sur quoi il est essentiel d'observer que le dénominateur $4 \times n$, ayant pour un de ses facteurs le quarré 4, ne peut devenir un quarré parfait, que dans le cas où l'autre facteur $n$ serait lui-même un quarré, ce qui ne doit jamais arriver, comme on l'a dit; par conséquent on ne peut pas extraire la racine exacte du dénominateur; il faut donc que le numérateur se décompose en deux facteurs dont l'un soit égal à $n$, et que l'autre soit un quarré parfait mais impair; alors l'équation aura cette forme, $l^2 = \frac{n \times I^2}{4n} = \frac{I^2}{4}$ ($I$ désignant le quarré d'un nombre impair), donc $l = \frac{I}{2}$. $Q$ et $l$ désignent donc des moitiés de nombres impairs; donc $2l$ et $2Q$ sont des nombres

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

entiers et impairs. Or, la différence des quarrés de deux nombres impairs est toujours divisible par 4, donc la différence des quarrés de $Q^2$ et $l^2$ sera un nombre entier, ou bien on aura, $Q^2 - l^2 = g$ ($g$ désignant un nombre entier), donc $Q^2 = g + l^2$, et $Q^2 - s = g - s + l^2$, et en faisant $g - s = h$, on a $Q^2 - s = h + l^2$, ou bien en divisant tout par $l^2$, $\frac{Q^2 - s}{l^2} = \frac{h + l^2}{l^2} = 1 + \frac{h}{l^2}$. Mais $n = \frac{Q^2 - s}{l^2}$, donc $n = 1 + \frac{h}{l^2}$. Et comme $n$ doit être un nombre entier, il faut que $h$ soit exactement divisible par $l^2$; d'ailleurs nous avons fait $l = \frac{I}{2}$, $I$ représentant un nombre impair quelconque, donc l'expression $\frac{h}{l^2}$ devient $\frac{4h}{I^2}$. Donc $n = 1 + \frac{4h}{I^2}$. Actuellement, $I^2$ étant un nombre impair, il faut que la division puisse se faire indépendamment du facteur pair 4, donc $h$ est divisible par $I^2$; soit le quotient $R$; nous aurons, $h = RI^2$, et $4h = 4R \times I^2$, donc $n = 1 + 4R$; équation où l'on voit que $n$ est un nombre entier impair, qui étant divisé par 4, donne pour quotient un nombre entier $R$, avec l'unité pour reste, et c'est ce qu'on cherchait.

Enfin il nous reste à examiner le cas où $\beta$ étant zéro, Newton dit que $k$ est aussi zéro. Nous avons trouvé ci-dessus l'équation $\beta = nk(\frac{1}{2}pk - 2l)$. Et comme on suppose $\beta = 0$, et que $n$ ne peut pas être égal à zéro, il s'en suit qu'on a, ou $k = 0$, ou $\frac{1}{2}pk - 2l = 0$, mais il est bien rare que ce soit le dernier cas qui ait lieu. Donc lorsque $\beta = 0$, on a le plus communément $k = 0$, et c'est sans doute tout ce qu'a voulu dire Newton. Mais alors, comment déterminer la valeur de $l$? le voici. On a toujours l'équation $\frac{Q^2 - s}{n} = l^2$. Et, dans le cas qui nous occupe, l'équation $Q = \frac{\alpha + nk^2}{2}$ donne, $Q = \frac{1}{2}\alpha$, donc $\frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - s}{n} = l^2$; et l'équation $s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta$, donne $s = \zeta + \frac{1}{4}\alpha^2$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Donc en substituant cette valeur de $s$ dans l'équation $\frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - s}{n} = l^2$, elle deviendra $-\frac{\zeta}{n} = l^2$; il faudra donc que, $-\frac{\zeta}{n}$ soit un quarré parfait, dont la racine sera $l$.

Après avoir développé tous les principes sur lesquels la règle de Newton est établie, nous allons en faire quelques applications.

EXEMPLE I^er^. Newton a trouvé (probl. V, page 141, T. I.) l'équation $x^4 + 2bx^3 + b^2 x^2 \begin{matrix} -2ab^2 \\ -2b^3 \end{matrix} \Big| x \begin{matrix} -b^4 \\ +a^2b^2 \end{matrix} = 0$. En appliquant à cette équation les règles qui viennent d'être expliquées, j'ai $p = 2b$; $q = b^2$; $r = -2ab^2 - 2b^3$; $s = a^2 b^2 - b^4$. Et à cause de $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$; $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$; $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha^2$, on aura......... $\alpha = 0$; $\beta = -b(2ab + 2b^2)$; $\zeta = b^2(a^2 - b^2)$. Je prends pour $n$, $2ab + 2b^2$ qui est un diviseur de $\beta$ et de $2\zeta$; car............ $2\zeta = 2b^2(a^2 - b^2) = 2b^2(a+b)(a-b) = b(2ab + 2b^2)(a-b)$. Donc $\frac{\beta}{n} = -b = -b \times 1$. Donc si l'on fait $k = 1$, on aura... $\frac{\beta}{nk} = -b$, et $\frac{1}{2}pk = b$. Donc si on retranche de $\frac{1}{2}pk = b$, le quotient $\frac{\beta}{nk} = -b$, le reste sera $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = 2b$, dont la moitié doit être égale à $l$; donc $l = b$. Maintenant, à cause de $\alpha = 0$, l'équation $\frac{\alpha + nk^2}{2} = Q$, se réduit à $\frac{nk^2}{2} = Q$, ou $Q = ab + b^2$. Donc $Q^2 = a^2 b^2 + 2ab^3 + b^4$; donc $Q^2 - s = a^2 b^2 + 2ab^3 + b^4 - a^2 b^2 + b^4 = 2ab^3 + 2b^4$. Donc............................ $\frac{Q^2 - s}{n} = \frac{2ab^3 + 2b^4}{2ab + 2b^2} = \frac{b^2(2ab + 2b^2)}{2ab + 2b^2} = b^2$. Or la racine quarrée de ce quotient donne $b$, qui est une seconde valeur de $l$, égale à la première déja trouvée; j'en conclus donc que les quantités que j'ai prises pour $n$, $k$ et $l$ sont bonnes; donc la quantité

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, qu'il faut ajouter à chaque membre de l'équation proposée, devient, $(2ab + 2b^2)x^2 + (4ab^2 + 4b^3)x + 2ab^3 + 2b^4$, alors l'équation............................

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \begin{array}{l} -2ab^2 \\ -2b^3 \end{array} \Bigg| x \begin{array}{l} -b^4 \\ +a^2b^2 \end{array} = 0,$$ se transforme en celle-ci,

$$x^4 + 2bx^3 \begin{array}{l} +3b^2 \\ +2ab \end{array} \Bigg| x^2 \begin{array}{l} +2b^3 \\ +2ab^2 \end{array} \Bigg| x \begin{array}{l} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +a^2b^2 \end{array} = \begin{array}{l} +2ab \\ +2b^2 \end{array} \Bigg| x^2 \begin{array}{l} +4ab^2 \\ +4b^3 \end{array} \Bigg| x \begin{array}{l} +2b^4 \\ +2ab^3. \end{array}$$

Le premier membre de cette équation est le quarré parfait du quatrinome $x^2 + bx + b^2 + ab$; et le second membre est le quarré parfait de $(x+b)\sqrt{2ab + 2b^2}$. Donc on a..................

$$x^2 + bx + b^2 + ab = (x+b)\sqrt{2ab + 2b^2}.$$

Exemple II^e. Newton a trouvé (problême VII, page 143, T. I.) l'équation $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +3a^2 \\ -2b^2 \end{array} \Big| x^2 \begin{array}{l} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{array} \Big| x \begin{array}{l} +a^4 \\ -a^2b^2 \end{array} = 0$. Tâchons de la réduire; nous aurons $p = -2a$; $q = 3a^2 - 2b^2$; $r = 2ab^2 - 2a^3$; $s = a^4 - a^2b^2$; et par conséquent les trois équations..... $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$; $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$; $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha^2$, deviennent......... $\alpha = 2a^2 - 2b^2$; $\beta = 0$, $\zeta = a^2b^2 - b^4$. Or, comme $\beta = 0$, il est de toute probabilité que $k$ est aussi zéro; je prends donc pour $n$ un diviseur de $2\zeta$, qui ne soit point un quarré, par exemple, $b^2 - a^2$. Et pour déterminer $l$, dans le cas de $\beta = 0$, et de $k = 0$, nous avons vu qu'il fallait que $-\frac{\zeta}{n}$ fût un quarré. Mais....... $\zeta = a^2b^2 - b^4 = -b^2(b^2 - a^2)$, donc $\zeta = -b^2(b^2 - a^2)$, donc $-\zeta = b^2(b^2 - a^2)$, donc $-\frac{\zeta}{n} = \frac{b^2(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = b^2$; donc $l = b$; donc, à cause de $k = 0$, la quantité $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, qu'il faut ajouter à chaque membre de la proposée, se réduit à......

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$n l^2 = b^2(b^2 - a^2) = b^4 - a^2 b^2$, et en faisant l'addition de cette quantité à chaque membre de la proposée, elle devient.........

$$x^4 - 2ax^3 \left.\begin{matrix} +3a^2 \\ -2b^2 \end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{matrix}\right| x \begin{matrix} +a^4 \\ -2a^2b^2 \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - a^2 b^2,$$ dont le premier membre est le quarré du quatrinome $x^2 - ax + a^2 - b^2$, et le second membre est le quarré de $\pm b\sqrt{b^2 - a^2}$, de sorte que l'équation proposée se réduit à, $x^2 - ax + a^2 - b^2 = \pm b\sqrt{b^2 - a^2}$. Au reste il est toujours aisé, sans aucune extraction, de trouver la racine quarrée de chaque membre par le moyen de la formule, $x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}$; il suffit de mettre pour chaque cas, à la place des quantités $p$, $Q$, $k$, $l$ et $n$, leurs valeurs. Dans le premier exemple, $\frac{1}{2}p = b$; $Q = ab + b^2$; $k = 1$; $l = b$; $n = 2ab + 2b^2$; donc la formule donne........................
$x^2 + bx + ab + b^2 = (x + b)\sqrt{2ab + 2b^2}$, comme nous l'avions déja trouvé.

Dans le second exemple, $\frac{1}{2}p = -a$; $Q = \frac{1}{2}\alpha = a^2 - b^2$; $k = 0$; $l = b$; $n = b^2 - a^2$, donc en substituant, la formule donne......
$x^2 - ax + a^2 - b^2 = \pm b\sqrt{b^2 - a^2}$.

## NOTE (74), *pour la page 50. Tome II.*

Le lecteur qui a été renvoyé à la Note 74 par le petit avertissement qui se trouve au bas de la page 143 du Tome I^er, doit, au lieu de la Note 74^e, consulter la Note 73^e.

Dans cette note, je ne parlerai en aucune manière sur le fond du paragraphe auquel elle se rapporte; j'avoue que, quelques efforts

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

que j'aye faits, je n'y ai pu rien comprendre ; mais j'y démontrerai un théorême qui pourrait être ignoré de quelques lecteurs, c'est qu'une équation à deux termes, d'un degré pair quelconque, ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles, et qu'une équation à deux termes d'un degré impair n'en peut jamais avoir plus d'une.

Soit d'abord l'équation à deux termes du cinquième degré, $x^5 \pm m^5 = 0$, d'où on conclura que $x = \mp m$, ou $x \pm m = 0$; et si l'on divise l'équation du cinquième degré par $x \pm m = 0$, on aura pour quotient, $x^4 \mp mx^3 \pm m^2x^2 \mp m^3x \pm m^4 = 0$. Appliquons à cette équation du quatrième degré la seconde méthode qui a été enseignée dans la note 67, pour découvrir les racines imaginaires qu'une équation peut contenir. Lorsqu'on élève un binome à la quatrième puissance, les coëfficiens sont 4, 6, 4; donc les fractions qu'il faudra écrire au-dessus des termes intermédiaires de l'équation seront, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$. .......................

Ainsi

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{3}{8} & \\ x^4 & \mp mx^3 & \pm m^2x^2 & \mp m^3x & \pm m^4. \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

Or $\frac{3}{8}m^2 < m^2$, donc je mettrai —, au-dessous du second terme ; ensuite $\frac{5}{12}m^4 > m^4 - m^4$, je mettrai donc + sous le troisième terme ; enfin $\frac{3}{8}m^6 < m^6$, je mettrai donc — sous le quatrième, et en écrivant + sous le premier et sous le dernier termes, je vois qu'il y a quatre permutations de signes souscrits, d'où je conclus que l'équation du quatrième degré a ses quatre racines imaginaires. Donc l'équation du cinquième, $x^5 \pm m^5 = 0$, n'a, dans tous les cas, qu'une seule racine réelle et quatre imaginaires.

On trouverait de même que l'équation $x^7 \pm m^7 = 0$, n'a qu'une seule racine réelle, et que les six autres sont imaginaires. De

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

même on trouverait que l'équation $x^6 \pm m^6 = 0$, n'a que deux racines réelles et quatre imaginaires. Mais démontrons le théorême d'une manière générale.

Si on a une équation non-affectée d'un degré impair quelconque, $x^n + m^n = 0$, $n$ représentant un nombre impair quelconque, on en tirera l'équation du premier degré $x + m = 0$, et en divisant celle du degré $n$ par celle-ci, le quotient sera...... $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} - m^3x^{n-4} + m^4x^{n-5} -$, etc. et en cherchant les coëfficiens des termes moyens d'un binome élevé à la puissance $n - 1$, diminuant chaque coëfficient d'une unité, et divisant le reste par le double du même coëfficient, on trouvera de cette manière les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes moyens de l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} -$, etc. Je dis maintenant qu'il est facile de prouver que cette équation a toutes ses racines imaginaires, car puisque $n$ est impair, $n - 1$ est pair, donc l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} +$, etc. a un nombre impair de termes, et ses termes pairs sont affectés du signe $-$, et les impairs du signe $+$, et le terme qui occupe le milieu de l'équation est impair, par conséquent il est précédé et suivi d'un nombre pair de termes. De plus on voit, par la marche de l'équation, que le quarré du coëfficient d'un terme quelconque, donne une puissance de $m$ égale à celle du produit de deux coëfficiens pris à égale distance de ce terme. Il nous suffira d'examiner la première moitié de l'équation, les résultats seraient absolument les mêmes dans la seconde moitié. Tout cela posé, je passe à la démonstration.

Je prends un terme pair, son coëfficient est affecté du signe $-$, mais

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

mais son quarré aura le signe +, et ce quarré doit être multiplié par la fraction qui est au-dessus du terme; or, puisque le terme que je considère est pair, il est précédé d'un nombre impair de termes, et de plus, comme je le prends dans la première moitié de l'équation, il a plus de termes à sa suite qu'il n'en a devant lui, donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens sera réglé par le nombre des termes qui le précèdent, par conséquent le nombre de ces produits, dans le cas qui nous occupe, sera impair, et tous ces produits, comme nous l'avons dit, donnent une même puissance de $m$, et de plus, ils sont positifs, puisque le terme que nous considérons étant pair, les deux premiers adjacens sont impairs, et par conséquent positifs, donc leur produit est positif; les deux seconds adjacens sont pairs, et par conséquent négatifs, donc leur produit est positif, et ainsi de suite; ainsi tous ces produits sont égaux (puisqu'ils donnent tous la même puissance de $m$), ils sont tous positifs, et leur nombre est impair, on aura donc une même puissance de $m$, qu'il faudra écrire un nombre impair de fois en prenant alternativement le signe + et le signe — en commençant par le signe +; donc on finira par le signe +, donc tous les termes se détruiront, excepté le dernier; donc on aura d'un côté le quarré du coëfficient d'un terme pair multiplié par une fraction, et de l'autre un produit égal à ce quarré; donc le premier terme de la comparaison (vu la fraction qui le multiplie) est plus petit que le second; donc il faudra écrire le signe — sous le terme pair. Actuellement ma démonstration sera générale, si je fais voir qu'il faut écrire + sous le terme suivant. Or, ce terme étant impair, est précédé d'un nombre pair de termes, donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens est pair, donc, en


IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

les prenant alternativement avec les signes + et —, en commençant par le signe +, on aura un nombre pair de signes + et —, et comme les quantités qu'ils affectent sont toutes égales, il s'en suit que le résultat sera égal à zéro; donc le quarré du coëfficient du terme impair, multiplié par sa fraction, étant plus grand que les produits des coëfficiens des termes adjacens pris alternativement en + et en — (produits qui se réduisent ici à zéro), il faudra mettre + sous le terme impair. Donc il faudra mettre + sous tous les termes impairs, et — sous tous les termes pairs dans toute l'étendue de l'équation, donc il y aura une variation de signe de chaque terme à son suivant, donc toutes les racines de l'équation $x^{n-1} - mx^{n-2} + m^2x^{n-3} - m^3x^{n-4} + m^4x^{n-5} +$, etc. seront toutes imaginaires, et par conséquent, l'équation $x^n + m^n = 0$, n'a qu'une racine réelle.

Si on a l'équation $x^n - m^n = 0$, on en tirera $x - m = 0$, et en divisant la première par la seconde, on aura pour quotient l'équation, $x^{n-1} + mx^{n-2} + m^2x^{n-3} + m^3x^{n-4} +$, etc. dans laquelle on prouverait, comme ci-dessus, que toutes les racines sont imaginaires. Donc l'équation non-affectée d'un degré impair quelconque, $x^n - m^n = 0$, n'a qu'une seule racine réelle, toutes les autres étant imaginaires. Donc enfin toutes les équations non-affectées d'un degré impair, $x^n \pm m^n = 0$, n'ont qu'une seule racine réelle.

Passons aux équations non-affectées d'un degré pair.

Soit l'équation $x^n - m^n = 0$, $n$ désignant un nombre entier pair. J'observe que si on avait $x^n + m^n = 0$, l'équation n'aurait aucune racine réelle; donc, puisqu'on veut au moins deux racines réelles, il faut prendre la formule $x^n - m^n = 0$, et elle donne $x = \pm m$, ou bien $x^2 - m^2 = 0$, et si on divise la proposée par $x^2 - m^2 = 0$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

le quotient sera, $x^{n-2} + m^2 x^{n-4} + m^4 x^{n-6} + m^6 x^{n-8} +$, etc. et il aura autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{2}$, en sorte que si $n$ est un nombre pairement pair, le nombre des termes de l'équation quotient sera pair, et il sera impair, si $n$ est pairement impair (*). Comme toutes les conditions que nous avons établies précédemment s'appliquent encore ici, nous irons droit à la démonstration. Si j'examine le coëfficient d'un terme pair, il est précédé d'un nombre impair de termes; donc le nombre des produits des coëfficiens adjacens est impair, et par conséquent ils se détruiront tous, excepté un seul, et ce produit qui reste est égal au quarré du coëfficient du terme pair qu'on examine; mais celui-ci devant être multiplié par la fraction écrite au-dessus du terme pair, il s'en suit que ce dernier produit sera plus petit que l'autre, donc il faudra mettre le signe — sous le terme pair. Je dis maintenant qu'il faudra mettre + sous le terme suivant, car ce terme est impair, donc il est précédé d'un nombre pair de termes; donc le nombre

(*) Cette remarque servira à déterminer la puissance d'un binome dont les coëfficiens donneront les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation. Effectivement si $n = 8$, l'équation quotient aura quatre termes. Or un binome a quatre termes à son cube; je prendrai donc le cube d'un binome pour déterminer les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation. Si $n = 6$, l'équation quotient aura trois termes; mais le quarré d'un binome a aussi trois termes, donc ce sera dans ce cas là, le quarré d'un binome qui me donnera les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation; et en général le degré de la puissance du binome dont on a besoin pour déterminer les fractions qui doivent être écrites au-dessus des termes de l'équation quotient, sera exprimé par la formule $\frac{n}{2} - 1$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

des produits des coëfficiens adjacens est pair, donc tous ces produits se détruiront les uns par les autres, et par conséquent le quarré du coëfficient du terme impair, multiplié par la fraction qui est écrite au-dessus de ce terme, donne un produit plus grand que zéro, qui est le résultat des produits de tous les coëfficiens adjacens, pris alternativement avec les signes $+$ et $-$; donc il faudra écrire le signe $+$ au-dessous du terme impair. Cette démonstration étant générale, il faudra donc écrire $+$ au-dessous de tous les termes impairs, et $-$ au-dessous de tous les termes pairs, donc il y aura une variation de chaque terme à son suivant, et par conséquent toutes les racines de l'équation $x^{n-2} + m^2 x^{n-4} + m^4 x^{n-6} + m^6 x^{n-8} +$, etc. seront toutes imaginaires; donc l'équation non-affectée de dimensions paires et d'un degré quelconque, $x^n - m^n = 0$, ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles.

## NOTE (75), *pour la page 60. Tome II.*

Avant de donner quelques éclaircissemens sur les démonstrations de ces trois Lemmes, je crois devoir avertir le lecteur que j'ai fait quelques légères additions aux figures 4 et 5 de la planche IX de Newton. Pour la figure 4, j'ai tiré la ligne $KF$ parallèlement à $CX$, et j'ai prolongé $AX$ jusqu'à la rencontre de cette parallèle en un point $F$. Pour la 5$^e$. figure, j'ai prolongé un peu l'arc de cercle, et j'ai tiré $KF$ parallèlement à $CX$, je crois avoir rendu ainsi la démonstration des Lemmes plus facile.

LEMME I$^{er}$. Newton trouve cette proportion, $XY : AK :: CX : KE$, et voici comme il a dû y arriver. Dans les figures 3, 4 et 5, on a les triangles semblables $ACX$, $AKF$, et $EXY$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$EFK$, d'où l'on tire les deux proportions; $AC : AK :: CX : KF$, et $XY : YE$ ou $AC :: KF : KE$. La première donne, $AC \times KF = AK \times CX$, et la seconde, $AC \times KF = XY \times KE$. Donc $XY \times KE = AK \times CX$, d'où l'on tire la proportion $XY : AK :: CX : KE$.

LEMME II. De la proportion du Lemme précédent, Newton déduit celle-ci, $XY : AK :: XY + CX$ ou $CY : AK + KE$, qui fait son Lemme II. Mais on remarquera que cette proportion n'est vraie que pour les figures 3 et 4, car dans la figure 5, $CY$ au lieu d'être la somme des lignes $XY + CX$, en est la différence. Donc, en soustrayant dans la proportion du Lemme premier, on aura, $XY : AK :: XY - CX : AK - KE$, ou bien $XY : AK :: CY : AK - KE$, et ce sera la proportion du Lemme II pour la figure 5.

LEMME III. Si on achevait les circonférences dans les figures 3, 4 et 5, on verrait que pour les fig. 3 et 4, $KY + KC$ et $CY$ sont deux sécantes extérieures, et que $KY - CK$ et $XY$ sont les parties de ces sécantes hors du cercle; et pour la fig. 5, les sécantes sont $KY + CK$ et $XY$, et leurs parties hors du cercle, $KY - CK$ et $YC$. Donc on a pour ces trois figures la proportion, $CY : KY + CK :: KY - CK : XY$. Ensuite, si on se rappelle que (*par const.*) $EY = AC = BC$, on verra que, pour *les figures* 3 et 4, on a $KY - CK = KE - BK$, et $KY + CK = KE + AK$. Donc, en substituant à la place de $KY - CK$, et de $KY + CK$, leurs valeurs dans la proportion $CY : KY + CK :: KY - CK : XY$, elle deviendra, $CY : KE + AK :: KE - BK : XY$. On a (*par le deuxième Lemme*) pour les mêmes figures, $CY : KE + AK :: XY : AK$; donc on aura aussi, $KE - BK : XY :: XY : AK$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Voilà la proportion du Lemme III, démontrée pour les 3e. et 4e. figures.

Quant à la cinquième figure, on a (*par const.*) $KY + KE = AK + CK$, d'où l'on tire, $KY - CK = AK - KE$; et aussi, (*par construction*) $KY + KE$ ou $EY = BC$. D'où $KY + KE + CK = BC + CK = BK$. Donc $KY + CK = BK - KE$; donc, en substituant à la place de $KY - CK$, et de $KY + CK$, leurs valeurs, dans la proportion commune à toutes ces figures, $CY : KY - CK :: KY + CK : XY$, elle deviendra, pour la 5e. figure, $CY : AK - KE :: BK - KE : XY$. Or, la proportion du Lemme II, pour cette 5e. figure est, $XY : AK :: CY : AK - KE$, donc, à cause de l'égalité des rapports, on aura, $BK - KE : XY :: XY : AK$. On voit donc que, pour la 5e. figure, la proportion du troisième Lemme est différente de celle qui se rapporte aux 3e. et 4e. figures.

Faisons quelques observations sur ces trois figures. Je dis, 1°. que dans le cas où le point $K$ tombe hors des points $A$ et $B$, comme dans les figures 3 et 4, il est impossible d'inscrire entre les lignes $AX$ et $CX$ et leurs prolongemens, plus d'une droite $EY$ égale à $AC$ (outre la droite $AC$ elle-même qui s'y trouve inscrite, mais qu'on ne doit pas compter), avec la condition que cette droite $EY$ passera par le point $K$. En effet, puisque le point $K$ est hors des points $A$ et $B$, par la même raison il est hors des points $C$ et $A$, donc il ne peut se trouver que dans l'angle supplément de l'angle $CXA$; or, l'angle $CXA$ devant toujours être aigu, par une conséquence de la construction, comme je vais le prouver, il s'en suit que son supplément sera toujours obtus. Prouvons cela d'abord pour la figure 3. L'angle $KCX$ est toujours aigu, puisqu'il est

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

formé par un diamètre et par une corde, donc son supplément *ACX* est toujours obtus, et à plus forte raison l'angle *AXY*, ou son égal *CXF*. Donc toute ligne qu'on voudrait inscrire entre les droites *CX* et *AX* dans l'angle *CXF*, avec la condition de passer par le point *K*, sera plus grande que le diamètre, et à plus forte raison plus grande que $CA = CB$, qui n'est qu'une partie du rayon. Il n'est pas besoin de dire qu'il est impossible de l'inscrire dans l'angle *AXY*. Donc, dans la figure 3, on ne peut inscrire que la seule ligne *YE* égale à *AC*. On démontrerait de même, dans la figure 4, où le point *K* est hors des points *A* et *B*, qu'il est impossible d'inscrire dans l'angle obtus *YXA*, et à plus forte raison dans son opposé au sommet *EXC*, une ligne égale à *AC*, et qui passe par le point *K*, donc on ne pourra inscrire que la seule ligne *EY*. Mais dans la figure 5, où le point *K* se trouve entre les points *B* et *A*, il tombe nécessairement, ou entre les points *B* et *C*, ou entre les points *C* et *A*, mais ces deux cas reviennent au même. Supposons donc qu'il tombe, comme dans la figure, entre *C* et *A*. Alors, le point *K* tombant dans l'angle *CXA*, on peut d'abord inscrire dans ce même angle, outre la ligne *CA*, une autre ligne qui lui soit égale *YE* (excepté dans le cas très-particulier, où la ligne *CA* serait la ligne inscriptible la plus courte possible), et il est évident qu'on peut inscrire dans les angles $Y''XA$ et $YXE'$ des lignes depuis zéro jusqu'à l'infini, donc on peut y inscrire des lignes égales à *CA*. Concluons donc que les figures 3 et 4 ne pouvant recevoir qu'une seule inscrite égale à *AC*, elles ne donneront aussi qu'une seule racine *XY*. Ce sont donc ces deux figures qu'il faudra employer pour construire les équations cubiques de cette forme, $x^3 + qx \pm r = 0$, qui n'ont jamais qu'une seule

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

racine réelle. Mais comme on peut, dans la figure 5, inscrire trois lignes égales à $AC$, qui sont $EY$, $E'Y'$, $E''Y''$, il s'en suit qu'elles détermineront trois racines, $XY$, $XY'$, $XY''$. C'est donc cette figure qu'il faudra employer pour construire les équations de cette forme, $x^3 - qx \pm r = 0$, lorsque toutes leurs racines sont réelles.

Construisons ici une équation de cette dernière espèce pour servir d'exemple.

Soit l'équation $x^3 - qx + r = 0$, qu'il s'agit de construire. J'emploie donc la figure 5. Le premier Lemme, pour les figures 3, 4 et 5, étant $XY : AK :: CX : KE$, j'en tire l'équation... $KE \times XY = CX \times AK$. Et le troisième Lemme, pour la 5^e^. figure, étant $BK - KE : XY :: XY : AK$, je multiplie les deux termes du premier rapport par $XY$, ce qui donne $BK \times XY - KE \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en substituant pour $KE \times XY$, sa valeur prise dans l'équation que nous venons de trouver, la proportion deviendra, $BK \times XY - CX \times AK : \overline{XY}^2 :: XY : AK$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, nous aurons, $BK \times AK \times XY - CX \times \overline{AK}^2 = \overline{XY}^3$. Mais Newton a fait, par construction, $XY = x$, $AK = n$, $BK = \frac{q}{n}$, et $CX = \frac{r}{n^2}$. Donc, en substituant toutes ces valeurs dans l'équation, elle deviendra, $\frac{q}{n} \times n \times x - \frac{r}{n^2} \times n^2 = x^3$, ou bien $qx - r = x^3$, et enfin, $x^3 - qx + r = 0$; et cette construction s'applique mot pour mot à l'équation à laquelle Newton arrive, lorsqu'il partage un angle en trois parties égales (*Voyez page 79, Tome II*).

NOTE

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (76), *pour la page 64. Tome II.*

Voici comment nous arriverons à cette proportion de l'auteur; élevons au quarré tous les termes de la proportion, $KE : CX :: CY : KE - KB$, nous aurons, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: \overline{CY}^2 : (KE - KB)^2$; mais nous avons vu que $\overline{CY}^2 = (KY + CK)(KY - CK)$, et que $KY + CK = KE + AK$, et que $KY - CK = KE - BK$; donc, en substituant toutes ces nouvelles valeurs dans la proportion des quarrés, elle deviendra, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: (KE + AK)(KE - BK) : (KE - BK)^2$, et en divisant le dernier rapport par $KE - BK$, il vient enfin, $\overline{KE}^2 : \overline{CX}^2 :: KE + AK : KE - BK$, qui est la proportion de Newton.

## NOTE (77), *pour la page 78. Tome II.*

Il est facile de prouver que les quatre lignes $KA$, $XY$, $KE$, $CX$ sont en proportion continue, ou qu'on a, $KA : XY :: XY : KE :: KE : CX$. En effet, l'équation à construire étant $x^3 - a^2 b = 0$, elle n'a qu'une racine réelle, et par conséquent il faudra, d'après ce qui a été dit dans la Note 75, employer pour la construire, ou la 3e. ou la 4e. figure de la planche IX. Or, par le Lemme premier de la page 60, tome II, on a, $XY : AK :: CX : KE$, ou, bien $AK : XY :: KE : CX$, et pour ces deux figures, le IIIe. Lemme de la même page est, $KE - BK : XY :: XY : AK$. Mais, dans la construction générale, Newton a fait, $BK = \frac{q}{n}$, et comme dans notre exemple, $q = 0$, il s'en suit que $BK$ doit aussi être



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

zéro, donc la proportion du Lemme III devient, pour ce cas, $KE : XY :: XY : AK$; or, cette dernière proportion et celle du premier Lemme ont un même rapport, donc on a, comme le dit Newton, $AK : XY :: XY : KE :: KE : CX$.

## NOTE (78), *pour la page* 79. *Tome II.*

Cette figure 3 de la planche X est la même que la fig. 7 de la planche IX, si on suppose dans cette dernière $BK = 0$.

En effet, le premier Lemme démontré, page 66, tome II, et qui se rapporte à la fig. 7 de la planche IX, est, $CE : AK :: CX : KY$; et le troisième Lemme, démontré page 68, tome II, pour la même fig. est, $BY : CE :: CE : AK$. Mais dans la fig. 7 de la planche IX on a, $BY = KY \pm BK$, selon que $B$ tombe au-delà de $K$ par rapport à $Y$, ou entre $Y$ et $K$; et puisque dans la fig. 3 de la planche X, $BK = 0$, il s'en suit que $BY = KY \pm BK$, se réduit à $BY = KY$. Donc les deux proportions précédentes deviendront, $AK : CE :: KY : CX$, et $AK : CE :: CE : KY$, (en mettant dans la seconde proportion $KY$ au lieu de $BY$). Donc, à cause du rapport commun, on aura, $AK : CE :: CE : KY :: KY : CX$, ou $\frac{1}{2}KG$. C. Q. F. D.

## NOTE (79), *pour la page* 80. *Tome II.*

Pour construire l'équation $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, Newton fait usage du Théorême qu'il a donné, page 59, tome II, pour construire les équations cubiques par le moyen d'une droite donnée de position et d'une conchoïde. Et comme l'équation proposée est de la forme $x^3 - qx + r = 0$, il est évident, d'après ce qui a été dit dans la Note 75, qu'il faut employer la 5$^e$. fig. de la planche IX,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et par conséquent aussi les Lemmes qui ont rapport à cette figure, et qui ont été démontrés dans la même Note 75. En y faisant un peu d'attention, on verra que la fig. 5 de la planche IX deviendra la fig. 5 de la planche X, en supposant, dans la première, $AK = a$, $BK = 3a$, ce qui donne, $AC = 2a$, et $CK = a$. Dans ce cas, le point $A$ tombera dans la circonférence du cercle $CX$, et rendra cette figure parfaitement identique avec la fig. 5 de la planche X. Nous pouvons donc appliquer à celle-ci les Lemmes qui ont été faits pour la première, c'est-à-dire les Lemmes de la page 60, tome II. Or, le premier Lemme donne, $XY : AK :: CX : KE$, d'où $XY \times KE = AK \times CX$, et le troisième Lemme pour la 5e. fig. de la planche IX étant, $BK - KE : XY :: XY : AK$ (*voyez la Note* 75), on aura, en multipliant les deux termes du premier rapport par $XY$, $BK \times XY - KE \times XY : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en substituant pour $KE \times XY$, sa valeur $CX \times AK$ trouvée plus haut, j'aurai, $BK \times XY - CX \times AK : \overline{XY}^2 :: XY : AK$, et en faisant les produits des extrêmes et des moyens, il vient, $BK \times XY \times AK - CX \times \overline{AK}^2 = \overline{XY}^3$, et en mettant pour $XY$, $AK$, $BK$, $CX$, leurs valeurs analytiques, qui sont respectivement $x$, $a$, $3a$, et $b$, l'équation devient, $3a \times a \times x - ba^2 = x^3$, ou bien $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, équation qu'il fallait construire.

Maintenant les deux cercles $ADEB$, $CXA$ (*Fig.* 4 *et* 5, *Pl.* X) étant égaux (*par const.*), ainsi que les cordes $AB$, $CX$, et de plus ayant appelé $AD$, ou $AF$, ou $BH$, $x$, et trouvé que $XY$ est aussi égal à $x$, il s'en suit que $XY = BH$, donc l'angle $XKY =$ l'angle $BCH = \frac{1}{3} BCA$.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (80), *pour la page* 82. *Tome II.*

Il est bien aisé de voir que la fig. 7 de la planche X n'est autre chose que la fig. 7 de la planche IX, dans laquelle on aurait donné des valeurs particulières aux lignes $AK$, $BK$, $CX$, etc.; donc le Théorême général et les Lemmes qui ont été démontrés (pages 65, 66 et 67, tome II.) pour la fig. 7 de la planche IX, doivent s'appliquer à la fig. 7 de la planche X.

Or, le premier Lemme, pour la fig. 7 de la planche IX, donne la proportion, $CE : AK :: CX : KY$, d'où je tire $KY = \frac{AK \times CX}{CE}$. Actuellement $KA$ et $KB$ étant regardées comme des quantités positives, $BY$ doit être regardée comme une quantité négative. On a donc $BK - KY = -BY = BK - \frac{AK \times CX}{CE}$, ou bien..... $BY = \frac{AK \times CX}{CE} - BK$. Mais par le troisième Lemme (tome II, page 68) on a, $BY : CE :: CE : AK$, ou bien............. $\frac{AK \times CX}{CE} - BK : CE :: CE : AK$, et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, il vient, $\frac{\overline{AK}^2 \times CX}{CE} - BK \times AK = \overline{CE}^2$, ou bien, en multipliant tout par $CE$, $\overline{AK}^2 \times CX - BK \times AK \times CE = \overline{CE}^3$. Et comme $CE$ et $CX$ sont situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la droite $BK$, il en résulte que si l'une est prise positivement, l'autre doit l'être négativement; il faudra donc changer le signe du terme où se trouve $CX$, ou bien changer les signes des termes qui contiennent des puissances impaires de $CE$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et le résultat sera toujours le même. Je m'en tiens donc au premier changement, et j'ai, $-\overline{AK}^2 \times CX - BK \times AK \times CE = \overline{CE}^3$. Et en mettant pour $AK$, $BK$, $CX$, et $CE$, leurs valeurs analytiques respectives, $a$, $-3a$, $b$, et $x$, l'équation deviendra, $-a^2b + 3a^2x = x^3$, ou bien $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, équation qu'il fallait construire.

## NOTE (81), *pour la page* 83. *Tome II.*

Voici comment on peut démontrer cette construction de Newton.

J'achève le cercle $BF$ (*Fig.* 15 *pour les Notes*) dont le centre est en $D$; je prolonge $GA$ jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle en $R$; je tire par le centre $D$ la droite $GO$, ensuite je tire $GE$ qui est le rayon du cercle $CG$. Maintenant la Géométrie Élémentaire me fournit ces trois équations, (1) $AR \times AF = \overline{AB}^2$. (2) $GF \times GR = GM \times GO$. Et (3) $\overline{GE}^2 + \overline{GA}^2 = 2\overline{GD}^2 + 2\overline{AD}^2$.

L'équation (2) peut s'écrire ainsi, $GF(GF + AF + AR) = GM(GM + 2MD)$, ou bien, (4) $\overline{GF}^2 + GF \times AF + GF \times AR = \overline{GM}^2 + 2GM \times MD$.

Et l'équation (3) est la même chose que $\overline{GE}^2 + (GF + AF)^2 = 2(GM + MD)^2 + 2\overline{AD}^2$, ou bien, (5) $\overline{GE}^2 + \overline{GF}^2 + 2GF \times AF + \overline{AF}^2 = 2\overline{GM}^2 + 4GM \times MD + 2\overline{MD}^2 + 2\overline{AD}^2$. Je tire de l'équation (1), $AR = \frac{\overline{AB}^2}{AF}$, je substitue cette valeur de $AR$ dans l'équation (4), et elle devient, $\overline{GF}^2 + GF \times AF + GF \times \frac{\overline{AB}^2}{AF} = \overline{GM}^2 +$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$2GM \times MD$, ou bien $\overline{GF}^2 \times AF + GF \times \overline{AF}^2 + GF \times \overline{AB}^2 = AF \times \overline{GM}^2 + 2AF \times GM \times MD$. Et en transposant tous les termes d'un même côté, (6) $AF \times \overline{GM}^2 + 2AF \times GM \times MD - AF \times \overline{GF}^2 - GF \times \overline{AF}^2 - GF \times \overline{AB}^2 = 0$.

Je transpose également tous les termes de l'équation (5) dans un seul membre, et j'ai, (7) $2\overline{GM}^2 + 4GM \times MD + 2\overline{MD}^2 + 2\overline{AD}^2 - \overline{GE}^2 - \overline{GF}^2 - 2GF \times AF - \overline{AF}^2 = 0$.

Je multiplie l'équation (6) par 2, et l'équation (7) par $AF$, la première devient, (8) $2AF \times \overline{GM}^2 + 4AF \times GM \times MD - 2AF \times \overline{GF}^2 - 2GF \times \overline{AF}^2 - 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$; et la seconde devient. .. (9) $2AF \times \overline{GM}^2 + 4AF \times GM \times MD + 2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{GE}^2 - AF \times \overline{GF}^2 - 2GF \times \overline{AF}^2 - \overline{AF}^3 = 0$.

Ensuite je retranche l'équation (8) de l'équation (9), et le reste est, (10) $2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{GE}^2 + \overline{GF}^2 \times AF - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$.

Or $\overline{GE}^2 = 4\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2$, et en substituant dans l'équation (10), elle deviendra, $2AF \times \overline{MD}^2 + 2AF \times \overline{AD}^2 - 4AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{AC}^2 + AF \times \overline{GF}^2 - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$, qui se réduit à...., $2AF \times \overline{MD}^2 - 2AF \times \overline{AD}^2 - AF \times \overline{AC}^2 + AF \times \overline{GF}^2 - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$, ou bien, à cause de $2\overline{MD}^2 - 2\overline{AD}^2 = 2\overline{AB}^2$... (11) $AF(2\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{GF}^2) - \overline{AF}^3 + 2GF \times \overline{AB}^2 = 0$. Et en substituant dans la quantité, $2\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{GF}^2$, à la place de $2\overline{AB}^2$,

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$-\overline{AC}^2$, et $\overline{GF}^2$ leurs valeurs analytiques respectives, $2a^2$, $-2a^2-\frac{b^2}{4}$, $+\frac{b^2}{4}$, elle deviendra, $2a^2-2a^2-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}=0$. Donc l'équation (11) se réduit à, $-\overline{AF}^3+2GF\times\overline{AB}^2=0$, ou bien $\overline{AF}^3-2GF\times\overline{AB}^2=0$. Mais (*par const.*) $GF=\frac{AK}{2}$, donc $\overline{AF}^3-\overline{AB}^2\times AK=0$, ou bien $\overline{AF}^3=\overline{AB}^2\times AK$; d'où l'on tire, $\overline{AB}^2:\overline{AF}^2::AF:AK$. Donc $AF$ est la première de deux moyennes proportionnelles entre $AB\,(a)$ et $AK\,(b)$. C. Q. F. D.

## NOTE (82), *pour la page* 93. *Tome II.*

Newton dit que le grand axe est à son paramètre $::BE:BC$, ou bien $::FI:FH$. En effet, il a trouvé précédemment la proportion $BD:BE::2GR:2GS$, qui devient, en élevant tout au quarré, $\overline{BD}^2:\overline{BE}^2::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$. Or (*par const.*) $\overline{BD}^2=BC\times BE$, donc $BC\times BE:\overline{BE}^2::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$, ou bien $BC:BE::4\overline{GR}^2:4\overline{GS}^2$. Et on sait que dans l'ellipse le paramètre d'un diamètre quelconque est une troisième proportionnelle à ce diamètre et à son conjugué; par conséquent, $2GS:2GR::2GR:p$ (en appelant $p$, le paramètre du diamètre $2GS$), d'où l'on tire $p=\frac{4\overline{GR}^2}{2GS}$, et........ $\frac{p}{2GS}=\frac{4\overline{GR}^2}{4\overline{GS}^2}$, ce qui donne la proportion, $4\overline{GS}^2:4\overline{GR}^2::2GS:p$, donc $2GS:p::BE:BC$. Mais Newton a fait, $BE:BC::FI:FH$, donc enfin $2GS:p::BE:BC::FI:FH$, et cette proportion contient l'énoncé même de l'auteur.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## NOTE (83), *pour la page 93. Tome II.*

L'équation de l'ellipse, en comptant les abscisses du centre, est, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, ou bien $\frac{a^2}{b^2} \times y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, ou bien, pour notre figure, $\frac{4\overline{GS}^2}{4\overline{GR}^2} \times \overline{T\gamma}^2 = \overline{GS}^2 - \overline{LT}^2$. Mais par la Note précédente on a, $4\overline{GS}^2 : 4\overline{GR}^2 :: 2GS : p :: FI : FH$; donc.... $\frac{4\overline{GS}^2}{4\overline{GR}^2} = \frac{FI}{FH}$, donc, en substituant dans l'équation ci-dessus, elle devient, $\frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2 = \overline{GS}^2 - \overline{LT}^2$. C. Q. F. D.

## NOTE (84), *pour la page 96. Tome II.*

Il sera facile de déduire cette dernière proportion de ces deux-ci, que Newton a écrites deux lignes plus haut. La première est, $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : 2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. La seconde est, $\gamma X : 2BC :: AX : \gamma X - 2AF$. Dégageons, par le moyen de cette dernière proportion, la valeur de $AX$, et nous aurons, $AX = \frac{\gamma X(\gamma X - 2AF)}{2BC}$, et en substituant cette valeur de $AX$ dans la première proportion, elle deviendra, $\gamma X : 2BC :: 2BC \times 2FI : \gamma X(\gamma X - 2AF) - 2BC \times 2AB$, et c'est la proportion même de Newton.

*Fin des Notes de l'Arithmétique Universelle.*

SUPPLÉMENT

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# SUPPLÉMENT
## AUX NOTES
## SUR L'ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE.

*Méthode pour construire les équations du troisième et du quatrième degrés par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle.*

NEWTON avait promis de donner la construction des équations du quatrième degré ; mais comme il n'a pas exécuté sa promesse, le lecteur ne sera peut-être pas fâché de trouver ici une méthode très-facile de construire les équations du troisième et du quatrième degrés, par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle. C'est à Descartes qu'est due l'invention de cette méthode.

Une équation quelconque du troisième degré peut toujours être ramenée à cette forme $x^3 \pm px \pm q = 0$ ; mais afin que tous ses termes soient homogènes, on voit que $p$ et $q$ représentant chacun une ligne, il faut multiplier le second terme par une quantité $a$ prise pour unité, et le troisième par $a^2$, de sorte que l'équation sera de cette forme, $x^3 \pm apx \pm a^2q = 0$. Telle est la forme à laquelle on peut rappeler toute équation du troisième degré ; et c'est cette équation qu'il faut construire par le moyen d'une parabole donnée dont le paramètre est $a$. On pourra objecter que ce n'est point avec une



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

parabole donnée quelconque que je construis mon équation, puisque je suppose que son paramètre est $a$, qui est une quantité de mon équation. A cela je réponds que la parabole étant donnée avec son paramètre $a$, je change le coëfficient quelconque $de$ du second terme de mon équation, en un autre qui ait $a$ pour un de ses facteurs, ainsi je fais $de = ap$. De même le troisième terme étant $fgh$, je le transforme en un autre $a^2 q$. Ainsi je ne construis pas la parabole pour l'équation, mais je transforme l'équation pour la parabole.

Soit donc la parabole donnée $FAG$ (*Fig.* 16 *pour les Notes*) dont le paramètre est $a$, et soit l'équation à construire ramenée à cette forme $x^3 \pm apx \pm a^2 q = 0$. Je cherche le centre et le rayon du cercle dont les points d'intersection avec la parabole donneront les racines de l'équation. Pour cela je prends sur l'axe $AZ$, une partie $AC = \frac{1}{2} a$, ensuite sur le même axe une partie $= \frac{1}{2} p$ que je porte de $C$ vers $A$, si le second terme est $+ apx$, ou de $C$ vers $Z$, s'il est $- apx$. Supposons que ce dernier cas ait lieu, je porte donc $\frac{1}{2} p$ de $C$ en $D$, et de ce point $D$, j'élève sur l'axe une perpendiculaire $= \frac{1}{2} q$ vers la droite, si le troisième terme est $- a^2 q$, et vers la gauche, s'il est $+ a^2 q$. Supposons ce dernier cas, et que l'équation soit... $x^3 - apx + a^2 q = 0$, je porte donc $DE = \frac{1}{2} q$, à gauche de l'axe, et du point $E$ comme centre, avec $EA$ comme rayon, je décris un cercle, et des points d'intersection $G$, $L$, $F$, j'abaisse sur l'axe les perpendiculaires $GK$, $LS$, $FP$, et celles de ces perpendiculaires qui se trouvent à droite de l'axe, telles que $GK$, $LS$ seront les racines positives de l'équation, celles qui se trouvent à gauche, comme $FP$, en seront les négatives. Pour le prouver, il suffira de démontrer que chacune de ces perpendiculaires reproduit l'équation proposée.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Prouvons-le d'abord pour $GK$. On a $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, $DE = \frac{1}{2}q$, $AK = \frac{x^2}{a}$, $CK = \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{a}$, $DK = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{a}$, $\overline{EG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{EH}^2$, ou $\overline{EG}^2 = \overline{GH}^2 + (ED + DH)^2 = \overline{GH}^2 + \overline{ED}^2 + 2ED \times DH + \overline{DH}^2$, et en substituant les valeurs analytiques et observant que $GH = DK$, et que $DH = GK$, il vient.......
$\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{ap}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{px^2}{a} - x^2 + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx + x^2$.
D'un autre côté, $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p)^2 + \frac{q^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$, mais $AE = EG$, donc $\frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} = \frac{1}{4}p^2 + \frac{ap}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + qx + \frac{q^2}{4}$; équation qui donne, toutes réductions faites, $\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = 0$, ou bien $x^4 - apx^2 + a^2qx = 0$, ou enfin $x^3 - apx + a^2q = 0$. On trouverait de même, que la perpendiculaire $SL$ reproduit l'équation, ainsi que la perpendiculaire $FP$, en prenant toutefois cette dernière avec le signe $-$.

Donc on peut construire toutes les équations du troisième degré avec une parabole donnée.

Pour construire, par le moyen de la même parabole, les équations du quatrième degré, on les mettra sous cette forme.....
$x^4 \pm apx^2 \pm a^2qx \pm a^3r = 0$, ce qui est toujours possible. Ensuite on trouve le centre du cercle comme pour l'équation du troisième degré; mais, pour déterminer la longueur du rayon, voici ce qu'il faut faire de plus. Du quarré $\overline{AE}^2$ retranchez le rectangle $ar$, si le quatrième terme de la proposée est $+a^3r$, ou au quarré $\overline{AE}^2$ ajoutez



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

le rectangle $ar$, si le quatrième terme est $-a^3 r$, et la racine quarrée de la différence ou de la somme sera le rayon du cercle dont les points d'intersection avec la parabole feront connaître les racines de l'équation.

Soit donc la parabole donnée *FAGL* (*Fig.* 17 *pour les Notes*) et l'équation proposée $x^4 \pm apx^2 \pm a^2 qx \pm a^3 r = 0$. Je prends sur l'axe $AZ$ une partie $AC = \frac{1}{2} a$, ou un demi-paramètre de la parabole; je porte de $C$ vers $A$ une ligne $= \frac{1}{2} p$, si le second terme est $+apx^2$, ou dans le sens contraire, si le second terme est $-apx^2$, je suppose que ce dernier cas a lieu, de sorte que $CD = \frac{1}{2} p$; et j'élève au point $D$ perpendiculairement à l'axe, une ligne $ED = \frac{1}{2} q$. Je porte $ED$ à droite de l'axe, si le troisième terme de l'équation est $-a^2 qx$, et à gauche, s'il est $+a^2 qx$; je suppose ce dernier cas, et par conséquent le centre $E$ du cercle sera à la gauche de l'axe; pour en avoir le rayon, je supposerai de plus que le dernier terme de l'équation est $+a^3 r$, et par conséquent, d'après ce qui a été dit, il faudra retrancher le rectangle $ar$ du quarré $\overline{AE}^2$, ou, ce qui revient au même, le rayon $ER$ sera une moyenne proportionnelle entre $AE + \sqrt{ar}$ et $AE - \sqrt{ar}$. Soit donc le cercle décrit $RGLFQ$; je dis que si des points d'intersection $G, L, F, Q$ avec la parabole, on abaisse sur l'axe, des perpendiculaires, elles seront les racines de l'équation proposée; que les perpendiculaires à la droite de l'axe seront les racines positives, et celles qui se trouvent à la gauche, les racines négatives. Prouvons donc qu'une quelconque de ces perpendiculaires reproduit l'équation donnée.

L'équation à construire d'après toutes les suppositions que nous avons faites, est $x^4 - apx^2 + a^2 qx + a^3 r = 0$. Et nous avons

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

$CD = \frac{1}{2}p$; $ED = \frac{1}{2}q$; et si du point d'intersection $G$, j'abaisse la perpendiculaire $GK$, j'aurai $AK = \frac{x^2}{a}$ ($GK$ étant $x$); $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; donc $DK = AD - AK = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p - \frac{x^2}{a}$; $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p)^2 + \frac{1}{4}q^2$; et le rayon $\overline{ER}^2 = \overline{AE}^2 - ar = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}q^2 - ar$. D'un autre côté, $\overline{EG}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{DK}^2 + (ED + DH)^2 = \overline{DK}^2 + \overline{ED}^2 + 2ED \times DH + \overline{DH}^2$, ou bien en mettant les valeurs analytiques, $\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - x^2 - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx + x^2$, qui se réduit à $\overline{EG}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx$.

Mais $EG = ER$, donc $\frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{q^2}{4} + qx = \frac{1}{4}a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}q^2 - ar$; et en effaçant ce qui se détruit, on a, $-\frac{px^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + qx = -ar$, ou bien $x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$, qui est l'équation proposée, et dans laquelle $x$ représente $GK$. On reproduirait de même l'équation, en calculant les autres perpendiculaires.

Donc on peut construire une équation quelconque du quatrième degré par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle.

FIN DU TOME SECOND.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# TABLE DES MATIÈRES

## CONTENUES DANS LE TOME PREMIER.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*la*

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Fin de la Table du Tome premier.



IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# TABLE DES MATIÈRES

## CONTENUES DANS LE TOME SECOND.



Fin de la Table du Tome second.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE DE STOUPE, AN X

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

## *Fautes à corriger dans le Tome Premier.*

Page 78, ligne 17, *afin d'en dégager*, lisez, *afin d'en éliminer.*

Page 144, ligne 20, au lieu de *par le double* qui se trouve dans quelques exemplaires, lisez, *par la moitié.*

Page 209, ligne 9, au lieu de *et à*, lisez, *est à.*

Page 227, ligne 6 de la Note, au lieu de $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$, lisez, $\sqrt{x} + \frac{a^3 \sqrt{x}}{b^3}$.

## *Tome II.*

Page 40, ligne dernière, effacez $- \frac{1}{2} p$ s.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

# ÉDITIONS PRINCIPALES DES OUVRAGES DE NEWTON.

ISAACI NEWTON Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. *Londini, Streater*, 1687, *in*-4°.

Eadem : Editio secunda. *Cantabrigiæ*, 1713, *in*-4°.

Eadem : Editio auctior. *Amstelodami*, 1714 et 1723, *in*-4°.

Eadem : Editio adhuc auctior, et ab autore emendata. *Londini*, *in*-4°, 1726.

Eadem, cum Commentariis LE SEUR et JACQUIER. *Genevæ*, 3 v. *in*-4°, 1739.

Eadem, *Coloniæ Allobrogum*, 3 vol. *in*-4°. 1760.

Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones et Differentias, 1716, *in*-4°, traduit en François par BUFFON, en 1740, *in*-4°.

Ejusdem Optice, sive de Reflectionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis Libri tres : Latinè reddidit SAMUEL CLARCKE. Accessère Enumeratio Curvarum tertii Ordinis, et Tractatus de Quadraturâ Curvorum. *Londini, Smith et Walford*, 1706, *in*-4°. *cum Tabulis æneis*.

Eadem ; Editio secunda auctior, omissis cæteris Tractatibus. *Londini*, 1719, *in*-4°. *cum Tabulis æneis*.

*Les Editions Angloises de l'*Optique *ont paru en* 1705 *et* 1718, *in*-8°.

Le même Traité d'Optique, traduit en François par COSTE. *Amsterdam, Humbert*, 1720, *in*-12, 2 *tom. fig.*

Le même Traité d'Optique etc. traduit en François par BEAUZÉE, 1787, 2 vol. *in*-8°.

Le même, etc. nouvelle Edition. *Paris, Montalant*, 1722. *in*-4°. *fig.*

Ejusdem Arithmetica universalis; cui accedit HALLEIANA, Æquationum Radices arithmeticas inveniendi methodus. *Cantabr.* 1707, *in*-8°.

Eadem : Editio secunda. *Londini, Sam. Toocke*. 1722, *in*-8°.

Eadem, cum Commentariis ANTONII LECCHI, 3 v. *in*-8°. *Mediolani*, 1752.

Eadem, cum Commentariis CASTILLIONEI, *Amstelodami*, 1760, *in*-4°.

ISAACI NEWTON Opuscula Mathematica et collecta a CASTILLONE. *Lausannæ* et *Genevæ*, 1744, 3 vol. *in*-4°.

Ejusdem Analysis Infinitorum a IONES ; cum enumeratione Curvarum tertii Ordinis et Quadraturâ, etc. *Londini*, 1711, *in*-4°.

Ejusdem Tractatus de Quadraturâ Curvarum. *Parisiis*, *in*-4°. *Edition que fit faire Montmor.*

Bernardi *Varenii*. Geographia generalis, in quâ affectiones generales Telluris explicantur; aucta ab ISAACO NEWTON. *Cantabrig.* 1681, *in*-8°.

Abrégé de la Chronologie de Newton, avec les Observations de Freret. *Paris*, 1725, *in*-12.

Le même, traduit en François, par GRANET, 1728, *in*-4°.

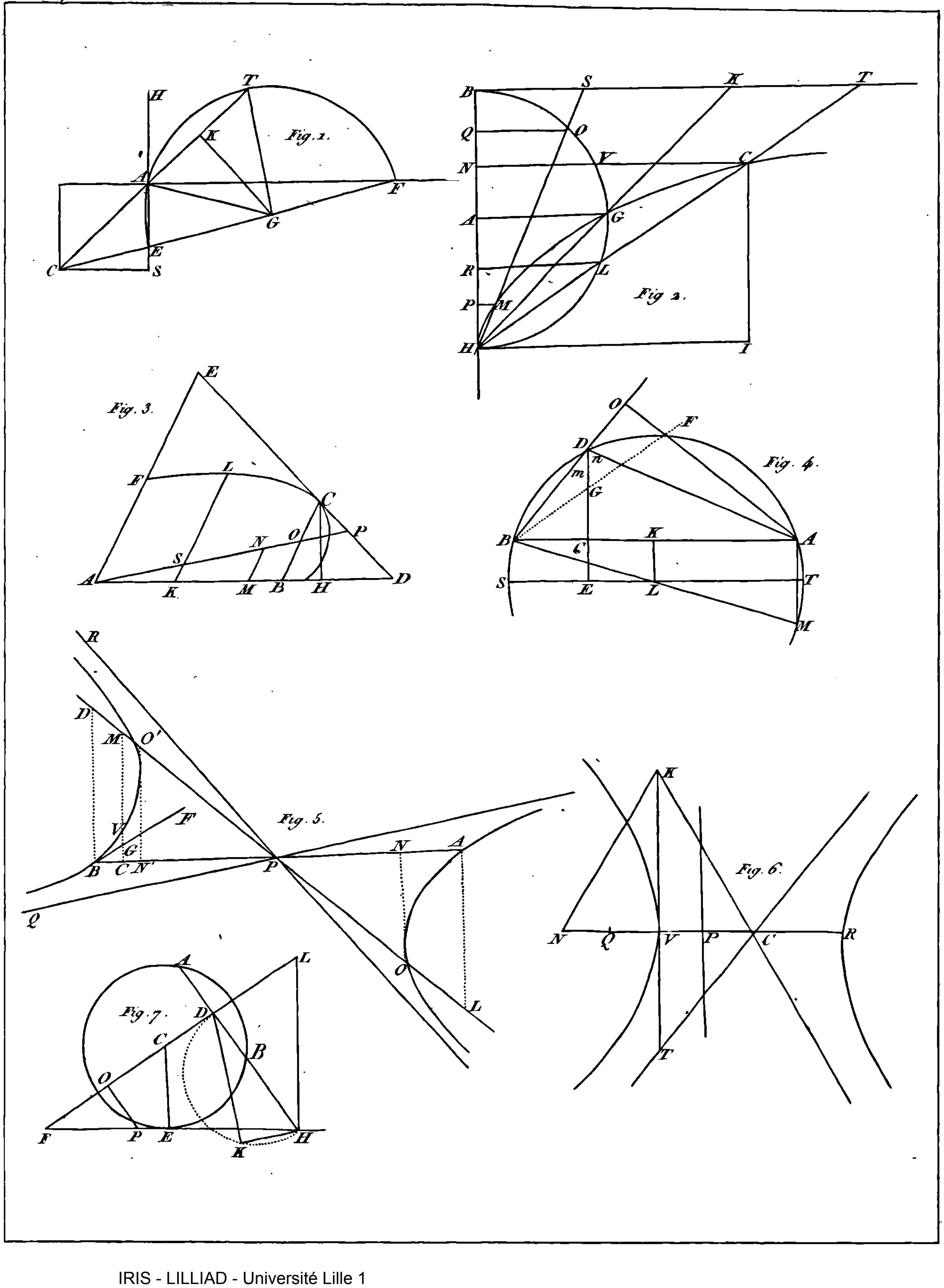
Réponse de NEWTON aux *Observations de Freret*, etc. avec une Lettre de L'ABBÉ CONTI, *Paris*, 1726, *in*-12.

Il y a encore plusieurs Lettres de Newton insérées dans le *Commercium epistolicum* DE COLLINS, et dans le Recueil de DES MAIZEAUX.

PEMBERTON a donné en Anglois *les Élémens de sa Philosophie neutonienne*, *in*-4°, traduits en François, et imprimés à *Amsterdam*, 1755.

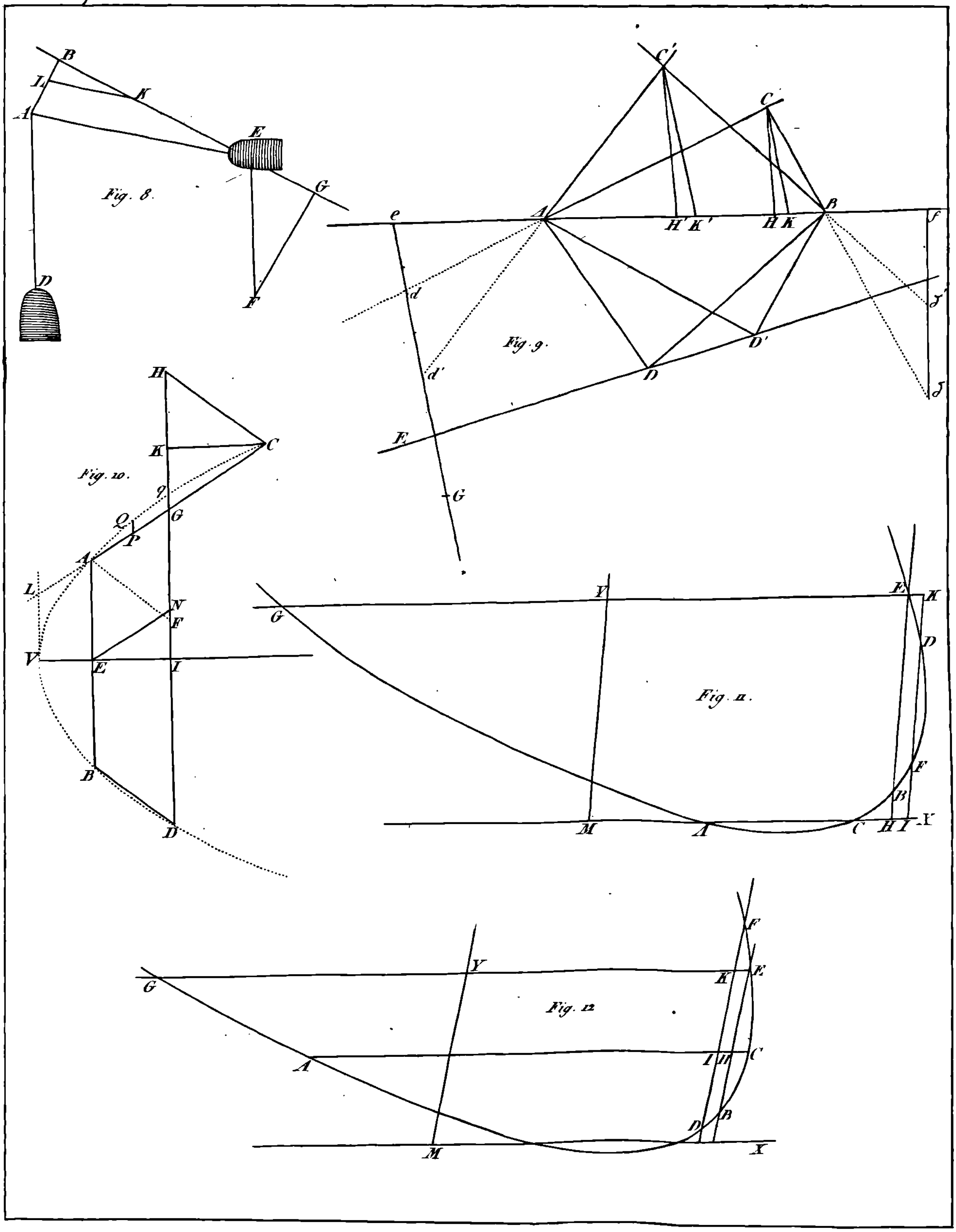
IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

*Pl. 1. pour les Notes.*



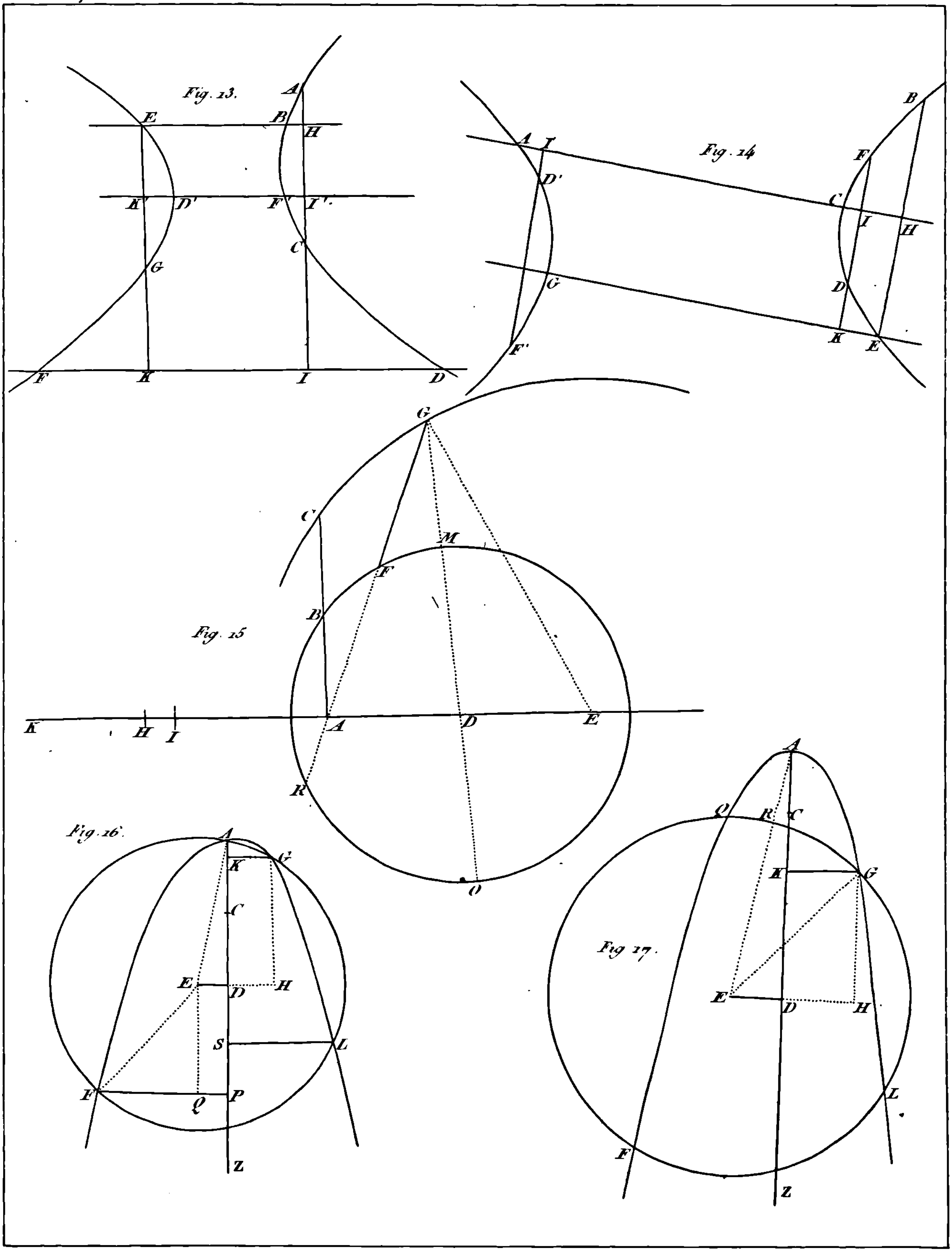

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Pl. 2. pour les Notes.




IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Pl. 3. pour les Notes.




IRIS - LILLIAD - Université Lille 1