

THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE

LE PRINCIPE
DE L'ÉQUIVALENCE

PAR

ÉMILE SCHWOERER



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

(Droits réservés).

**LE PRINCIPE
DE L'ÉQUIVALENCE**

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
49042 Quai des Grands-Augustins, 55.

THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉE

LE PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE

PAR

ÉMILE SCHWOERER



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS. IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

53, Quai des Grands-Augustins, 55.

(Droits réservés).

A

G.-A. HIRN

Eternelle reconnaissance

ÉMILE SCHWOERER

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION	9
PREMIÈRE PARTIE	11
<i>Phénomènes aérologiques.</i>	
DEUXIÈME PARTIE	21
<i>Phénomènes de la détente.</i>	
TROISIÈME PARTIE	35
<i>Données expérimentales.</i>	
QUATRIÈME PARTIE	41
<i>Discussion et conclusion.</i>	

LE PRINCIPE DE L'ÉQUIVALENCE

INTRODUCTION

Nous savons que la chaleur, en échauffant les corps solides, y surmonte une résistance colossale et qu'il s'y exécute, en conséquence, un travail fort grand aussi. Par ce fait, que nous disons travail, nous sous-entendons déplacement de molécules ou d'atomes. Toutefois, tant que l'échauffement du corps solide ne dépasse pas certaines limites, le déplacement d'atomes dont nous parlons n'amène pas de changements définitifs dans la structure, et lorsque le corps se refroidit, il rend intégralement la chaleur qu'il avait reçue, parce que le travail qui s'y était opéré s'effectue maintenant en sens contraire. Le refroidissement, comme l'échauffement, s'y fait, d'ailleurs, de proche en proche, en vertu de la plus ou moins grande conductibilité du corps.

La question change tout à fait lorsque nous passons aux corps liquides et, surtout, aux corps gazeux, dont les parties sont relativement très mobiles entre elles. Ici, l'échauffement, de même que le refroidissement, ne se fait plus uniquement de proche en proche. La dilatation et la contraction produisent,

en général, des mouvements internes dans la masse des corps ; la chaleur y est transportée, en quelque sorte, mécaniquement d'un point à un autre ; et pour les gaz, surtout, la chaleur restituée par refroidissement n'est plus nécessairement la même que celle qui avait été donnée pendant l'échauffement. La quantité restituée dépend ici, comme nous le savons, du mode suivant lequel s'exécute le travail mécanique inverse.

Ces considérations, très simples, sont de la plus haute importance, quant à l'examen des phénomènes dont la Nature nous offre le spectacle et qui sont intimement liés avec le principe de l'équivalence.

PREMIÈRE PARTIE

PHÉNOMÈNES AÉROLOGIQUES

Bien loin de nous occuper de toutes les manifestations de chaleur qui, à tous moments, se révèlent à nous, nous ne considérerons, dans ce qui va suivre, que celles qui sont ou la cause ou la conséquence de mouvements, de déplacements relatifs des particules et du travail mécanique qui résultent de l'action d'une température croissante et qui, dans la Nature, jouent un rôle important au point de vue des principes de la Thermodynamique.

Examinons d'abord les phénomènes tels qu'ils se présentent, en quelque sorte, à l'observation. Pendant très longtemps on a expliqué l'abaissement qu'on remarque dans la température de l'atmosphère, à mesure qu'on s'y élève, en disant que l'air des régions supérieures n'absorbe que peu les rayons solaires et perd ainsi par radiation vers l'espace céleste, dont la température est très basse, plus qu'elle ne reçoit à chaque instant du Soleil. Dans cette manière d'interpréter les phénomènes, c'est exclusivement au froid de l'espace qu'il faudrait attribuer la basse température des hautes régions de l'atmosphère.

Nous allons montrer que cette explication demande à être modifiée profondément, que les mouvements de toute espèce qui, par moments, entremêlent les couches de l'atmosphère, bien loin de provoquer une égalisation des températures, sont, au contraire, la cause la plus énergique du maintien de leur inégalité. La loi suivant laquelle la température de l'air diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface terrestre n'est connue encore qu'approximativement et sous une forme tout à fait empirique. Les observations aérologiques tendent même à nier l'existence d'une loi proprement dite et à ne laisser subsister que ce seul fait, à savoir que la température varie très irrégulièrement avec les hauteurs, tout en suivant une marche décroissante. Nous allons voir, cependant, qu'il existe bien réellement une loi de variation des températures, mais que cette loi relève de causes toutes différentes de celles qu'on lui attribuait autrefois.

Pour le faire comprendre, recourons à un appareil et à une expérience absolument irréalisables, mais, du moins, faciles à concevoir théoriquement. Supposons deux cylindres verticaux, parallèles, de très grande section et d'une hauteur telle que la partie supérieure se trouve à la limite même de l'atmosphère. Supposons que ces cylindres monstres, réunis à leurs extrémités par des coudes et mis en communication par un grand nombre de tubes intermédiaires, soient pleins d'air sec, ayant dans les couches inférieures la pression barométrique externe. Admettons que les parois de ces cylindres soient imperméables à la chaleur et que, au commencement de l'expérience, la température de l'air contenu dans notre appareil réponde, couche par couche, à celle de l'air externe.

Dans ces conditions, il est évident qu'il y aura continuelle-

ment équilibre entre les poids des deux colonnes d'air. Nous pourrons, à l'aide d'un disque ou piston que nous ferons jouer librement dans l'un des cylindres, faire passer l'air d'une des colonnes dans l'autre et *vice versa*, de façon que, au bout d'un certain nombre de coups de piston, toutes les couches d'air soient mêlées parfaitement les unes aux autres.

Au premier abord, on pourrait croire qu'il résultera de là une égalisation parfaite de la température dans toute l'étendue de nos colonnes.

Nous allons voir qu'il n'en sera nullement ainsi. Il est clair que, à mesure qu'une couche d'air s'élève dans un des cylindres, le poids de la colonne qu'elle supporte diminue; cette couche augmente donc de volume, elle se détend et cela, par hypothèse, sans addition ni soustraction de chaleur.

La loi d'équilibre adiabatique de cette couche sera

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha,$$

P étant la pression à laquelle est soumise la couche d'air après s'être élevée d'une hauteur H , et T_0 la température absolue initiale qui répondait à la pression

$$P_0 = B.$$

D'autre part, il se trouvera dans le second cylindre une couche qui, en poids, sera égale à la précédente et qui descendra à mesure que celle-ci montera.

Cette couche se trouvera de plus en plus comprimée; sa température s'élèvera ainsi de plus en plus, et, quand elle sera

arrivée au plan horizontal où se trouvait la première, on aura

$$T_0 = T' \left(\frac{P_0}{P'} \right)^{\alpha}$$

Lorsque nous aurons fait manœuvrer un nombre de fois suffisant notre piston, de façon à mêler parfaitement toutes les parties à températures d'abord quelconques et irrégulières, il s'établira, non une égalisation, mais une régularisation de température. Il s'établira ce que nous pouvons appeler un équilibre dynamique et définitif de température dont il est aisé de déterminer rigoureusement la loi.

Désignons par δ la densité de l'air à la pression P et à une hauteur H comptée à partir du niveau de la mer.

Lorsque H deviendra

$$H + dH,$$

la pression P diminuera de dP , et l'on aura

$$dP = - \delta dH.$$

Mais si Δ désigne la densité de l'air à la pression

$$P_0 = 0^m,760$$

et à la température

$$t_0 = 0 \text{ ou } T_0 = 272^{\circ},85,$$

on a

$$\delta = \Delta \left(\frac{P}{0,760} \right) \left(\frac{272,85}{T} \right) = 359,01 \Delta \left(\frac{P}{T} \right)$$

pour la valeur de δ à P et à T , et il vient

$$dP = - 359,01 \left(\frac{P}{T} \right) \Delta dH.$$

Dans nos deux cylindres, où l'air se trouve à l'état d'équilibre dynamique de température, nous avons vu qu'on a

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha.$$

Il en résulte

$$dP = - 359,01 \frac{P}{T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha} \Delta dH,$$

d'où

$$H = - \frac{T_0}{359,01 \Delta P_0^\alpha} \int P^{(\alpha-1)} dP.$$

En intégrant entre P_0 et P et supposant

$$H = 0$$

pour

$$P = P_0,$$

il vient, toute réduction faite,

$$H = \frac{T_0}{359,01 \alpha \Delta} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha \right].$$

Pour l'air sec, on a, en admettant pour le rapport des chaleurs spécifiques $\frac{C}{c}$ le nombre 1,3996 mesuré ci-après,

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1,3996} = 0,2855,$$

et, comme nous supposons P mesuré en colonne de mercure, il vient

$$\Delta = \frac{1,3932}{13596},$$

d'où il résulte enfin

$$H = 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} \right].$$

En substituant à

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855}$$

sa valeur tirée de

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855}$$

ou

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} = \frac{T}{T_0},$$

il vient

$$\begin{aligned} H &= 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] \\ &= 102,6 (T_0 - T), \end{aligned}$$

d'où

$$T = T_0 - \left(\frac{H}{102,6} \right).$$

Telles sont donc les deux lois qui, dans les conditions où nous nous sommes placé, expriment ce que nous avons appelé l'état d'équilibre dynamique des températures.

L'équation

$$T = T_0 - \left(\frac{H}{102,6} \right)$$

nous a montré que, dans ces conditions, la température de l'air baisserait d'environ 10° pour chaque 1000^m d'augmentation de hauteur au-dessus du sol. Ce chiffre a été observé dans les couches basses de l'atmosphère où, en raison de la rapide décroissance de la densité de l'air avec l'accroissement de la hauteur,

se trouve limitée la masse principale de notre océan aérien.

En effet, l'équation

$$H = 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} \right]$$

nous apprend que la moitié de la masse de l'atmosphère est comprise dans une zone verticale d'environ cinq kilomètres, hauteur qui correspond à la moitié de la pression barométrique. Cette dernière équation constitue, de fait, une nouvelle formule pour la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre; mais, comme nous le verrons dans ce qui va suivre, cette formule ne doit être considérée que comme approximative.

Il suffit de nous rappeler par quelle expérience fictive nous sommes arrivé à ce que nous avons nommé équilibre dynamique des températures, pour reconnaître que la loi des températures

$$T = T_0 - \left(\frac{H}{C} \right)$$

et, par conséquent aussi, celle des pressions

$$H = CT_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha \right],$$

ne peuvent être qu'approximativement et accidentellement réalisées.

L'air atmosphérique, en effet, tout d'abord, n'est pas sec comme nous l'avions supposé; la vapeur d'eau qu'il renferme tantôt s'y condense, tantôt s'y reforme, et ces phénomènes modifient forcément la relation primitive

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha.$$

C'est là un fait très important que nous allons bientôt étudier.

En second lieu, la radiation solaire modifie très énergiquement, mais très inégalement, la température des diverses couches atmosphériques. Il s'ensuit qu'il est impossible que la température diminue régulièrement avec l'accroissement des hauteurs, comme l'implique la loi ci-dessus et, d'ailleurs, comme on l'avait admis empiriquement.

Nos deux lois

$$H = CT_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha \right],$$

$$T = T_0 - \left(\frac{H}{C} \right)$$

sont donc des lois limites qui s'établissent d'autant plus approximativement que l'atmosphère est plus agitée dans ses mouvements ascendants et descendants, mais qui, sans cesse, sont troublées plus ou moins fortement.

En ce qui concerne la formule barométrique, ou

$$H = 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} \right],$$

dans laquelle T_0 et P_0 désignent la température absolue et la pression à la station inférieure et P la pression à la station supérieure, son exactitude ou son degré d'approximation dépend, comme celles de toutes les formules proposées, des conditions où se trouve l'atmosphère au moment où se font les observations. Par un temps clair, par une atmosphère limpide et sèche, elle donne des valeurs tout aussi approchées de H , en fonction de la pression barométrique, que n'importe quelle autre formule; c'est ce que nous avons pu vérifier maintes fois, et à diverses époques de l'année, pour des différences d'altitude de

près de mille mètres : les chiffres calculés concordaient, en effet, remarquablement avec les hauteurs déterminées trigonométriquement, lorsqu'on se servait de l'exposant 0,2855, tandis qu'avec l'exposant habituel 0,2908 ils variaient toujours d'une vingtaine de mètres en plus.

Nous avons présenté les diverses lois

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha,$$

$$T = T_0 - \left(\frac{H}{C} \right),$$

$$H = CT_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^\alpha \right],$$

comme des lois limites vers lesquelles tend la forme réelle des phénomènes, limites qui ne peuvent cependant jamais être atteintes qu'à peu près et temporairement.

Il n'est toutefois pas inutile de montrer que l'une ou l'autre de ces lois, la dernière par exemple,

$$H = 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} \right],$$

est, pour le moins, aussi juste que celle qu'on a déduite en partant de la loi de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC.

En posant

$$T_0 = 272^{\circ},85$$

ou

$$t_0 = 0$$

pour la température au niveau de l'océan, et

$$P_0 = 0,760,$$

$$P = 0$$

pour les pressions extrêmes, on trouve

$$H = 28\,000^m,$$

pour la hauteur limite de l'atmosphère. D'après la hauteur où deviennent visibles les étoiles filantes et les bolides, on a conclu que la limite de notre atmosphère est au moins à une centaine de kilomètres au-dessus du niveau de la mer. Notre valeur 28 000^m est donc quatre fois trop faible. Telle quelle, elle est cependant moins erronée que celle que donne la loi de MARIOTTE et qui n'est autre que

$$H = \infty.$$

L'origine de l'erreur qui frappe la loi

$$H = 102,6 T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855} \right]$$

est des plus claires. Pour établir cette loi, nous avons supposé l'atmosphère privée de vapeur d'eau. Or, la présence de cette vapeur non seulement modifie l'exposant 0,2855 et le nombre constant 102,6, mais modifie profondément, comme on va le voir, les températures des couches ascendantes.

DEUXIÈME PARTIE

PHÉNOMÈNES DE LA DÉTENTE

Dans un mémoire que nous avons présenté à l'Académie des Sciences, dans la séance du 4 juillet 1910, mémoire qui a été l'objet d'un rapport de M. Bouty (*Comptes rendus* du 1^{er} août 1910)¹, nous avons étudié particulièrement l'équilibre adiabatique de l'atmosphère, en insistant sur le rôle essentiel joué par la vapeur d'eau. Nous allons reprendre la question avec toute l'attention qu'elle mérite, et montrer que si notre atmosphère sert de manteau protecteur contre le froid de l'espace, ce n'est pas seulement à cause de son défaut de conductibilité, comme on l'avait admis autrefois.

Supposons qu'une masse quelconque M d'air sec soit renfermée dans un ballon à parois indéfiniment extensibles et parfaitement imperméables à la chaleur. Soient P_0 la pression que supporte actuellement cet air à la surface de la Terre et T_0 sa température absolue. Si, d'une manière quelconque, nous faisons monter graduellement ce ballon, l'air qu'il renferme,

¹ *Les Phénomènes thermiques de l'atmosphère*. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

se trouvant soumis à une pression décroissante, se détendra, croîtra en volume et, par cet accroissement, soulèvera, en fait, la colonne atmosphérique qui, à chaque hauteur, pèse encore sur lui; il s'exécutera, en un mot, un travail externe qui coûtera de la chaleur, et comme, par hypothèse, l'air ne reçoit pas de chaleur, il se refroidira. La température actuelle sera donnée, à chaque instant, par l'équation

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{0,2855},$$

P étant la pression actuelle en chaque point.

Nous avons admis que les parois du ballon sont imperméables à la chaleur. Il est un cas, cependant, où cette supposition est absolument inutile. Admettons, en effet, que la température des couches atmosphériques, au lieu de procéder, en quelque sorte, au hasard, suive précisément la loi ci-dessus.

Il est clair que, dans ce cas, le ballon rencontrera partout un air externe qui sera à la température que prend, par la détente, celui qui y est renfermé, et qu'il n'y aura plus de modification de température possible par suite de la conductibilité des parois. Dans cette hypothèse sur la loi de température des couches ascendantes, il est clair que si, en dehors de notre ballon et par une raison quelconque, une masse d'air se trouve poussée alternativement vers les régions supérieures et inférieures, sa température se modifiera exactement comme elle l'eût fait dans le ballon. Son mouvement ne changera donc en rien du tout l'état thermique de chaque couche qu'elle rencontrera en route.

En un mot, et si, par impossible, notre atmosphère était sèche et partout à T_0 à une même hauteur, l'agitation de cette

atmosphère, si violente qu'on la suppose, ne modifierait en rien le régime de température des couches ascendantes.

Nous allons montrer immédiatement quelles sont les modifications très profondes qu'apporte dans cette loi la présence de la vapeur d'eau dans l'air ; mais discutons d'abord une autre hypothèse dont les résultats sont encore plus frappants que ceux de la précédente.

Supposons que la température, au lieu de décroître avec la hauteur, soit, au contraire, la même partout, de $27^{\circ},15$ par exemple, ou de

$$T = 300^{\circ}.$$

Que produirait ici le mélange des couches, provoqué, par impossible, à l'aide d'un immense agitateur ? Autrefois tous les physiciens eussent répondu que le mouvement ne saurait troubler l'uniformité des températures. Aujourd'hui, la réponse est bien différente.

A l'aide de notre ballon à parois extensibles et imperméables à la chaleur, élevons une masse d'air M à une hauteur telle qu'on ait

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^{0,2855} = 2.$$

La température de cet air va tomber à

$$\frac{300}{2} = 150^{\circ};$$

mêlons la masse M à une masse égale, encore à 300° . La moyenne sera 225° .

Avec notre ballon, faisons descendre une autre masse M à 300° jusqu'à la surface du sol où la pression est $0^m,760$. La température va s'élever à

$$300 \times 2 = 600^\circ;$$

mêlons la masse M avec son égale à 300° ; la moyenne sera

$$\frac{300 + 600}{2} = 450^\circ.$$

Si maintenant nous portons une masse M de ce mélange à notre hauteur précédente, la température tombera à

$$\frac{450}{2} = 225^\circ.$$

Et si nous faisons descendre une masse M de notre mélange à 225° , à la surface du sol, sa température s'élèvera à

$$2 \times 225 = 450^\circ.$$

Il est facile de s'assurer que si, au lieu de mêler à chaque fois la masse M à son égale, en haut ou en bas, nous la mêlons à $10 M$, $100 M$, ou $1000 M$, nous obtiendrons encore, au bout d'un nombre suffisant de courses ascendantes et descendantes de notre ballon, une température constante de 450° en bas et de 225° en haut, pour toute la masse $1000 M$.

A peine est-il nécessaire de le faire remarquer, il est manifeste que cette inégalité des températures ne s'obtient pas sans dépense. Elle n'est nullement en contradiction avec l'un des grands principes posés par CLAUSIUS.

Lorsque nous faisons monter notre ballon et que l'air s'y refroidit par la détente, le gaz devient spécifiquement plus lourd que l'air ambiant partout encore à 300° ; et, de même, lorsque nous faisons descendre le ballon plein d'air à 300° , le gaz qui s'échauffe par la compression devient spécifiquement plus léger que l'air ambiant.

Il faut donc dépenser un travail pour faire monter et pour faire descendre le ballon, et c'est, en fait, cette dépense de travail qui rompt l'égalité primitive des températures.

Il n'est pas nécessaire non plus de faire remarquer que dans la réalité des choses, et tant que le Soleil existera, une égalité de température, comme celle dont nous venons de parler, ne saurait avoir lieu un seul instant. La radiation solaire, pendant le jour, et la radiation très différente de la Terre vers l'espace, durant la nuit, donnent lieu à des inégalités de température et de pesanteur spécifique dans les couches, à des courants en toutes directions et, par suite, à la rupture de l'égalité des températures dans la masse externe, si jamais elle existait à un moment déterminé. En examinant un cas aussi impossible que celui-ci, nous avons seulement voulu montrer que la loi des températures en fonction des hauteurs relève de causes tout autres qu'on ne le supposait autrefois. Revenons à la réalité et voyons les modifications qu'apporte à notre loi la présence de la vapeur d'eau dans l'air.

Dans son grand Ouvrage de Thermodynamique, HERN a examiné soigneusement, comme question de Physique, les phénomènes que présentent la détente et l'accroissement de volume d'un mélange d'air et de vapeurs. Nous allons reprendre cette question, mais sous une autre forme, en tenant compte

des circonstances qui se présentent journellement dans la Nature.

Désignons par C la capacité calorifique à pression constante d'un gaz, par P la pression, par T la température absolue. On a, comme nous savons,

$$N dQ = NC dT - \left(\frac{AP_0}{\Delta T_0} \right) NT \frac{dP}{P},$$

pour la quantité $N dQ$ de chaleur que prend un poids de gaz N , lorsque la pression et la température varient de dP et dT .

Pour l'air atmosphérique, on a

$$C = 0,23751,$$

$$\frac{AP_0}{\Delta T_0} = 0,0678,$$

d'où

$$N dQ = 0,23751 N dT - 0,0678 NT \frac{dP}{P}.$$

D'autre part, si nous désignons par c_e la capacité calorifique vulgaire d'un liquide, par T la température absolue d'un mélange ($M - m$) de ce liquide avec m de sa vapeur, M étant le poids total du mélange, par r la chaleur latente vulgaire de vaporisation correspondante, on a

$$dQ_e = Mc_e dT + T d\left(\frac{mr}{T}\right)$$

pour la quantité de chaleur dQ_e à ajouter ou à retrancher à M , lorsque la température varie de dT . Pour l'eau, et aux températures dont nous avons à nous occuper ici, on a $c_e = 1$.

Concevons maintenant un mélange d'un poids d'air N et d'un poids d'eau et de vapeur M dont nous faisons varier la pression sans ajouter ni retrancher de chaleur.

Il est clair que, pour trouver la loi commune de variation des températures, il suffit d'ajouter l'équation $N dQ$ à l'équation dQ_e , ce qui nous donne

$$N dQ + dQ_e = 0,23751 N dT - 0,0678 N T \frac{dP}{P} \\ + M dT + T d\left(\frac{mr}{T}\right),$$

ou, puisque nous nous donnons pour condition $N dQ + dQ_e = 0$,

$$N \left(0,23751 dT - 0,0678 T \frac{dP}{P} \right) + M dT \\ + T d\left(\frac{mr}{T}\right) = 0.$$

En divisant par T , puis en intégrant de P_0 à P et de T_0 à T , il vient

$$(0,23751 N + M) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \\ = 0,0678 N \log \left(\frac{P}{P_0} \right) - \left(\frac{mr}{T} \right) + \left(\frac{m_0 r_0}{T_0} \right).$$

Plusieurs remarques importantes sont à faire, si nous voulons rendre cette équation applicable au cas qui nous occupe. Pour plus de simplicité, admettons qu'à l'origine, lorsque la température était T_0 , l'air ait été complètement saturé de vapeur, mais sans excès d'eau en gouttelettes; il vient alors $m_0 = M$. Dans notre équation, la pression P représente celle de l'air seul; en d'autres termes, si nous désignons par τ_0 la tension de la

vapeur d'eau à T_0 , la pression barométrique initiale sera, non P_0 , mais

$$B_0 = P_0 + \tau_0,$$

d'où

$$P_0 = B_0 - \tau_0.$$

Dans les conditions spéciales où nous nous plaçons, le rapport de N et de M n'est nullement arbitraire. En effet, si Δ_0 désigne la densité de l'air à P_0 et à T_0 , le volume de cet air est

$$V_0 = \frac{N}{\Delta_0}$$

et, puisqu'il y a saturation complète, il vient

$$V_0 = Mv_0,$$

d'où

$$M = \frac{N}{\Delta_0 v_0},$$

v_0 étant le volume de l'unité de poids de vapeur saturée à τ_0 .

On sait, d'après les recherches de REGNAULT, que l'égalité

$$V_0 = Mv_0$$

ne peut être considérée comme rigoureusement juste; mais, dans le cas particulier qui nous occupe, nous pouvons l'admettre à titre d'approximation suffisante.

Il résulte de là, pour notre équation,

$$\begin{aligned} & \left(0,23751 + \frac{1}{\Delta_0 v_0}\right) N \log \left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{Nr_0}{\Delta_0 v_0 T_0} \\ & = 0,0678 N \log \left(\frac{P}{P_0}\right) - \frac{mr}{T}. \end{aligned}$$

On voit que sous cette nouvelle forme l'équation ne pourrait pas encore être utilisée.

Désignons par V le volume de l'air à P et à T , et par v ou, ce qui est sensiblement la même chose ici, par $(v - w) = u$ le volume de l'unité de poids de vapeur à T et à τ , w étant le volume spécifique du liquide toujours très petit par rapport à v pour les vapeurs saturées.

Si nous supposons que notre masse totale ($M + N$) se détende, et, par suite, se refroidisse, il est visible qu'il y aura précipitation à l'état de brume d'une certaine quantité de la vapeur ; la saturation subsistera donc, et nous aurons

$$V = mu,$$

d'où

$$m = \frac{V}{u}.$$

Mais nous avons $V = \frac{N}{\Delta}$, Δ étant la densité de l'air à P et à T .

Il vient donc

$$m = \frac{N}{\Delta v},$$

et notre équation devient, en divisant les deux membres par N ,

$$\begin{aligned} & \left(0,23751 + \frac{1}{\Delta_0 v_0} \right) \log \left(\frac{T_0}{T} \right) - \frac{r_0}{\Delta_0 v_0 T_0} \\ & = 0,0678 \log \left(\frac{P}{P_0} \right) - \frac{r}{\Delta v T}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= 1,2932 \frac{272,85}{0,760} \left(\frac{B_0 - \tau_0}{T_0} \right) \\ &= 464,28 \left(\frac{B_0 - \tau_0}{T_0} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta &= 1,2932 \frac{272,85}{0,760} \left(\frac{B - \tau}{T} \right) \\ &= 464,28 \left(\frac{B - \tau}{T} \right).\end{aligned}$$

Il en résulte, en réduisant et en changeant les logarithmes népériens en logarithmes vulgaires,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{T_0}{110,27 (B_0 - \tau_0) v_0} \right) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) - \frac{r_0}{253,91 (B_0 - \tau_0) v_0} \\ = 0,2855 \log \left(\frac{B - \tau}{B_0 - \tau_0} \right) - \frac{r}{253,91 (B - \tau) v},\end{aligned}$$

B_0 et B étant les pressions barométriques exprimées en colonne de mercure, et τ_0 et τ les tensions de la vapeur répondant à T_0 et à T .

Traduisant les pressions en kilogrammes et posant

$$B_0 - \tau_0 = p_0,$$

$$B - \tau = p,$$

il vient

$$\begin{aligned}\left(1 + 123,30 \frac{T_0}{p_0 v_0} \right) \log \left(\frac{T}{T_0} \right) - 53,55 \frac{r_0}{p_0 v_0} \\ = 0,2855 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) - 53,55 \frac{r}{p v},\end{aligned}$$

relation qui exprime ce que devient T lorsque la pression passe de p_0 à p .

Cette équation, qui renferme des transcendentes et des expressions algébriques, ne peut être résolue ni par rapport à T , ni par rapport à p . Etant donné T , il est cependant facile de trouver par tâtonnements la valeur correspondante de p ou la pression de l'air dans le milieu détendu.

Pour prendre un exemple, supposons qu'à la surface de la Terre, la température soit 35° ou

$$T_0 = 307^\circ,85,$$

la pression barométrique totale du mélange, que nous admettons saturé, étant

$$B_0 = 0^m,760.$$

Proposons-nous de trouver:

1° la pression du mélange porté à une hauteur telle que, par la détente, la température tombe à 0° ou à

$$T = 272^\circ,85;$$

2° la quantité de vapeur qui se sera condensée dans ce mélange parvenu à 0° .

A 35° , la tension de la vapeur est, en colonne de mercure,

$$\tau_0 = 0^m,04183;$$

la pression de l'air dans le mélange saturé est donc

$$B_0 - \tau_0 = 0^m,71817.$$

A cette même température on a

$$r_0 = 582^{\text{cal}}, 138,$$

$$v_0 = 25^{\text{mc}}, 932$$

et, à 0° ,

$$r = 606^{\text{cal}}, 5,$$

$$v = 214^{\text{mc}}, 742.$$

Notre équation devient ainsi

$$\begin{aligned} & \left(1 + 110,27 \frac{307,85}{0,71817 \times 25,932} \right) \log \left(\frac{272,85}{307,85} \right) - \frac{582,138}{253,91 \times 0,71817 \times 25,932} \\ & = 0,2855 \log \left(\frac{B - \tau}{0,71817} \right) - \frac{606,5}{253,91 \times 214,742 (B - \tau)}. \end{aligned}$$

En faisant toutes les réductions et tous les calculs indiqués, on a

$$\frac{0,03896}{B - \tau} - \log (B - \tau) = 0,78608,$$

d'où l'on tire immédiatement pour la valeur, suffisamment approximative, de la pression de l'air détendu

$$B - \tau = 0^{\text{m}}, 2384.$$

Son volume à 0° et à cette pression est $2^{\text{mc}}, 670$. Mais à 0° la densité de la vapeur saturée est $0^{\text{kg}}, 00466$. A 35° elle est $0^{\text{kg}}, 03856$.

Notre volume d'abord détendu à $0^{\text{m}}, 2384$ renferme donc .

$$2,670 \times 0^{\text{kg}}, 00466 = 0^{\text{kg}}, 01244$$

de vapeur d'eau. D'où il suit qu'il s'est condensé

$$0^{\text{kg}},03856 - 0^{\text{kg}},01244 = 0^{\text{kg}},02612$$

qui restent en suspension, en brume, dans le mélange gazeux.

Il n'est pas inutile de montrer immédiatement quelle est l'influence de notre vapeur d'eau sur la loi des températures. La température de l'air sec que l'on ferait détendre de $0^{\text{m}},760$ à $0^{\text{m}},2384$ tomberait, non à 0° comme le mélange que nous venons d'étudier, mais à

$$T = 307,85 \left(\frac{0,2384}{0,71817} \right)^{0,2855} = 224^{\circ},70 \text{ ou } t = -48^{\circ},15,$$

c'est-à-dire à $48^{\circ},15$ plus bas que l'air humide.

Une fois toute la masse d'air et de vapeur et de gouttelettes d'eau arrivée à 0° ou au point de congélation, la congélation des gouttelettes d'eau sera la conséquence d'une nouvelle détente.

L'ensemble des phénomènes physiques qui se passent alors, tout comme leur traduction algébrique, devient très complexe. Il est toutefois facile d'arriver à une expression plus que suffisamment exacte, en considérant la congélation de l'eau comme due uniquement au froid produit par la détente de l'air considéré comme sec.

Pour faire geler nos $0^{\text{kg}},02612$, il faut leur soustraire

$$79^{\text{cal}},25 \times 0,02612 = 2^{\text{cal}},07$$

et ce sont ces $2^{\text{cal}},07$ qui empêchent l'air de descendre au dessous de 0° .

Mais la chaleur ainsi fournie à l'air, pendant la détente, est employée, comme on sait, exclusivement en travail. Nos 2^{cal},07 représentent

$$432 \times 2,07 = 894^{\text{kgm}},$$

et c'est là le travail que doit produire effectivement la détente pour amener la congélation complète de l'eau vésiculaire.

Nous avons ici

$$F = \int p \, dv = p_0 v_0 \int \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \log \frac{v_0}{v} = p_0 v_0 \log \frac{p_0}{p},$$

ou, au cas particulier et en nombres, les pressions étant exprimées en kilogrammes,

$$894 = 3241,3 \times 2,670 \times 2,30258 \log \frac{3241,3}{p},$$

d'où il résulte

$$p = 2923^{\text{kg}}, 2,$$

valeur qui correspond à 0^m,2150 en colonne de mercure. Il suffit donc d'une dépression de

$$0^{\text{m}},2384 - 0^{\text{m}},2150 = 0^{\text{m}},0234$$

pour provoquer la congélation des particules aqueuses contenues dans le mélange.

On voit par l'ensemble de cette analyse quelles profondes modifications la présence de la vapeur d'eau dans l'air apporte aux résultats de la détente.

TROISIÈME PARTIE

DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Mais rentrons dans le domaine de l'expérience et décrivons sommairement l'appareil et les essais qui nous ont servi à contrôler l'exactitude de notre loi générale. Nous en avons déjà donné une description dans le mémoire cité plus haut; nous allons la reprendre sous une forme plus détaillée, et peut-être plus claire, pour répondre à des objections qui nous ont été faites de côté et d'autre.

Pris dans son ensemble, cet appareil consistait essentiellement en un réservoir de cuivre cylindrique, très résistant, fermé aux deux extrémités par des plaques de cuivre convexes. La partie supérieure portait à son centre une tubulure verticale de bronze de 35 millimètres de diamètre, munie d'un système de double soupape qui nous a permis d'obtenir une grande précision dans nos recherches. Un simple changement de position des soupapes, actionnées par un levier articulé et rendues étanches à l'aide d'une garniture de caoutchouc, ouvrait et fermait rapidement l'orifice. Cette dernière disposition, très simple, a seule permis d'obtenir une étanchéité parfaite des sièges pendant les essais.

Le réservoir, d'environ 30 litres de capacité, communiquait, par des tubes capillaires, d'une part avec un manomètre à eau de très grande hauteur, ainsi qu'avec un manomètre à mercure de contrôle, indiquant rigoureusement l'excédant de la pression interne sur celle de l'air ambiant; et, d'autre part, avec une pompe aspirante et foulante servant à comprimer l'air du réservoir à une pression voulue. Tout l'ensemble était fixé dans un récipient plein d'eau, dont on réglait la température à volonté. Pour faire une expérience, on introduisait, à l'aide d'un pulvérisateur, une certaine quantité d'eau, quelconque d'ailleurs, dans le réservoir, après y avoir suspendu un linge mouillé pour offrir la plus grande surface d'évaporation possible.

On comprimait l'air et l'on notait la pression atmosphérique, la température de l'eau du récipient et la pression initiale totale P_0 ; puis, après avoir provoqué la détente, on attendait, avant de noter la pression finale P_1 , que la colonne du manomètre restât stable et que la température interne et la saturation se rétablissent. Des robinets, intercalés sur les tubes capillaires, permettaient de régler la marche de la colonne de liquide des manomètres pendant la détente brusque; et comme la lecture ne se faisait qu'après que le régime stable était rétabli, les résultats obtenus étaient aussi précis que possible.

Soit τ_0 la tension de la vapeur à t_0 . On a, pour la pression initiale de l'air dans le réservoir,

$$p_0 = P_0 - \tau_0$$

et, pour la pression finale,

$$p_1 = P_1 - \tau_0.$$

Au moment de la détente maxima, le mélange tombe à la pression atmosphérique P et à la température t à déterminer. A cette température inconnue, la pression de l'air est

$$p = P - \tau.$$

Mais nous avons aussi

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_0}.$$

Il vient, par suite,

$$P - \tau = p_1 \frac{T}{T_0},$$

d'où

$$T = T_0 \left(\frac{P - \tau}{p_1} \right).$$

Posant

$$T = 272^{\circ},85 + t,$$

il en résulte

$$\left(P - 272,85 \frac{p_1}{T_0} \right) - \frac{p_1}{T_0} t = \alpha - \beta t = \tau,$$

d'où l'on tire aisément la valeur de t , à l'aide des Tables de REGNAULT donnant τ en fonction de t .

Avec ces données, il est facile de déterminer p ou la pression de l'air dans le milieu détendu.

Prenons un exemple au hasard.

La pression initiale totale étant

$$P_0 = 45108 \text{ kg},$$

nous avons, pour la pression au moment de la détente maxima,

$$P = 10070 \text{ kg},$$

et, lorsque l'équilibre isotherme est rétabli,

$$P_1 = 10863 \text{ kg}.$$

La température de l'eau du récipient étant

$$T_0 = 302^{\circ},85,$$

la tension de la vapeur correspondant à cette température est

$$\tau_0 = 428 \text{ kg}$$

et, par suite,

$$p_0 = 15108 \text{ kg} - 428 \text{ kg} = 14680 \text{ kg},$$

$$p_1 = 10863 \text{ kg} - 428 \text{ kg} = 10435 \text{ kg}.$$

D'autre part, nous avons

$$T = 302^{\circ},85 \left(\frac{10070 - \tau}{10435} \right),$$

d'où il est facile de déduire la valeur de T .

Posons

$$T = 272^{\circ},85 + t,$$

il vient

$$10435 (272,85 + t) = 302,85 (10070 - \tau),$$

d'où

$$668,68 - 34,456 t = \tau.$$

Divisant par 13596 pour pouvoir faire usage des Tables donnant les tensions en colonne de mercure, il en résulte

$$0,0492 - 0,002534 t = \tau.$$

Cette équation ne permet évidemment qu'une seule solution, puisqu'on tire la valeur de t des Tables de REGNAULT donnant τ en fonction de t , et que, par suite, il n'y a qu'une seule température qui, avec sa tension correspondante, permet l'égalité.

Dans notre cas particulier, nous trouvons

$$0,0492 - 0,002534 \times 14,55 = 0,0123$$

et, par suite,

$$T = 287^{\circ},40,$$

$$\tau = 167^{\text{kg}}.$$

Mais nous avons aussi, à T_0 ou $302^{\circ},85$,

$$v_0 = 33^{\text{mc}},915,$$

$$r_0 = 585^{\text{cal}},624$$

et, à T ou $287^{\circ},40$,

$$v = 83^{\text{mc}},431,$$

$$r = 596^{\text{cal}},393.$$

Introduisant ces différentes valeurs dans notre équation générale, il vient

$$\begin{aligned} & \left(1 + 123,30 \frac{302,85}{14680 \times 33,915} \right) \log \left(\frac{287,40}{302,85} \right) - 53,55 \frac{585,624}{14680 \times 33,915} \\ & = 0,2855 \log \left(\frac{p}{14680} \right) - 53,55 \frac{596,393}{83,431 p}, \end{aligned}$$

ou, en achevant les calculs,

$$3,8605 = \log p - \frac{1340,7}{p}.$$

Résolvant cette équation, nous trouvons, pour la valeur approchée de p ,

$$p = 9904 \text{ kg.}$$

En réalité, nous avons pour la pression minima de l'air, au moment du maximum de détente,

$$10070 \text{ kg} - 167 \text{ kg} = 9903 \text{ kg.}$$

On voit qu'il n'est guère possible d'arriver à un accord plus parfait entre des nombres obtenus de deux façons aussi différentes, accord qui confirme pleinement l'exactitude expérimentale des éléments qui ont servi à établir nos diverses lois.

QUATRIÈME PARTIE

DISCUSSION ET CONCLUSION

En dehors des expériences que nous venons de décrire, nous avons entrepris une série de recherches sur la détente de l'air sec.

Bien que, de ce côté, la question semble épuisée, les résultats auxquels nous sommes arrivé sont intéressants à signaler à plus d'un titre. Le manomètre à eau qui avait servi dans les premiers essais a été remplacé par un manomètre à acide sulfurique concentré, de densité connue. Avant d'être refoulé dans le réservoir où l'on avait fait le vide, l'air passait par un long tube à dessiccation, où il perdait toute son humidité. Comme précédemment, l'eau du récipient était maintenue à une température rigoureusement stable pendant les essais.

Voici les chiffres que nous avons obtenus :

Pression initiale totale

$$P_0 = 17595 \text{ kg.}$$

Pression minima, au moment de la détente,

$$P = 10177 \text{ kg.}$$

Pression finale totale

$$P_1 = 11901 \text{ kg.}$$

Température initiale et finale

$$T_0 = 284^{\circ},05.$$

La température inconnue T , répondant au maximum de détente, est

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_1} \right) = 242^{\circ},90.$$

La loi relative à l'air sec nous donne pour cette même température

$$T = T_0 \frac{1}{\left(\frac{P_0}{P} \right)^{0,2355}} = 242^{\circ},95.$$

Les résultats étant des plus concordants, nous avons cherché à déterminer le rapport des capacités calorifiques de l'air à volume constant et à pression constante. Ce rapport a pour expression

$$\frac{C}{c} = \frac{\log \left(\frac{P_0}{P} \right)}{\log \left(\frac{P_0}{P_1} \right)}.$$

De nombreux essais, convenablement corrigés, nous ont donné

$$\frac{C}{c} = 1,3996.$$

Il en résulte

$$c = \frac{0,23751}{1,3996} = 0,1697$$

et, par suite,

$$a = 1 - \frac{c}{C} = 0,2855.$$

A l'aide de ces valeurs, directement déduites de l'expérience, il est facile de déterminer A ou l'équivalent thermique du travail.

Nous avons, en effet,

$$C - c = \frac{10333 A}{1,2932 \times 272,85} ;$$

d'où

$$A = 0^{\text{cal}},002315$$

et inversement

$$\frac{1}{A} = E = 431^{\text{kgm}},97,$$

E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur.

D'autre part, si l'on déduit le rapport des chaleurs spécifiques de la formule de la vitesse du son,

$$v = \sqrt{g \left(\frac{m}{\Delta} \right) h \frac{C}{c} (1 + 0,003665 t)},$$

dans laquelle g désigne la gravité, $\frac{m}{\Delta}$ le rapport de la densité de l'air à celle du mercure, h la pression barométrique et t la température, et en y introduisant les valeurs expérimentales données par HERN dans son *Traité de Thermodynamique*¹, ou

$$v = 340^{\text{m}^{\text{s}}},89 \text{ à } t = 15^{\circ},9,$$

$$m = 13,596,$$

¹ Paris, Gauthier-Villars ; tome I, page 108.

$$\Delta = 0,0012932,$$

$$h = 0,760,$$

on trouve

$$\frac{C}{c} = 1,4010;$$

d'où

$$A = 0^{\text{cal}},00232$$

et

$$E = 431^{\text{kgm}}.$$

En partant des résultats obtenus par REGNAULT, et plus récemment par VIOLLE et VAUTIER qui ont fixé le chiffre de 331,4 pour la vitesse du son à la température de zéro degré, nous arrivons, pour le rapport des capacités calorifiques, à une valeur à peu près identique, soit

$$\frac{C}{c} = 1,3988.$$

Il en résulte, pour la valeur de A ,

$$A = 0^{\text{cal}},002312,$$

et, pour celle de E ,

$$E = 432^{\text{kgm}},5^1.$$

¹ Il serait intéressant de reprendre ce genre d'expériences, en tenant compte des corrections à faire subir à Δ et $\frac{C}{c}$. En limitant la distance à 300^m ou 400^m, par exemple, on peut avoir partout une même valeur pour t et, sur une telle étendue, la densité de la masse atmosphérique et son degré de saturation réel peuvent facilement être établis.

Soient τ la tension de la vapeur d'eau à t , Δ_0 la densité de l'air sec à 0° et à 0^m,760 = P_0 , δ le poids spécifique de la vapeur à la tension τ . Il vient, pour le poids spécifique de l'air sec à P et à T ,

On voit que la méthode précédente permet d'arriver à un haut degré d'exactitude et que les résultats obtenus peuvent être considérés comme aussi précis que ceux de n'importe quelle autre, soi-disant plus directe. C'est ce qu'il est, d'ailleurs, facile de reconnaître.

$$\Delta = \Delta_0 \frac{(P - \tau)}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T},$$

et, pour celui du mélange d'air sec et de vapeur,

$$\Delta + \delta = \Delta_0 \frac{(P - \tau)}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T} + \delta.$$

En prenant, pour la vapeur d'eau, la capacité calorifique à pression constante $C_p = 0,4805$ (REGNAULT) et celle à volume constant $c_v = 0,4$ (HIRN), il vient, pour les capacités moyennes du mélange d'air et de vapeur,

$$C' = \frac{C \Delta + 0,4805 \delta}{\Delta + \delta},$$

$$c' = \frac{c \Delta + 0,4 \delta}{\Delta + \delta},$$

et, pour le rapport $\frac{C'}{c'}$,

$$\frac{C'}{c'} = \frac{C \Delta + 0,4805 \delta}{c \Delta + 0,4 \delta},$$

ou, plus simplement, en posant $\frac{\delta}{\Delta} = \lambda$,

$$\frac{C'}{c'} = \frac{C + 0,4805 \lambda}{c + 0,4 \lambda}.$$

On arrivera, de cette manière, à une détermination de la vitesse du son en fonction de l'état hygrométrique de la masse vibrante et, par contre-coup, à une détermination aussi pratique que possible de l'équivalent mécanique de la chaleur, toutes les valeurs entrant dans la formule de v relevant directement de l'expérience et n'ayant, par suite, aucun caractère fictif.

Introduisons dans l'équation ci-dessus, à la place de c , sa valeur

$$c = C - \frac{AP_0}{\Delta T_0};$$

posons

$$A = \frac{1}{E},$$

$$(1 + 0,003665 t) = \frac{T}{T_0};$$

il vient ainsi

$$E = \frac{P_0}{C \Delta \left[T_0 - g \left(\frac{m}{\Delta} \right) h \frac{T}{v^2} \right]},$$

ou, plus simplement,

$$E = \frac{\alpha}{\beta - \frac{T}{v^2}},$$

en remarquant que $\alpha = 0,4292531$ et $\beta = 0,00348156$.

Cette nouvelle formule montre que de petites variations de v entraînent de grandes pour la valeur correspondante de E , et que, par suite, les valeurs auxquelles nous venons d'arriver, à l'aide des données les plus rigoureuses connues, peuvent être considérées comme aussi rapprochées que possible de la vérité. Il suit de là que le chiffre 425, admis généralement pour l'équivalence de la chaleur et du travail mécanique, est loin d'être exact, et que celui qui a été préconisé par HERN¹, soit $E = 432$, répond mieux à la réalité des faits.

¹ *Loc. cit.* p. 115, et tome II, p. 418.

Mais l'équivalence, quantitative et numérique, établie entre la chaleur et le travail mécanique, nous a révélé un principe plus élevé et plus fécond en conséquences. De même que la chaleur dépensée dans nos moteurs peut nous permettre de transporter des fardeaux, de vaincre des résistances de toute espèce, de même elle peut nous servir à développer de l'électricité et, réciproquement, cette électricité peut, à son tour, devenir une source continue d'énergie, de lumière, de force motrice, de travail mécanique.

Ce principe de l'équivalence et de l'aptitude qu'ont tous les grands agents dynamiques à se substituer quantitativement les uns aux autres a donné lieu à un ensemble de progrès si prodigieux, qu'il peut être considéré comme une des plus belles conquêtes de nos Sciences physiques et mécaniques.

L'importance des résultats auxquels nous a conduit l'analyse qui précède ne saurait donc échapper à personne.

(Extrait des *Bulletins de la Société Industrielle de Mulhouse*, Tome LXXXI.)

MULHOUSE — IMP. VEUVE BADER ET C^{ie}

