Tome II, volume 5. Fascicule 2.

ENCYCLOPÉDIE

DES

IENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY

TOME II (CINQUIÈME VOLUME).

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

H. BURKHARDT ET **W. WIRTINGER**

(MUNICH) VIENNE).

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie.

LEIPZIG
B. G. TEUBNER

1914
(12 FÉVRIER)

Tome II; cinquième volume; deuxième fascicule.

Sommaire.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple, n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus,** fin (H. Burkhardt — H. Vogt). — **Additions et modifications.** — **Renseignements bibliographiques.** — **Index.**
Tome I, vol. 2: **Invariants,** fin (F. Meyer — J. Drach).
Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres,** fin (P. Bachmann J. Hadamard — E. Maillet). — **Corps algébriques** (D. Hilbert — H. Vogt. — **Multiplication complexe** (H. Weber — E. Cahen.)
Tome I, vol. 4: **Économie politique mathématique,** fin (V. Pareto). — **Jeux** (W. Ahrens — C. A. Laisant).
Tome II, vol. 1: **Calcul intégral** (A. Voss — J. Molk).
Tome II, vol. 2: **Fonctions analytiques** (W. F. Osgood — P. Boutroux — J. Chazy).
Tome II, vol. 5: **Groupes continus de transformations** (H. Burkhardt — L. Maurer — E. Vessiot).
Tome II, vol. 6: **Calcul des Variations,** fin (A. Kneser — E. Zermelo — H. Hahn — M. Lecat).
Tome III, vol. 1: **Notions de courbe et surface,** fin (H. von Mangoldt — L. Zoretti). — **Méthodes analytiques et synthétiques** (G. Fano — S. Carrus). — **Géométrie énumérative** (H. G. Zeuthen — M. Pieri).
Tome III, vol. 3: **Coniques,** fin. **Faisceaux de coniques** (F. Dingeldey — E. Fabry). — **Courbes planes algébriques** (L. Berzolari).
Tome III, vol. 4: **Quadriques** (O. Staude — A. Grévy).
Tome IV, vol. 1: **Principes de la mécanique rationnelle** (A. Voss — E. Cosserat — F. Cosserat). — **Mécanique statistique** (P. et T. Ehrenfest — E. Borel.)
Tome IV, vol. 2: **Cinématique,** fin (A. Schoenflies — G. Koenigs). — **Mécanismes** (Grübler — G. Koenigs). — **Statique graphique** (L. Henneberg — H. Vergne).
Tome IV, vol. 3: **Appareils physiques les plus simples** (Ph. Furtwängler — A. Guillet).
Tome IV, vol. 5: **Développements d'Hydrodynamique** (A. E. H. Love — P. Appel — H. Beghin — H. Villat).
Tome IV, vol. 6: **Hydraulique,** fin (Ph. Forchheimer — A. Boulanger).
Tome IV, vol. 7: **Équations fondamentales de l'élasticité** (C. H. Müller — A. Timpe — L. Lecornu). — **Intégration des équations différentielles de l'élasticité** O. Tedone — R. Garnier).
Tome V, vol. 1: **Mesure** (C. Runge — Ch. Ed. Guillaume).
Tome V, vol. 2: **Atomistique** (F. W. Hinrichsen — M. Joly — J. Roux). — **Stéréochimie** (L. Mamlock — J. Roux). — **Épures des cristaux** (Th. Liebisch — F. Wallerant).
Tome V, vol. 3: **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé).
Tome V, vol. 4: **Principes physiques de l'optique; anciennes théories** (A. Wangerin — C. Raveau.)
Tome VI, vol. 1: **Triangulation géodésique.** — **Mesure des bases et nivellement.** — **Déviation de la verticale** (P. Pizzetti — L. Noirel).
Tome VI, vol. 2: **Marées océaniques et marées internes** (G. H. Darwin — S. S. Hough — E. Fichot).
Tome VII, vol. 1: **Horloges et chronomètres** (E. Caspari). — **Mesure des angles** F. Cohn — J. Mascart).

Tribune publique. 24.

557. [II$_1$ p. 230 avant la ligne 1] (II 2, **59**) ajouter: Bien entendu si la série

$$\sum (a_n + b_n$$

est convergente, la série trigonométrique (1) converge partout absolument. L'existence des points d'absolue convergence est tres importante. *N. Lusin* [C. R. Acad. sc. Paris 155 1912 , p. 580] a démontré que toute série trigonometrique ayant deux points de convergence absolue dont la distance est incommensurable avec π est (sauf peut-être en un ensemble de points de mesure nulle) ou partout convergente ou partout divergente. D'ailleurs pour une telle série l'ensemble des points de convergence absolue est nécessairement partout dense: si, en outre, cet ensemble n'est pas de mesure nulle, la série des coefficients est absolument convergente et la serie trigonométrique est partout absolument convergente.

558. [II$_1$ p. 230 ligne 12] (II 2, **59**) ajouter: D'ailleurs cet ensemble de mesure nulle peut avoir la puissance du continu, comme le prouve un exemple de *Steinhaus,* Soc. math. France, C. R. des séances de l'année 1912, p. 44.

559. [II$_1$ p. 231 ligne 19] (II 2, **60**) ajouter[326a]) et en note:

326[a]) Cette condition nécessaire a été généralisée par *W. H. Young* [C. R. Acad. sc. Paris 155 (1912), p. 30]: Si

$$[f x)]^{\frac{2q}{2q-1}}$$

est sommable, la série

$$(a_1^{2q} + b_1^{2q}) + (a_2^{2q} + b_2^{2q} + \cdots + a_n^{2q} + b_n^{2q} + \cdots\cdots$$

est convergente.

560. [II$_1$ p. 231 ligne 22] (II 2, **60**) ajouter[326b]) et en note:

326[b]) Cette condition suffisante a été généralisée par *W. H. Young* [C. R. Acad. sc. Paris 155 (1912), p. 472]: „Si la série

$$\left(a_1^{\frac{2q}{2q-1}} + b_1^{\frac{2q}{2q-1}} \right) + \left(a_2^{\frac{2q}{2q-1}} + b_2^{\frac{2q}{2q-1}} \right) + \cdots + \left(a_n^{\frac{2q}{2q-1}} + b_n^{\frac{2q}{2q-1}} \right) + \cdots\cdots$$

est convergente, la fonction

$$[f(x)]^{2q}$$

est sommable. Les deux généralisations ne sont réciproques l'une de l'autre que dans le *cas de Fatou-Riesz* où $q = 1$.

561. [II$_1$ p. 232 ligne 15] (II 2, **60**) ajouter: Cette formule est encore valable dans un certain nombre d'autres cas signalés par *W. H. Young* [Proc. London math. Soc. (2 9 (1910), p. 449 62], en particulier dans le cas où les deux fonctions etant sommables, l'une d'elles est bornée. **M. Fréchet.**

562. [II$_1$ p. 235 ligne 13 en remontant] II 2, **62** note 340 au lieu de „Bois Reymond" lire „Bois-Reymond".

563. [II_1 p. 237 ligne 9] (II 2, **62**) ajouter: Grace a l'introduction de notions nouvelles, et notamment de celle de *trepidat on* d'une fonction dans un intervalle, *P. Noa'llon* [Acad. Belgique, classe sc. 15 1913), p. 524 41] éte d la propriété au cas de fonctions très généiales.

564. [II_1 p. 245 ligne 1 en remontant] (II 3, **1** note 14) ajouter: Au sujet de la méthode de *P. de Fermat*, vo'r *J M. C. Duhamel*, Mém. Acad. sc. Paris (2 32 1864 , p. 269 330; *P Mansion*, Mathesis 2 1882 , p. 193 202.

M. Lecat.

565. [II_1 p. 259 ligne 14] (II 3, **7**) au lieu de „$D_x \log_e u$“ lire:

„$D_x \log_e (uv \ldots w$ “

566. [II_1 p. 281 ligne 10] (II 3, **12** au lieu de „β“ lire

„$\beta - y$.“ **G. A. Miller.**

567. [II_1 p. 314 lignes 2 et 8 en remontant] (II 3, **25** au li u de „$0 \leqq h \leqq \varrho$ et $0 \leqq h \leqq \varrho_0$“ lire

$0 \leqq h \leqq r.$ **Luigi Sinigallia.**

568. [II_1 p. 323 ligne 21] II 3, **28**) ajouter: id. p. 197/206.

569. [II_1 p. 328 ligne 12] (II 3, **30**) au lieu de „on“ lire „ou“.

570. [II_1 p. 328 ligne 6 en remontant] (II 3, **30** note 288 ajouter: *W. G. Walton*, Quart. J. pure appl. math. 5 (1862), p. 20 8 [1861]; Messenger math. 2 12 1882/3), p. 14/20, 42 3; *W. (L.) Żmurko*, Denkschr. Akad. Wien 27 II (1867), p. 63 82); *F. J. Studnička*, Sitzgsb. Böhm. Ges. Wiss. (math.-naturw. 1868, p 67/72; 1870, p 12 3; *F. Haluschka*, Sitzgsb. Akad. Wien math.-phys 83 II (1881), p. 1092/109; *M. P. Novikov*, Soobsčenija Charıkovskago matěmatičeskago Obščestva (communications Soc. math. Kharkov 1883, p. 43 5.

571. [II_1 p. 330 ligne 2 en remontant] (II 3, **30**) au lieu de „ariété“ lire „variéte“.

572. [II_1 p. 330 ligne 1 en remontant] II 3, **30**) ajouter: J. reine angew. Math 48 (1854), p. 384.

573. [II_1 p. 331 ligne 27] II 3, **30**) au lieu de p. 273 lire col. 272 6. **M. Lecat**

574. [II_2 p. 69 dernière ligne du texte] (II 7, **19**) ajouter: *G. M. Minchin* [Nature (Londres) 65 (1902 , p. 531] remarque que si le préfixe „hy“ était placé devant le symbole pour chacune des fonctions trigonométriques, tous les noms pourraient être prononcés et ne seraient pas trop longs. Par exemple

$$\mathrm{hy}\sin x, \quad \mathrm{hy}\,\mathrm{tg}\, x, \ldots\ldots$$

seraient facilement énonçables et indiqueraient la nature hyperbolique des fonctions. Cette façon d'écrire a été adoptée par *D. A. Murray*, Differential and integral calculus, Londres 1908, p. 414.

W. B. Smith [Infinitesimal analysis 1, Londres 1897] emploie les symboles

$$\mathrm{hs}\, x), \quad \mathrm{hc}(x, \quad \mathrm{ht}(x), \quad \mathrm{hct}(x), \quad \mathrm{hsc}(x), \quad \mathrm{hcsc}\, x)$$

pour

$$\mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{th}(x), \quad \mathrm{coth}(x), \quad \mathrm{séch}(x), \quad \mathrm{coséch}(x).$$ **G. A. Miller.**

575. [II_3 p. 14 ligne 2 en remontant] (II 15, **9** apres *D. Sincov* aj uter: Izvestija Kazanskago fiz.-mat. Obščestva.

576. [II_3 p. 35 ligne 28] (II 15, **22** note 116 au lieu de math. Sbornik lire mat. Sbornik.

577. [II_3 p. 41 ligne 8 en remontant] (II 15, **26** note 135) lire „mouvements“

578. [II_3 p. 68 ligne 3 en remontant] (II 16, **6** note 19) lire: Mem. Acad. Petersb. 7) 5 1863), mém. n 1, p. 1/95.

579. [II_3 p. 93 ligne 13 en remontant] (II 16, **16** note 96) au lieu de Otcjet lire Otčët.

580. [II_3 p. 116, ligne 6 en remontant] (II 16, **27** note 174) au lieu de 46 II (1882) lire 46 II (1883).

581. [II_3 p. 123, ligne 3 en remontant] II 16, **30** note 199) effacer Učenyja et dire: Zapiski Acad. nauk (St Pétersbourg), mém. n° 8.

582. [II_5 p. 9, ligne 29] (II 26, **7**) au lieu de „on non", lire „ou non". **J. Molk.**

583. [II_6 p. 5, lignes 18, 19] (II 31, **3** note 13) ajouter: „*R. Woodhouse,* A treatise on isoperimetrical problems and the calculus of variations, Cambridge 1810." Après *F. Giesel,* au lieu de Geschichte der Variationsrechnung 1, lire: Einladungsschrift Feier Schröder Gymn.

584. [II_6 p. 6, ligne 15] (II 31, **3**) après *K. Weierstrass* ajouter un renvoi 18a) et la note suivante:

K. Weierstrass fut conduit à ses recherches sur le calcul des variations par l'étude du problème de Newton, à l'occasion des travaux publiés par *E. E. Kummer,* en 1874/6, sur la résistance de l'air.

585. [II_6 p. 7, ligne 7 en remontant] (II 31, **3** note 27) après *Ermakov* ajouter: „Universitelskija Izvěstija (Bulletin de l'Université) Kiev" et reculer „Otčët ... Kiev" à la fin de la note, où il faut ajouter: 1902, éd. 1903, p. 53 7.

586. [II_6 p. 8, ligne 13 en remontant] (II 31, **4**) après de *voisinage* ajouter un renvoi 32a) et la note suivante):

M. Fréchet [Trans. Amer. math. Soc. 6 (1905), p. 435/9] donne une extension, mais qui, actuellement, ne sert pas en calcul des variations.

587. [II_6 p. 9, ligne 5 en remontant] (II 31, **4** note 34) ajouter: D'après *P. Stäckel* [Archiv Geschichte Naturw. Technik 1 (1909), p. 293/300], la distinction des variations forte et faible apparaîtrait déjà chez *L. Euler* [Misc. Taurinensia (Mélanges de philos. et math. Soc. R Turin) 3 (1762 5 , éd. 1766, seconde pagination, p. 1 26], qui dit que la courbe variée doit satisfaire à la double condition d'avoir des ordonnées infiniment peu différentes et des tangentes infiniment peu différentes de ce qu'elles sont dans la courbe primitive, alors que, dans un travail ultérieur [Novi Comm. Acad. Petrop. 16 (1771), éd 1772, p. 35 70; Instit. calculi integralis 4, St Pétersb. 1794, p. 590], il conçoit la variation d'une manière plus restrictive [cf. n° 8]. Bien plus, il résulterait d'un échange de lettres (dont certaines sont perdues) entre *L. Euler* et *Daniel Bernoulli* {voir *P. H. Fuss,* Correspondance mathématique et physique 2, St Pétersbourg 1843, p. 435, 448, 521] que, pour résoudre certain problème géométrique d'extrémé, *Daniel Bernoulli* aurait, dès 1736, utilisé des variations fortes. *Daniel Bernoulli* aurait donc le pas sur *L. Euler.*

588. [II_6 p. 11 ligne 5] (II 31, **5**) ajouter en note 41a):

Voir au sujet de la méthode de *L. Euler* des remarques de *A. Müller,* J. reine angew. Math. 13 (1835), p. 240 9 [1829].

589. [II_6 p. 17 ligne 23] (II 31, **9**) ajouter un renvoi 72a) et la note suivante 72a), „*G. Kirchhoff* [Vorlesungen über mathematische Physik 2, Leipzig 1891, 2e leçon] a, le premier, suivi cette méthode.

590. [II_6 p. 17 ligne 24] (II 31, **9**) au lieu de $e^{-\varrho^2(x-x_0)}$, lire:

$$e^{-\varrho^2(x-x_0)^2}.$$

591. [II p. 19 ligne 7] (II 31, **9** après „vérifiée" ajouter: „*K. Boehm* 80a) le démontre pour une généralisation de la notion d'intégrale de ligne".

Note 80a : Sitzgsb. Akad. Heidelberg (math.-phys.) 1912, mém. n° 11, § 1 et 2.

592. [II_6 p. 21 ligne 16] (II 31, **10** au lieu de: dérivabilité de f_y lire: dérivabilité de $f_{y'}$.

593. [II_6 p. 21 ligne 18] (II 31, **10** avant *E. Zermelo*[87]), intercaler: Pour l'intégrale J_p la méthode de Lagrange exige la continuité des dérivées des $2p$ premiers ordres. *P. du Bois-Reymond*[70] modifie cette méthode de manière à n'avoir plus besoin que de la continuité des $p-1$ premieres derivées et de l'intégrabilité de la dérivée $p^{\text{ème}}$.

594. [II_6 p. 24 ligne 11] II 31, **11**) ajouter: Ces questions ont été reprises récemment. *L. Königsberger*[82a]) démontre la nécessité et la suffisance de l'annulation de la variation premiere pour que l'expression différentielle

$$f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(p_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(p_2)}; \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(p_n)})\, dx$$

soit intégrable, c'est-a-dire pour qu'il existe une fonction differentielle F dont la dérivée totale, par rapport à $x, y_1, y_1', \ldots, y_n^{(p_n)}$, soit égale à la fonction f.

K. Boehm[115a]) étudie le même cas général, mais il se place à un point de vue légèrement différent. Il demontre que la fonction F se determine par des équations aux dérivées partielles, en nombre

$$n+1+p_1+p_2+\cdots+p_n,$$

contenant les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y_1^{(\pi_1)}}, \frac{\partial F}{\partial y_2^{(\pi_2)}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n^{(\pi_n)}}$$

où

$$\pi_1 = 1, 2, \ldots, p_1; \ \pi_2 = 1, 2, \ldots, p_2; \ \ldots; \ \pi_n = 1, 2, \ldots, p_n,$$

et dont l'intégrabilité est assurée, par l'annulation de la variation de l'intégrale $\int f \cdot dx$.

Si f satisfait identiquement aux équations differentielles d'Euler, cette fonction peut, comme *L. Königsberg* l'a démontré, se mettre sous la forme $\frac{d\omega}{dx}$, on désignant par ω un fonction d'ordre $p-1$. Il a étendu ce résultat au cas des intégrales multiples.

A ces questions se rattache l'étude des conditions d'existence du potentiel cinétique.

Note 115a) Sitzgsb. Akad. Heidelberg math. phys. 1912, mém. n 11.

595. [II_6 p. 35 ligne 5 du texte en remontant] II 31, **16**) après de (14, ajouter: considérée pour J_p. **M. Lecat.**

596. [III_3 p. 53 ligne 30] (III 17, **24** note 130 remplacer p. par col. **J. Molk.**

597. [III_3 p. 94 ligne 4 en remontant] III 17, **41** note 314) remplacer „écrit avant 1852" par Lycée Charlemagne 1848, in-4°. **H. Brocard.**

☞ **Toute rectification ou addition, se rapportant à l'édition française, adressée à J. Molk, 8 rue d'Alliance, Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom de son auteur dans la Tribune publique.**

Nancy, le 20 janvier 1914. **J. Molk.**

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point et μ étant égal à $\frac{z}{r}$.

7. La fonction X_n sous forme d'intégrale définie. Valeurs asymptotiques pour n très grand. On peut de plusieurs façons représenter la *fonction sphérique primitive* sous forme d'intégrale définie. La forme la plus connue est *l'intégrale de Laplace*[19]), valable pour une valeur réelle ou imaginaire de l'argument,

$$(7) \qquad X_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^n d\varphi, \quad \text{où } i = \sqrt{-1}.$$

Citons aussi la *formule de Jacobi*[20]):

$$(7\text{a}) \qquad X_n(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que la partie réelle de x est positive ou négative[21]).

P. G. Lejeune Dirichlet[22]) a établi d'autres formules dont *F. G. Mehler*[23]) a déduit les suivantes:

$$(8) \qquad \frac{\pi}{2} X_n(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} = \int_\theta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}}.$$

H. Laurent[24]) au moyen d'intégrations portant sur des variables complexes parvient à l'égalité

$$(9) \qquad X_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{1}{2i\pi}\frac{1}{2^n}\int \frac{(z^2-1)^n dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

---

19) *P. S. Laplace*, Mécanique céleste 5, Paris 1825, p. 33 [1823]; Œuvres 5, Paris 1882, p. 41.

20) *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 81/7; Werke 6, Berlin 1891, p. 148/55; Giorn. Arcadico di scienze (Rome) 98 (1844), p. 59/66; J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 229/32.

21) L'égalité des intégrales (7) et (7a) est implicitement contenue dans une formule d'un mémoire posthume de *L. Euler*; cf. *L. Euler*, Institutiones calculi integralis, (2e éd.) 4, St Pétersbourg 1794, p. 205 [1777].

**Ch. Hermite* [Rend. Circ. mat. Palermo 4 (1890), p. 146] a montré pour quelles raisons la formule (7a) présente une discontinuité alors que la formule (7) n'en présente pas.*

22) J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 35; Werke 1, Berlin 1889, p. 283.

23) Math. Ann. 5 (1872), p. 141. La première intégrale (8) a été vérifiée par *H. Bruns*, J. reine angew. Math. 90 (1881), p. 322.

24) J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 373/98.

L'intégration s'étend, pour la première intégrale, le long d'un cercle entourant l'origine, et pour la seconde, le long d'un cercle entourant le point x.

L. Schläfli[25]) emploie systématiquement l'intégration complexe et donne, à côté de leur représentation propre, une généralisation des fonctions sphériques [voir n° **30**].

On déduit de (7) que pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, les limites étant exceptées, X_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment

$$\lim_{n=+\infty} X_n(x) = 0. \tag{10}$$

H. E. Heine[26]) parvient à ce résultat en partant de la première équation (8). Lorsque θ tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque x tend vers 1, le résultat subsiste sous la condition que

$$\lim_{n=+\infty} n\theta = +\infty.$$

Pour $\theta = 0$, $X_n(\cos\theta) = 1$, même pour $n = +\infty$.

Le cas où

$$\lim_{n=+\infty} n\theta$$

a une valeur finie interviendra dans la théorie des fonctions cylindriques [n° **55**].

H. E. Heine[27]) et *G. Darboux*[28]) ont donné pour les grandes valeurs de n des expressions approchées des fonctions X_n; $_*$ainsi

$$\begin{aligned} X_n(\cos\theta) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\Bigg\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right] \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]}{2\sin\theta} \\ +\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3}{(2n-3)(2n-5)}\cdot\frac{\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta)^2}-\cdots\cdots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{11}$$

L'erreur commise dans l'approximation est de l'ordre du premier terme

25) Über die zwei Heineschen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale, Universitätsfestschrift, Berne 1881.

26) J. reine angew. Math. 90 (1881), p. 329/31; *H. Bruns* [id. 90 (1881), p. 322/8] déduit le même résultat d'une intégrale plus générale dont la formule (8) est un cas particulier.

27) Kugelf.[1]), (2ᵉ éd.) 1, p. 178.

28) C. R. Acad. sc. Paris 82 (1876), p. 365, 404; J. math. pures appl. (3) 4 (1878), p. 5, 377. $_*$Cf. *T. J. Stieltjes*, Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 7, p. 117.*

négligé; si l'on s'en tient aux p premiers termes l'erreur est de l'ordre de $\frac{1}{n^p\sqrt{n}}$, comme cela résulte de la substitution de sa valeur approchée $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ au coefficient numérique $\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}$.*

En s'arrêtant au premier terme on a la valeur approchée

$$(11\text{a})\qquad X_n = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right],$$

expression donnée par *P. S. Laplace*[29]).

8. Relations entre des polynomes consécutifs. En dérivant par rapport à α l'expression (3) on établit que[30])

$$(12)\qquad \begin{cases}(n+1)X_{n+1}(x) + nX_{n-1}(x) = (2n+1)xX_n(x),\\ \qquad\qquad X_1(x) = xX_0(x).\end{cases}$$

Soit Z_n ce que devient X_n quand on y remplace x par z; on déduit de la relation (12) l'égalité suivante[31])

$$(12\text{a})\qquad {}_*\Phi_n(x,z) = X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \cdots + (2n+1)X_nZ_n$$
$$= (n+1)\frac{Z_{n+1}X_n - Z_nX_{n+1}}{z-x}.^*$$

La forme (5) de X_n conduit à la relation

$$(13)\qquad (2n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dX_{n-1}(x)}{dx},$$

d'où l'on déduit

$$(13\text{a})\qquad {}_*1 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx}.^*$$

ainsi que[32])

$$(13\text{b})\qquad (2n-1)X_{n-1} + (2n-5)X_{n-3} + (2n-9)X_{n-5} + \cdots = \frac{dX_n}{dx}.$$

Le dernier terme du premier membre est $3\cdot X_1$ ou $1\cdot X_0$ suivant que n est pair ou impair. Il résulte du développement (4), où l'on écrit x à la place de μ, que les puissances entières de x s'expriment au moyen

29) Mécanique céleste 5, Paris 1825, livre 11, chap. 2, n° 3 et supplément (posth.) n° 1; Œuvres 5, Paris 1882, p. 36/45, 469/73; Mém. Acad. sc. Institut France (2) 2 (1817), éd. 1819, p. 141; Œuvres 12, Paris 1898, p. 430. Cf. *A. L. Cauchy*, Mém. Acad. sc. Institut France (2) 8 (1829), p. 125; Œuvres (1) 2, Paris 1908, p. 51; **O. Callandreau*, Bull. sc. math. (2) 15 (1891), p. 121*.

30) *O. Bonnet*, J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 267.

31) *H. Laurent*, J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 373/98.

32) *E. B. Christoffel*, Diss. Berlin 1856, p. 53. Cf. *G. Bauer*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 101; *E. B. Christoffel*, J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 61.

d'un nombre fini de fonctions sphériques. *A. M. Legendre*[33]) a établi la relation

$$(14)\quad x^n = \frac{1\cdot 2 \dots n}{3\cdot 5 \dots (2n+1)}\Big\{(2n+1)X_n + (2n-3)\frac{2n+1}{2}X_{n-2} + (2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}X_{n-4} + \cdots\cdots\Big\}.$$

E. N. Laguerre[34]) a démontré que si l'on représente un polynome entier en x au moyen des fonctions de Legendre

$$F(x) = AX_m + BX_p + \cdots + LX_t + \cdots\cdots,$$
$$m < p < \cdots < t < \cdots\cdots$$

le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ qui sont égales ou supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des termes constants

$$A, B, \dots, L.$$

Les lacunes que présente la suite

$$X_m, X_p, \dots, X_t, \dots$$

fournissent des renseignements sur le nombre des racines imaginaires de l'équation.*

F. Neumann[35]) a donné un grand nombre de formules de récurrence analogues aux formules (12) et (13).

9. Propriétés d'intégrales définies. On doit à *A. M. Legendre*[36]) les propositions suivantes qui permettront de déterminer les coefficients des différents polynomes X_n constituant, quand il est possible, le développement d'une fonction $F(x)$ en série de fonctions sphériques [voir n° **10**]:

$$(15)\qquad \int_{-1}^{+1} X_n(x)\,X_m(x)\,dx = 0, \qquad \text{pour } m \gtrless n,$$

$$(15\text{a})\qquad \int_{-1}^{+1} [X_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

33) Hist. Acad. sc. Paris 1784, éd. 1787, M. p. 370/90; Exercices de calcul intégral 2, Paris 1817, p. 352.

34) C. R. Acad. sc. Paris 91 (1880), p. 849; Œuvres 1, Paris 1898, p. 144/6.

35) Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig 1878, p. 60.

36) Hist. Acad. sc. Paris 1784, éd. 1787, p. 373; 1789, éd. an II, M. p. 384. *Cf. *F. Tisserand*, Traité de mécanique céleste 2, Paris 1891, p. 248/67.*

*Ces formules admettent les généralisations suivantes:

$$(16)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^p \frac{d^p X_m}{dx^p}\frac{d^p X_n}{dx^p}\,dx = 0,$$

$$(16\text{a})\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^p \left(\frac{d^p X_n}{dx^p}\right)^2 dx = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+p)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-p)}\right],$$

où m et n sont des entiers positifs non inférieurs à p.*

10. Développement d'une fonction d'une variable en série de fonctions sphériques. En admettant la possibilité du développement d'une fonction de x en une série convergente de fonctions sphériques sous la forme

$$(17)\qquad f(x) = A_0 X_0(x) + A_1 X_1(x) + \cdots + A_n X_n(x) + \cdots\cdots,$$

il résulte des égalités (15) et (15a) que

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) X_n(x)\,dx$$

et que le développement n'est possible que d'une seule façon.

*Les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour que le développement soit légitime ont été établies très simplement par *H. Burkhardt*[37]). Au moyen de valeurs approchées de X_n et de sa dérivée (pour n très grand) il établit que

$$(18)\qquad \lim_{n=+\infty}\int_{-1}^{x} \Phi_n(x, z)\,dz = \tfrac{1}{2},$$

la fonction $\Phi_n(x, z)$ étant celle qui se trouve déterminée par l'équation (12a); et l'égalité (18) est valable pour tout intervalle d'intégration compris entre -1 et $+1$. Puis *H. Burkhardt* démontre la relation

$$(18\text{a})\qquad \lim_{n=+\infty}\int_{a}^{b} \Phi_n(x, z)\,dz = 0, \qquad \text{où } -1 < a < b < +1,$$

et cela pour toute valeur de x comprise dans un intervalle n'ayant aucun point commun avec l'intervalle a, b (limites comprises). Il s'ensuit que

$$(18\text{b})\qquad \lim_{n=+\infty}\int_{b}^{x} \Phi_n(x, z)\,dz = \tfrac{1}{2}$$

pourvu que x soit compris dans un intervalle $(-1+\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ et b

37) *Sitzgsb. Akad. München, Math. Phys. Klasse 1909, mém. n° 10.*

dans l'intervalle $(-1, x-\varepsilon)$; on désigne ici par ε un nombre positif plus petit que 2. De l'égalité (18a) *H. Burkhardt* déduit que l'on a

$$\lim_{n=+\infty} \int_{-1}^{b} f(z)\, \Phi_n(x, z)\, dz = 0, \tag{19}$$

si la fonction $f(x)$ est à variation bornée, et cela pour toute valeur de x prise dans un intervalle n'ayant avec l'intervalle $(-1, b)$ aucun point commun (limites comprises). Si l'on prend pour l'intégrale (19) les limites -1, x on peut la décomposer ainsi

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} f(z)\,\Phi_n\,dz + f(x-0)\int_{x-\varepsilon}^{x} \Phi_n\,dz + \int_{x-\varepsilon}^{x} [f(z) - f(x-0)]\,\Phi_n\,dz;$$

la première intégrale et la troisième tendent vers zéro quand n grandit indéfiniment et il reste

$$\lim_{n=+\infty} \int_{-1}^{x} f(z)\,\Phi_n(x, z)\,dz = \tfrac{1}{2} f(x-0)$$

pour tout intervalle compris entre -1 et $+1$, dans lequel la fonction $f(x)$ est continue.

Si $f(x)$ est continue *à droite de* x

$$\lim_{n=+\infty} \int_{x}^{1} f(z)\,\Phi_n(x, z)\,dz = \tfrac{1}{2} f(x+0).$$

Par suite, si la fonction $f(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle $(-1, +1)$, on a

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2n+1}{2} X_n(x) \int_{-1}^{+1} f(z) X_n(z)\,dz = \tfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

La convergence de la série dont la somme figure dans le premier membre de cette égalité est uniforme pour tout intervalle de continuité de la fonction $f(x)$, intérieur à $(-1, +1)$.*

En particulier, le produit de deux fonctions sphériques peut être développé en une série de fonctions sphériques et le problème est traité par *F. Neumann*[38]); $\sin n\theta$ et $\cos n\theta$ s'expriment en séries de fonctions sphériques d'argument θ[39]).

38) Beiträge[35]), p. 81. Résultats antérieurs de *G. Bauer*, Sitzgsb. Akad. München 5 (1875), p. 247; *N. M. Ferrers*, An elementary treatise on spherical harmonics and subjects connected whith them, Londres 1877; (2e éd.) Londres 1881; *J. C. Adams*, Proc. R. Soc. London 27 (1878), p. 63/71.

39) Cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 93; *R. Most*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 167.

On peut mentionner encore la représentation de

$$\int_0^x (X_n)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^x (1-x^2)(X_n)^2 dx$$

en une somme de produits de fonctions sphériques[40]).

Si l'on cherche le polynome $P_n(x)$ de degré n qui rende minimée l'intégrale $\int_{-1}^{+1}[f(x)-P_n(x)]^2 dx$, où $f(x)$ est une fonction donnée, on trouve[41]) que $P_n(x)$ n'est autre chose que l'ensemble des n premiers termes du développement de $f(x)$ sous la forme (17).

On examinera plus loin [nº **20**] la légitimité du développement d'une fonction de deux angles en fonctions sphériques à deux variables; il suffira alors de particulariser pour avoir une solution s'appliquant au cas qui vient d'être considéré.

11. Autres modes d'exposition. Tables. Au lieu de l'équation différentielle (2) ou de l'expression (3), on peut adopter pour point de départ de la théorie l'intégrale (7) de Laplace[42]) ou quelque autre intégrale équivalente[42a]); on peut définir également la fonction sphérique par la formule[43]) de récurrence (12) ou par la propriété de l'intégrale (15) ou quelque propriété analogue[44]).

R. Olbricht[45]) traite les fonctions sphériques ou certaines généralisations de ces fonctions comme des cas particuliers de la fonction P de Riemann [cf. nº **30**].

---

40) *R. Hargreaves,* Proc. London math. Soc. (1) 29 (1897/8), p. 115; *C. Neumann* [J. reine angew. Math. 135 (1909), p. 157/80] étudie quelques développements particuliers procédant suivant des produits de fonctions sphériques.*

41) *C. A. dell' Agnola,* Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 19 I (1910), p. 455.*

42) Cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 23, 37; *L. Schläfli*, Festschrift[35]), p. 3.

42a) *H. Bruns* [J. reine angew. Math. 90 (1881), p. 322] déduit les principales propriétés des fonctions sphériques d'une intégrale qui comprend celle de *G. Mehler* comme cas particulier.

43) *K. Baer*, Progr. Kiel 1898.

44) *R. Murphy* [Elementary principles[14])] recherche une fonction $f(x)$ de degré n telle que $\int_0^1 t^\nu f(t)\,dt = 0$, pour $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$; cf. *W. Thomson* et *P. G. Tait*, Natural philos.[5]), (2e éd.) 2, p. 339; Theor. Physik 2, p. 328. Le même problème a été traité par *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 301; Werke 6, Berlin 1891, p. 3.

45) Diss. Leipzig 1887; Nova Acta Acad. Leopold. 52 (1888), p. 1/48.

J. W. L. Glaisher[46]) a calculé des tables numériques de fonctions sphériques. L'ouvrage de *W. E. Byerly*[47]) contient un extrait de ces tables donnant, avec 4 décimales, les valeurs des fonctions depuis $X_1(x)$ jusqu'à $X_7(x)$, pour des valeurs de x croissant de $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{100}$ entre les limites $x = 0$ et $x = 1$. *R. Fricke* donne ces tables jusqu'à $X_6(x)$. On trouve aussi dans l'ouvrage de *W. E. Byerly* une seconde table donnant $X_1(\cos\theta), \ldots, X_7(\cos\theta)$ avec quatre décimales, de degré en degré[48]). *W. Thomson* et *P. G. Tait*[49]) donnent, avec quatre décimales, des tables des fonctions X_6 et X_7, ainsi qu'une représentation graphique. *F. Neumann*[50]) a dressé des tables de fonctions sphériques pour des valeurs particulières de l'argument.

Les fonctions sphériques fondamentales.

12. Nombre de fonctions sphériques indépendantes. *Un polynome harmonique Π_n de degré n [n° 2] contient $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients arbitraires. En vertu de l'équation $\Delta \Pi_n = 0$, il existe $\frac{1}{2}n(n-1)$ relations entre les coefficients; d'où il suit qu'il y a au plus $2n+1$ polynomes harmoniques indépendants de degré n, par suite aussi $2n+1$ fonctions $Y_n(\mu, \varphi)$ indépendantes.

La relation (b) [n° 3] donne

$$Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{p=-n}^{p=n} e^{ip\varphi} X_n^p,$$

et l'équation (2) à laquelle satisfait X_n^p convient également à X_n^{-p}. On a ainsi $X_n^p = A X_n^{-p}$, A étant une constante.

La forme des $(2n+1)$ fonctions sphériques indépendantes est donc

$$(20) \qquad X_n^0,\ e^{\pm i\varphi} X_n^1,\ e^{\pm 2i\varphi} X_n^2, \ldots, e^{\pm ni\varphi} X_n^n$$

ou encore

$$(20\text{a}) \qquad \begin{cases} X_n^0, & X_n^1 \cos\varphi,\ X_n^2 \cos 2\varphi, \ldots, X_n^n \cos n\varphi, \\ & X_n^1 \sin\varphi,\ X_n^2 \sin 2\varphi, \ldots, X_n^n \sin n\varphi.* \end{cases}$$

---

46) Report Brit. Assoc. 49, Scheffield 1879, éd. Londres 1879, p. 54/7 [Report on math. Tables (publié en collaboration avec *A. Cayley*, *G. G. Stokes*, . . .)]; Nouvelles Tables allant jusqu'à X_{20} dressées par *A. Lodge*, Appendice dans *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), Philos. Trans. London 203 A (1904), p. 100.

47) An elementary treatise on Fouriers series and spherical, cylindrical and ellipsoïdal harmonics with applications to problems in mathematical physics, Boston 1893, p. 278/81.

48) Cette table, calculée sous la direction de *J. Perry*, fut publiée d'abord London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 32 (1891), p. 512.

49) Natural philos.[5]), (2e éd.) 2, p. 344/50; Theor. Physik 2, p. 334/9.

50) Beiträge[35]), p. 76.

13. Les fonctions fondamentales X_n^p. Les fonctions X_n^p se déduisent de la fonction sphérique X_n^0. *H. Poincaré*[6]) emploie l'analyse suivante:

Soit $\cos\gamma$ l'argument de X_n^0, γ étant l'angle d'une direction avec l'axe des z.

Si l'on change d'axe des z il faudra remplacer $\cos\gamma$ par

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Le polynome

$$X_n^0[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')],$$

considéré comme fonction de θ et φ ou de θ' et φ', sera une fonction sphérique.

*En posant

$$\cos\theta = \mu$$

et

$$e^{-i\varphi'}\sin\theta' = 2i\xi, \quad e^{i\varphi'}\sin\theta' = 2i\eta \qquad [i = \sqrt{-1}],$$

il vient

$$\cos\gamma = \mu\sqrt{1 + 4\xi\eta} + \sqrt{\mu^2 - 1}(\xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi}),$$

et la fonction X_n^0 de cet argument est une fonction sphérique quelles que soient les valeurs de ξ et de η.

Faisant $\xi = 1$, $\eta = 0$, on développe le polynome par la formule de Taylor:

$$X_n^0(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}e^{i\varphi}) = X_n^0(\mu) + e^{i\varphi}\sqrt{\mu^2 - 1}\frac{dX_n^0(\mu)}{d\mu} +$$

$$\cdots + \frac{e^{ip\varphi}(\mu^2 - 1)^{\frac{p}{2}}}{p!}\frac{d^pX_n^0(\mu)}{d\mu^p} + \cdots + \frac{e^{in\varphi}(\mu^2 - 1)^{\frac{n}{2}}}{n!}\frac{d^nX_n^0(\mu)}{d\mu^n}.*$$

Chacun des termes de la somme qui figure au second membre est une fonction sphérique. On peut alors écrire par un choix convenable du facteur numérique

$$X_n^p(\mu) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}(\mu^2 - 1)^{\frac{p}{2}}\frac{d^pX_n^0(\mu)}{d\mu^p} \tag{21}$$

ou

$$X_n^p(\mu) = \frac{1}{2^n(n+p)!}(\mu^2 - 1)^{\frac{p}{2}}\frac{d^{n+p}(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+p}}. \tag{21a}$$

Il s'ensuit que les racines de l'équation

$$X_n^p = 0$$

sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$ et que les racines différentes de ± 1 sont racines simples.

On a le développement en série

$$(22)\quad X_n^p = \frac{(2n)!}{2^n(n-p)!\,(n+p)!}(\mu^2-1)^{\frac{p}{2}}\Big\{\mu^{n-p} - \frac{(n-p)(n-p-1)}{2\cdot(2n-1)}\mu^{n-p-2} + \frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)(n-p-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-p-4} - \cdots\cdots\Big\}.$$

Sous forme de série hypergéométrique,

$$(22\mathrm{a})\quad {}_*X_n^p = \frac{(2n)!}{2^n(n-p)!\,(n+p)!}\,\frac{\mu^{n+p}}{(\mu^2-1)^{\frac{p}{2}}}\,F\Big(-\frac{n+p}{2},\ -\frac{n+p-1}{2},\ \frac{1}{2}-n,\ \frac{1}{\mu^2}\Big).^*$$

Les formules (16) et (16a) fournissent immédiatement les suivantes:

$$(23)\qquad \int_{-1}^{+1} X_m^p X_n^p\, d\mu = 0,$$

$$(23\mathrm{a})\qquad \int_{-1}^{+1} (X_n^p)^2 d\mu = (-1)^p \frac{2}{2n+1}\frac{(n!)^2}{(n-p)!\,(n+p)!}.$$

14. Le théorème d'addition des fonctions sphériques fondamentales. On a remarqué qu'en posant

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

$X_n(\cos\gamma)$ était une fonction sphérique, que l'on considérât θ et φ ou θ' et φ' comme variables.

Le fait que le développement de $X_n(\cos\varphi)$ ne doit contenir que les cosinus des multiples entiers de $(\varphi-\varphi')$ et qu'il est symétrique en

$$\cos\theta = \mu \ \text{ et } \ \cos\theta' = \mu'$$

permet d'établir que

$$(24)\quad \tfrac{1}{2}X_n(\cos\gamma) = \tfrac{1}{2}X_n(\mu)X_n(\mu') + \sum_{p=1}^{p=n}\frac{(1-\mu^2)^{\frac{p}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{p}{2}}}{(n-p+1)\ldots(n+p)}\frac{d^pX_n(\mu)}{d\mu^p}\frac{d^pX_n(\mu')}{d\mu'^p}\cos p(\varphi-\varphi').$$

Cette égalité constitue le *théorème d'addition* des fonctions de première espèce.

On désigne souvent $X_n(\cos\gamma)$ sous le nom de *coefficient de Laplace*[51]) ou de „fonction superficielle biaxiale harmonique"[52]).

51) L'équation (24) est correctement écrite par *A. M. Legendre* [Hist. Acad. sc. Paris 1789, éd. an II, p. 432]; l'expression de *P. S. Laplace* [Hist. Acad. sc. Paris 1782, éd. 1785, M. p. 142; Œuvres 10, Paris 1894, p. 369] n'est pas exacte.

52) *W. Thomson* et *P. G. Tait*, Natural philos.[5]), (2[e] éd.) 1, p. 202; Theor. Physik 1, p. 174.

P. S. Laplace[53]) détermine la valeur des coefficients numériques qui figurent dans la formule précédente en faisant $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, dans le cas où $n-p$ est pair; si $n-p$ est impair, il faut dériver auparavant par rapport à θ et à θ'. Dans le même but *H. E. Heine*[54]) substitue à $\cos\theta$ et à $\cos\theta'$ des variables x et x_1 qui peuvent devenir plus grandes que l'unité, et il cherche, suivant ses notations,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{P^n(z)}{x^n},$$

où l'on a posé

$$z = x x_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^{\,2}-1}\cos(\varphi-\varphi').$$

C. G. J. Jacobi[55]) parvient à la formule (24) sans s'appuyer sur les propriétés des fonctions X_n. Il remplace dans l'expression (3) μ par $\cos\gamma$ et passe par l'égalité

$$X_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\cos(\varphi-\zeta)]^n}{[\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'\cos(\varphi'-\zeta)]^{n+1}}\, d\zeta$$

qui comprend les formules (7) et (7a) comme cas particuliers.

*O. *Callandreau*[56]) a construit des développements analogues à (24) où $\cos p(\varphi-\varphi')$ est remplacé par un polynome $P_p[\cos(\varphi-\varphi')]$ vérifiant une relation récurrente

$$\cos(\varphi-\varphi')P_p = b_p P_{p-1} + c_p P_{p+1}.^{*}$$

P. A. Hansen[57]) développe $X_n(\cos\gamma)$ suivant les puissances de $\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$ ou de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$; il donne encore le développement de $X_n(\cos\alpha\cdot\cos\beta)$ suivant les cosinus des multiples de β.

15. Autres définitions. Tables. *H. E. Heine*[58]) et *C. G. J. Jacobi*[59]) écrivent le développement suivant:

$$(25)\quad (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n = \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \frac{2}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}}{(n+\nu)!}\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}\cos\nu\varphi.$$

53) Mécanique céleste 2, Paris an VII, livre 3, chap. 2 n° 15; Œuvres 2, Paris 1878, p. 41/3. Autre méthode de détermination des coefficients par *F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, publ. par *C. Neumann*, Leipzig 1887, p. 71 et suiv.

54) Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 313.

55) J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 81; Werke 6, Berlin 1891, p. 148.

56) *C. R. Acad. sc. Paris 99 (1884), p. 23/6.*

57) Abh. Ges. Lpz. (math.) 2 (1855), mém. n° 4, p. 285.

58) Diss. Berlin 1842, p. 15/8.

59) J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 81; Werke 6, Berlin 1891, p. 148;

Le coefficient de $\cos \nu\varphi$ multiplié par un facteur numérique convenable est ce que *H. E. Heine* appelle *fonction sphérique adjointe* (zugeordnete); il la désigne par $P_\nu^n(x)$:

$$P_\nu^n(x) = \frac{(n-\nu)!}{(2n)!}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}},$$

en sorte que

$$P_\nu^n = \frac{2^n(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{(2n)!} X_n^\nu.$$

H. E. Heine déduit de l'équation (25) la représentation suivante:

$$(26) \qquad P_\nu^n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2^n(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{(2n)!}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n \cos(\nu\varphi)\,d\varphi.$$

La fonction P_ν^n et, par suite, la fonction X_n^ν admettent encore d'autres représentations, soit sous forme de séries analogues à (4b), soit sous forme d'intégrales[60]).

On peut aux formules (23) et (23a) adjoindre les suivantes:

$$(27) \qquad \int_{-1}^{+1} P_\mu^n(x) P_\nu^n(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0$$

pour $\mu \gtrless \nu$ et tous deux non supérieurs à n,

$$(27\text{a}) \qquad \int_{-1}^{+1} [P_\nu^n(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(-1)^\nu}{\nu} \frac{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}{[1\cdot 3 \ldots (2n-1)]^2}$$

pour $n \geqq \nu > 0$.

Il s'ensuit deux modes de développement en série des fonctions sphériques fondamentales (ou adjointes) suivant qu'on laisse constant l'indice supérieur ou l'indice inférieur. On trouvera dans *H. E. Heine*[61]) et *F. Neumann*[62]) des relations récurrentes liant

$$P_\nu^n,\ P_\nu^{n+1},\ P_\nu^{n-1} \text{ ou bien } P_\nu^n,\ P_{\nu+1}^n,\ P_{\nu-1}^n.$$

C. G. J. Jacobi, développe ensuite

$$(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-(n+1)};$$

E. Beltrami, [Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 29 (1896), p. 793] a montré comment on peut parvenir à un développement analogue à (25) sans passer par l'intégrale de Laplace.

60) Pour une représentation géométrique de $X_n^p(x)$ dans le domaine réel, cf. *R. Olbricht*, Diss. Leipzig 1887. On y trouve aussi pour X_n^p et pour des fonctions plus générales les différents développements sous forme de série hypergéométrique.

61) Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 259.

62) Beiträge[35]), p. 73.

F. Neumann[63]) définit et écrit les fonctions fondamentales de la manière suivante

$$P_{n\nu}(x) = \sqrt{1-x^2}^{\,\nu}\,\frac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu}.$$

P_{n0} et P_n sont identiques.

$_*$*H. M. Macdonald*[63a]) a considéré $P_n^m(\mu)$ comme un fonction de n et en a recherché les zéros.*

$_*$*Hj. Tallquist*[64]) a construit des tables qui donnent la valeur des fonctions $P_n{}^j(x)$ pour $n = 1, 2, \ldots, 8$ et $j = 1, 2, \ldots, n$. L'argument x est donné de $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{100}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.*

Les fonctions sphériques générales.

16. Les fonctions sphériques générales se représentent au moyen des fonctions sphériques fondamentales. On a vu [n° **12**] la façon dont on peut choisir les $2n+1$ fonctions sphériques indépendantes à deux variables, d'ordre n.

La fonction sphérique générale ou encore *fonction de Laplace*[65]), du nom de *P. S. Laplace* chez qui on la rencontre pour la première fois, peut donc s'écrire[66])

$$(28)\qquad Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{p=n} (A_p \cos p\varphi + B_p \sin p\varphi) X_n{}^p(\cos\theta)^{56)};$$

A_p, B_p sont des constantes arbitraires.

---

63) Beiträge[35]), p. 2/3; Potential[53]), p. 70, 322 où l'expression de *fonction adjointe* est employée; *P. S. Laplace* [Mécanique céleste 2, Paris an VII, livre 3, chap. 2; Œuvres 2, Paris 1878, p. 44] n'a pas employé de qualification spéciale pour les fonctions fondamentales qu'il désigne par le symbole 6; sa définition coïncide avec celle de la fonction P_ν^n de *H. E. Heine* au facteur $(-1)^{\frac{\nu}{2}}$ près. *W. Thomson* et *P. G. Tait*, comme *J. Clerk Maxwell*, suivent *P. S. Laplace*; *E. Beltrami* suit *F. Neumann*.

63a) $_*$Proc. London math. Soc. (1) 31 (1899), p. 264/78.*

64) $_*$Tafeln der Kugelfunktionen $P_n(\cos\theta)$ [Acta Soc. scient. Fennicae 33 (1908), n° 4, p. 1/8]; Tafeln der Kugelfunctionen $P_n(x)$ und ihrer abgeleiteten Functionen [Acta Soc. scient. Fennicae 32 (1906), n° 6, p. 1/27.]*; Tafeln der abgeleiteten und zugeordneten Kugelfunctionen erster Art, [Acta Soc. scient. Fennicae 33 (1908), n° 9, p. 1/67.]*

65) *E. Beltrami* [Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 29 (1896), p. 793] donne une autre définition de ces fonctions.

66) Pour voir démontré que la fonction (28) est la fonction la plus générale définie au n° **1**, cf. *R. Dedekind*, Viertelj. Naturf. Ges. Zürich. 4 (1859), p. 346. Pour la transformation des fonctions sphériques par le passage d'un système de coordonnées polaires à un autre, cf. *Ad. Schmidt*, Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 327.

Les fonctions

$$\cos p\varphi\, X_n^p(\cos\theta), \quad \sin p\varphi\, X_n^p(\cos\theta)$$

sont désignées sous le nom de *tesseral harmonic functions* par *W. Thomson* et *P. G. Tait* et par *J. Clerk Maxwell.* Elles s'annulent sur une série de parallèles et de méridiens qui partagent la sphère en un réseau de quadrilatères.

Dans le cas où $p = n$, comme X_n^p se réduit, abstraction faite d'un facteur constant, à

$$(\cos^2\theta - 1)^n,$$

les fonctions s'annulent sur une série de méridiens découpant la sphère en fuseaux; elles prennent, chez les auteurs précités, le nom de *sectorial harmonic functions.*

Si $p = 0$, les fonctions s'annulent sur une série de parallèles découpant des zônes sur la sphère; ce sont les *zonal harmonic functions.*

17. Représentation de Maxwell et de Thomson et Tait. *J. Clerk Maxwell* définit de la sorte la fonction sphérique générale:

$$(29) \qquad Y_n(\theta, \varphi) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot C.$$

r, θ, φ, sont les coordonnées polaires d'un point de l'espace, C une constante arbitraire[67]) et $h_1, h_2, \ldots, h_n$ des directions quelconques.

Si les n directions $h_1, h_2, \ldots, h_n$ coïncident avec l'axe des z et si l'on prend $C = 1$, on obtient la fonction *zonal harmonic* [voir la formule (6)].

Les *tesseral functions* correspondent au cas où $n - p$ directions coïncident avec l'axe des z, les autres directions, au nombre de p, se trouvant dans le plan de l'équateur et faisant entre elles des angles égaux.

W. Thomson et *P. G. Tait* déduisent de leur définition générale (29) l'expression suivante pour les fonctions *tesseral* et *sectorial*:

$$(29\text{a}) \qquad r^{n+1} \frac{\partial^{j+k+l}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l}, \qquad \text{avec } j + k + l = n,$$

où x, y, z sont des coordonnées rectangulaires et où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On peut déduire l'expression (28) de l'expression générale (29) et de l'expression (29a)[68]).

67) Le facteur C manque chez *J. Clerk Maxwell.* C'est la $(2n+1)^{\text{ième}}$ constante qui doit figurer dans Y_n.

68) Pour la signification géométrique des fonctions sphériques, cf. *C. F. Gauss,* mém. posth.; Werke 5, Göttingue 1877, p. 631; *H. E. Heine*, J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 386; Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 329.

18. Propriétés d'intégrales définies. Si l'on désigne par $Z_m(\theta, \varphi)$ une fonction analogue à $Y_n(\theta, \varphi)$ [voir (28)], mais dans la définition de laquelle entreraient les constantes A_p' et B_p', on a les deux relations

$$(30) \qquad \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y_n Z_m \, d\varphi = 0 \quad \text{pour } m \gtrless n, \quad \mu = \cos\theta,$$

et

$$(30\text{a}) \quad \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y_n Z_n \, d\varphi = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)^2} \Big\{ 2(n!)^2 A_0 A_0' + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (n-\nu)!(n+\nu)!(A_\nu A_\nu' + B_\nu B_\nu') \Big\}.$$

Si l'on choisit pour fonction Z_m la fonction X_m $(\cos\gamma)$ du nº **14**, l'égalité (30) subsiste et l'égalité (30a) devient

$$(31) \qquad \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y_n X_n(\cos\gamma) \, d\varphi = Y_n(\theta', \varphi').$$

Les égalités (30) et (31) sont fort importantes. Il en sera fait usage au numéro **19**.

Si l'on pose

$$\cos\gamma_1 = \cos\theta \cos\theta'' + \sin\theta \sin\theta'' \cos(\varphi - \varphi''),$$
$$\cos\delta = \cos\theta' \cos\theta'' + \sin\theta' \sin\theta'' \cos(\varphi' - \varphi''),$$

il suit de l'égalité (31) que

$$(31\text{a}) \qquad \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma) X_n(\cos\gamma_1) = X_n(\cos\delta)$$

et, en faisant $\theta' = \theta''$, $\varphi' = \varphi''$, que

$$(31\text{b}) \qquad \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} [X_n(\cos\gamma)]^2 = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

19. Développement d'une fonction de deux variables en série de fonctions sphériques. Supposons qu'une fonction f de deux angles θ, φ admette un développement en série convergente de la forme

$$(32\text{a}) \qquad Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n + \cdots\cdots,$$

Y_n désignant la fonction de Laplace; l'angle θ est compris entre 0 et π, l'angle φ entre 0 et 2π. En tenant compte des égalités (30) et (31) on déduit de l'équation

$$(32) \qquad f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} Y_n$$

que l'on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma) f(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma) Y_n \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta', \varphi').$$

Puis, en changeant θ et φ en θ' et φ',

$$(33) \qquad Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma) f(\theta', \varphi') \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Si le développement (32) est possible, il ne l'est donc que d'une seule façon. En particulier, toute fonction entière des coordonnées ξ, η, ζ d'un point de la sphère admet un développement de la forme (32); la série est alors limitée[69]).

20. Légitimité du développement d'après Dini, Heine, Darboux, Poincaré. Il est essentiel de fixer les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $f(\theta, \varphi)$, pour que la série du second membre de l'égalité (32) converge et représente la fonction $f(\theta, \varphi)$.

S. D. Poisson[70]), le premier, traita la question; son analyse suppose des conditions de continuité pour la dérivée qui ne sont point essentielles.

Puis *G. Lejeune Dirichlet*[71]) reprit le problème par un procédé analogue à celui qu'il employa pour les séries trigonométriques; mais il introduit une fonction auxiliaire, qu'il suppose dérivable, sans que l'on puisse bien fixer les conditions que cette propriété impose à la fonction donnée.

O. Bonnet[72]) a donné une démonstration qui comporte, pour la fonction, des restrictions dont on peut s'affranchir.

U. Dini reprit la question et sa méthode fut complétée et quelque peu modifiée par *H. E. Heine*[73]).

---

69) Pour la représentation d'une fonction homogène et entière de ξ, η, ζ au moyen des fonctions sphériques, voir une remarque de *C. F. Gauss*, (mém. posth.), Werke 5, Göttingue 1877, p. 630.

70) Connaissance des Temps pour 1831, éd. Paris 1828; Théorie mathématique de la chaleur, Paris 1835, p. 212.

71) J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 35/56; Werke 1, Berlin 1889, p. 283/306.

72) *O. Bonnet*, Mém. couronnés et savants étrangers Acad. Bruxelles in 4°, 23 (1848/50), éd. 1850, p. 65; avec quelques changements, J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 265/300.

73) *U. Dini*, Ann. mat. pura appl. (2) 6 (1873/5), p. 112/40, 208/15; *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2° éd.) 1, Berlin 1878, p. 435; 2, Berlin 1881, p. 361.

H. E. Heine, comme *G. Lejeune Dirichlet*, transporte le pôle au point A, de coordonnées θ, φ. Cela revient à faire

$$\theta = 0 \text{ et } \cos\gamma = \cos\theta'.$$

En désignant par $F(\theta')$ la valeur moyenne de la fonction donnée $f(\theta', \varphi')$ sur le parallèle décrit de A comme pôle avec θ' pour rayon, l'intégration relative à φ' donne $2\pi F(\theta')$. La relation (13a) permet de transformer la somme des n premiers termes écrits dans le second membre de l'égalité (32) en une somme de deux intégrales dont la première sera

$$\int_0^\pi F(\theta') \frac{d X_n(\cos\theta')}{d\theta'} d\theta'. \tag{34}$$

Cette intégrale est décomposée en intégrales partielles dont les limites sont

$$0,\ \alpha_1;\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n,\ \pi.$$

On choisit pour les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation $X_n = 0$. Chacune des intégrales intermédiaires tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

H. E. Heine remplace α_1 et α_n par deux nombres positifs η et ζ, tels que η et $\pi - \zeta$ tendent vers zéro quand n grandit indéfiniment, sous la condition que

$$\lim_{n=+\infty} X_n(\cos\eta) = 0$$

et que

$$\lim_{n=+\infty} X_n[\cos(\pi - \zeta)] = 0.$$

C'est dans l'évaluation des intégrales de limites 0 et η, puis ζ et π que *H. E. Heine* a complété la démonstration de *U. Dini*. Il prouve que, si S_n désigne la somme des n premiers termes de la série (32a), on a

$$\lim_{n=+\infty} [S_n - F(+0)] = 0.$$

Les hypothèses sont que:

1°) la fonction $f(\theta, \varphi)$ est continue dans chaque direction aux environs de $\theta = 0$.

2°) $F(\theta)$ et $F(\pi - \theta)$ sont des fonctions finies et continues quand θ varie de zéro à un nombre aussi voisin de zéro qu'on le veut, et qu'elles n'ont pas, dans les limites de l'intégration, une infinité de maximés et de minimés.

Une transformation de coordonnées permet de repasser au cas général et le second membre de l'équation (32) représentera la moyenne arithmétique des valeurs que prend $f(\theta, \varphi)$ sur un cercle de rayon γ, quand γ tend vers zéro.

G. Darboux[74]) adopte le même point de départ que *U. Dini*. Posant $\cos\theta = x$, il désigne par $F(x)$ la valeur moyenne que prend $f(\theta, \varphi)$ sur le cercle décrit du point A comme pôle avec un rayon égal à θ'. La formule (13a) lui permet d'écrire

$$(34\text{a}) \qquad S_{n+1} = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right) dx.$$

„Si la fonction $F(x)$ est finie et discontinue pour $x = l_1, l_2, \ldots, l_p$, si elle a une dérivée, finie en général, mais pouvant devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de x, on peut appliquer dans chaque intervalle $(-1, l_1)$, (l_1, l_2), etc. l'intégration par partie. Et en tenant compte que $\lim\limits_{n=+\infty} X_n(x) = 0$ quand x est compris entre -1 et $+1$, on déduit

$$\lim_{n=+\infty} S_{n+1} = F(1).$$

G. Darboux considère le cas où la fonction F devient infinie dans les limites de l'intégration. Revenant à la variable γ, il écrit, au lieu de (34a),

$$(34\text{b}) \qquad S_{n+1} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(\gamma)\, \frac{d}{d\gamma}[P_n(\cos\gamma) + P_{n+1}(\cos\gamma)]\, d\gamma.$$

Or P_n et $\frac{dP_n}{d\gamma}$ admettent des formules d'approximation.

Si n est très grand et si γ est compris entre 0 et π (limites exclues) on a

$$P_n(\gamma) = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n\sqrt{n}},$$

$$\frac{dP_n}{d\gamma} = \frac{-2\sqrt{n}\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi\sin\gamma}} + \frac{p'}{\sqrt{n}},$$

p et p' étant des quantités finies.

Soit a la valeur de l'argument rendant $\varphi(\gamma)$ infini. On peut toujours écrire

$$\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\gamma),$$

où l'on suppose que φ_2 ne devient pas infini quand $\gamma = a$, et que φ_1 s'annule si la variable est prise en dehors de l'intervalle $(a - h', a + h)$, h et h' étant deux nombres positifs.

Alors

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{2}\int_{a-h'}^{a+h} \varphi_1(\gamma)\,\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})\,d\gamma + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi_2(\gamma)\,\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})\,d\gamma.$$

74) *G. Darboux*, J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 1.

La seconde intégrale tend vers $\varphi_2{}'(0)$ ou $\varphi(0)$ quand n augmente; quant à la première, les formules d'approximation la ramènent à la valeur

$$\sqrt{n}\int_{a-h'}^{a+h} \frac{\varphi_1(\gamma)\sin\left(n\gamma+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}}\,d\gamma$$

qui devra tendre vers zéro quand n grandit, h et h' étant des nombres fixes.

Il s'ensuit qu'on peut développer $f(\theta,\varphi)$ en une série de fonctions Y_n, tant que la fonction $\varphi(\gamma)$ qu'on déduit de f ne devient pas infiniment grande d'un ordre supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.*

H. Poincaré[75]) a donné des conditions de validité du développement une démonstration de forme différente.

*Soit ε la densité en un point d'une couche sphéroïdale, de rayon 1; cette densité est fonction des coordonnées θ, φ du point considéré. Si V est le potentiel en un point M intérieur à la sphère, point dont les coordonnées sont r, θ, φ $(r<1)$, la fonction

$$\Phi = 2r\frac{\partial V}{\partial r} + V \tag{35}$$

jouit de la propriété suivante:

$$\lim_{r=1} \Phi = 4\pi\varepsilon. \tag{35a}$$

La distance du point M à un point quelconque de la sphère étant désignée par ϱ,

$$\Phi = \int \frac{(1-r^2)\,\varepsilon'\,d\omega'}{\varrho^3};$$

ε' est la densité en un point quelconque de la sphère, $d\omega'$ l'élément de surface; l'intégration s'étend à toute la surface de la sphère.

Si r est plus petit que l'unité, la fonction (35) admet le développement en série convergente

$$Y_0 + 3rY_1 + \cdots + (2n+1)r^nY_n + \cdots\cdots,$$

en sorte que l'on a

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=+\infty}(2n+1)r^nY_n. \tag{35b}$$

Et il faut voir sous quelles conditions la série converge pour $r=1$ et si elle représente $4\pi\varepsilon$. Considérant la direction OM comme fixe (O est le centre de la sphère), *H. Poincaré* donne à r des valeurs

75) *H. Poincaré*, C. R. Acad. sc. Paris 118 (1894), p. 497; Figures d'équilibre[6]), p. 52.

complexes. Il suppose la sphère partagée en un certain nombre de régions limitées, chacune, par un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de courbes analytiques; la fonction ε' est continue à l'intérieur de chacun des polygones, mais peut éprouver des discontinuités quelconques, tout en restant finie, quand on passe d'une région à l'autre. Soit alors

$$F(\mu') = \int_0^{2\pi} \varepsilon' d\varphi', \qquad \mu' = \cos\theta';$$

la valeur de Φ peut s'écrire

$$\Phi = (1 - r^2) \int_{-1}^{+1} \frac{F(\mu')}{\varrho^3} d\mu';$$

$F(\mu')$ est une fonction analytique de μ', exception faite des valeurs qui correspondent aux parallèles passant par les sommets des polygones ou tangents aux côtés. La fonction $\frac{F(\mu')}{\varrho^3}$ est alors intégrable entre -1 et $+1$. Remplaçant r par $e^{i\psi}$, *H. Poincaré* démontre que, sauf en un nombre limité de points singuliers, la fonction Φ qui est devenue fonction de ψ admet une dérivée finie, mais que l'intégrale $\int |\Phi| d\psi$ reste finie en ces points singuliers. Ce sont les conditions pour que Φ soit développable en série de Fourier. Pour $\psi = 0$, la valeur de r est l'unité, et l'on obtient, en tenant compte des relations (35a) et (35b)

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=+\infty} (2n+1) Y_n.^*$$

A. Sommerfeld[76]) multiplie les termes du deuxième membre de l'équation (32) par un facteur dépendant d'un paramètre t, de telle sorte que la série soit certainement convergente; quand $t = 0$, elle coïncide avec la série (32), et l'auteur recherche sous quelles conditions le passage à ce cas limite n'altère pas la convergence.

C. Neumann[77]) suit une autre méthode. Il détermine la limite de l'intégrale (34) dans l'hypothèse où l'intervalle $(0, \pi)$ peut être partagé en intervalles dans lesquels $F(\theta')$ soit continue et monotone (c'est-à-dire seulement croissante ou décroissante); l'intégrale est partagée en intégrales partielles, dont les limites fixes sont des points particuliers de $F(\theta')$, et *C. Neumann* fait usage du deuxième théorème de

76) *A. Sommerfeld*, Diss. Königsberg 1891. Un procédé semblable, quoique conduit avec moins de rigueur, avait été employé par *S. D. Poisson*, J. Éc. polyt. (1) cah. 19 (1823), p. 145; cf. *H. Burkhardt*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 10^2 (1901/8), p. 380 [1902].

77) *C. Neumann*, Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen, Leipzig 1881, p. 80/126.

la moyenne. L'hypothèse précédente se traduit par la condition que la surface de la sphère peut être partagée en un nombre fini de polygones curvilignes à l'intérieur de chacun desquels $f(\theta, \varphi)$ est continue; les arcs de courbes qui limitent les polygones ne doivent former ni une infinité d'angles, ni avoir une infinité d'oscillations.

L. Fejér[78]), en faisant sur la fonction $f(\theta, \varphi)$ des hypothèses très générales, par exemple qu'elle est bornée, intégrable sur la sphère et continue au point de coordonnées θ, φ, démontre que

$$\lim_{n=+\infty} \frac{S_n''}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

existe et représente la valeur de la fonction $f(\theta, \varphi)$. Il faut entendre que l'expression

$$\frac{S_n''}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

est définie par la suite de *E. Cesàro*[79]) correspondant à

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{2\nu+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_\nu(\cos\gamma)\, f(\theta', \varphi') \sin\theta' \cdot d\theta' \cdot d\varphi'.$$

21. Représentation d'après F. Neumann d'une fonction connue pour certaines valeurs de la variable au moyen des fonctions sphériques. *C. F. Gauss*[80]) le premier chercha, dans le cas où l'expérience fournit la valeur d'une fonction pour vingt-cinq couples de valeurs de θ et φ, à représenter cette fonction par la série limitée

$$Y_0(\theta, \varphi) + Y_1(\theta, \varphi) + Y_2(\theta, \varphi) + Y_3(\theta, \varphi) + Y_4(\theta, \varphi),$$

et cela au moyen d'un choix approprié des vingt-cinq constantes figurant dans les cinq fonctions Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.

Dans le cas général, la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} Y_\nu(\theta, \varphi)$$

comporte $(n+1)^2$ constantes. *F. Neumann*[81]) a donné une méthode

78) C. R. Acad. sc. Paris 146 (1908), p. 224/7.

79) Cette suite de *E. Cesàro* s'obtient en posant

$$S_n' = S_0 + S_1 + \cdots + S_n,$$
$$S_n'' = S_0' + S_1' + \cdots + S_n'.$$

80) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838, Leipzig 1839; Werke 5, Göttingue 1877, p. 145.

81) Astron. Nachr. (Altona) 15 (1838), p. 313; (réimpr.) Math. Ann. 14 (1879), p. 567. Cf. *F. Neumann*, Potential[53]), p. 131/54 (chap. 7).

simple pour les déterminer[82]); elle suppose les points où la fonction est connue répartis d'une façon convenable sur la surface de la sphère; elle envisage aussi le cas où toutes les constantes n'ont pas besoin d'être déterminées, mais où, pour les Y d'ordre le plus élevé, on ne recherche que le terme indépendant de φ et les premiers termes suivants. La méthode s'appuie sur des propriétés des sommes d'un nombre fini de fonctions sphériques, analogues aux propriétés des intégrales (15), (15a), (16), (16a).

Ainsi dans le cas où les $2p+2$ constantes

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1}, \quad a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$$

satisfont aux $2p+2$ équations

$$a_1\mu_1^i + a_2\mu_2^i + \cdots + a_{p+1}\mu_{p+1}^i = \int_{-1}^{+1} x^i\,dx, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2p+1)$$

et si $m + n \leqq 2p + 1$, la somme

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p+1} a_\lambda P_m(\mu_\lambda) P_n(\mu_\lambda)$$

est égale à $\frac{2}{2n+1}$ ou à zéro, suivant que m égale n ou que m est différent de n. De plus $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1}$ sont racines de $P_{p+1}(\mu) = 0$. Une proposition analogue existe pour les fonctions fondamentales.

Fonctions sphériques de deuxième espèce.

22. La fonction de deuxième espèce Q_n. La connaissance de la solution particulière X_n de l'équation différentielle linéaire (2a) permet, en prenant x pour variable au lieu de μ, d'écrire une seconde intégrale[83]):

$$Q_n(x) = X_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)[X_n(x)]^2}. \tag{36}$$

Les points $x = \pm 1$ sont des infinis logarithmiques pour Q_n, qui s'annule pour x infini; X_n est une fonction finie pour toute valeur finie de l'argument et elle ne devient infinie qu'avec x.

La fonction Q_n est dite *fonction sphérique de deuxième espèce.*

---

82) Pour des recherches plus récentes cf. *H. Burkhardt*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 10^2 (1901/8), p. 388 [1902].

83) *N. H. Abel*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 22; Œuvres, éd. *L. Sylow* et *S. Lie* 1, Christiania 1881, p. 251; *L. Euler*, Institutiones calculi integralis 2, S^t Pétersbourg 1769, p. 102/3 (problème 104); *G. Bauer*, Habilitationsschrift, Munich 1857.

Elle peut se représenter par l'expression

(36a) $$Q_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \cdot q_n(x),$$

où $q_n(x)$ est la somme de la série

$$x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \cdots;$$

cette série est convergente pour $|x| > 1$.

C'est le résultat qu'on obtiendrait directement en cherchant à satisfaire à l'équation (2a) par un développement procédant suivant les puissances décroissantes de la variable. La loi de formation des coefficients est celle qui s'applique aux coefficients de la série (4) après qu'on y a remplacé n par $-(n+1)$.

Une autre origine de la série dont la somme est égale à Q_n est le développement de $\frac{1}{x-y}$ par rapport aux puissances croissantes de $\frac{y}{x}$; en remplaçant les puissances de y par leurs expressions au moyen des fonctions sphériques [n° 8, formule (14)] et en réunissant les fonctions sphériques de même indice p on parvient à l'égalité[84])

(37) $$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (2n+1) X_n(y) Q_n(x).$$

Il faut supposer, pour la validité du développement,

$$|y - \sqrt{y^2 - 1}| > |x - \sqrt{x^2 - 1}|,$$

$\sqrt{x^2-1}$ et $\sqrt{y^2-1}$ ayant respectivement les signes de x et de y[85]).

23. Représentation de F. Neumann. Autres représentations. L'égalité (37) fournit l'intégrale de *F. Neumann*[86])

(38) $$Q_n(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(y)\,dy}{x-y}.$$

---

84) *H. E. Heine,* J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 72.

85) Démonstrations de *H. E. Heine* [Kugelf.[1]), (1re éd.) p. 104], de *L. W. Thomé* [J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 337/43] et de *H. Laurent* [J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 373]. La démonstration de *H. Laurent* est reproduite par *H. E. Heine* [Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 197]. *C. Neumann* [Über die Entwicklung einer Function mit imaginären Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art, Halle 1862] rattache l'équation (37) à une proposition connue de *A. L. Cauchy* et en conclut le développement d'une fonction en fonctions sphériques de première et de deuxième espèce.

86) *F. Neumann,* J. reine angew. Math. 37 (1848), p. 21; Beiträge[35]), p. 1, 64; Potential[53]), p. 311. La fonction considérée par *F. Neumann* ne contient pas le facteur $\frac{1}{2}$.

F. Neumann montre directement que cette intégrale satisfait à l'équation (2a); elle représente la fonction Q_n pour toute valeur de x différente d'une véritable fraction réelle; on s'affranchit ainsi de la condition $|x| > 1$ qu'imposait l'égalité (36a).

La décomposition en éléments simples de la fonction qui figure sous le signe $\int$ dans l'égalité (36) conduit à la représentation suivante[87]) qui peut aussi se déduire de (38):

$$(38\text{a}) \qquad Q_n = \tfrac{1}{2} X_n(x) \log_e \frac{x+1}{x-1} - R_n(x).$$

$R_n(x)$ est un polynome en x de degré $(n-1)$.

La fonction $Q_n(x)$ n'étant pas réelle pour $|x| < 1$, on est amené, pour les valeurs de l'argument comprises entre -1 et $+1$, à considérer la fonction

$$(39) \qquad S_n = \tfrac{1}{2} X_n(x) \log_e \frac{1+x}{1-x} - R_n(x)$$

qui est également solution de l'équation (2a).

Le polynome R_n est la partie entière de

$$\tfrac{1}{2} X_n(x) \log_e \frac{x+1}{x-1};$$

E. B. Christoffel[88]) en a donné l'expression:

$$(40) \; R_n(x) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} X_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3 \cdot (n-1)} X_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5 \cdot (n-2)} X_{n-5}(x) + \cdots$$

L. Schläfli[89]) et *Ch. Hermite*[90]) trouvent

$$(40\text{a}) \qquad R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\nu} X_{\nu-1}(x) X_{n-\nu}(x).$$

En imaginant une coupure allant, le long de l'axe des x, de $x = -1$ à $x = +1$, et en prenant la détermination du logarithme figurant dans Q_n de telle sorte que sa partie imaginaire soit comprise entre $-\pi i$ et $+\pi i$, l'égalité (38a) définit une branche de fonction analytique. En un point x de la coupure *H. E. Heine*[91]) adopte pour valeur de la fonction la demi-somme des valeurs qu'elle prend sur

---

87) Cette représentation se trouve déjà donnée par *R. Murphy* [Trans. Cambr. philos. Soc. 5 (1832/4), éd. 1835, p. 338] qui prend pour variable indépendante $t = \frac{1-x}{2}$.

88) J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 61/82.

89) Festschrift[25]), p. 61.

90) Jornal sciencias math. astron. (Coïmbre) 6 (1885), p. 81 [1884].

91) Kugelf.[1]), (2e éd) 1, p. 126; pour x compris entre -1 et $+1$ il adopte la fonction désignée par S_n [égalité (39)].

les deux bords de la coupure, c'est-à-dire qu'il écrit

$$Q_n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \tfrac{1}{2} [Q_n(x + \varepsilon i) + Q_n(x - \varepsilon i)].$$

Une semblable détermination, remarque justement *L. Schläfli*[92]), n'est point admissible, car elle ne satisfait pas à l'équation (2a) aux environs de la coupure.

T. J. Stieltjes[93]) pose

$$(41) \qquad A = 2\int_0^{\xi} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}}, \quad B = 2\int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}},$$

ξ et $\frac{1}{\xi}$ étant les points critiques $x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $x - \sqrt{x^2 - 1}$; le chemin d'intégration est un lacet partant de l'origine et passant par chacun des points ξ et $\frac{1}{\xi}$; la valeur initiale du radical est $+1$. Dans ces conditions

$$(41\text{a}) \qquad \begin{cases} A = 2S_n(x) + i\pi X_n(x), \\ B = 2S_n(x) - i\pi X_n(x). \end{cases}$$

L'intégrale (38) de *F. Neumann* permet d'obtenir pour $Q_n(x)$ des relations de récurrence soit identiques, soit analogues à celles qui existent pour $X_n(x)$. La première des équations (12) et l'équation (13) subsistent pour Q_n. A la place de la deuxième équation (12) il faut écrire

$$(42) \qquad Q_1(x) - xQ_0(x) + 1 = 0.$$

On déduit de l'égalité (38) et de l'égalité (38a) les valeurs de Q_n et de $\frac{dQ_n}{dx}$, pour $x = 0$ etc.[94]).

24. Racines de S_n. La fonction $S_n(x)$ admet $(n+1)$ racines situées chacune dans l'un des intervalles

$$\cos\frac{2k\pi}{2n+1}, \quad \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Les racines de l'équation $X_n(x) = 0$ séparent celles de l'équation $S_n(x) = 0$.

La fonction $Q_n(x)$, rendue analytique par la coupure définie au numéro 23, n'admet aucune racine finie[95]).

---

92) Festschrift[25]), p. 26.

93) Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 7, p. 1/17.

94) *F. Neumann* [Beiträge[35]), p. 64] donne des relations récurrentes pour les fonctions R_n, comme pour les fonctions X et les fonctions Q. *Cf. *F. Caspary*, J. reine angew. Math. 107 (1891), p. 137/40; Bull. Soc. math. France 19 (1890/1), p. 11/8.*

95) *T. J. Stieltjes*, Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 10, p. 1/10; *Ch. Hermite*, Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 9, p. 1/10.

25. Quelques développements en séries pour Q_n et S_n. On peut satisfaire à l'équation différentielle (2a) au moyen des deux séries suivantes, dont l'une est limitée et l'autre converge pour $|x| < 1$:

$$(43)\quad \begin{cases} M = 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdots \\ \qquad\qquad = F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right), \\ N = x - \frac{(n-1)(n+2)}{2\cdot 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots \\ \qquad\qquad = xF\left(-\frac{n-1}{2},\ \frac{n+2}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right); \end{cases}$$

F désigne ici la série hypergéométrique.

Alors, si n est pair[96]),

$$(43\text{a})\quad \begin{cases} X_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots n} M, \\ Q_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2\cdot 4\ldots n}{1\cdot 3\ldots(n-1)} N \pm \frac{1}{2} i\pi X_n(x), \end{cases}$$

et si n est impair,

$$(43\text{b})\quad \begin{cases} X_n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots(n-1)} N, \\ Q_n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\cdot 4\ldots(n-1)}{1\cdot 3\ldots n} M \pm \frac{1}{2} i\pi X_n(x). \end{cases}$$

Il faut prendre, dans l'expression de Q_n, le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que x se trouve sur le bord inférieur ou sur le bord supérieur de la coupure $(x - 0\cdot i)$ ou $(x + 0\cdot i)$.

On peut encore représenter Q_n par une série procédant suivant les puissances de $x - \sqrt{x^2-1}$. En posant $x = \cos\theta$, *T. J. Stieltjes*[97]) donne pour $S_n(\cos\theta)$ la valeur

$$(44)\qquad S_n(\cos\theta) = -2\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}\, s_n,$$

où s_n est la somme de la série

$$(44\text{a})\quad \frac{\sin(n\theta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot(2n+3)}\,\frac{\sin(n\theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \frac{1\cdot 3\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\cdot\frac{\sin(n\theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}} + \cdots;$$

ce développement de $S_n(\cos\theta)$, où $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$, est analogue à celui

96) *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 147; *F. Neumann*, Beiträge[35]), p. 57.

97) C. R. Acad. sc. Paris 110 (1890), p. 1026; Ann. Fac. sc Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 7, p. 1/17; cette formule donne une valeur approchée de S_n pour n très grand; cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 175.

que la formule (11) donnait pour X_n. On peut déduire de l'égalité (44) l'égalité suivante, donnée déjà par *H. E. Heine*[98]):

$$(44a) \quad S_n(\cos\theta) = C_n\Big[\cos(n+1)\theta + \frac{1\cdot(n+1)}{1\cdot(2n+3)}\cos(n+3)\theta + \frac{1\cdot 3(n+1)(n+2)}{1\cdot 2(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta + \cdots\Big]$$

valable pour $0 < \theta < \pi$; on désigne par $-C_n$ le coefficient de s_n dans la relation (44).

26. Q_n sous forme d'intégrale. Outre la forme (38), on trouve encore pour Q_n[99])

$$(45) \quad Q_n(x) = \int_0^\infty \frac{du}{[x+\cos(iu)\sqrt{x^2-1}]^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-z^2)^n}{(x-z)^{n+1}}\,dz.$$

La première de ces intégrales est valable quelle que soit la valeur de x; la seconde suppose que x n'a pas une valeur réelle comprise dans l'intervalle d'intégration.

On a recherché[100]) la fonction génératrice de Q_n, c'est-à-dire la fonction analogue à (3) dont le développement en série suivant les puissances de α admet Q_n pour coefficient de α^n; c'est

$$(46) \qquad \frac{1}{2\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}\log_e\frac{x-\alpha-\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{x-\alpha+\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}.$$

R. Hargreaves[101]) a donné les valeurs des intégrales

$$\int_0^1[Q_n(x)]^2dx, \quad \int_1^{+\infty}[Q_n(x)]^2dx, \quad \int_0^1 Q_n(x)X_n(x)dx.$$

27. Les fonctions sphériques et les fractions continues. Si l'on développe en fraction continue l'expression

$$\tfrac{1}{2}\log_e(x+1) - \tfrac{1}{2}\log_e(x-1),$$

le numérateur et le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite, multipliés par le facteur

$$\frac{1\cdot 2\ldots n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)},$$

représentent $R_n(x)$ et $X_n(x)$; et $\frac{Q_n}{X_n}$ est la différence entre la fonction génératrice et la $n^{\text{ième}}$ réduite[102]).

98) Kugelf.[1]), (2^e^ éd.) 1, p. 130.

99) *H. E. Heine,* Kugelf.[1]), (2^e^ éd.) 1, p. 175; la deuxième intégrale (45) est donnée par *H. Laurent,* J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 373/98; *L. Schläfli* [Festschrift[25]), p. 12/8] écrit d'autres intégrales.

100) *H. Laurent*[99]); *H. E. Heine,* Kugelf.[1]), (2^e^ éd.) 1, p. 134; *L. Schäfli,* Festschrift[25]), p. 61; *E. Beltrami,* Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 20 (1887), p. 469.

101) Proc. London math. Soc. (1) 29 (1897/8), p. 115/23.

102) Cette proposition est donnée, en substance du moins, par *C. F. Gauss,*

28. Fonctions adjointes de deuxième espèce. Ces fonctions dépendent de $Q_n(x)$ comme X_n^ν dépendait de X_n.

H. E. Heine[103]) définit

$$(47)\qquad Q_n^\nu(x) = (-1)^\nu \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)}{(n+\nu)!}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu Q_n(x)}{dx^\nu}$$

et *F. Neumann*[104]) écrit

$$(47\text{a})\quad Q_{n\nu}(x) = (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu Q_n(x)}{dx^\nu} = \nu!(-1)^\nu(1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+1}},$$

en sorte que

$$(47\text{b})\qquad Q_{n\nu}(x) = (-1)^{\frac{3\nu}{2}} \frac{(n+\nu)!}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)} 2\cdot Q_n^\nu(x).$$

La fonction $Q_n^\nu(x)$ satisfait à la même équation différentielle que $X_n^\nu(x)$, savoir

$$(48)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dQ_n^\nu}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right]Q_n^\nu = 0.$$

Dans le cas où ν n'est pas supérieur à n, la fonction Q_n^ν est une solution particulière de cette équation qui devient infinie pour $x=\pm 1$ et s'annule pour x infini, tandis que $X_n^\nu\ (x)$ est une fonction finie pour toute valeur finie de x et qui devient infinie quand l'argument devient infini.

H. E. Heine[105]) a donné de la fonction Q_n^ν des développements en série et des représentations sous formes d'intégrales. *F. Neumann* donne des formules de récurrence. Il existe pour $Q_n(x)$ un théorème d'addition[106]) qui fait intervenir la fonction $Q_n^\nu(x)$, tout comme X_n admettait une propriété analogue [n° **14**].

F. Lindemann[107]) a donné le développement de

$$\frac{1}{x-y}$$

au moyen des fonctions X_n^ν, Q_n^ν. Il trouve en particulier la formule

---

Commentat. Soc. Gott. recent. 3 (1814/5), éd. Göttingue 1816, math. p. 39/76; Werke 3, Göttingen 1876, p. 165/206.

103) *H. E. Heine* [Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 210] écrit d'ailleurs $Q_\nu^n(x)$ là où nous écrivons $Q_n^\nu(x)$.

104) Beiträge[85]), p. 2; J. reine angew. Math. 37 (1848), p. 22. Le facteur 2 de (47b) vient de ce que la fonction Q_n de Neumann est le double de la fonction de Heine.

105) Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 217/24.

106) *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 332. *C. Neumann* [Abh. Ges. Lpz. (math.) 13 (1887), p. 403] étend le théorème aux valeurs complexes de l'argument. Le théorème est aussi lié aux fonctions considérées au n° **29**.

107) Math. Ann. 19 (1882), p. 323.

remarquable

$$\int_{-1}^{+1} X_n^\nu(x)\, Q_n^\nu(x) \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

29. Fonctions dont l'indice supérieur surpasse l'indice inférieur. La définition de X_n^ν [voir l'équation (21) où l'on a défini X_n^ν] suppose que l'entier ν ne surpasse pas l'entier n; car pour $\nu > n$ la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée de X_n est nulle. Mais, dans les mêmes conditions, la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée de Q_n est différente de zéro. Cela conduit à considérer les intégrales de l'équation différentielle (48) répondant à des valeurs de ν supérieures à n; c'est ce qu'a fait *F. Neumann*[108]). Il développe une solution de l'équation (48) en une série de puissances décroissantes de $(x-1)$, multipliée par le facteur $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\nu}{2}}$. Il prouve que, *dans le cas seulement où $\nu \leqq n$,* l'équation (48) admet deux intégrales particulières X_n^ν et Q_n^ν satisfaisant aux conditions suivantes: la première de ces intégrales reste finie aux deux points singuliers $x = +1$, $x = -1$ et devient infinie avec x; la seconde est infinie pour $x = \pm 1$ et s'annule pour x infini. Dans le cas où ν est supérieur à n, il existe pour l'équation différentielle (48) des intégrales particulières jouissant de propriétés caractéristiques toutes différentes. L'une des solutions, $S_{n\nu}$, s'annule pour $x = -1$ et devient infinie pour $x = +1$; l'autre, $T_{n\nu}$, s'annule pour $x = +1$ et devient infinie pour $x = -1$. Toutes deux grandissent indéfiniment avec x. Les facteurs constants par lesquels on peut multiplier ces intégrales sont déterminés par *F. Neumann* de façon que la différence

$$S_{n\nu}(x) - T_{n\nu}(x)$$

devienne égale à $Q_{n\nu}(x)$; et ainsi $S_{n\nu} - T_{n\nu}$ s'annule quand x devient infini.

Sous forme d'intégrale

$$S_{n\nu} = (-1)^\nu \nu!\,(1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \int_{+\infty}^{1} \frac{X_n(z)\,dz}{(x-z)^{\nu+1}} \qquad (\nu > n),$$

tandis que $T_{n\nu}$ s'obtient en remplaçant la limite supérieure $+1$ de l'intégrale par le nombre -1.

108) *H. E. Heine* considère aussi les fonctions adjointes pour $\nu > n$; mais il n'indique pas d'où vient que, dans ce cas, la nature des intégrales particulières de l'équation (48) est autre que dans le cas $\nu \leqq n$. C'est *F. Neumann* [Beiträge[35]), p. 22] qui a mis cette différence en lumière; on lui doit l'étude systématique du cas où $\nu > n$ ainsi que l'introduction des fonctions $S_{n\nu}$, $T_{n\nu}$. *R. Olbricht*[45]), dans le cas de l'argument réel, a donné des interprétations géométriques de ces fonctions ainsi que de P_n^ν et Q_n^ν.

F. Neumann[109]) a encore donné d'autres représentations sous forme d'intégrales ainsi que des développements en série des fonctions $S_{n\nu}$, $T_{n\nu}$ (suivant les puissances croissantes de x par exemple).

Quelques extensions.

30. Fonctions sphériques à indices quelconques. *H. E. Heine*[110]) étend la définition de la fonction P_n au cas où l'indice est un nombre quelconque et non plus un entier. *L. Schläfli*[111]) définit les fonctions sphériques de première et de deuxième espèce pour toute valeur réelle ou imaginaire de l'indice au moyen d'une intégrale, toujours valable dans le domaine complexe; de la simple addition de contours d'intégration il déduit les principales relations entre les fonctions sphériques. Il représente $P^a(x)$ par deux intégrales distinctes, l'une prise dans le plan des t, l'autre sur le double feuillet des s.

$$(49)\quad \begin{cases} \text{I)} \quad P^a(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int \frac{1}{2^a} \frac{(t^2-1)^a}{(t-x)^{a+1}}\, dt, \\ \text{II)} \quad P^a(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int s^a \frac{ds}{w}, \qquad (w^2 = s^2 - 2sx + 1). \end{cases}$$

Le contour d'intégration de (I), pour $|x| > 1$, est un cercle de rayon $\sqrt{x^2-1}$ décrit autour de x dans le sens direct; pour (II) le contour est un lacet entourant les points $x + \sqrt{x^2-1}$ et $x - \sqrt{x^2-1}$.

Il résulte des relations (49) que

$$(49\text{a})\qquad P^a(x) = P^{-(a+1)}(x).$$

La fonction $Q^a(x)$ est définie par l'une des égalités

$$(50)\quad \begin{cases} \text{I)} \quad Q^a(x) = \dfrac{1}{2i\sin\pi a}\displaystyle\int 2^a \frac{(x-t)^a}{(t^2-1)^{a+1}}\, dt, \\ \text{II)} \quad Q^a(x) = \dfrac{1}{2i\sin\pi a}\displaystyle\int \frac{1}{2^{a+1}} \frac{(t^2-1)^a}{(x-t)^{a+1}}\, dt. \end{cases}$$

Le chemin d'intégration pour (I) est une courbe nodale entourant le point x; pour (II) il ressemble à une lemniscate circulant dans le sens direct autour du point -1, dans le sens rétrograde autour du point $+1$.

Entre P et Q existe la relation donnée par *L. Schläfli*

$$(51)\qquad P^a(x) = \frac{\operatorname{tg}\pi a}{\pi}\left\{Q^a(x) - Q^{-(a+1)}(x)\right\}.$$

---

109) Beiträge [85]), p. 31/58.

110) Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 37; ici l'intégrale de Laplace sert à la définition de P_n pour n quelconque.

111) Festschrift [25]).

L. Schläfli a développé cette théorie; rappelons seulement qu'il donne, pour a quelconque, des formules analogues à (43), (43a), (43b). Le deuxième indice ν des fonctions sphériques adjointes P_ν^a, dont il fait également l'étude, ne prend que des valeurs entières.

Les fonctions P_n^ν, Q_n^ν, où n et ν prennent des valeurs quelconques, ont été étudiées par *E. W. Hobson*[112]) et représentées par des intégrales étendues à des domaines imaginaires; une coupure sur l'axe des abscisses les rend univoques. *R. Olbricht* considère les fonctions P_n^ν et Q_n^ν à deux indices quelconques comme des cas particuliers de la fonction P de Riemann.

31. Fonctions annulaires ou toroïdales. Certaines fonctions sphériques à indices non entiers présentent de l'intérêt pour le rôle qu'elles jouent dans la théorie du potentiel. Citons d'abord les *fonctions annulaires* ou *toroïdales* (*Ringfunctionen, Toroidal functions*). Ce sont les fonctions sphériques dont l'indice est la moitié d'un entier impair; et elles sont solutions de l'équation (2a), où $n(n+1)$ a été remplacé par $n^2-\frac{1}{4}$ (n étant entier). La première étude de ces fonctions a été faite par *C. Neumann*[113]); puis on les rencontre dans un travail posthume de *B. Riemann*[114]). Pourtant, chez aucun de ces auteurs, les analogies des fonctions qu'ils traitent avec les fonctions sphériques n'apparaissent clairement. Elles ont été mises en évidence par un certain nombre d'auteurs parmi lesquels *A. Wangerin*[115]), puis *H. E. Heine*[116]), *W. M. Hicks*[117]). D'autres recherches sont dues à *H. Hübschmann*[118]) qui n'a point égard aux travaux de ses devanciers, ainsi qu'à *A. B. Basset*[119]). *L. Gegenbauer*[120]) généralise les fonctions annulaires.

Comme pour les fonctions sphériques, on peut distinguer parmi les fonctions annulaires les *zonal functions* et les *sectorial functions*. Les dernières sont solutions de l'équation (1) où $n(n+1)$ a été remplacé par $n^2-\frac{1}{4}$; elles sont le produit de $\cos\nu\varphi$ ou de $\sin\nu\varphi$ par

112) Philos. Trans. London 187 A (1896), p. 443.

113) Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeleitung in einem Ringe, Leipzig 1864.

114) Werke, publ. par *H. Weber*, (1re éd.) Leipzig 1876, p. 407; (2e éd.) Leipzig 1892, p. 431.

115) Archiv Math. Phys. (1) 55 (1873), p. 113; Progr. Berlin 1873.

116) Kugelf.[75]), (2e éd.) 2, p. 283 et suiv.

117) Philos. Trans. London 172 (1881), p. 609/52.

118) Progr. Chemnitz 1889.

119) Amer. J. math. 15 (1893), p. 287. Voir aussi *W. D. Niven*, Proc. Lond. math. Soc. (1) 24 (1892/3), p. 372/86; puis *J. R. Schütz*, J. reine angew. Math. 113 (1894), p. 161/78.

120) Sitzgsb. Akad. Wien 100 IIa (1891), p. 745.

l'une des fonctions $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)$, $Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}$:

$$(52)\qquad P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^\nu \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi \frac{\cos\nu\omega\, d\omega}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{n+\frac{1}{2}}};$$

n et ν ont des valeurs entières. La fonction $Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)$ se déduit de la fonction $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)$ par le changement de $\cos\omega$ en $\operatorname{ch}\omega = \frac{1}{2}(e^\omega + e^{-\omega})$, les limites de l'intégrale, pour $\nu < n$, étant 0 et $+\infty$. La *zonal function* correspond au cas $\nu = 0$. Les fonctions envisagées satisfont aux relations suivantes, comme les fonctions sphériques:

$$(53)\qquad \begin{cases} P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu} \dfrac{d^\nu P_0^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx^\nu}, \\[2ex] Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu} \dfrac{d^\nu Q_0^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx^\nu}. \end{cases}$$

Les valeurs précédentes de $P_\nu^{n-\frac{1}{2}}$, $Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}$ sont celles de *A. B. Basset*[121]); elles diffèrent par un facteur constant de celles adoptées par *H. E. Heine*. Les fonctions annulaires peuvent évidemment s'écrire sous forme de séries hypergéométriques et elles admettent des formules de récurrence analogues à celles qui se présentent pour les fonctions sphériques. Citons celle-ci, importante dans les applications,

$$(54)\qquad \frac{dP_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx} Q_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) - \frac{dQ_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx} P_\nu^{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^\nu (n+\nu)!}{(n-\nu)!\,(x^2-1)}.$$

Ces fonctions jouent par rapport au tore le rôle des fonctions sphériques par rapport à la sphère.

32. Fonctions coniques de Mehler. Les *fonctions coniques* (*conal harmonic functions*) sont des fonctions sphériques à indices complexes $-\frac{1}{2}+i\mu$ (μ quelconque); déjà *W. Thomson* et *P. G. Tait*[122]) ont montré la nécessité de les introduire. *F. G. Mehler*[123]) fut conduit à ces fonctions en développant la distance d'un point de la surface d'un cône à un point situé sur l'axe. Il les définit ainsi:

$$(55)\qquad K^\mu(\cos\theta) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\theta)}} = P_{i\mu-\frac{1}{2}}(\cos\theta).$$

---

121) La notation de *A. B. Basset*[119]) est un peu différente.

122) *W. Thomson* et *P. G. Tait*, Natural philos.[5]) 1, p. 178; Theor. Phys. 1, p. 170.

123) *F. G. Mehler*, J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 134; Progr. Elbing 1870; Math. Ann. 18 (1881), p. 161. Cf. d'ailleurs *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2^e^ éd.) 1, p. 300; Kugelf.[78]), (2^e^ éd.) 2, p. 219 et suiv.

K^μ satisfait à l'équation (2b) du n° **3**, où l'on remplace $n(n+1)$ par $-(\mu^2+\frac{1}{4})$. L'intégrale générale de l'équation est alors

(55a) $$AK^\mu(\cos\theta) + BK^\mu(-\cos\theta);$$

$K^\mu(-\cos\theta)$ représente la fonction conique de deuxième espèce.

On a d'autre part

(56) $$\frac{1}{x-y} = \pi\int_0^{+\infty} d\mu\,\frac{\mu\operatorname{tg}\mu\pi i}{i\cos\mu\pi i} K^\mu(x) K^\mu(-y),$$

d'où il suit que

(56a) $$K^\mu(-y) = \frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y}.$$

F. G. Mehler donne d'autres représentations des fonctions coniques sous forme d'intégrales ou de développements en séries; il établit également le théorème d'addition de ces fonctions.

33. Fonctions coniques adjointes. *C. Neumann*[124]), qui représente $K^\mu(-y)$ par la notation $L_\mu(y)$, obtient les formules de *F. G. Mehler* par une autre voie que cet auteur; il ajoute de nouvelles relations, par exemple le développement de $K^\mu(\cos\theta)$ au moyen des fonctions sphériques $X_n(\cos\theta)$. Il introduit les *fonctions coniques adjointes*

(57) $$K_{\mu j}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}}\frac{d^j K^\mu(x)}{dx^j},\quad L_{\mu j}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}}\frac{d^j L_\mu(x)}{dx^j},$$

au moyen desquelles le théorème d'addition prend une forme analogue à celle qui correspond aux fonctions sphériques. L'étude de ces *fonctions adjointes* est reprise par *G. Leonhardt*[125]) qui considère aussi l'analogue de la fonction $Y_n(\theta,\varphi)$ de Laplace, savoir

(58) $$Y_q(\mu,\varphi) = \sum_{j=0}^{j=+\infty} K_{qj}(\mu)[\alpha_j\cos j\varphi + \beta_j\sin j\varphi].$$

En donnant à $\cos\gamma$ la même signification qu'au n° **14**, on a

(59) $$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} L_q(\cos\gamma)\,Y_\varrho(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi$$
$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}[Y_\varrho(\mu_1,\varphi_1)\cos q\pi i - Y_q(\mu_1,\varphi_1)\cos\varrho\pi i].$$

34. Développement d'une fonction en fonctions coniques. *F. G. Mehler* a donné la représentation suivante d'une fonction $f(\theta,\varphi)$ au moyen des fonctions coniques:

(60) $$f(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mu\,\frac{1}{i}\operatorname{tg}\mu\pi i\,d\mu\int_0^{+\infty}\frac{1}{i}\sin i\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}K^\mu(z)f(\theta',\varphi')\,d\varphi',$$

124) Math. Ann. 18 (1881), p. 195.

125) Math. Ann. 19 (1882), p. 578.

où

$$z = \cos\theta i \cos\theta' i + \sin\theta i \sin\theta' i \cos(\varphi - \varphi').$$

Cette représentation est valable sous la condition que la fonction f soit définie de $\theta = 0$ à $\theta = +\infty$ et de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, qu'elle ne devienne jamais infinie, et que $\theta = +\infty$ soit pour elle un zéro d'ordre supérieur à $e^{-\frac{\theta}{2}}$. Le second membre de l'équation (60) représente, suivant les cas, la fonction $f(\theta, \varphi)$ ou une certaine valeur moyenne de la fonction aux environs du point (θ, φ). Il faut remarquer la différence entre ce cas et celui des fonctions sphériques. Pour celles-ci, l'indice n étant un nombre entier, le développement comportait une somme de fonctions sphériques, tandis que pour celles-là intervient une intégration relative à l'indice μ[126]).

35. Fonctions dont l'origine est le développement de $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$. Beaucoup d'auteurs ont fait l'étude des coefficients des puissances de α dans le développement de

(61) $$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu}.$$

Le coefficient $C_n^\nu(x)$ de α^n comprend la fonction de Legendre X_n comme cas particulier, et jouit de nombreuses propriétés analogues à celles des fonctions sphériques.

Le développement de l'expression (61) a été incidemment considéré par *C. G. J. Jacobi*[127]) dans un travail posthume[128]).

Les coefficients C_n^ν ont été étudiés en détail par *L. Gegenbauer*[129]).

---

126) *W. Thomson* et *P. G. Tait*, [Natural philos.[5]) 1, p. 189; Theor. Physik 1, p. 170] parlent de séries de fonctions sphériques même pour des indices imaginaires, mais point d'une représentation sous forme d'intégrale analogue à (60).

127) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 149; Werke 6, Berlin 1891, p. 184; *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 297, 451; *M. Koppe*, Progr. Berlin 1877; *G. Darboux*, J. math. pures appl. (3) 4 (1878), p. 377.

128) Déjà *R. Murphy* [Trans. Cambr. philos. Soc. 5 (1832/4), éd. 1835, p. 322] traite de C_n^ν, mais comme coefficient tiré d'une fonction génératrice compliquée. *F. G. Mehler* [J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 152], le premier, a attiré l'attention sur le rôle de ces fonctions dans les quadratures mécaniques.

Il existe un grand nombre de travaux sur le développement de l'expression (61) suivant les cosinus des multiples de θ, x étant posé égal à $\cos\theta$. Cf. *H. Burkhardt*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 10² (1901/8), p. 62/9, 71/92 [1901].

129) Sitzgsb. Akad. Wien 70 II (1874), p. 6/16, 433/43; 75 II (1877), p. 891/905; 97 IIa (1888), p. 259/70; 102 IIa (1893), p. 942/50; Denkschr. Akad. Wien (math.) 48 (1884), p. 293/316. Indépendamment des travaux précédents, un grand nombre d'auteurs se sont occupés des fonctions C_n^ν.

**J. Escary* [J. math. pures appl. (3) 5 (1879), p. 47/68] étudie, suivant les

Ils satisfont à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2C_n^\nu}{dx^2}-(1+2\nu)x\frac{dC_n^\nu}{dx}+n(n+2\nu)C_n^\nu=0. \tag{62}$$

Il faut citer la propriété analogue à celle du n° **9** [équation (15)]

$$\int_{-1}^{+1} C_n^\nu(x)C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx=0 \qquad \text{pour } m \gtrless n.$$

L'équation (62) admet une deuxième intégrale particulière qui provient du développement de $(y-x)^{-2\nu}$ en fonctions C_n^ν et qui est le coefficient de $2(n+\nu)C_n^\nu(x)$.

Les fonctions C_n^ν admettent un théorème d'addition[130]. Il existe des relations de récurrence entre telles de ces fonctions dont les deux indices diffèrent. Ainsi

$$2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(x)=\frac{dC_n^\nu(x)}{dx}; \tag{63}$$

C_n^ν s'exprime alors au moyen de fonctions dont l'indice ν est compris entre 0 et 1[131].

36. Cas où ν est un multiple de $\frac{1}{2}$. Fonctions sphériques d'ordre supérieur. Dans le cas où ν est un multiple impair de $\frac{1}{2}$, l'équation (63) montre que C_n^ν s'exprime par des dérivées de fonctions sphériques; C_n^ν ne diffère alors des fonctions sphériques fondamentales que par une puissance de $(1-x^2)$ et un facteur constant. Dans le cas où ν est un nombre entier, les fonctions C_n^ν se ramènent à C_n^1 ou à C_n^0:

$$C_n^1(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad x=\cos\theta \tag{64}$$

$$C_n^0(x)=\frac{\cos n\theta}{n}. \tag{64a}$$

Cette dernière fonction est le coefficient de $2\alpha^n$ dans le développement de $-\log(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)$.

---

différentes valeurs de l'exposant, les racines des coefficients de x dans le développement de l'expression $(1-2\alpha x+\alpha^2)^\nu$, où $\nu=\pm\frac{2l+1}{2}$.*

130) *H. E. Heine*, J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 127. *L. Gegenbauer*, Sitzgsb. Akad. Wien 70 II (1874), p. 433; 102 IIa (1893), p. 942. Relativement aux formules de récurrence, voir *R. Most*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 163.

131) *S. Pincherle* [Memorie Ist. Bologna (5) 1 (1890), p. 337/69] a recherché les fonctions qui dérivent du développement de

$$\frac{1}{\sqrt{t^3-3tx+1}}$$

suivant les puissances croissantes de t.

Ces fonctions C_n^ν que *H. E. Heine*[132]) appelle *fonctions sphériques d'ordre supérieur* se rattachent à l'équation de Laplace $\Delta P = 0$ relative à un domaine à $(p+1)$ dimensions[133]). Dans ce cas, l'équation (1a) du n° **1** dépend de p variables

$$\theta,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{p-1},$$

liées aux coordonnées rectangulaires par les formules

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi_1,\ x_3 = r\sin\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$x_4 = r\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots\ldots,$$
$$x_{p+1} = r\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{p-1}.$$

Dans l'hypothèse où la fonction cherchée P est indépendante de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p-1}$ (cas d'une symétrie autour d'un axe), P se réduit à $r^n C_n^\nu$ pour $\nu = \frac{p-1}{2}$.

Si l'on cherche, sans condition de symétrie, la fonction homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ de la forme

$$P = r^n Y$$

qui satisfasse à l'équation $\Delta P = 0$, on parvient aux fonctions sphériques à p variables, ou fonctions de Laplace d'ordre supérieur[134]). Elles ont été étudiées par *A. Cayley*[135]); on les retrouve dans divers travaux de *H. E. Heine*[136]) sur les fonctions de Lamé; enfin il faut citer les mémoires de *F. G. Mehler*[137]), de *C. Neumann*[138]) et de *V. Giulotto*[139]).

37. Fonctions de N. Nielsen. *Toutes les fonctions précédemment considérées se présentent comme des cas particuliers des fonctions

---

132) Kugelf.[1]), (2ᵉ éd.) 1, p. 299, 451 et suiv.

133) La fonction P est ici le potentiel d'une masse attirante dans l'espace considéré, l'attraction étant inversement proportionnelle à la $p^{\text{ième}}$ puissance de la distance.

134) Il résulte de l'exposé du texte qu'il ne convient guère de donner à C_n^ν, pour ν *quelconque*, le nom de „fonction hypersphérique" comme le fait *A. Letnikov* [Mat. Sbornik (recueil Soc. math. Moscou) 12 (1885), p. 205/83; cf. Jahrb. Fortschr. Math. 17 (1885), éd. 1888, p. 497], ni de „fonction sphérique d'ordre supérieur" comme le fait *F. Büttner*, Festschr. Wernigerode 1900; ni simplement de „fonction sphérique" comme le fait *N. Nielsen*, Handbuch der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904.

135) J. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 275/80.

136) J. reine angew. Math. 60 (1862), p. 252/303; 61 (1863), p. 356/66; 62 (1863), p. 110/41.

137) Progr. Danzig 1864; J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 161.

138) *C. Neumann* [Z. Math. Phys. 12 (1867), p. 116] donne, entre autres, l'expression de *fonction ultrasphérique*.

139) Voir aussi *V. Giulotto*, Giorn. mat. (2) 8 (1901), p. 162.

métasphériques et *ultrasphériques* dont *N. Nielsen*[140]) a fait une étude systématique.

N. Nielsen définit la fonction sphérique la plus générale

$$K^{\nu,n}(x)$$

de l'argument x, de l'indice n et du paramètre ν comme la solution la plus générale de deux équations fonctionnelles; il en résulte, dans le cas où $K^{\nu,n}$ est analytique par rapport à x, que la fonction satisfait à l'équation du type hypergéométrique

$$(65) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (1+2\nu)x\frac{dy}{dx} + n(n+2\nu)y = 0$$

qui n'est autre que l'équation (62).

Si ν et n ont des valeurs finies, quelconques, la fonction est dite *métasphérique*; si n est un entier non négatif la fonction est alors *ultrasphérique.*

On a les solutions particulières suivantes de l'équation (65):

$$(66)\begin{cases} P^{\nu,n}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\cos\frac{n\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}y_1 + \dfrac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\nu\right)\sin\frac{n\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}y_2, \\[2ex] Q^{\nu,n}(x) = -\dfrac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\sin\frac{n\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}y_1 + \dfrac{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\nu\right)\cos\frac{n\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}y_2, \end{cases}$$

valables pour $|x| < 1$, et où

$$(66\text{a}) \qquad \begin{cases} y_1 = F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+\nu,\ \frac{1}{2},\ x^2\right), \\[1ex] y_2 = xF\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{n+1}{2}+\nu,\ \frac{3}{2},\ x^2\right); \end{cases}$$

ces solutions doivent être remplacées, dans le cas où $|x| > 1$, par les suivantes:

$$(66\text{b})\begin{cases} M^{\nu,n}(x) = \dfrac{\Gamma(n+\nu)(2x)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu)}F\left(\frac{1-n}{2},\ -\frac{n}{2},\ 1-\nu-n,\ \frac{1}{x^2}\right), \\[2ex] N^{\nu,n}(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)x^{-n-2\nu}}{2^{n+1}\Gamma(n+1+\nu)}F\left(\frac{n+1}{2}+\nu,\ \frac{n}{2}+\nu,\ 1+n+\nu,\ \frac{1}{x^2}\right). \end{cases}$$

Le cas de $\nu = \frac{1}{2}$, n étant égal à un entier non négatif, conduit aux

140) K. Danske Vidensk ab. Selsk. Skr. (Naturv. math. Afhandl.), (7) 2 (1904/6), p. 241; Ann. mat. pura appl. (3) 14 (1908), p. 69/90; C. R. Acad. sc. Paris 144 (1907), p. 477/9; Ann. Éc. Norm. (3) 25 (1908) p. 371; Théorie des fonctions métasphériques, Paris 1911; dans ce dernier ouvrage il est fait une étude générale des fonctions hypergéometriques dont les deux premiers indices diffèrent de $\frac{1}{2}$, ce qui est le cas des fonctions rencontrées en cet article.

fonctions sphériques ordinaires; alors

$$P^{\nu,n} = M^{\nu,n}$$

et $P^{\nu,n}$ est un polynome.

Si l'on désigne par $F_1^{\nu,n}(x)$ et $F_2^{\nu,n}(x)$ chacune des fonctions définies soit par l'expression (66) soit par l'expression (66 b), la fonction métasphérique la plus générale sera

$$K^{\nu,n}(x) = A(\nu, n)F_1^{\nu,n}(x) + B(\nu, n)F_2^{\nu,n}(x),$$

où les valeurs A et B dépendent de ν et de n et sont assujetties à la seule condition de périodicité

$$A(\nu, n+1) = A(\nu, n), \quad B(\nu, n+1) = B(\nu, n).$$

N. Nielsen définit des fonctions métasphériques adjointes; elles dépendent de trois indices n, ν, σ et, pour les valeurs entières de σ, elles sont liées aux dérivées de $P^{\nu,n}$ et de $Q^{\nu,n}$.

Relativement aux fonctions ultrasphériques, *N. Nielsen* donne ce théorème fondamental:

Si le rayon de convergence de la série entière

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots \cdots \tag{67a}$$

est plus grand que l'unité, on a le développement suivant de la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} a_\nu x^\nu$$

en série de fonctions métasphériques:

$$f(x) = \Gamma(\nu) \sum_{s=0}^{s=+\infty} (\nu + s) A_s P^{\nu,s}(x), \tag{67}$$

où

$$A_s = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{2^{n+2s} s!\, \Gamma(\nu + n + s + 1)}.$$

La série (67 a) est convergente à l'intérieur de la plus petite ellipse qui a ses foyers aux points (1, 0), (— 1, 0) et qui passe par un point singulier de la fonction $f(x)$.

Les fonctions $K^{\nu,n}$ admettent un théorème d'addition.*

Fonctions de Lamé.

38. L'équation de Laplace en coordonnées elliptiques. La considération des familles de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0 \tag{68}$$

permet de substituer aux coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z le système de coordonnées ϱ, μ, ν caractérisant les trois surfaces qui passent par le point de coordonnées x, y, z.

$$
\text{(68a)} \qquad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{(\varrho^2 - a^2)(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \\[2ex] y = \sqrt{\dfrac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}}, \\[2ex] z = \sqrt{\dfrac{(\varrho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}. \end{cases}
$$

Si l'on pose

$$
\text{(69)} \qquad \begin{cases} A^2 = \dfrac{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2}, \\[2ex] B^2 = \dfrac{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}{\mu^2}, \\[2ex] C^2 = \dfrac{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}{\nu^2}, \end{cases} \qquad \varrho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2,
$$

l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0$$

s'écrit, dans le nouveau système,

$$
\text{(70)} \qquad \begin{cases} (\mu^2 - \nu^2)\left[A^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + A \dfrac{\partial A}{\partial \varrho}\dfrac{\partial V}{\partial \varrho}\right] \\[2ex] + (\nu^2 - \varrho^2)\left[B^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} + B \dfrac{\partial B}{\partial \mu}\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right] + (\varrho^2 - \nu^2)\left[C^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + C \dfrac{\partial C}{\partial \nu}\dfrac{\partial V}{\partial \nu}\right] = 0. \end{cases}
$$

On peut, à la place des variables ϱ, μ, ν, introduire des arguments elliptiques par les formules suivantes:

$$
\text{(71)} \qquad \begin{cases} \wp u = \varrho^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), & e_1 = \dfrac{2a^2}{3} - \dfrac{b^2 + c^2}{3}, \\[2ex] \wp v = \mu^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), & e_2 = \dfrac{2b^2}{3} - \dfrac{c^2 + a^2}{3}, \\[2ex] \wp w = \nu^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), & e_3 = \dfrac{2c^2}{3} - \dfrac{a^2 + b^2}{3}. \end{cases}
$$

L'équation (70) prend la forme[141])

$$
\text{(70a)} \qquad (\wp v - \wp w)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (\wp w - \wp u)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (\wp u - \wp v)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2} = 0,
$$

141) *G. H. Halphen,* Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications 2, Paris 1888, p. 462. La forme symétrique des fonctions de Lamé se prêtant mal au calcul, *G. H. Darwin* [Philos. Trans. London 197 A (1901), p. 461/557] l'abandonne; il met la solution de l'équation de Laplace sous la forme d'un produit de trois facteurs s'exprimant, les deux premiers au moyen des fonctions sphériques ordinaires, le troisième au moyen de sinus et cosinus d'arcs multiples de la variable indépendante; des tables numériques complètent le mémoire.

Cf. *J. Liouville* [J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 458] et *H. E. Heine* [Kugelf.[1]), 2e éd.) 1, p. 354]; ces auteurs emploient une notation différente.

et les coordonnées rectangulaires d'un point s'écrivent

$$(72)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(\wp u - e_1)(\wp v - e_1)(\wp w - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 = \dfrac{(\wp u - e_2)(\wp v - e_2)(\wp w - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 = \dfrac{(\wp u - e_3)(\wp v - e_3)(\wp w - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}; \end{cases}$$

si 2ω et $2\omega'$ sont les périodes, il faut prendre u et $w - \omega'$ réels, $v - \omega$ purement imaginaire.

En faisant varier chaque argument dans l'intervalle d'une demi-période, on représente un huitième de l'ellipsoïde.

39. Définition des fonctions de Lamé. Ces fonctions jouent dans les problèmes relatifs à l'ellipsoïde le rôle des fonctions sphériques à l'égard de la sphère. *G. Lamé* les rencontra dans ses recherches sur l'équilibre des températures[142]) et elles furent également trouvées, d'une manière indépendante, par *C. G. J. Jacobi*[143]). La théorie fut perfectionnée par *H. E. Heine*[144]) et par *J. Liouville*[145]) qui introduisirent les fonctions de seconde espèce, puis par *F. Klein* et ses élèves [voir n^{os} **48**, **49**].

Considérons le polynome harmonique P_n du n° **1**; on a vu qu'il contenait $2n + 1$ constantes arbitraires. En remplaçant x, y, z par leurs expressions elliptiques (72), P_n devient une fonction entière et homogène de degré n en

$$\sqrt{\wp u - e_1}, \quad \sqrt{\wp u - e_2}, \quad \sqrt{\wp u - e_3};$$

elle satisfait aux mêmes conditions relativement aux variables v et w, est symétrique en u, v, w et est solution de l'équation de Laplace. Une telle fonction dépendant de $(2n + 1)$ constantes arbitraires s'appelle une fonction de Lamé de *première espèce.*

Toute fonction U de la variable u qui est solution de l'équation

$$(73)\qquad \frac{d^2U}{du^2} = (A\wp u + B)U$$

fournit une fonction UVW satisfaisant à l'équation de Laplace. Les fonctions V et W se déduisent de U où la variable u a été remplacée

142) J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 147/88; (1) 4 (1839), p. 126, 351; (1) 8 (1843), p. 397/434; Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 5 (1838), p. 174/219; J. Éc. polyt. (1) cah. 23 (1834), p. 191/288. Cf. aussi *G. Lamé*, Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris 1857.

143) *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 309; Werke 2, Berlin 1882, p. 57.

144) *H. E. Heine*, J. reine angew. 29 (1845), p. 185.

145) *J. Liouville*, C. R. Acad. sc. Paris 20 (1845), p. 1386, 1609; J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 222.

par v et par w. Et il existe $(2n+1)$ systèmes de valeurs pour les constantes A et B telles que la solution U satisfasse aux conditions d'homogénéité indiquées plus haut. Avec les variables ϱ, μ, ν, les fonctions de Lamé seront des combinaisons linéaires de $(2n+1)$ polynomes RMN, où R, M, N désignent les mêmes fonctions de ϱ, de μ et de ν[146]; les fonctions UVW et RMN seront dites aussi fonctions de Lamé (fonctions particulières).

40. Formation des fonctions de Lamé. La fonction U doit être un polynome en $\wp u$ ou un tel polynome multiplié par un, deux ou trois radicaux

$$\sqrt{\wp u - e_1}, \quad \sqrt{\wp u - e_2}, \quad \sqrt{\wp u - e_3}.$$

Avec la variable ϱ, R sera un polynome en ϱ^2 ou un tel polynome multiplié par un, deux ou trois radicaux

$$\sqrt{\varrho^2 - a^2}, \quad \sqrt{\varrho^2 - b^2}, \quad \sqrt{\varrho^2 - c^2}.$$

A chacun de ces cas correspondent des polynomes qu'on dira de première, deuxième, troisième ou quatrième classe.

La considération des termes de moindre degré dans l'équation (73) montre que, pour tous les polynomes U, on a

$$A = n(n+1).$$

La substitution à U, dans l'équation (73), d'un polynome de première classe, c'est-à-dire de degré $\frac{n}{2}$ en $\wp u$ (ce qui suppose n pair) donne pour B une équation de degré $\frac{n}{2}+1$. Pour la deuxième classe, l'équation en B est de degré $\frac{n+1}{2}$; pour la troisième classe, elle est de degré $\frac{n}{2}$; pour la quatrième classe elle est de degré $\frac{n-1}{2}$.

A chaque racine de l'équation en B correspond un polynome et un seul.

Si n est pair il n'y a de polynomes que de première classe et de troisième classe; leur nombre est

$$\left(\frac{n}{2}+1\right) + 3\,\frac{n}{2} = 2n+1.$$

Si n est impair il n'y a de polynomes que de deuxième et de quatrième classe; leur nombre est

$$3\left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{n-1}{2} = 2n+1.$$

Or on démontre que le degré de l'équation en B ne peut s'abaisser (le coefficient de la plus haute puissance de B est l'unité) et que

146) Pour la représentation des fonctions de Lamé en coordonnées cartésiennes voir *W. D. Niven*, Philos. Trans. London 182 A (1891), p. 231/78.

toutes les racines sont réelles et distinctes[147]); on peut alors former $(2n+1)$ polynomes UVW et il sont indépendants.

*G. *Guerritore*[147a]) a calculé les expressions des fonctions de Lamé de $n=1$ à $n=10$.*

41. Les quatre classes de fonctions de Lamé de première espèce. La fonction de première classe est un polynome en $\wp u$ de degré $\frac{n}{2}$; celle de quatrième classe se ramène à un polynome en $\wp u$ de degré $\frac{n-3}{2}$, multiplié par $\wp' u$. Toutes deux peuvent être composées linéairement avec les dérivées de $\wp u$ et s'écrivent

$$U = \wp^{n-2}u + a_1\wp^{n-4}u + a_2\wp^{n-6}u + \cdots \tag{74}$$

La fonction de deuxième classe est de la forme

$$U = \sqrt{\wp u - e_\alpha}(\wp^{n-3}u + b_1\wp^{n-5}u + b_2\wp^{n-7}u + \cdots),\ (\alpha = 1, 2, 3). \tag{74a}$$

La fonction de troisième classe est de la forme

$$U = \sqrt{(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)}(\wp^{n-2}u + c_1\wp^{n-4}u + c_2\wp^{n-8}u + \cdots). \tag{74b}$$

42. Analogie avec les fonctions sphériques. Le lien des fonctions de Lamé et des fonctions sphériques apparaît nettement si, avec *G. Lamé*, on passe des coordonnées polaires aux coordonnées elliptiques.

Les formules

$$x = \sqrt{\varrho^2 - a^2}X, \quad y = \sqrt{\varrho^2 - b^2}Y, \quad z = \sqrt{\varrho^2 - c^2}Z$$

font correspondre au point (x, y, z) de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\varrho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} - 1 = 0$$

le point (X, Y, Z) de la sphère de rayon 1. On aura μ et ν en fonction de θ, φ en remplaçant x, y, z par leurs expressions elliptiques (68a) et X, Y, Z par leurs valeurs en θ et φ. Chaque produit MN pourra être transformé en une fonction de degré n en X, Y, Z.

Si l'on pose

$$MN = \Phi,$$

l'élimination de μ et de ν conduit à l'équation

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right) + \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n(n+1)\sin^2\theta \cdot \Phi = 0,$$

qui est l'équation[148]) à laquelle satisfait $Y_n(\theta, \varphi)$.

147) *J. Liouville* [J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 221] montre que les racines sont distinctes; *G. Lamé* a montré qu'elles sont réelles; cf. *H. Poincaré*, Figures d'équilibre[6]), p. 113. Dans le cas où a, b, c ont des valeurs imaginaires, l'équation peut avoir une racine double; *Fr. Cohn* [Diss. Königsberg 1888] a recherché quelles fonctions nouvelles il faut introduire dans ce cas.

147a) *Giorn. math. (2) 16 (1909), p. 164/72.*

148) *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 278.

On peut encore supposer que, ϱ devenant infini du premier ordre, les variables μ et ν restent finies. Les coordonnées polaires étant r, θ et φ, on voit que la variable ϱ tend alors vers r, et que les variables μ et ν ne dépendent que de θ et de φ; l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré dans la fonction de Lamé constitue un polynome sphérique P_n; il s'ensuit que

$$P_n(x, y, z) = P_n(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = aMN. \tag{75}$$

Toute fonction de deux variables pouvant se mettre sous la forme d'une somme de fonctions sphériques, il en résulte que toute fonction de μ et de ν peut se mettre sous la forme

$$\sum aMN$$

ou, si l'on veut, en vertu des relations (71), sous la forme

$$\sum \alpha VW.$$

Dans le cas des surfaces homofocales de révolution, il y a *identité* entre les groupes de produit MN et les groupes de fonctions Y_n.

En effet si b tend vers a, il en est de même de μ et

$$\lim_{a=b}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-b^2}} = \sin\varphi, \quad \lim_{a=b}\sqrt{\frac{b^2-\mu^2}{a^2-b^2}} = \cos\varphi;$$

puis

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{a^2-c^2}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

MN est une fonction sphérique, M ne dépendant d'ailleurs que de φ, N de θ; c'est une des fonctions sphériques fondamentales [n^{os} **12, 13**].

M devient soit $\cos p\varphi$, soit $\sin p\varphi$ et l'on prendra

$$N = X_n^p(\cos\theta) = X_n^p\left(\sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{a^2-c^2}}\right).$$

Si l'on repasse aux coordonnées cartésiennes, le produit RMN se transforme en un polynome $Q(x^2, y^2, z^2)$ ou en un tel polynome multiplié par un des facteurs

$$x, y, z, yz, zx, xy, xyz.$$

Pour le cas où $a = b$, le nombre p qui figure dans $\sin p\varphi$ ou $\cos p\varphi$ est impair quand figure *l'un* des facteurs x ou y; s'il n'en figure *aucun* ou s'ils figurent *tous deux*, p est pair. La présence du facteur y donne à M la forme $\sin p\varphi$; dans le cas contraire on prendra M égal à $\cos p\varphi$. Il y a des conclusions analogues dans l'hypothèse $b = c$[149]).

149) *H. Poincaré*, Figures d'équilibre[6]), p. 126. Cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 375 et suiv. Pour le passage des fonctions sphériques aux fonctions de Lamé, voir *G. H. Darwin*, Philos. Trans. London 197 A (1901), p. 461/557.

$X_n(\cos\gamma)$, où $\cos\gamma$ a la même signification qu'au nº **14**, se développe en une somme finie de produits de fonctions de Lamé[150]).

$_*$*E. Haentzschel*[150a]) a étudié les liens entre les fonctions de Lamé, les fonctions de Laplace et les fonctions de Bessel qui seront définies au nº **52**.*

43. Racines des polynomes R. Un polynome R a toutes ses racines réelles et elles sont comprises entre a^2 et c^2[151]); d'ailleurs si l'on partage cet intervalle en deux autres par l'introduction de b^2, le nombre de racines comprises dans chaque intervalle est le même lorsque b^2 varie de a^2 à c^2[152]). Cela permet de démontrer qu'il y a parmi les polynomes correspondant à une valeur n:

un polynome ayant 0 racine entre a^2 et b^2, et $\frac{n}{2}$ racines entre b^2 et c^2

un polynome ayant 1 racine entre a^2 et b^2, et $\frac{n}{2}-1$ racines entre b^2 et c^2

un polynome ayant 2 racines entre a^2 et b^2, et $\frac{n}{2}-2$ racines entre b^2 et c^2

. . . .

un polynome ayant $\frac{n}{2}$ racines entre a^2 et b^2, et aucune racine entre b^2 et c^2.

44. Propriétés d'intégrales définies. Le carré d'une fonction de Lamé est un polynome entier en $\wp u$; la décomposition en éléments simples donne

$$(76)\qquad \begin{cases} U^2 = a + b\wp u + c\wp'' u + d\wp^{\mathrm{IV}} u + \cdots\cdots \\ U^2\wp u = a' + b'\wp u + c'\wp'' u + d'\wp^{\mathrm{IV}} u + \cdots\cdots \end{cases}$$

Il en résulte que

$$(77)\qquad \iint (\wp v - \wp w) V^2 W^2 dv\,dw = 8(ab' - ba')i\pi,$$

les limites de l'intégrale étant 0 et $\frac{4\omega'}{i}$ pour la variable réelle $\frac{v-\omega}{i}$, 0 et 4ω pour la variable réelle $w-\omega'$.

Si V_1, W_1 sont solutions d'une équation de la forme (73) où A et B sont remplacés par A_1 et B_1, l'une au moins des différences

150) *H. E. Heine*, Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 430/2.

150a) $_*$Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 25/33.*

151) *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 161; *H. Poincaré*, Figures d'équilibre[6]), p. 129.

152) *H. Poincaré*, Figures d'équilibre[6]), p. 129; *F. Klein*, Math. Ann. 18 (1881), p. 237. $_*$*A. A. Markov* [Math. Ann. 27 (1886), p. 143/50] étudie le nombre des racines de certaines fonctions dont les fonctions de Lamé sont des cas particuliers.*

$A - A_1$, $B - B_1$ étant différente de zéro, on a[153])

(77a) $$\iint (\wp v - \wp w) V V_1 W W_1 dv dw = 0.$$

45. Développement d'une fonction en une somme de fonctions de Lamé. On a vu [n° 42] que toute fonction de deux variables pourra se mettre sous la forme

$$\sum \alpha V W$$

dans les conditions même où elle est développable en série de fonctions sphériques.

Soit Φ la fonction proposée et

$$A_k V_k W_k$$

un des termes du développement. Les égalités (77) et (77a) permettent d'écrire

$$A_k \iint (\wp v - \wp w) V_k^2 W_k^2 dv dw = \iint (\wp v - \wp w) \Phi V_k W_k dv dw,$$

d'où

(78) $$A_k = \frac{\iint (\wp v - \wp w) \Phi V_k W_k dv dw}{8(ab' - ba')i\pi}.$$

46. Les fonctions de Lamé de deuxième espèce. La théorie du potentiel conduit à introduire une autre solution de l'équation (73), de même qu'à côté de la fonction Y_n on a considéré Q_n.

La fonction de Lamé de *deuxième espèce*[154]) sera

(79) $$Z = (2n+1) U \int_0^u \frac{du}{U^2}.$$

On peut poser

(79a) $$Z = f_1(u) P(u) + (C + D\zeta u) U;$$

$f_1(u)$ est le produit de ceux des facteurs $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ qui ne figurent pas dans U; $P(u)$ est une fonction entière de $\wp u$, C et D sont des constantes[155]).

F. Lindemann[156]) a développé $\frac{1}{z_1 - z}$ au moyen des fonctions de

153) *G. H. Halphen*, Fonct. ellipt.[141]) 2, p. 479. Ces propriétés, avec d'autres notations, ont été données par *G. Lamé* lui-même [J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 158].

154) *H. E. Heine* et *J. Liouville* s'en sont occupés simultanément. Cf. notes 144, 145.

155) *H. E. Heine* [J. reine angew. Math. 60 (1862); Monatsb. Akad. Berlin 1866, p. 446; J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 315] a montré que les fonctions de première et de seconde espèce pouvaient se rattacher au développement en fraction continue d'une certaine intégrale complète de troisième espèce.

156) *F. Lindemann*, Math. Ann. 19 (1882), p. 323.

Lamé de première et de deuxième espèce; il en a déduit, par la méthode de *A. L. Cauchy,* le développement dans un certain domaine d'une fonction analytique $f(z)$; en particulier, la valeur zéro peut se représenter par des séries qui procèdent des fonctions de première espèce ou des fonctions de seconde espèce ou simultanément de l'une et de l'autre.

Lorsque u est très petit (ϱ très grand) les fonctions de première et de deuxième espèce prennent les valeurs approchées

$$U = \frac{1}{u^n}, \quad Z = u^{n+1}. \tag{80}$$

47. Recherches d'Hermite sur l'équation de Lamé. *Ch. Hermite*[157]) a montré que l'on peut intégrer l'équation

$$\frac{d^2 U}{du^2} = [n(n+1)\wp u + B]U$$

quel que soit B, n étant un entier quelconque. La solution est une fonction doublement périodique de seconde espèce.

48. Fonctions de Lamé d'ordre supérieur[158]). Soit

$$du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p)}} = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}. \tag{81}$$

Toute fonction entière de degré n, aux variables

$$\sqrt{x-a_0},\ \sqrt{x-a_1},\ \ldots,\ \sqrt{x-a_p},$$

qui satisfait à une équation de la forme

$$\frac{d^2 W}{du^2} + \theta(x) W = 0 \tag{81a}$$

est une fonction de Lamé de *première espèce,* d'*ordre* p et de *degré* n.

La fonction $\theta(x)$ est entière en x et telle que l'équation (81a) admette une solution entière en x; $\theta(x)$ est de degré $p-1$. Le nombre des fonctions θ et, par suite, celui des différentes fonctions de Lamé correspondant à des valeurs données de n et de p, est égal au nombre des fonctions homogènes indépendantes de degré n, aux $p+1$ variables $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, et qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_0^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_p^2} = 0.$$

157) *Ch. Hermite*, Sur quelques applications des fonctions elliptiques [C. R. Acad. sc. Paris 85 (1877), p. 689, 728, 821; Œuvres 3, Paris 1912, p. 266].

158) *H. E. Heine,* J. reine angew. Math. 60 (1862), p. 253/303; 61 (1863), p. 356/66; 62 (1863), p. 110/41; Monatsb. Akad. Berlin 1864, p. 13/22; Kugelf.[1]), (2e éd.) 1, p. 445 et suiv. Les fonctions de Lamé à un nombre quelconque de variables ont déjà été considérées par *G. Green*, Trans. Cambr. philos. Soc. 5 (1832/4), éd. 1835, p. 395/430; Papers, publ. par *N. M. Ferrers*, Londres 1871, p. 185. Cf. aussi *A. Cayley*, Philos. Trans. London 165 (1875), p. 675/774; Papers 9, Cambridge 1896, p. 318/423.

Ces fonctions de Lamé prennent la forme

$$\sqrt{\psi_i}\, V_i,$$

V_i étant une fonction entière en x, et ψ_i représentant l'un quelconque des facteurs en lesquels se décompose $\psi(x)$, (l'unité et $\psi(x)$ inclus). Les fonctions introduites par *G. Lamé* s'obtiennent en faisant $x = \varrho^2$, $p = 2$; elles sont donc du second ordre.

L'équation (81a) admet une deuxième intégrale particulière qui s'annule à l'infini, et qui, développée suivant les puissances décroissantes de x, commence par un terme en $x^{-\frac{(n+p-1)}{2}}$.

Si l'on suppose quelques-unes des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_p$ égales entre elles, on obtient les *fonctions spéciales de Lamé* du $p^{\text{ième}}$ ordre; le cas où les p constantes deviennent égales entre elles ramène aux fonctions sphériques d'ordre supérieur [n° **36**]. Comme ces dernières, les fonctions de Lamé envisagées ici se rattachent aux problèmes de l'espace à $p + 1$ dimensions; elles découlent de l'expression des coordonnées d'un point au moyen des variétés d'ordre p correspondant aux surfaces homofocales du second ordre de l'espace à trois dimensions.

49. Extensions de la notion de fonction de Lamé. Les problèmes de la théorie du potentiel pour les cyclides de révolution conduisent à une équation différentielle qui ne diffère de celle de Lamé que par la substitution à l'entier n d'un paramètre égal à la moitié d'un entier impair[159]. Des valeurs plus générales du paramètre se présentent si l'on envisage des volumes limités par deux surfaces d'une même famille, choisie dans les trois familles d'un système homofocal du deuxième degré.

F. Klein[160] a traité de semblables équations de Lamé généralisées et il a établi la proposition suivante à laquelle il a donné le nom de *théorème des oscillations* (Oscillationstheorem):

Soit

$$u = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}; \tag{82}$$

159) *A. Wangerin*, Reduktion der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf einer gewöhnlichen Differentialgleichung, Leipzig 1875; Monatsb. Akad. Berlin 1878, p. 152; la théorie n'est conduite que jusqu'à l'établissement de l'équation différentielle. *E. Haentzschel* [Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1893], donne quelques propriétés de l'intégrale de cette équation différentielle, notamment son lien avec les *fonctions spéciales* qui se présentent comme cas particuliers.

160) *F. Klein*, Math. Ann. 18 (1881), p. 410; Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung (autographié), Göttingue 1894, p. 276.

il existe toujours, pour les paramètres A et B de l'équation de Lamé

$$\text{(82a)} \qquad \frac{d^2E}{du^2} = (Ax + B)E,$$

un système de valeurs et un seul tel qu'une première solution particulière de l'équation jouisse des propriétés suivantes: elle s'annule aux extrémités a_1, a_2 d'un segment porté par l'axe des x, et entre les points extrêmes elle exécute m demi-oscillations (c'est-à-dire qu'elle s'annule m fois); et il existe une deuxième solution particulière s'annulant aux extrémités d'un segment b_1, b_2 et exécutant n demi-oscillations entre les points extrêmes.

Des valeurs approchées de ces fonctions généralisées, pour les grandes valeurs de m et de n, sont données par *Ch. Jaccottet*[161]) qui en a déduit la convergence du développement d'une fonction de deux variables en produit de fonctions de Lamé généralisées.

50. Fonction de Lamé ayant plus de trois points singuliers à distance finie. *F. Klein*[162]) a étendu son théorème (Oscillationstheorem) au cas où l'équation (82a) possède plus de trois points singuliers à distance finie. La théorie du potentiel relative à un volume limité par des cyclides conduit à une équation comportant cinq points singuliers[163]).

Le problème analogue, dans l'espace à n dimensions, amène un radical composé de $(n+2)$ facteurs. A l'équation (82a) correspond alors

$$\text{(82b)} \quad \frac{d^2E}{du^2} = \left\{\frac{2-n}{16(n+1)} f''(x) + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \cdots + N\right\}E;$$

$f''(x)$ est la dérivée seconde de

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

où $a, b, \ldots, l$ sont des points singuliers; et l'on peut disposer des $(n-1)$ paramètres $A, B, \ldots, N$ de façon que $(n-1)$ solutions particulières de (82b) s'annulent chacune aux extrémités d'un segment de l'axe des x ainsi qu'en un nombre déterminé de points intérieurs à chaque segment.

---

161) Diss. Göttingue 1895.

162) Nachr. Ges. Gött. 1890, p. 85; Diffgl.[160]), p. 197, 401.

163) *A. Wangerin*, J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 145/57 [1876]; *G. Darboux*, C. R. Acad. sc. Paris 83 (1876), p. 1037, 1099. Une monographie de *M. Bôcher* [Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, avec préface de *F. Klein*, Leipzig 1894] donne des renseignements détaillés sur le problème du potentiel relatif à des volumes limités par des cyclides, d'après les recherches de *F. Klein*. On y trouve les principales propriétés des cyclides ainsi que les cas de dégénérescence.

La fonction E apparaît sous un jour nouveau si, comme le fait *F. Klein*, on la rend homogène. Soient donc

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad E(x) = x_2^{\frac{n-2}{4}} F(x_1, x_2),$$
$$f = (x_1 - e_1 x_2)(x_1 - e_2 x_2) \ldots (x_1 - e_{n+2} x_2);$$

F est une fonction homogène en x_1, x_2, de degré $\frac{2-n}{4}$, qu'on appellera *forme de Lamé* et qui jouit de la propriété suivante: le covariant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$$

est égal au produit de F par une fonction rationnelle entière de degré $n-2$.

Cette propriété est si simple qu'il peut paraître naturel de la prendre pour définition, dans la théorie des fonctions de Lamé [164]).

Les points singuliers de la fonction F sont les racines de l'équation $f = 0$, et quand celles-ci sont distinctes elles figurent dans F avec les exposants $\frac{1}{2}$ et 0.

51. Fonctions du cône elliptique. On passe des fonctions de Lamé aux „fonctions du cône elliptique" comme on a passé des fonctions sphériques aux fonctions coniques de *F. G. Mehler*; l'indice n prend une valeur complexe $-\frac{1}{2} + ip (p$ quelconque). Il faut citer à propos de ces fonctions les recherches de *E. W. Hobson* [165]).

Fonctions cylindriques ou fonctions de Bessel.

52. Équation différentielle. Séries et intégrales relatives aux fonctions de première espèce. Ces fonctions ont leur place dans les problèmes de physique mathématique relatifs au cylindre circulaire, dans la théorie de la propagation de la chaleur à l'intérieur d'une sphère, dans la théorie de la diffraction; enfin, en mécanique céleste, elles sont la base de développements en séries des coordonnées d'une planète, dans le mouvement elliptique.

On devrait en toute rigueur, pour les distinguer d'autres fonctions dont il sera question plus loin [nº **70**], les appeler *fonctions du cylindre circulaire*; l'habitude est pourtant de leur donner simplement le nom de *fonctions cylindriques* ou *fonctions de Bessel.*

Incidemment, on rencontre déjà les plus simples de ces fonctions chez *Daniel Bernoulli* et chez *L. Euler* [166]); au dix-neuvième siècle

---

164) Cf. *G. H. Halphen*, Fonct. ellipt.[141]) 2, p. 471.

165) Proc. London math. Soc. (1) 23 (1891/2), p. 231.

166) *Daniel Bernoulli*, Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 108/22;

J.-B. J. Fourier[167]), *F. W. Bessel*[168]) et *S. D. Poisson*[169]) en font usage; aussi *H. E. Heine*[170]) les appelle-t-il *fonctions de Fourier-Bessel,* mais cette dénomination ne s'est pas imposée[171]).

Depuis *F. W. Bessel,* les fonctions cylindriques ont fait l'objet de nombreux mémoires et ont donné lieu à une foule de formules dont on ne reproduira ici que les plus importantes[172]).

On peut prendre pour point de départ l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction:

La *fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n,* sera alors une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{83}$$

qui reste finie pour $x = 0$; on la désignera par la notation[173])

$$J_n(x) \quad \text{ou} \quad J^n(x).$$

Toutes les autres solutions de l'équation (83) qui restent finies pour $x = 0$ sont alors de la forme

$$CJ_n(x)$$

où C désigne une constante arbitraire.

---

7 (1734/5), éd. 1740, p. 162/79; *L. Euler,* Acta Acad. Petrop. 5 (1781), pars prior, éd. 1784, math. p. 157/77 [1774].

D. Bernoulli, comme *J.-B. J. Fourier* d'ailleurs, n'a fait usage que des fonctions d'indice zéro. *Il envisage la fonction $J_0\left(2\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$ qui vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{ax} = 0$ (Note de *G. Eneström*).*

167) Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, p. 369; Œuvres, publ. par *G. Darboux* 1, Paris 1888, p. 332.

168) Abh. Akad. Berlin (1816/7), éd. 1819, math. Klasse, p. 49; id. (1824), éd. 1826, math. Klasse, p. 1/52.

169) J. Éc. polyt. (1) cah. 19 (1823), p. 249/403.

170) J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 128.

171) *H. E. Heine* lui-même, dans la suite, employa exclusivement la dénomination de „fonctions cylindriques".

172) Une bibliographie s'arrêtant à l'année 1867 se trouve dans *C. Neumann* [Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig 1867, préface p. VI]; *H. E. Heine* [Kugelf.[1]) 1, p. 189] s'arrête à l'année 1878; *A. Gray* et *G. B. Mathews* [A treatise on Bessel's functions and its applications to physics, Londres 1895] vont plus loin; la bibliographie la plus complète se trouve dans l'ouvrage de *N. Nielsen* [Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904, p. 389/404].

173) *F. W. Bessel* écrit J_n^x ou $J_{n,x}$; quand il s'agit de la fonction J_0, l'indice est parfois omis. Au sujet du rapprochement de l'équation (83) et de l'équation de Riccati, cf. *E. Lommel,* Studien über die Besselschen Funktionen, Leipzig 1868, p. 112 (§ 31).

La constante n, dans l'équation (83), sera tout d'abord un nombre positif[174].

La solution particulière envisagée se représente par la somme

$$(84)\qquad J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)}\left[1+\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty}(-1)^\nu\frac{n!\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!(n+\nu)!}\right]$$

de la série

$$(84\text{a})\qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(n+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(n+1)(n+2)}-\cdots\cdots\right]$$

convergente pour toute valeur de x, ou bien par l'intégrale

$$(85)\qquad J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

Les deux formules précédentes sont valables pour toute valeur positive de n; dans le cas où n est un *entier* non négatif, on trouve encore l'expression suivante[175])

$$(86)\qquad J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\omega-x\sin\omega)\,d\omega;$$

la formule (86) se déduit de la formule (85) par une transformation indiquée par *C. G. J. Jacobi*[176]).

Dans le cas où n est un multiple impair de $\frac{1}{2}$, la série (84a) peut se sommer au moyen des fonctions élémentaires et l'on trouve par exemple[177])

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right).$$

---

174) On n'a envisagé, avant *E. Lommel*, que des valeurs entières de $2n$; *E. Lommel* lui même ne considère que des valeurs réelles de n, supérieures à $-\frac{1}{2}$. *H. Hankel* [Math. Ann. 1 (1869), p. 467] le premier, introduit des indices complexes; *M. Bôcher* [Annals of math. (1) 6 (1890/2), p. 137] indique des applications des fonctions de Bessel à indices complexes.

175) L'équation (86) sert de point de départ à *F. W. Bessel.* La constante figurant au dénominateur du second membre de l'équation (84) est choisie de façon que la série (84) soit identique à l'intégrale (86), quand l'indice n est entier; *E. Lommel* [Besselsche Funkt.[173])] part de l'équation (85); *J. H. Graf* et *E. Gubler* [Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen 1, Berne 1898; 2, Berne 1900] partent de la série (84a); *A. Sommerfeld* [Math. Ann. 47 (1896), p. 337] trouve, par une intégration complexe, une représentation analogue à (86), s'appliquant à toute valeur de l'indice; il fait connaître une intégrale de même nature pour la fonction de Bessel de seconde espèce.

176) J. reine angew. Math. 15 (1836), p. 1/26; Werke 6, Berlin 1891, p. 86/118.

177) Cf. *S. D. Poisson*, J. Éc. polyt. (1) cah. 19 (1823), p. 293; Théorie de la

14*

N. Nielsen envisage la série obtenue en multipliant deux fonctions J, développées sous la forme (84); il en déduit des représentations de séries de puissances pour le produit de deux fonctions J [178].

Les fonctions de Bessel *à indices entiers* (positifs ou non) s'introduisent, en mécanique céleste, comme coefficients des puissances de z dans le développement en série convergente de

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)},$$

e désignant la base des logarithmes népériens. Ce développement est [179]

$$\begin{aligned}(87)\qquad & J_0(x)+J_1(x)z+J_2(x)z^2+\cdots+J_n(x)z^n+\cdots\cdots\\ &+J_{-1}(x)z^{-1}+J_{-2}(x)z^{-2}+\cdots+J_{-n}(x)z^{-n}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

en sorte que l'on a

$$(87\text{a})\qquad e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}J_\nu(x)z^\nu.$$

Le changement de z en $-\frac{1}{z}$ montre immédiatement que

$$(88)\qquad J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)\qquad\text{(pour } n \text{ entier).}$$

En rapprochant cette égalité de l'égalité (84), on déduit pour n entier

$$(89)\qquad \begin{cases}J_n\;(-x)=(-1)^nJ_n(x),\\ J_{-n}(-x)=J_n(x).\end{cases}$$

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans la relation (87a) fournit une relation qui, multipliée membre à membre par la relation (87a) elle-même, donne la relation identique

$$1=A_0+\sum_{n=1}^{n=+\infty}A_nz^n+\sum_{n=1}^{n=+\infty}A_{-n}z^{-n}.$$

Il s'ensuit que $A_0=1$, c'est-à-dire que l'on a

$$(90)\qquad 1=J_0^2(x)+2\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty}J_\nu^2(x).$$

Cette formule prouve que, x étant réel, la valeur absolue de $J_0(x)$ est inférieure à l'unité, et que la valeur absolue de $J_n(x)$ pour n entier et positif est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

chaleur, Paris 1833, p. 159. *P. S. Laplace*, Connaissance des temps pour 1823, publiée à Paris en 1820; Mécanique céleste 5, Paris 1825, p. 72 (livre 11, chap. 4); Œuvres 5, Paris 1882, p. 83.

178) Math. Ann. 52 (1899), p. 228; Theorie der Cylinderfunktionen [172]), p. 20.

179) *O. Schlömilch*, Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 137.

En posant

$$z = e^{i\varphi},$$

on obtient des séries représentant $\cos(x \sin\varphi)$ et $\sin(x \sin\varphi)$; $\cos x$ et $\sin x$ s'obtiennent en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot$

Si dans l'exponentielle qui figure dans le premier membre de la relation (87a) on remplace x par $2x$, puis qu'on identifie avec le carré de l'exponentielle, on obtient l'expression de $J_n(2x)$ au moyen des carrés et des produits des fonctions J_n [180]).

53. Fonctions de Bessel de deuxième espèce. La plupart des auteurs[181]) appellent ainsi une intégrale particulière de l'équation (83) qui devient infinie quand $x = 0$.

Si *n n'est pas entier* on obtient cette seconde intégrale en changeant n en $-n$ dans la série (84a).

Si *n est entier*, $J_{-n}(x)$ ne diffère de $J_n(x)$ que par un facteur constant [n° **52**]; on le reconnaît d'ailleurs en cherchant à satisfaire à l'équation (83) par une série de puissances croissantes de x et commençant par x^{-n}.

La méthode de *L. Euler*[83]), qui permet de trouver la deuxième intégrale d'une équation différentielle du second ordre quand on en connaît une première intégrale particulière, conduit alors à une solution qui contient un logarithme.

C. Neumann a fait une étude approfondie de la fonction de deuxième espèce dans le cas où n est un nombre entier ou nul; désignant la fonction par Y, il trouve[182]):

$$(91) \qquad Y_0(x) = J_0(x) \log_e(x) + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} J_{2\nu}(x).$$

La série

$$(91\text{a}) \qquad \tfrac{1}{1}J_2(x) - \tfrac{1}{2}J_4(x) + \tfrac{1}{3}J_6(x) - \tfrac{1}{4}J_8(x) + \cdots\cdots$$

dont la somme figure dans le second membre de cette relation (91) converge pour toute valeur de x.

---

180) *E. Lommel*, Besselsche Funkt.[178]), p. 31, 48 (§ 12, 15).

181) *C. Neumann* et *L. Schläfli* donnent à la fonction dont il est question ici le nom de „fonction de Bessel complémentaire". Ils désignent par les mots de „seconde espèce" une autre fonction [cf. n° **62**]; ce n'est pas la dénomination habituelle.

182) *C. Neumann*, Besselsche Funkt.[172]), p. 44. L'intégrale (92) se trouve déjà chez *G. G. Stokes*, Trans. Cambr. philos. Soc. 9 (1850), part II p. [38]; Papers 3, Cambridge 1901, p. 42.

C. Neumann trouve encore

$$(92)\qquad Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\omega) \log_e (4x \cos^2\omega)\, d\omega.$$

La fonction de deuxième espèce, d'indice n entier autre que zéro, s'obtient par la formule[183])

$$(93)\qquad Y_n(x) = (-2x)^n \frac{d^n Y_0(x)}{(dx^2)^n}.$$

Comme la même relation existe entre J_n et J_0, il s'ensuit que $Y_n(x)$ est la somme de $J_n(x) \log_e x$ et d'une fonction univoque et continue de x, développable en une série de fonctions cylindriques analogue à la série (91a); cette série peut s'écrire sous forme d'intégrale[184]).

54. Les fonctions de seconde espèce comme limites des fonctions de première espèce. *H. Hankel*[185]) a montré le premier que[186])

$$(94)\quad Y_n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon}[J_{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J_{-(n+\varepsilon)}(x)] + [\log_e 2 + \Gamma'(1)] J_n(x);$$

où $\Gamma'(1)$ est la *constante d'Euler* [cf. II 5].

55. Les fonctions cylindriques comme limites des fonctions sphériques. *G. Mehler*[187]) a trouvé entre les fonctions sphériques et les fonctions cylindriques la remarquable relation suivante:

$$(95)\qquad \lim_{n=+\infty} X_n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J_0(\theta),$$

qui se déduit de la représentation de X_n sous la forme d'une série hypergéométrique dont le quatrième élément est $\sin^2 \frac{\theta}{2n}$, ou bien encore de l'intégrale de Laplace [équation (7) du n° 7].

H. E. Heine[188]) a considéré de semblables passages à la limite pour les fonctions sphériques adjointes [n° 15] et pour les fonctions sphé-

---

183) *C. Neumann,* Besselsche Funkt.[172]), p. 54.

184) *E. Lommel,* Besselsche Funkt.[173]), p. 86. Pour d'autres formes de ces séries, cf. *H. Hankel*[185]) et *L. Schläfli*[186]).

185) *H. Hankel*, Math. Ann. 1 (1869), p. 467/501. Cf. note 186.

186) *L. Schläfli*, Math. Ann. 3 (1871), p. 134. Ce que *H. Hankel* désigne par Y_n n'est pas identique à la fonction Y_n de *C. Neumann*; dans la formule (94) qu'écrit *L. Schläfli,* il s'agit de la fonction Y_n de *C. Neumann.*

187) J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 140. **H. Laurent* [J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 385] montre que

$$\lim_{n=+\infty} 2^n X_n\left(\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\right)$$

est une fonction de Bessel.*

188) J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 128.

riques de deuxième espèce. Il pose ainsi

$$(95\text{a})\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=+\infty} Q^n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = K_0(\theta), \\ \lim\limits_{n=+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} P_\nu{}^n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J_\nu(\theta), \\ \lim\limits_{n=+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\, Q_\nu{}^n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = K_\nu(\theta). \end{cases}$$

L'équation différentielle des fonctions sphériques fondamentales [équation (2) du n° **3**], où $\mu = \cos\theta$, conduit, si l'on y fait l'argument égal à $\frac{\theta}{n}$ et qu'on cherche la limite pour $n = +\infty$, à l'équation différentielle des fonctions de Bessel; cela permet de prévoir la nature de la relation entre K_ν, J_ν et Y_ν; on a effectivement[189]:

$$(96)\quad -K_0(\theta) = Y_0(\theta) - J_0(\theta)\left[\log_e 2 + \Gamma'(1)\right] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{J_\varepsilon(\theta) - J_{-\varepsilon}(\theta)}{2\varepsilon}$$

et

$$(96\text{a})\qquad -K_\nu(\theta) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon}\left[J_{\nu+\varepsilon}(\theta) - (1)^\nu J_{-(\nu+\varepsilon)}(\theta)\right].$$

H. E. Heine fait l'étude des fonctions de Bessel en les considérant comme des cas limites de fonctions sphériques. Les fonctions de Bessel peuvent encore se rattacher aux fonctions coniques de *G. Mehler* ou, d'une façon plus générale, aux fonctions P de *B. Riemann*[190].

56. Les fonctions de deuxième espèce sous forme d'intégrales. *H. E. Heine* trouve

$$(97)\qquad K_0(\theta) = \int_0^{+\infty} \cos(\theta\cos iu)\,du,$$

ainsi qu'une forme correspondante pour $K_\nu(\theta)$.

L. Schläfli[191], *H. Hankel*[192], *H. E. Heine*[193], *H. Weber*[194], *N. J.*

---

189) *H. Weber*, J. reine angew. Math. 75 (1873), p. 85. Cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]) 1, p. 244.

190) *R. Olbricht* [Studien[38]) über die Kugel- und Cylinderfunktion, Diss. Leipzig 1887; Nova Acta Acad. Leop. 52 (1888), p. 1/48] traite d'extensions qu'il considère comme des fonctions cylindriques d'ordre plus élevé et montre que les formules (95) et (95a) s'étendent au cas d'indices quelconques. Cette généralisation a été donnée également par *A. Sommerfeld*, Math. Ann. 47 (1896), p. 337.

191) Ann. mat. pura appl. 1 (1868), p. 232; Math. Ann. 3 (1871), p. 134.

192) Math. Ann. 1 (1869), p. 467.

193) J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 128/41; Kugelf.[1]) 1, p. 234.

194) J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 222/37; 75 (1873), p. 75/105; 76 (1873), p. 1/20.

Sonin[195]) et *P. Schafheitlin*[196]) donnent, pour représenter J_n, Y_n et K_n, diverses intégrales portant sur des variables réelles ou complexes.

On peut citer la formule suivante due à *L. Schläfli,* où a est quelconque et où la partie réelle de x est positive,

$$(98)\quad J_a(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-a\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-x\,\mathrm{sh}\,\varphi-a\varphi}\,d\varphi;$$

sh désigne le sinus hyperbolique [II 7, **19**]; puis la *formule de Sonin*

$$(98\text{a})\quad Y_0(x)=-\int_0^{+\infty}J_0(u)\frac{\cos(x+u)}{x+u}\,du=-\int_0^{+\infty}\frac{J_0(u)\,du}{x+u}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos\varphi)\,d\varphi;$$

enfin la *formule de Mehler*[197])

$$(98\text{b})\qquad K_0(i\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xJ_0(x)\,dx}{x^2+\theta^2}.$$

Il faut remarquer que *L. Schläfli* donne à la fonction de Bessel de seconde espèce, qu'il appelle *fonction complémentaire,* la forme suivante

$$(98\text{d})\qquad K_a(x)=\operatorname{cotg}(a\pi)J_a(x)-\frac{1}{\sin(a\pi)}J_{-a}(x).$$

N. Nielsen[172]), dans son traité, introduit à côté de J_ν et de Y_ν les fonctions

$$H^{(\nu)}(x)=J_\nu(x)\pm iY_\nu(x),$$

qu'il appelle *fonctions cylindriques de Hankel.*

57. Relations de récurrence. Les principales relations récurrentes, déjà connues de *F. W. Bessel,* sont les suivantes:

$$(99)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{dJ_n(x)}{dx}=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x),\\[2mm] J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\dfrac{2n}{x}J_n(x),\\[2mm] J_{n+1}(x)=\dfrac{n}{x}J_n(x)-\dfrac{dJ_n(x)}{dx}.\end{cases}$$

La deuxième de ces relations est utile pour la détermination numérique des fonctions J_n.

195) Math. Ann. 16 (1880), p. 1.

Dans le second membre de la formule (98a), *N. J. Sonin* introduit un facteur 2. Mais la fonction qu'il appelle Y_n est le double de celle que *C. Neumann* désigne par la même notation.

196) J. reine angew. Math. 114 (1894), p. 31; Die Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig 1908.

197) J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 134; cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1]) 1, p. 197.

Les égalités (99) subsistent pour les fonctions $Y_n(x)$.

Parmi les conséquences de ces égalités rappelons la formule (93), ainsi que celles qui permettent d'exprimer J_n au moyen de J_{n-m}, J_{n-m-1} etc.

Comme *E. Lommel*[198]) l'a montré le premier, ces relations sont valables pour toute valeur entière ou nulle de n, en tenant compte de la relation (88) lorsque n est un entier négatif.

E. Lommel[199]) indique, entre les fonctions de première et de seconde espèce, les égalités suivantes, où n est un entier et où ν a une valeur quelconque:

$$(100)\qquad \begin{cases} Y_n(z) J_{n+1}(z) - J_n(z) Y_{n+1}(z) = \dfrac{1}{z}, \\ J_\nu(z) J_{-(\nu-1)}(z) + J_{-\nu}(z) J_{\nu-1}(z) = \dfrac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi). \end{cases}$$

N. J. Sonin adopte les formules de récurrence pour point de départ de sa théorie; elles servent également de définition à *N. Nielsen* qui en déduit une généralisation des fonctions cylindriques[200]).

58. Développement en fraction continue. La deuxième relation récurrente (99) permet de développer

$$\frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)}$$

en fraction continue. On a

$$(101)\qquad \frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)} = \cfrac{1}{\cfrac{2n}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+2}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+4}{x} - \cdots}}}$$

O. Schlömilch[201]) et *F. W. Bessel* ont signalé ce développement sous des formes différentes. Plus récemment *J. H. Graf* a étudié de

198) Besselsche Funkt.[175]), p. 2.

199) Math. Ann. 4 (1871), p. 103.

N. Nielsen [Math. Ann. 52 (1899), p. 228; Handbuch[172]), p. 23] donne une formule de récurrence plus générale. Dans le second membre de la première des deux équations (100), *N. Nielsen* écrit $\frac{2}{\pi z}$ au lieu de $\frac{1}{z}$ et *P. Schafheitlin* [Theorie der Besselschen Funktionen[196]), p. 48] écrit $-\frac{2}{\pi z}$. Cela tient à ce que ces auteurs désignent par Y_n le produit par $\frac{\pm 2}{\pi}$ de la fonction Y_n de *C. Neumann.*

200) Ann. mat. pura appl. (3) 5 (1900), p. 17; Handbuch[199]), p. 25.

201) Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 137; **O. Perron* [Sitzgsb. Acad. München 37 (1907), p. 483/504] étudie la convergence du développement; sa méthode est simplifiée par *N. Nielsen,* Sitzgsb. Acad. München 38 (1908), p. 85/8.*

près le lien qui existe entre les fonctions de Bessel et les fractions continues [202]).

*Citons à ce propos des études de *W. Kapteyn* [203]), *O. Perron* [201]), *N. Nielsen* [201]), sur le développement en fraction continue du quotient de deux fonctions de Bessel.*

59. **Séries semi-convergentes.** La série (84), bien que convergente pour toute valeur de x, ne convient guère au calcul numérique de $J_n(x)$ quand x est grand. Il vaut mieux employer le développement semi-convergent au sens de *A. M. Legendre* [I 4, **19**]

$$(102)\quad J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) S_1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) S_2\right],$$

où

$$(102\text{a})\qquad S_1 = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p \frac{(n, 2p)}{(2x)^{2p}}, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{p=+\infty} (-1)^p \frac{(n, 2p+1)}{(2x)^{2p+1}}.$$

La notation (n, p) a ici la signification suivante

$$(n, p) = \frac{\Gamma\left(n+p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-p+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{n^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} \cdot \frac{n^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \cdots \cdots \frac{n^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2}{p}.$$

La série (102) a été indiquée par *S. D. Poisson* [204]) pour $n = 0$ et par *C. G. J. Jacobi* [205]) pour les valeurs entières de l'indice.

Le *reste* de la série, dans le cas où $n = 0$, a été déterminé par *R. Lipschitz* [206]), qui n'a donné que quelques indications pour le cas où n est un entier positif.

H. Hankel [207]) a étudié le cas où n ainsi que x ont des valeurs quelconques réelles ou complexes; il parvient au résultat suivant: si l'on calcule un nombre fini de termes pour S_1 ou pour S_2, la valeur absolue du reste de la série est inférieure à celle du premier terme négligé; on n'est pourtant assuré de ce résultat qu'à partir du terme pour lequel $2p$ ou $2p+1$ est supérieur à la partie réelle de $n - \frac{1}{2}$. Si n et x ont des valeurs réelles et positives, les termes consécutifs sont de signes différents à partir du terme de rang p, pourvu que $2p$ ou $2p+1$ étant déterminé par la condition précédente on ait $p \geqq n$.

202) *J. H. Graf*, Ann. mat. pura appl. (2) 23 (1895), p. 45/65.

203) *K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen Natuurk Afdeeling 14 (1905/6), p. 562/4, 672/4; éd. anglaise, p. 547/9, 640/2; Archives néerlandaises sc. Harlem (2) 11 (1906), p. 149/68.*

204) J. Éc. polyt. (1) cah. 19 (1823), p. 349.

205) Astron. Nachr. 28 (1849), p. 94; Werke 7, Berlin 1891, p. 174.

206) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 189.

207) Math. Ann. 1 (1869), p. 467/501.

E. Lommel[208]) et *H. Hankel* ont également donné pour représenter $Y_n(x)$ des séries semi-convergentes.

Une forme nouvelle et une discussion précise de la valeur du reste se trouve dans un mémoire de *H. Weber*[209]) qui prend pour n un nombre réel quelconque et pour x un nombre complexe; on trouve également dans ce mémoire, pour le cas où n est entier, les séries qui conviennent à $Y_n(x)$. Dans le cas où la valeur de l'indice n n'est pas petite relativement à celle de l'argument x, *P. Debye*[210]) a donné pour $Y_n(x)$ des développements en séries semi-convergentes.

On tire de (102), pour n entier, x ayant une valeur réelle très grande, les valeurs asymptotiques suivantes

$$(102\text{b})\qquad \begin{cases} J_{2n}(x) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}(-1)^n(\cos x + \sin x), \\ J_{2n+1}(x) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}(-1)^{n+1}(\cos x - \sin x). \end{cases}$$

On a, dans les mêmes conditions,

$$(102\text{c})\qquad K_n(x) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(\cos x - \sin x).$$

Si n est la moitié d'un nombre impair, les séries (102a) sont limitées, résultat indiqué déjà au n° **52**. L'intégrale (85) permet de donner à J_n la forme

$$J_n(x) = x^n[C \cos x + S \sin x],$$

où C et S sont des sommes de séries toujours positives, ordonnées suivant les puissances croissantes de x[211]).

---

208) Besselsche Funkt.[178]), p. 95; *H. Hankel*[207]) remarque que le mode de démonstration de *E. Lommel*, pour le développement en série dans le cas où n est quelconque, ne répond pas aux exigences de l'analyse moderne.

209) Math. Ann. 37 (1890), p. 401/16; *B. Riemann* [Ann. Phys. und Chemie 95 (1855), p. 130; Werke, (1e éd.) Leipzig 1876, p. 54] n'envisage que des valeurs de x purement imaginaires. Voir aussi *P. Schafheitlin*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 120/9.

210) Math. Ann. 67 (1908), p. 535; Sitzgsb. Akad. München, Math. Phys. Klasse 1910, mém. n° 5.

211) Cf. *I. Todhunter*, An elementary treatise on Laplaces functions, Lamés functions and Bessels functions, Londres 1875, p. 292.

Pour la détermination des constantes par le passage des séries convergentes de puissances croissantes aux séries semi-convergentes de puissances décroissantes, voir *G. G. Stokes*, Trans. Cambr. philos. Soc. 9 (1850), part II p. [38]; 10 (1857), p. 122; 11 (1868), p. 415; Papers 3, p 43; 4, p. 101, 286.

**A. Adamov* [Ann. Inst. Polyt. St Pétersbourg 6 (1906), p. 239/65] étudie les expressions asymptotiques des fonctions cylindriques et de leurs dérivées pour les grandes valeurs de l'argument.*

$_*$*T. J. Stieltjes*[212]) a étudié le cas où $n = 0$; *O. Callandreau*[213]) étendant sa méthode, donne pour $J_n(x)$ une expression qui comporte le calcul de deux séries semi-convergentes.

J. Hadamard[214]) a appliqué à $J_0(x)$ et $J_0(ix)$ une méthode qui consiste à rendre convergentes les séries au moyen de termes correctifs; les nouvelles séries ne représentent plus les fonctions de Bessel, mais ont même valeur asymptotique pour x très grand.*

60. Racines de l'équation $J_n(x) = 0$. L'équation

$$\frac{1}{x^n} J_n(x) = 0$$

a une infinité de racines, réelles et distinctes, séparées par les valeurs[215])

$$(m + \tfrac{1}{2})\pi, \quad (m + 1)\pi, \quad \text{où} \quad m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Cela résulte du fait que, pour n compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, $J_n(x)$ est constamment positif quand x varie de $2m\pi$ à $(2m + \frac{1}{2})\pi$ et est constamment négatif quand x varie de $(2m + 1)\pi$ à $(2m + \frac{3}{2})\pi$.

Les grandes valeurs des racines de l'équation $J_n(x) = 0$ diffèrent les unes des autres de π environ.

Ce qui a été dit des racines de l'équation $J_n(x) = 0$ s'applique aux racines de l'équation $\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$ et plus généralement à celles de l'équation

$$aJ_n(x) + bx\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0,$$

où a et b sont des constantes arbitraires.

En désignant par p une racine de l'équation $J_n(x) = 0$, on a pour les valeurs naturelles de n[216])

$$\sum_{(p)} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4(n+1)}, \quad \sum_{(p)} \frac{1}{p^4} = \frac{1}{16(n+1)^2(n+2)}, \text{ etc.}$$

212) $_*$Recherches sur quelques séries semi-convergentes, Thèse Fac. sc. Paris 1886.*

213) $_*$Bull. sc. math. (2) 14 (1890), p. 110.*

214) $_*$Bull. Soc. math. France 36 (1908), p. 77/85.*

215) *D. Bernoulli* [Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 116] avait déjà établi qu'une des racines de l'équation $J_0(2\sqrt{x})$ est approximativement égale à $\frac{1}{0{,}691}$ et qu'il y a une infinité d'autres racines réelles.

Pour la proposition du texte, voir *J.-B. J. Fourier*, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, p. 372; Œuvres, publ. par *G. Darboux* 1, Paris 1888, p. 335; *E. Lommel* [Besselsche Funkt.[173]), p. 65] donne une démonstration pour toute valeur de l'indice. Voir aussi *B. Riemann*, Partielle Differentialgleichungen, (2e éd.) Brunswick 1876, p. 266.

216) *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 44 (1872), p. 328/44. Sous une forme un peu différente pour $n = 0$ par *L. Euler*, Acta Acad. Petrop. 5 (1781), pars prior éd. 1784, p. 173 [1774].

A. Hurwitz[217]) a fait une étude approfondie des racines de l'équation $J_n(x) = 0$ pour n arbitraire, même négatif.

P. Schafheitlin[218]) a recherché les racines des fonctions de Bessel de seconde espèce.

61. Théorème d'addition des fonctions de première et de seconde espèce. En posant

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\theta}$$

on a[219])

$$(103)\qquad \begin{cases} J_0(R) = J_0(r)J_0(r_1) + 2\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} J_n(r)J_n(r_1)\cos n\theta \\ Y_0(R) = J_0(r)Y_0(r_1) + 2\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} J_n(r)Y_n(r_1)\cos n\theta. \end{cases}$$

La première équation est valable pour des valeurs arbitraires de r et de r_1, la deuxième ne convient que pour $r < r_1$.

Le théorème analogue pour $J_n(R)$ a été donné par *L. Gegenbauer*[220]), *N. J. Sonin*[221]) et *J. H. Graf*[222]).

On trouve dans l'ouvrage de *H. E. Heine* le théorème d'addition de la fonction K_n[223]).

Il convient de mentionner des formules[224]) relatives à $J_n(x+y)$ ainsi[225]) qu'à $J_n(\sqrt{z+h})$.

---

217) Math. Ann. 33 (1888), p. 246/66; *J. Mac Mahon,* Annals of math. 9 (1894), p. 23; *A. Gray* et *G. B. Mathews,* Bessels Functions[172]), p. 241; *H. M. Macdonald,* Proc. London math. Soc. 29 (1899), p. 165.

218) J. reine angew. Math. 122 (1900), p. 299; Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 133; Berl. Math. Ges. 5 (1906), p. 82/93; Jahresb. deutsch. Math. Ver. 16 (1907), p. 272/9; **C. N. Moore,* Annals of math. 9 (1908), p. 156/62; *A. Chessin,* Amer. J. math. 16 (1896), p. 186; *R. W. Willson* et *B. O. Peirce* [Bull. Amer. math. Soc. 3 (1897), p. 153] donnent des tables des racines.*

Relativement aux courbes $y = J_m(x)$ et $y = Y_m(x)$, cf. *R. Olbricht*[190]).

219) *C. Neumann,* Besselsche Funkt.[172]), p. 65.

220) Sitzgsb. Akad. Wien 69 II (1874), p. 6/16; 74 II (1876), p. 124/30; *C. Wendt* [Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 125] donne une généralisation du résultat de *L. Gegenbauer.* Autre extension de *N. Nielsen,* Ann. mat. pura appl. (3) 6 (1901), p. 43.

221) Math. Ann. 16 (1880), p. 1.

222) Math. Ann. 43 (1893), p. 136.

223) *H. E. Heine,* Kugelf.[1]) 1, p. 464; *A. Sommerfeld* [Math. Ann. 47 (1896), p. 356] et *H. M. Macdonald* [Proc. Lond. math. Soc. 32 (1900), p. 152] établissent le théorème d'addition des fonctions de deuxième espèce dans le cas où l'indice est quelconque.

62. La fonction O_n de C. Neumann. La formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(y)\,dy}{y-x}$$

conduit *C. Neumann*[226]) à introduire de nouvelles fonctions, les fonctions O_n. Il écrit

$$\frac{1}{y-x} = J_0(x)\,O_0(y) + 2\sum_{n=1}^{n=+\infty} J_n(x)\,O_n(y). \tag{104}$$

C. Neumann donne assez improprement à cette fonction, le nom de „fonction de Bessel de seconde espèce". Ainsi que l'a fait remarquer déjà *E. Lommel,* cette fonction O_n ne satisfait pas à l'équation différentielle de Bessel (83); il vaut donc mieux, conformément à l'habitude de la plupart des mathématiciens, réserver la qualification *de seconde espèce* à la deuxième intégrale particulière de l'équation (83) désignée précédemment par les notations Y_n ou K_n dans le cas de n entier et par J_{-n} quand n n'est pas entier.

Suivant que n est pair ou impair, O_n satisfait à l'une des équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 O_n(y)}{dy^2} + \frac{3}{y}\frac{d\,O_n(y)}{dy} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O_n(y) = \frac{1}{y}, \\ &\frac{d^2 O_n(y)}{dy^2} + \frac{3}{y}\frac{d\,O_n(y)}{dy} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O_n(y) = \frac{n}{y^2}. \end{aligned}\right. \tag{105}$$

C. Neumann développe cette fonction en une série limitée, procédant suivant les puissances négatives de y, en donne une représentation sous forme d'intégrale définie et montre qu'elle satisfait à la première des relations de récurrence (99).

L. Schläfli[227]) a donné une formule analogue à la deuxième des relations (99).

La fonction O_n jouit des propriétés suivantes[228]): on a

$$\left\{\begin{aligned} \int J_n(z)\,O_\nu(z)\,dz &= \pi i \text{ dans le cas où } n \text{ et } \nu \text{ égaux entre} \\ &\qquad\text{eux représentent un entier positif,} \\ &= 2\pi i \text{ si } n = \nu = 0, \\ &= 0 \quad \text{si } n \gtrless \nu. \end{aligned}\right. \tag{106}$$

224) *C. Neumann,* Besselsche Funkt.[172]), p. 40. Cf. *L. Schläfli,* Math. Ann. 3 (1871), p. 134; *J. H. Graf,* Math. Ann. 43 (1893), p. 136; *N. Nielsen,* Math. Ann. 52 (1899), p. 228; *F. H. Jackson,* Trans. R. Soc. Edinburgh 41 (1904/5), p. 105/18. *L. Schläfli* fait connaître un développement de $O_n(x+y)$, où O_n est la fonction définie au n° 62.

225) *E. Lommel,* Besselsche Funkt.[173]), p. 11.

226) Besselsche Funkt.[172]), p. 8.

227) Math. Ann. 3 (1871), p. 137.

L'intégrale est étendue dans le plan de la variable imaginaire à une courbe entourant le point $z = 0$. Si l'origine est extérieure à la courbe l'intégrale est nulle, même pour $n = \nu$. De plus, au cas où la courbe entoure le point $z = 0$, on a

$$\int J_n(z) J_\nu(z) dz = 0, \quad \int O_n(z) O_\nu(z) dz = 0, \tag{107}$$

que n soit égal à ν ou en diffère.

63. Développement d'une fonction analytique suivant les fonctions de Bessel. Les résultats qui précèdent permettent de développer une fonction $f(x)$, univoque et continue à l'intérieur du cercle de centre $x = 0$, en une série de la forme

$$\alpha_0 J_0(x) + \alpha_1 J_1(x) + \cdots + \alpha_\nu J_\nu(x) + \cdots\cdots, \tag{108}$$

où

$$\alpha_0 = \frac{2}{i\pi}\int f(x) O_0(x) dx, \text{ et } \alpha_\nu = \frac{1}{i\pi}\int f(x) O_\nu(x) dx \quad (\nu = 1, 2, \ldots\ldots); \tag{108a}$$

les intégrales sont prises le long du cercle dans le sens direct.

H. E. Heine[229]) déduit une autre détermination des coefficients au moyen des développements d'une fonction en fonctions sphériques adjointes.

C. Neumann[230]) donne, comme exemple, les développements des puissances entières positives de z (même z^0), ainsi que ceux de $\cos z$ et $\sin z$, en séries de fonctions de Bessel de première espèce; les puissances négatives de z se développent en séries limitées de fonctions O_ν.

C. Neumann[231]) a donné d'autres développements de même nature; *W. Kapteyn*[232]) a étudié des séries de la forme

$$A_1 J_1(z) + A_2 J_2(2z) + \cdots + A_n J_n(nz) + \cdots\cdots$$

et *N. Nielsen*[233]) a généralisé les résultats de *C. Neumann* et de *W. Kapteyn.*

N. Nielsen[234]), en outre, a trouvé des séries procédant suivant des produits de fonctions cylindriques et dont la somme est constamment nulle quand les variables restent à l'intérieur d'un certain domaine.

---

228) *C. Neumann,* Besselsche Funkt.[172]), p. 19.

229) Kugelf.[1]), 1, p. 255.

230) Besselsche Funkt.[172]), p. 39/40.

231) Math. Ann. 3 (1871), p. 581.

232) Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 91.

233) Ann. Éc. Norm. (3) 18 (1901), p. 39; cf. Handbuch[172]), p. 270/320 (chap. 20 à 23).

234) Math. Ann. 52 (1899), p. 582; Ann. mat. pura appl. (3) 6 (1901), p. 301; Handbuch[172]), p. 337.

64. Sur les développements qui se présentent dans les applications. On rencontre en physique mathématique des développements procédant suivant les fonctions J de même indice mais dont l'argument varie d'un terme à l'autre. L'argument est de la forme

$$\lambda_p x,$$

où λ_p est la $p^{\text{ième}}$ racine de l'équation

a) $$J_n(x) = 0$$

ou de l'équation

b) $$\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$$

ou encore de l'équation plus générale

c) $$aJ_n(x) + bx\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0.$$

Soit donc une fonction $f(x)$ développée de la sorte:

$$f(x) = \sum_{(p)} A_p J_n(\lambda_p x). \tag{109}$$

Les coefficients A se déterminent grâce aux relations

$$\int_0^1 J_n(\lambda x) J_n(\lambda_1 x) x\,dx = 0, \tag{110}$$

$$2\int_0^1 [J_n(\lambda x)]^2 x\,dx = [J_n'(\lambda)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right)[J_n(\lambda)]^2, \tag{110a}$$

où λ et λ_1 sont deux racines différentes de l'équation **a**, ou deux racines différentes de l'équation **b**, ou deux racines différentes de l'équation **c**, et où J' est la dérivée de J. Dans l'équation (110a) l'expression $J_n(\lambda)$ est égale à zéro dans le cas **a**; dans le cas **b** c'est l'expression $J_n'(\lambda)$ qui est nulle.

Le développement (109), pour $n = 0$, se trouve déjà chez *J.-B. J. Fourier*; aussi *E. Lommel*[235]) donne-t-il au théorème qu'expriment les égalités (110) et (110a) le nom de *théorème de Fourier*; il a étendu la proposition aux valeurs de n différentes de zéro[236]).

Il faut remarquer que dans la relation (109), n doit être choisi de façon que

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{x^n}$$

ait une valeur finie.

235) Besselsche Funkt.[175]), p. 69. Sur la convergence de la série (109) pour $n = 0$, cf. *A. Kneser,* Archiv Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 123/33.

236) *E. Lommel,* id. p. 69/73; cf. *B. Riemann,* Partielle Differentialgleichungen, (2e éd.) p. 258. Démonstration de la convergence par *H. Hankel,* Math. Ann. 8 (1875), p. 471; *L. Schäfli,* Math. Ann. 10 (1876), p. 137; *U. Dini,* Serie di Fourier 1, Pise 1880, p. 246/69. Cf. *N. Nielsen,* Handbuch[172]), p. 352.

On substituera s'il le faut à $f(x)$ cette même fonction multipliée par une puissance convenable de x.

Dans les problèmes de physique mathématique traitant du cylindre creux, on introduit à la place de J_n la solution générale de l'équation différentielle de Bessel

$$J_n(\lambda_p x) + C_p Y_n(\lambda_p x) = f_n(\lambda_p x),$$

C_p et λ_p étant déterminés par deux équations de la forme[237]

$$\begin{cases} J_n(\lambda_p x_1) + C_p Y_n(\lambda_p x_1) = 0, \\ J_n(\lambda_p x_2) + C_p Y_n(\lambda_p x_2) = 0. \end{cases}$$

On a alors, à la place de l'équation (110), la formule

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(\lambda x) f_n(\lambda_1 x) x\, dx = 0,$$

où λ et λ_1 sont deux racines distinctes du système écrit plus haut. La valeur de l'intégrale pour $\lambda = \lambda_1$ ne s'exprime pas sous forme finie.

65. La série de Schlömilch. *O. Schlömilch*[238] met une fonction définie entre 0 et π sous la forme

$$(111) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n J_0(nx),$$

où

$$(111\text{a}) \qquad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos(nu)\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)\, dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

E. Lommel[239] donne un développement analogue, où J_m remplace J_0.

66. Représentation d'une fonction de deux variables au moyen des fonctions de Bessel. *C. Neumann*[240], en partant de la formule relative aux fonctions sphériques [équations 32 et 33 du n° **19**] et par un passage à la limite (il fait croître indéfiniment le rayon de la sphère), représente ainsi une fonction de deux variables, au moyen des fonctions cylindriques:

$$(112) \qquad 2\pi F(\varrho_1, \varphi_1) = \lim_{q=+\infty} \iint_{(\mathfrak{S})} \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, F(\varrho, \varphi) \left[\int_0^q J_0(qR)\, q\, dq \right],$$

---

237) Cela correspond au cas où, pour le cylindre plein, on prend une racine de l'équation **a**. Le système d'équations qu'il faut substituer aux deux équations **b** et **c** s'obtient sans peine.

238) Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 137/65.

239) Besselsche Funkt.[173], p. 73; *E. Lommel* donne à la proposition que traduit l'égalité (111) le nom de „théorème de Schlömilch".

240) Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funkt. fortschr. Entw.[77], p. 18, 126; cf. *H. E. Heine*, Kugelf.[1], (2 éd.) 1, p. 443.

où

$$R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)};$$

l'intégration est étendue à une aire plane $\mathfrak{T}$. Dans le cas où $F(\varrho, \varphi)$ est continue à l'intérieur du domaine $\mathfrak{T}$, le second membre de (112) tend vers une limite finie lorsque q grandit; cette limite est *zéro* si le point (ϱ_1, φ_1) est en dehors du domaine $\mathfrak{T}$, elle est la moyenne arithmétique des valeurs que prend $F(\varrho, \varphi)$ le long d'un petit cercle entourant le point (ϱ_1, φ_1) lorsque celui-ci se trouve à l'intérieur de $\mathfrak{T}$.

L'égalité (112) donne la représentation d'une fonction $f(\varrho_1)$ d'un seul argument entre $\varrho_1 = 0$ et $\varrho_1 = c$ au moyen d'une intégrale double. Cette représentation a été généralisée en faisant usage de la fonction J_n (n entier positif) au lieu de J_0[241]).

67. Quelques intégrales définies. Citons quelques exemples d'intégrales définies où figurent des fonctions de Bessel.

R. Lipschitz[242]) trouve

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \int_0^{+\infty} e^{-ax} J(bx)\,dx.$$

On doit à *H. Weber*[243]) l'égalité

$$\int_0^{+\infty} J_\nu(bx)\frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu} \qquad (b > 0).$$

H. Hankel[244]) et *N. J. Sonin*[245]) donnent des intégrales analogues.

C. Neumann[246]) représente le carré d'une fonction de Bessel à indice entier au moyen d'une intégrale définie

$$[J_n(x)]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_{2n}(2x \sin\omega)\,d\omega$$

et *L. Schläfli*[247]) y rattache l'expression du produit

$$J_m(x)J_n(x).$$

241) *C. Neumann,* Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funkt. fortschr. Entw.[77]), p. 137. Cf. *W. F. Sheppard,* Quart. J. pure appl. math. 23 (1888), p. 223.

242) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 189.

243) Id. 69 (1868), p. 232.

244) Math. Ann. 8 (1875), p. 453.

245) Id. 16 (1880), p. 1.

246) Besselsche Funkt.[172]), p. 70.

247) Math. Ann. 3 (1871), p. 134. Cf. *N. Nielsen,* Ann. Éc. Norm. (3) 18 (1901), p. 39.

Enfin on peut écrire[248]) pour la fonction sphérique P^n

$$P^n(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x\cos\theta} J_0(x\sin\theta) x^n\,dx.$$

En remplaçant J_0 par la série semi-convergente (102), on met $P^n(\cos\theta)$ sous une forme qui permet d'en obtenir une expression approchée pour les grandes valeurs de n.

68. $_*$**Les fonctions de Bessel et les équations intégrales.** Soit

$$\psi^{(h)}(s)$$

une solution de l'équation intégrale homogène

$$y(s) = \lambda^{(h)}\int\limits_a^b K(s,t)y(t)\,dt, \tag{113}$$

où le noyau $K(s, t)$ est une fonction symétrique en s et t, continue dans le plan de s, t et où $\lambda^{(h)}$ est racine d'une certaine équation transcendante ayant en général un nombre infini de racines.

Les fonctions $\psi^{(h)}$ jouissent des propriétés suivantes

$$\int\limits^b \psi^{(h)}(s)\,\psi^{(k)}(s)\,ds = 0 \qquad (h \gtrless k), \tag{114}$$

$$\int\limits_a^b [\psi^{(h)}(s)]^2\,ds = 1. \tag{114a}$$

Ces fonctions permettent de développer toute fonction $f(s)$ se mettant sous la forme

$$f(s) = \int\limits_a^b K(s,t)g(t)\,dt \tag{115}$$

en une série

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + c_3\psi^{(3)}(s) + \cdots\cdots$$

absolument et uniformément convergente pour $a \leqq s \leqq b$; on a

$$c_m = \int\limits_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds.$$

---

248) *O. Callandreau,* Bull. sc. math. (2) 15 (1891), p. 121. La même formule est obtenue par *E. W. Hobson* [Proc. Lond. math. Soc. (1) 25 (1893/4), p. 49] qui donne plus loin l'expression correspondante pour $P_\nu^n(\cos\theta)$.

L. Gegenbauer [Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 189] a représenté le produit

$$(\sin\varphi)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, C_n^\nu(\cos\varphi)\, J^{n+\nu}(\alpha)$$

au moyen d'une intégrale.

D. Hilbert[249]) a déterminé le noyau qui correspond à certaines fonctions de Bessel. La fonction à développer étant divisée d'abord par $\sqrt{x}$, *D. Hilbert* établit que toute fonction continue et dérivable deux fois dans l'intervalle $(0, 1)$ et s'annulant pour $x = 1$ est développable en série absolument et uniformément convergente suivant les fonctions de Bessel: $J_0(x\sqrt{\lambda^{(m)}})$; les différentes valeurs $\lambda^{(m)}$ sont celles des racines de l'équation $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$.

D. Hilbert donne encore au moyen d'une équation intégrale une définition nouvelle des fonctions sphériques fondamentales.

En se plaçant toujours au point de vue des équations intégrales *A. Myller*[250]) a montré qu'on peut développer une fonction ayant ses deux premières dérivées continues sous la forme

$$a_1 J_{+\sqrt{\nu}}(\lambda^{(1)}x) + a_2 J_{+\sqrt{\nu}}(\lambda^{(2)}x) + \cdots\cdots,$$

où ν est une constante positive et où les différents $\lambda^{(i)}$ sont les racines de l'équation

$$J_{+\sqrt{\nu}}(\lambda) = 0.$$

Il a montré également la possibilité de développements d'après des fonctions de Bessel de même argument et d'indices différents.*

69. Tables de fonctions de Bessel. *F. W. Bessel*[251]) a calculé des tables des fonctions J_0 et J_1 pour des arguments variant de $x = 0$ à $x = 3,2$. *P. A. Hansen*[252]) les a étendues jusqu'à $x = 10$, *E. Lommel*[253]) jusqu'à $x = 20$. La table de *E. Meissel*[254]) est étendue à douze décimales. La table de *E. Lommel* est publiée dans l'ouvrage de *W. E. Byerly*[255]); *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*) en donne un extrait[256]).

B. A. Smith[257]) a calculé des tables de Y_0 et Y_1. *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*) et *W. E. Byerly* fournissent également un tableau des racines de $J_n(x) = 0$; *W. E. Byerly* donne les neuf premières racines pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5.

---

249) Nachr. Ges. Gött. 1904, math.-phys. p. 231, 241; *A. Kneser,* Math. Ann. 63 (1907), p. 517.

250) Buletinue Societa tii de ştiinţe din Bucuresti 18 (1909), n^{os} 5 et 6.

251) Abh. Akad. Berlin 1824, éd. 1826. math. Klasse, p. 1/52.

252) Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843; *G. B. Airy* [London Edinb. Dublin philos. mag. 18 (1841), p. 7] donne une petite table pour J_0 et $(J_0)^2$.

253) Besselsche Funkt.[178]), p. 127/35.

254) Abh. Akad. Berlin 1888, éd. 1889, Abh. nicht zur Akad. gehöriger Gelehrten, Math. Abh. mém. n° 1, p. 1/23; reprod. dans *A. Gray* et *G. B. Mathews,* Treatise on Bessels functions[172]).

255) Elementary treatise[47]), p. 286/7.

256) The theory of sound, (1re éd.) 1, Londres 1877; 2, Londres 1878; 2^e éd.) 1, Londres 1894; 2, Londres 1896.

257) Messenger math. (2) 26 (1896/7), p. 98.

G. G. Stokes[258]) donne les douze premières racines de J_0 et J_1, *R. W. Willson* et *B. O. Peirce*[259]) les quarante premières de J_0 et *E. Meissel*[260]) les cinquante premières de J_1.

On trouvera des renseignements sur de plus récentes tables anglaises dans les „Reports of the British Association for Advancement of sciences“ de 1889, 1893, 1896 et 1907.

Fonctions des cylindres elliptique et parabolique.

70. Fonctions du cylindre elliptique. Ces fonctions interviennent en physique mathématique dans les questions qui se rattachent au cylindre elliptique ou à la plaque elliptique; elles sont aux fonctions de Bessel ce que les fonctions de Lamé sont aux fonctions sphériques. Les fonctions du cylindre elliptique satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \mathfrak{E}(\varphi)}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^2 \varphi - B)\,\mathfrak{E}(\varphi) = 0; \tag{117}$$

B est ici la racine d'une certaine équation transcendante. Les deux intégrales particulières de l'équation (117) prennent le nom de fonctions de première et de seconde espèce; la fonction de première espèce est finie à distance finie. L'une et l'autre, comme les fonctions de Lamé, se subdivisent en quatre classes.

H. E. Heine[261]) a fait une étude complète de ces fonctions; il en donne des développements procédant suivant les fonctions de Bessel J et K, d'argument $i\lambda \cos \varphi$.

F. Lindemann[262]), qui donne à l'équation (117) une extension analogue à celle que *Ch. Hermite* a donnée à l'équation de Lamé [n° 47], développe la fonction $\mathfrak{E}(\varphi)$ suivant les puissances de $\cos^2 \varphi$.

E. Särchinger[263]) a fait un exposé détaillé de la théorie des fonctions du cylindre elliptique où il étend et améliore certains résultats de *H. E. Heine.*

258) Trans. Cambr. philos. Soc. 9 part I (1849/50), éd. 1850, p. 181; Papers 2, Cambridge 1883, p. 355.

259) Bull. Amer. math. Soc. 3 (1896/7), p. 153.

260) Progr. Kiel 1890.

261) Kugelf. [1]), (2ᵉ éd.) 1, p. 401; 2, p. 202. Cf. *Fr. Pockels*, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891, p. 186; il étend aux fonctions du cylindre elliptique le théorème des oscillations [n° 49].

262) Math. Ann. 22 (1883), p. 117. Relativement aux séries qui se rapportent à la fonction $\mathfrak{E}$, voir *H. Bruns*, Astron. Nachr. (Kiel) 106 (1883), col. 193/204; 107 (1884), col. 129/34. Pour d'autres travaux d'ordre astronomique faisant intervenir $\mathfrak{E}$, voir *F. Tisserand*, Traité de mécanique céleste 3, Paris 1894.

263) Progr. Chemnitz 1894.

E. Häntzschel[264]) adopte pour point de départ l'équation suivante plus générale que (117)

$$\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \left[h^2\left(\frac{\beta e^{mi\omega} - \alpha e^{-mi\omega}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] z; \tag{118}$$

et à côté de cette équation transcendante il en considère une autre de forme algébrique. Il discute la nature de l'intégrale de l'équation (118), la façon dont elle se comporte à l'infini, ses liens avec les fonctions de Lamé, etc. Ces résultats pourtant seraient à compléter.

71. Fonctions du cylindre parabolique. Les problèmes se rattachant au cylindre parabolique font appel à d'autres fonctions.

On obtient leur équation différentielle en faisant dans l'équation (118) $\alpha = \beta$, $m = 0$.

K. Baer[265]) en a fait l'étude en donnant à l'équation différentielle la forme

$$\frac{d^2 z}{d\varrho^2} + (h - \varrho^2) z = 0. \tag{119}$$

On trouve chez cet auteur, ainsi que chez *E. Häntzschel*[266]), *E. T. Whittaker*[267]), *G. N. Watson*[268]), les diverses représentations et les principales propriétés de ces fonctions.

M. Bôcher[269]) donne un schéma de la multiplicité des points singuliers pour les fonctions des cylindres elliptique et parabolique ainsi que pour les fonctions du cône et du cylindre de révolution.

---

264) Progr. Duisburg 1886; Progr. städt. höh. Bürgerschule, Berlin 1889; voir aussi *E. Häntzschel*, Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1893, p. 94.

265) Progr. Küstrin 1883.

266) Z. Math. Phys. 33 (1888), p. 22.

267) Proc. London math. Soc. (1) 35 (1902/3), p. 417/27.

268) Id. (2) 8 (1910), p. 393/421.

269) Potentialtheorie [163]), p. 193.

II 28a. GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DES FONCTIONS SPHÉRIQUES.

EXPOSÉ PAR **P. APPELL** (PARIS) ET **A. LAMBERT** (PARIS).

---

*La théorie des fonctions sphériques a été généralisée à deux points de vue différents.

Certains auteurs ont étudié des fonctions d'*une variable* analogues aux polynomes X_n de Legendre, soit en considérant des polynomes définis par des dérivées d'ordre n, soit en formant des polynomes dont la fonction génératrice se rapproche de celle des polynomes X_n, soit en étudiant des fonctions définies par des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique à une variable, du second ordre ou d'ordre supérieur, soit enfin en appliquant la théorie des fonctions orthogonales correspondant à une fonction génératrice donnée.

D'autres ont cherché à généraliser les polynomes X_n et les fonctions semblables d'une variable par des considérations analogues à celles qui permettent de passer des fonctions Θ d'une variable aux fonctions Θ de *deux ou plusieurs variables*, soit par la considération de potentiels dans l'hyperespace, soit par la voie des dérivées partielles, soit par celle des fonctions génératrices, soit par celle des fonctions hypergéométriques de deux variables, soit enfin par la théorie des fonctions orthogonales de plusieurs variables.

On trouvera dans les deux paragraphes suivants l'indication sommaire des travaux relatifs à ces deux points de vue.*

1. *Fonctions d'une variable. En généralisant l'expression de X_n par une dérivée d'ordre n, *C. G. J. Jacobi*[1]), dans un travail posthume, a montré que pour n entier positif le polynome

$$F(-n,\ \alpha+n,\ \gamma,\ x),$$

ou pour abréger F_n, est donné par l'égalité

$$F_n = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\right];$$

il en a fait connaître une fonction génératrice.

---

1) *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hyper-geometrischen Reihe [J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 149/75; Werke 6, Berlin 1891, p. 184/202].*

L'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^1 F_m F_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx$$

est nulle quand les entiers m et n sont différents; elle a une valeur positive donnée par *C. G. J. Jacobi* pour $m = n$. *G. Humbert*[2]) a étudié ces mêmes polynomes.

Dans une Note sur les polynomes de Jacobi, *T. J. Stieltjes*[3]) étudie le polynome

$$X = F(-n, n + \alpha + \beta - 1, \alpha, x);$$

il forme la suite de Sturm correspondante; il arrive à des fonctions indiquées par *J. J. Sylvester,* contenant symétriquement les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $X = 0$:

$$\sum (x_1 - x_2)^2 (x - x_3)(x - x_4) \ldots$$
$$\sum (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x - x_4) \ldots$$

Il donne le discriminant D de l'équation $X = 0$ sous la forme

$$D = \prod_{r=1}^{r=n} \frac{r^r(\alpha + r - 1)^{r-1}(\beta + r - 1)^{r-1}}{(\alpha + \beta + n + r - 2)^{n+r-2}}.$$

Lorsque $\alpha > 0$, $\beta > 0$, l'expression

$$(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)^\alpha [(1-\xi_1)(1-\xi_2)\ldots(1-\xi_n)]^\beta \prod_{(r,s)} (\xi_r - \xi_s)^2$$
$$(\text{où } r, s = 1, 2, \ldots, n, \ r \gtrless s)$$

devient maximée quand on fait

$$\xi_1 = x_1, \ \xi_2 = x_2, \ \ldots, \ \xi_n = x_n.$$

Les formules relatives aux intégrales $I_{m,n}$ donnent les coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes F_n; *G. Darboux*[4]) a montré que toute fonction continue, univoque et finie à l'intérieur d'une ellipse admettait un tel développement et il a été conduit à associer aux fonctions $F_n(x)$, comme cela arrive pour les fonctions X_n, une fonction de seconde espèce $Q_n(y)$ déduite du développement de

$$\frac{1}{x-y} = \sum \frac{F_n(x) Q_n(y)}{J_n},$$

J_n étant une constante convenablement déterminée; Q_0 a la valeur

---

2) *Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 112.*

3) *C. R. Acad. sc. Paris. 100 (1885), p. 620/2.*

4) *Approximation des fonctions de très grands nombres [J. math. pures appl. (3) 4 (1878), p. 5/56, 377/416].*

remarquable

$$Q_0 = F\left(\gamma,\ 1,\ \alpha + 1,\ \frac{1}{y}\right).$$

P. L. Čebyšëv[5]), dans ses travaux „sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro", introduit les polynomes de Jacobi en prenant comme fonction génératrice

$$\frac{\left(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + x^2}\right)^{\lambda} \left(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + x^2}\right)^{\mu}}{\sqrt{1 - 2sx + x^2}}.$$

Il applique ces fonctions à la détermination du polynome

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n$$

qui, variant toujours dans le même sens quand x varie de -1 à $+1$, diffère, entre ces limites, aussi peu que possible[6]) de zéro.

P. Appell[7]) a fait le calcul des coefficients pour le développement de la fonction de *C. F. Gauss*

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x),$$

en série de polynomes de Jacobi

$$X_m = F(\alpha + \beta + m,\ -m,\ \gamma,\ x)$$

où m est entier positif, en utilisant une formule générale[8]) qui exprime au moyen des intégrales eulériennes l'intégrale définie

$$I = \int_0^1 x^{\gamma - 1}(1 - x)^{\alpha + \beta - \gamma} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\, F(\alpha + n,\ \beta - n,\ \gamma,\ x)\, dx,$$

où n est une constante quelconque non nécessairement entière. Il obtient la formule

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m \frac{\alpha + \beta + 2m}{(\alpha + m)(\beta + m)} \cdot \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)\ldots(\alpha + \beta + m - 1)}{m!} \cdot X_m.$$

Dans cet ordre d'idées, posant

$$F_m = F(a + m,\ -m,\ b,\ x),$$

où m n'est plus entier, *P. Appell*[9]) calcule l'intégrale

$$I_{m,m'} = \int_0^1 x^{b-1}(1 - x)^{a-b} F_m F_{m'}\, da\, db$$

$$= \frac{1}{(m - m')(a + m + m')} \frac{\pi \Gamma^2(b)}{\sin(b - a)\pi} \frac{1}{\Gamma(-m')\Gamma(-m)\Gamma(a + m)\Gamma(a + m')} [\varphi(m) - \varphi(m')]$$

5) *Zapiski Akad. nauk 22 I (1873), Priloženie (supplément), mém. n° 1, p. 1/32 [1872]; J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 319; Œuvres, publ. par *A. A. Markov* et *N. J. Sonin* 2, S^t^ Pétersbourg 1907, p. 189/215.*

6) **J. Bertrand,* Traité de calcul différentiel et de calcul intégral 1, Paris 1864, p. 512/21.*

7) *C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 31.*

8) **P. Appell,* C. R. Acad. sc. Paris 87 (1878), p. 874.*

9) *C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 31/3.*

où

$$\varphi(m) = \frac{\Gamma(-m)\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)\Gamma(b-a-m)}; \quad b > 0, \; 1 > b - a > 0.$$

Cette intégrale est nulle quand m et m' sont deux racines distinctes de l'équation transcendante

$$\varphi(m) = k,$$

où k est une constante. Quand $m = m'$ elle prend une valeur que l'on calcule aisément.

Ces résultats ont été rattachés par *Vera Myller-Lebedev*[10]) à la théorie des équations intégrales d'où l'on déduit le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions F_m. Une extension de la formule donnant l'intégrale I a été indiquée par *O. Callandreau*[11]).

N. Krylov[12]) formant a priori un développement de convergence uniforme et absolue montre qu'il peut s'identifier à des développements procédant suivant les polynomes hypergéométriques et précise les conditions dans lesquelles une fonction admet un tel développement.

G. Darboux[4]) a donné pour les grandes valeurs de m une formule d'approximation du polynome F_m de Jacobi.

Il trouve, lorsque x est compris entre zéro et un, les expressions approchées n'ayant pas lieu pourtant dans le voisinage de zéro et de un,

$$X_m \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}} m^{\frac{1}{2}-\gamma} (\sin\varphi)^{\frac{1}{2}-\gamma} (\cos\varphi)^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \cos\left[(2m+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{m}(2\gamma-1)\right] + \frac{p_1}{m^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

où p_1 est fini, x étant égal à $\sin^2\varphi$.

Si x est imaginaire ou non compris entre zéro et un on a en posant

$$\xi = 1 - 2x + \sqrt{ux^2 - ux}$$

une expression de la forme

$$X_n \sim \varphi(\xi) n^{\frac{1}{2}-\gamma} \xi^n (1+\varepsilon),$$

$\varphi(\xi)$ étant indépendant de n, et ε de l'ordre de $\frac{1}{n}\cdot$

Dans une note sur le développement de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$ en fraction continue, *E. N. Laguerre*[13]) écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

φ_n et f_n étant des polynomes de degrés n en x, et la notation $\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$

10) *Math. Ann. 70 (1911), p. 87/93; C. R. Acad. sc. Paris 149 (1909), p. 561.*

11) *C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 90.*

12) *Id. 150 (1910), p. 316.*

13) *Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 36; Œuvres 1, Paris 1898, p. 344.*

indiquant une série procédant suivant les puissances décroissantes de x en commençant par le terme en $\frac{1}{x^{2n+1}}$. On a

$$\varphi_n(x) = (-1)^n f_n(-x),$$

et

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^{n+\omega}(x-1)^{n-\omega}],$$

expression qui se ramène à un polynome de Jacobi, et qui, pour $\omega = 0$, se réduit, à un facteur constant près, au polynome X_n de Legendre. La fonction f_n se rattache d'ailleurs au polynome X_n par la formule

$$f_n = \frac{\Gamma(\omega+n-1)}{\Gamma(\omega)}(x+1)^{-\omega}\int_{-1}^{x}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz$$

où l'on suppose $\omega > 0$, formule qui permet de calculer les coefficients du développement de $(x-z)^{\omega-1}$ en série[14]) de polynomes $X_n(z)$. On a enfin, d'après *E. N. Laguerre*,

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}}{(\omega+n+1)(1+\sqrt{x})^{\omega}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+n+1},$$

égalité qui pour $\omega = 0$ donne une formule relative aux polynomes X_n.

Ch. Hermite[15]) a étudié les polynomes

$$U_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

qui possèdent la propriété que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} U_m U_n \, dx$$

est nulle pour m distinct de n; elle vaut

$$2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 2n\sqrt{\pi},$$

pour $m = n$.

A. A. Markov[16]) a étudié les racines de l'équation $U_n = 0$ qui sont toutes réelles. Les polynomes U_n peuvent être regardés comme limites de certains polynomes de Jacobi. Faisant, en effet, dans le

---

14) *_E. N. Laguerre_, Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 36; Œuvres 1, Paris 1898, p. 344; *G. Bauer*, Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variabeln [J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 101].*

15) *Sur un nouveau développement en série des fonctions [C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 93/7, 266/73; Œuvres, publ. par *É. Picard* 2, Paris 1908, p. 293].*

16) *Sur les racines de l'équation

$$e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$$

[Bull. Acad. sc. Pétersb. (5) 9 (1898), p. 435/46].*

polynome F_n de Jacobi

$$\alpha = 2\gamma, \quad x = \frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{\gamma}}, \quad 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{\gamma}},$$

et multipliant le polynome obtenu par un facteur constant convenablement choisi, on voit qu'il se réduit au polynome d'Hermite $U_n(z)$ pour $\gamma = \infty$.

Le polynome d'Hermite dans lequel on remplace x par $-\frac{x}{2}$,

$$V_n(x) = U_n\left(-\frac{x}{2}\right),$$

possède cette propriété que son carré symbolique

$$V_n[V_n(x)]$$

obtenu en remplaçant dans $V_n(x)$ chaque puissance x^k par le polynome $V_k(x)$ est égal à[17])

$$2^{\frac{n}{2}} V_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

On a

$$\frac{dV_n}{dx} = n V_{n-1};$$

cette propriété fait rentrer les polynomes V_n dans la classe de polynomes étudiés par *P. Appell.* Les développements en séries procédant suivant ces polynomes ont fait l'objet d'un mémoire de *G. H. Halphen*[18]); ces mêmes polynomes d'Hermite ont été rencontrés par *E. N. Laguerre*[19]) dans un article relatif à l'intégrale

$$\int z^n e^{-\frac{1}{2}z^2 + zx} dz.$$

Dans l'étude de l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

E. N. Laguerre[20]) a de même développé les propriétés du polynome

$$f(x) = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^x)$$

qui peut également être considéré comme limite du polynome F_n de Jacobi. Ces divers polynomes de Jacobi, Hermite, Laguerre vérifient

17) $_*$*P. Appell,* Sur une classe de polynomes [Ann. Éc. Norm. (2) 9 (1880), p. 119/44].*

18) $_*$C. R. Acad. sc. Paris 93 (1881), p. 781, 833; Bull. sc. math. (2) 5 (1881), p. 462.*

19) $_*$Bull. Soc. math. France 7 (1878/9), p. 12 [1878]; Œuvres 1, Paris 1898, p. 415.*

20) $_*$Bull. Soc. math. France 7 (1878/9), p. 72; Œuvres 1, Paris 1898, p. 428.*

une équation différentielle du second ordre qui est, soit l'équation même de la série hypergéométrique, soit une équation qui s'en déduit comme cas limite.

O. Blumenthal [21]) donne une généralisation des polynomes de *E. N. Laguerre*, par l'introduction de deux paramètres.

Vera Myller-Lebedev [22]) a considéré les polynomes d'Hermite sous le point de vue des équations intégrales et déterminé ainsi les conditions de développement d'une fonction en série de la forme

$$\sum_{(n)} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} U_n(x).$$

Elle considère, sous le même point de vue, les polynomes de *E. N. Laguerre* [20]).

H. Galbrun [23]) a établi que toute fonction de la variable réelle x, continue dans un intervalle (a, b), avec un nombre fini de maximés et de minimés, peut être représentée dans cet intervalle par une série de polynomes U_n de *Ch. Hermite.*

Comme on l'a vu au n° **35** de l'article précédent, une généralisation naturelle des polynomes de Legendre est fournie par les polynomes $C_\nu^n(x)$ formant les coefficients de α^n dans le développement

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\alpha^n C_\nu^n(x),$$

et par ceux qui résultent du développement de

$$\log_e(1-2\alpha x+\alpha^2).$$

Les principaux travaux pour l'étude des fonctions $C_\nu^n(x)$ sont dans *L. Gegenbauer* [24]) qui a déjà été partiellement cité.

On a indiqué au n° **45** les principales propriétés de ces fonctions. On peut développer une fonction $f(x)$ en série de polynomes

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n C_n^\nu(x),$$

où la série est convergente dans une ellipse ayant pour foyers les points d'affixes -1, $+1$ [25]).

21) *Diss. Göttingue 1898.*

22) *Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwickelungen [Math. Ann 64 (1907), p. 388].*

23) *Bull. Soc. math. France 41 (1913), p. 24/47.*

24) *Denkschr. Akad. Wien (math.) 48 (1884), p. 292/302; Sitzgsb. Akad. Wien 70 II (1874), p. 6, 433/43; 75 II (1877), p. 891/6, 901; 97 IIª (1888), p. 259/316; 102 IIª (1893), p. 942; Rend. Circ. mat. Palermo 12 (1898), p. 22; 13 (1899), p. 92.*

25) *Sitzgsb. Akad. Wien 70 II (1874), p. 433/43.*

Ce polynome $C_n^\nu(x)$ s'exprime à l'aide de la fonction de Gauss[26]) par la formule

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\nu)} F\left(-n,\ n+2\nu,\ \frac{2\nu+1}{2},\ \frac{1-x}{2}\right);$$

il se présente[27]) comme le numérateur de la réduite de rang n du développement en fraction continue de $x^{-1}F(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2})$; il admet un théorème d'addition donnant

$$C_n^\nu(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\,\sqrt{x_1{}^2-1}\,\cos\varphi)$$

par une formule analogue à celle qu'on a trouvée pour le polynome de Legendre[28]).

La démonstration est rattachée à celle qui a été donnée pour les polynomes de Legendre par *G. Plarr*[29]).

A la suite d'une note de *G. Morera*[30]) sur les polynomes de Legendre, *L. Gegenbauer*[31]) a indiqué l'extension suivante aux fonctions $C_n^\nu(x)$ des formules données par *G. Morera*:

$$xC_{n-1}^{\nu+1} - C_{n-2}^{\nu+1} - \frac{n}{2\nu}C_n^\nu = 0,$$

$$C_n^{\nu+1} - xC_{n-1}^{\nu+1} = \frac{n+2\nu}{2\nu}C_n^\nu,$$

$$nC_n^\nu = (n-1+2\nu)\,xC_{n-1}^\nu - 2\nu(1-x^2)\,C_{n-2}^{\nu+1}.$$

L. Gegenbauer a de même généralisé un théorème donné par *P. Paci*[32]) pour les polynomes de Legendre en établissant la formule[33])

$$\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi C_n^\nu(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) f(\cos\chi)\sin^{2\nu-1}\chi\,\sin^{2\nu+\mu}\varphi\,d\chi\,d\varphi = 0.$$

Ces mêmes polynomes C_n^ν ont été étudiés par *A. Tonelli*[34]).

F. Tisserand[35]) a étudié le polynome $P^{(N)}(p, z)$, de degré N en z, formant le coefficient de θ^N dans le développement de

$$(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{1-p}{2}}$$

---

26) *Cf. *H. E. Heine,* Kugelfunctionen, (1re éd.) Berlin 1861, p. 169; (2e éd.) 1, p. 298.*

27) *Sitzgsb. Akad. Wien 75 II (1877), p. 891/6, 901.*

28) *Id. 102 IIa (1893), p. 942.*

29) *Trans. R. Soc. Edinb. 36 (1892), p. 19/43.*

30) *Rend. Circ. mat. Palermo 11 (1897), p. 176/80.*

31) *Id. 12 (1898), p. 22.*

32) *Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 7 II (1898), p. 131/8.*

33) *Rend. Circ. mat. Palermo 13 (1899), p. 92.*

34) *Nachr. Ges Gött. 1875, p. 527.*

35) *C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 815, 880.*

suivant les puissances positives de θ; ces polynomes ont aussi fait l'objet des recherches de *Jean Escary*[36]) et de *H. Frombeck*[37]).

R. Most[38]) calcule les coefficients du développement en séries de fonctions C_n^ν d'une fonction y vérifiant une équation de la forme

$$\alpha(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+\beta x\frac{dy}{dx}+\gamma y=0.$$

P. Appell[39]) a envisagé les polynomes

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^n(1-x^2)^n]$$

qui vérifient une équation différentielle linéaire du troisième ordre, rattachée à la série hypergéométrique du troisième ordre de *Th. Clausen*[40]).

O. Blumenthal[41]), après avoir étudié dans des cas généraux l'intégration asymptotique des équations différentielles linéaires, fait une application étendue de ces résultats aux équations différentielles des fonctions sphériques. Il emploie une méthode de passage par le domaine complexe qui paraît nouvelle et qui fournit un moyen simple et efficace pour étudier la variation des fonctions sphériques dans les intervalles de leurs zéros. Il évalue, en particulier, l'erreur commise quand on remplace une fonction sphérique par sa valeur asymptotique et il donne une application précise à la fonction P_{12}.

B. Hansted[42]) cherche les polynomes P_n et Q_n, intégrales particulières de l'équation

$$(x-a)(x-b)y''+[2x+(a-b)y']-n(n+1)y=0$$

et *J. Deruyts*[43]) étudie les polynomes définis par

$$P_n=\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-p}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-q}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n+p-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+q-1}\right];$$

cette équation se ramène à celle de la série hypergéométrique et ces polynomes aux polynomes de Jacobi par un changement linéaire de variable.

---

36) *J. math. pures appl. (3) 5 (1879), p. 47/68.*

37) *Sitzgsb. Akad. Wien 70 II (1874), p. 67.*

38) *J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 163.*

39) *Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 71.*

40) *J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 89.*

41) *Über asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen mit Anwendung einer asymptotischen Theorie der Kugelfunktionen [Archiv Math. Phys. (3) 19 (1912), p. 136/74].*

42) *Jornal sciencias math. astron. (Coïmbre) 4 (1882), p. 53/61.*

43) *Mém. Soc. sc. Liége (2) 14 (1888), mém. n° 2, p. 3/15 [1888].*

Enfin rappelons que *S. Pincherle*[44]) a étudié les fonctions naissant du développement de

$$\frac{1}{\sqrt{t^3 - 3tx + x^2}}.$$

F. Didon[45]) considère des polynomes à une variable dépendant de deux indices, tels que

$$\int_0^1 U_{\mu,\lambda} V_{\nu,\lambda}\, dx = 0 \qquad (\mu \gtrless \nu).$$

Il montre que ces polynomes vérifient des équations différentielles du type suivant: la première, du troisième ordre, est satisfaite par deux polynomes; la seconde, du quatrième ordre, par trois polynomes, et ainsi de suite. Il ajoute que ces équations sont des cas particuliers d'équations plus générales données par *Ch. Hermite*[46]).

En étudiant l'expression de la force qui s'exerce entre deux sphères électrisées, ou entre une sphère et un plan, *A. Guillet* et *M. Aubert* ont rencontré des suites de polynomes qui se rattachent aux fonctions sphériques. D'abord, dans le cas sphère et plan, ils introduisent[47]) les polynomes $U_n(u)$ ayant pour fonction génératrice

$$\frac{1}{1 - 2uz + z^2};$$

dans le cas de deux sphères[48]), apparaissent des familles de polynomes qui sont exprimables à l'aide des mêmes polynomes $U_n(u)$ et que les auteurs proposent d'appeler *fonctions électro-sphériques.* L'intérêt mathématique que présentent ces recherches est que l'on y rencontre des développements procédant suivant les inverses des fonctions sphériques et des dérivées de ces inverses[49]). Ainsi, dans le cas sphère-plan, l'expression de la force dépend de la série

$$\frac{d\frac{1}{U_1}}{du} + \frac{d\frac{1}{U_2}}{du} + \cdots + \frac{d\frac{1}{U_n}}{du} + \cdots\cdots.^*$$

2. $_*$**Fonctions de Laplace de n variables. Fonctions harmoniques généralisées.** Comme il a déjà été indiqué au n° **36** de l'article II 28, une première sorte de généralisation consiste à étudier les fonctions qui naissent de la considération de l'attraction, du potentiel et

---

44) $_*$Memorie Ist. Bologna (5) 1 (1889/90), p. 337.*

45) $_*$Ann. Éc. Norm. (1) 6 (1869), p. 111.*

46) $_*$Cours (autographié) professé à l'École polytechnique en 1868 (2e année), p. 19.*

47) $_*$*A. Guillet* et *M. Aubert*, C. R. Acad. sc. Paris 155 (1912), p. 139, 204.*

48) $_*$Id. 155 (1912), p. 708, 820; 157 (1913), p. 367/70.*

49) $_*$*P. Appell,* C. R. Acad. sc. Paris 157 (1913), p. 5/7.*

des fonctions harmoniques dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions. On arrive ainsi à des fonctions sphériques de n variables.

Déjà en 1835, dans un mémoire „On the determination of the attraction of ellipsoïds of variable densities", *G. Green*[50]) considère des fonctions se rattachant au développement de

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2+u^2}},$$

où u est une variable auxiliaire, et il indique que ces fonctions comprennent comme cas particuliers les fonctions sphériques.

D'une façon générale, il considère des intégrales d'ordre s de la forme

$$V=\int\frac{\varrho' dx_1' dx_2' \cdots dx_s'}{[(x_1-x_1')^2+\cdots(x_s-x_s')^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

et il montre que V vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{n-s}{u}\frac{\partial V}{\partial u}=0.$$

Il étudie ensuite des fonctions analogues aux fonctions sphériques.

Le point de vue de *G. Green* a été développé par *M. J. M. Hill*[51]). En partant de l'équation

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}=0,$$

M. J. M. Hill prend des coordonnées polaires $r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{i-1}$; il transforme l'équation $\Delta U=0$ dans ce système de coordonnées, puis il cherche une solution de la forme

$$r^p(\sin\theta_1)^{p_1}\Theta_1\ldots(\sin\theta_m)^{p_m}\Theta_m\ldots(\sin\theta_{i-2})^{p_{i-2}}\Theta_{i-2}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}p_{i-2}\theta_{i-1},$$

où Θ_m dépend uniquement de θ_m et où la suite

$$p_1, p_2, \cdots, p_m$$

est formée d'entiers non croissants.

A. Cayley[52]) dans un article „sur les fonctions de Laplace" étend à un nombre quelconque de variables la théorie des fonctions de Laplace en se fondant sur le théorème suivant:

Les coefficients

$$l, m, \ldots, l', m', \ldots$$

50) *Trans. Cambr. philos. Soc. 5 (1832/4), éd. 1835, p. 395/429; Papers, publ. par *N. M. Ferrers*, Londres 1871, p. 187/222.*

51) *Trans. Cambr. philos. Soc. 13 (1879/82), éd. 1883, p. 273.*

52) *J. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 275/80; Papers 1, Cambridge 1889, p. 397/401.*

étant assujettis aux conditions

$$l^2 + m^2 + \cdots = 0,$$
$$l'^2 + m'^2 + \cdots = 0$$

et les limites de l'intégration étant données par

$$x^2 + y^2 + \cdots = 1,$$

on aura, pour toutes les valeurs entières et positives de s et s',

$$I_{s,s'} = \int (lx + my + \cdots)^s (l'x + m'y + \cdots)^{s'} dx\, dy \cdots = 0$$

tant que s est différent de s', et

$$I_{s\,s'} = (ll' + mm' + \cdots) \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\Gamma(s+1)}{2^s\Gamma(\frac{1}{2}n + s + 1)}$$

pour $s' = s$, n dénotant le nombre des variables.

A l'aide d'un calcul symbolique de dérivations, il déduit de là ce nouveau théorème:

V_s et $W_{s'}$ étant les fonctions entières et homogènes, de degrés s et s', les plus générales qui satisfassent à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cdots = 0,$$

on aura dans les mêmes limites d'intégration

$$\int V_s W_{s'} dx\, dy \cdots = 0$$

tant que s diffère de s'. Soient

$$Q_s = \frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)} \left(x \frac{d}{da} + y \frac{d}{db} + \cdots\right)^s (a^2 + b^2 + \cdots)^{-\frac{1}{2}n+1}$$

$$M_s = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n - 1)(n + 2s)(n + 2s - 1)},$$

on a

$$\int Q_s W_s dx\, dy \cdots = M_s W_s'$$

W_s' étant ce que devient W_s quand on y remplace $x, y, \ldots$ par $a, b, \ldots$.

Dans un mémoire „on potentials", *A. Cayley*[53]) considère des intégrales multiples de la forme

$$\int \frac{\varrho\, d\varpi}{[(a-x)^2 + \cdots + (c-z)^2 + (e-w)^2]^{\frac{1}{2}s+q}},$$

où le nombre des variables $x, \ldots, z, w$ est $s + 1$ ainsi que le nombre des paramètres $a, \ldots, c, e$; ϱ et $d\varpi$ dépendent uniquement des variables $x, \ldots, z, w$.

53) *Philos. Trans. London 165 II (1876), p. 675/774; Papers 9, Cambridge 1896, p. 318/423.*

Une intégrale de cette forme, étendue à une multiplicité quelconque, est *prépotentielle* quand q est quelconque; elle est *potentielle* quand $q = -\frac{1}{2}$.

En considérant $x, \ldots, z, w$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $s+1$ dimensions, il étudie trois cas principaux **A**, **C**, **D** et un quatrième intermédiaire **B**.

Cas **A**. *Prépotentiel plan;* q étant quelconque, on suppose $w = 0$, l'intégrale étant

$$\int \frac{\varrho\, dx \ldots dz}{[(a-x)^2 + \cdots + (c-z)^2 + e^2]^{\frac{1}{2}s+q}}$$

Cas **B**. *Potentiel plan.* Cas particulier $q = -\frac{1}{2}$.

Cas **C**. *Potentiel de surface courbe;* $q = -\frac{1}{2}$.

Cas **D**. *Potentiel de volume;* $q = -\frac{1}{2}$.

Dans le cas **A** le prépotentiel vérifie l'équation

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \cdots + \frac{d^2}{dc^2} + \frac{d^2}{de^2} + \frac{2q+1}{e}\frac{d}{de}\right) V = 0$$

indiquée par *G. Green*[54]), équation qui pour $q = -\frac{1}{2}$ (cas **B**) devient l'équation de Laplace généralisée.

G. Green intègre l'équation du prépotentiel par des fonctions qui sont analogues aux fonctions de Laplace et que *A. Cayley* propose d'appeler „greenians". *A. Cayley* étudie ces fonctions.

Dans un ordre d'idées analogues, *C. Neumann*[55]) étend le théorème de Green aux fonctions de $n+1$ variables

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$$

vérifiant l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_0{}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0,$$

à laquelle satisfait en particulier la fonction

$$T = \frac{1}{[(x_0-a_0)^2 + (x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Posons

$$x_i = \varrho\, \Phi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \varrho\, \Phi_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

avec

$$\Phi_0{}^2 + \Phi_1{}^2 + \cdots + \Phi_n{}^2 = 1.$$

Soit F une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (et non de ϱ); formons le

54) *Trans. Cambr. philos. Soc. 5 (1832/4), éd. 1835, p. 395/429; Papers, publ. par *N. M. Ferrers,* Londres 1871, p. 187/222.*

55) *Z. Math. Phys. 12 (1867), p. 97.*

produit

$$\varrho^p \cdot F,$$

où p est un nombre quelconque donné, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Une fonction F vérifiant l'équation

$$\Delta(\varrho^p \cdot F) = 0$$

est dite fonction ultrasphérique (Ultrakugelfunction) d'ordre p. Si, par analogie, on pose

$$a_i = r\,\Phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

la fonction T peut être développée sous les deux formes

$$T = \frac{1}{r^{n-1}}\left[\Theta^{(0)} + \frac{\varrho}{r}\,\Theta^{(1)} + \frac{\varrho^2}{r^2}\,\Theta^{(2)} + \cdots\right],$$

$$T = \frac{1}{\varrho^{n-1}}\left[\Theta^{(0)} + \frac{r}{\varrho}\,\Theta^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho^2}\,\Theta^{(2)} + \cdots\right],$$

où les coefficients Θ sont les mêmes dans les deux développements. Le coefficient

$$\Theta^{(p)} = \Theta^{(p)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

est une fonction ultrasphérique d'ordre p aussi bien par rapport aux φ qu'aux α.

Si

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \quad G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

sont deux fonctions ultrasphériques d'ordres *différents*, l'intégrale n-uple

$$\int F \cdot G \cdot D \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

étendue au domaine limite $\varrho = 1$ est *nulle*, D désignant le déterminant fonctionnel des x_i par rapport à $\varrho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Soit $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ une fonction d'ordre entier p, positif ou nul, finie ainsi que ses dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sur l'hypersphère $\varrho = 1$, on a

$$\int F \cdot \Theta^{(p)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \cdot D \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n = \frac{n^2 - 1}{2p + n - 1} N F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

N est une constante dépendant uniquement de n et qui a pour valeur

$$\text{pour } n \text{ pair} \qquad N = \frac{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n+1)},$$

$$\text{pour } n \text{ impair} \qquad N = \frac{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n+1)}.$$

F. G. Mehler[56]) en citant le mémoire de *A. Cayley*[57]) indique que les résultats de ce mémoire ont été établis par une tout autre voie par *H. E. Heine*[58]). Il part de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{n+1}^2} = 0$$

dans l'espace à $n+1$ dimensions; il prend des coordonnées polaires $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Il forme ensuite l'équation

$$m(m+n-1)X_m + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{\sin^{n-s}\varphi_s} \frac{\partial}{\partial \varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s \frac{\partial X_m}{\partial \varphi_s}\right) = 0;$$

toute solution Z_m de cette équation, fonction entière d'ordre m de $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \ldots$, est une fonction de Laplace d'ordre n. Une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ peut, sous des conditions indiquées, être représentée par une série de la forme $Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots$. *G. Mehler* indique que lorsque le nombre des variables devient infini, la fonction à développer ne dépendant que d'un nombre fini de variables déterminées, ces résultats rentrent dans ceux que *Ch. Hermite*[59]) a donnés sur les polynomes résultant de la dérivation d'exponentielles dont l'exposant est une forme quadratique des variables.

M. Bôcher[60]) expose la généralisation de l'équation de Lamé, d'après *F. Klein*, l'application aux problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel dans des espaces limités par des cyclides homofocales, et l'extension des résultats à l'espace à n dimensions.

Dans toutes les recherches précédentes les fonctions considérées vérifient des équations aux dérivées partielles du second ordre, principalement l'équation de Laplace généralisée et celles qui s'en déduisent par des particularisations. Mais on peut aussi chercher la généralisation des fonctions sphériques en augmentant l'ordre des équations différentielles. *V. Giulotto*[61]) considère des fonctions harmoniques d'ordre supérieur de trois variables x, y, z. Une fonction harmonique du premier ordre vérifie l'équation

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

---

56) *J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 161.*

57) *Philos. Trans. London 165 (1875), p. 675/774; Papers 9, Cambridge 1896, p. 318/423.*

58) *J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 110/41.*

59) *C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 93/100, 266/73; Œuvres, publ. par *É. Picard* 2, Paris 1908, p. 293.*

60) *Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, p. 113.*

61) *Rend. Circ. mat. Palermo 17 (1903), p. 1/43.*

Une fonction sera harmonique du second ordre si elle vérifie l'équation

$$\Delta_2[\Delta_2 F] = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2{}^2 F = 0.$$

En général une fonction harmonique d'ordre q vérifie une équation qui s'écrit symboliquement

$$\Delta_2^q F = 0,$$

l'opération Δ_2 étant répétée q fois.

V. Giulotto détermine d'abord les polynomes homogènes $f_n(x, y, z)$ de degré n vérifiant l'équation

$$\Delta_2^q f_n = 0,$$

et il donne leur nombre. Il montre que

$$F = r^{-(2n+3-2q)} f_n,$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

est une autre fonction q harmonique et homogène. Il en est de même des dérivées partielles de F. On voit, par ce procédé, que

$$f_n = \frac{\partial^n r^{2q-3}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} r^{2n+3-2q}, \qquad (\alpha + \beta + \gamma = n)$$

est une fonction q harmonique. Quand on tient compte de la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

les fonctions $f_n(x, y, z)$ considérées deviennent des fonctions sphériques d'ordre n et d'indice q.

En particulier, en faisant

$$\alpha = n, \beta = 0, \gamma = 0,$$

et posant

$$y^2 + z^2 = \lambda^2,$$

on a la fonction

$$X_n^q = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n (x^2 + \lambda^2)^{\frac{2q-3}{2}}}{\partial x^n}$$

d'où on doit éliminer λ à l'aide de la relation

$$x^2 + \lambda^2 = 1.$$

En changeant, dans $(x^2 + \lambda^2)^{\frac{2q-3}{2}}$, x en $x - \alpha$, on a

$$(\lambda^2 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-3}{2}} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-3}{2}},$$

et, en développant suivant les puissances de α, le coefficient de α^n sera précisément le polynome X_n^q.

Parmi les nombreuses formules données par *V. Giulotto* signalons

1°) l'extension à $X_n{}^q$ de l'expression du polynome $X_n{}^1$ de Legendre sous forme d'intégrale définie, 2°) les formules qui donnent les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx \begin{cases} = 0 & \text{pour } n - m > 2q - 2 \\ = \dfrac{2(3-2q)\cdots(2m+1-2q)}{(2q-1)(2q+1)\cdots(2q+2m-1)} & \text{pour } n - m = 2q - 2 \end{cases}$$

3°) celle qui donne la fonction Q_n^q de seconde espèce analogue à celle de *C. Neumann.**

3. *Polynomes d'Hermite et analogues. *Polynomes d'Hermite.* Se proposant d'étendre à des fonctions de deux variables la définition et les propriétés des polynomes X_n, *Ch. Hermite*[62]) s'est occupé d'étudier, pour le cas de deux variables, les formules analogues à

$$(1) \qquad (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{(n)} a^n X_n$$

$$(2) \qquad (1 - 2ax + a^2)^{-1} = \sum_{(n)} a^n \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour cela, il considère deux groupes de deux développements obtenus en partant d'une forme quadratique de deux variables et de la forme adjointe. Le premier groupe, analogue à (1), est

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \sum\limits_{(m,n)} a^m b^n V_{m,n}, \\ [(1 - ax - by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum\limits_{(m,n)} a^m b^n U_{m,n}; \end{cases}$$

le deuxième, analogue à (2), est

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum\limits_{(m,n)} a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}, \\ (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-1} = \sum\limits_{(m,n)} a^m b^n \mathfrak{U}_{m,n}. \end{cases}$$

Nous donnerons ici des détails surtout sur le groupe I. D'abord l'analogie des polynomes $U_{m,n}$ avec les polynomes de Legendre résulte de ce que ces polynomes peuvent s'écrire

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}$$

et qu'ils apparaissent comme coefficients de $a^m b^n$ dans le développement en série de

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - ax - by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)}},$$

de même que les polynomes X_n de Legendre apparaissent comme coefficients de a^n dans le développement de

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - ax)^2 + a^2(1 - x^2)}}.$$

Pour obtenir ces coefficients sous forme de dérivées, *Ch. Hermite* donne une forme particulière de la série de Lagrange étendue à plusieurs variables.

Ces polynomes présentent les propriétés essentielles suivantes: l'intégrale double

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint U_{m,n}\, U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

étendue au cercle (C)

$$1 - x^2 - y^2 \geqq 0$$

est nulle quand les deux polynomes sont de degrés différents; elle a une valeur connue quand

$$m + n = \mu + \nu.$$

Ch. Hermite[62]) a montré que les courbes ayant pour équation

$$U_{m,n} = 0$$

sont, abstraction faite des branches qui peuvent être confondues avec l'un ou l'autre des axes, situées entièrement dans le cercle (C).

La propriété indiquée comme probable[63]) que tout rayon vecteur issu de l'origine coupe la courbe en $m+n$ points réels, et vérifiée pour $m + n \leqq 4$, a fait l'objet des recherches de *W. Tramm*[64]) et a été démontrée par *Ch. Willigens*[65]).

Ces polynomes d'Hermite vérifient deux équations différentielles simultanées aux dérivées partielles[62])

$$\begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + (n-2)x\dfrac{\partial U}{\partial x} - (m+1)y\dfrac{\partial U}{\partial y} + (m+n)(m+1)\,U = 0 \\ (1-y^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} + (m-2)y\dfrac{\partial U}{\partial y} - (n+1)x\dfrac{\partial U}{\partial x} + (m+n)(n+1)\,U = 0 \end{cases}$$

analogues à l'équation du polynome X_n.

Ils se déduisent du polynome de Legendre par la formule[66])

$$\sum_{(m+n=N)} \cos^m\alpha \sin^n\alpha\, U_{m,n}(x,y) = [1-(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2]^{\frac{N}{2}} X_N\left[\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sqrt{1-(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}}\right]$$

62) *C. R. Acad. sc. Paris 60 (1865), p. 370, 432, 461, 512; J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 294; Ann. Éc. Norm. (1) 2 (1865), p. 49; Œuvres, publ. par *É. Picard* 2, Paris 1908, p. 309, 313, 319.*

63) **P. Appell,* Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique [Archiv Math. Phys. (2) 4 (1886), p. 21.*

64) *Diss. Zurich 1908.*

65) *Nouv. Ann. math. (4) 11 (1911), p. 97.*

66) **P. Appell,* Les polynomes d'Hermite rattachés aux polynomes de Legendre [Annaes da academia polytechnica do Porto 5 (1910), p. 65].*

qui a lieu quel que soit α, le deuxième membre étant rendu homogène en $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; on peut ainsi former tous les polynomes $U_{m,n}$ d'un degré donné

$$m + n = N$$

au moyen du polynome X_N de Legendre.

Si l'on emploie des coordonnées polaires r et θ, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} U_{m,n}\, d\theta$$

est nulle si m ou n est impair. Si m et n sont pairs, $m = 2p$, $n = 2q$, cette intégrale est un polynome de degré $p + q$ en $t = r^2$, identique. à un facteur constant près, au polynome[67])

$$\frac{d^{p+q}}{dt^{p+q}}\left[t^{p+q}(1-t)^{p+q}\right]$$

facilement réductible au polynome X_{p+q} de Legendre.

Pour calculer plus simplement les coefficients du développement d'une fonction en série de polynomes $U_{m,n}$, *Ch. Hermite* associe à ces polynomes les polynomes $V_{m,n}$ définis par la fonction génératrice

$$\frac{1}{1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2}$$

et tels que l'intégrale

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

étendue au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

est nulle tant que

$$(m-\mu)^2 + (n-\nu)^2 > 0,$$

et prend la valeur

$$\frac{\pi}{m+n+1} \cdot \frac{(m+n)!}{m!\, n!}$$

pour $m = \mu$ et $n = \nu$.

Ch. Hermite[62]) rattache le calcul des intégrales définies $I_{m,n}^{\mu,\nu}$ et $K_{m,n}^{\mu,\nu}$ à celui de deux intégrales

$$\iint \frac{dx\, dy}{P \cdot P'}, \qquad \iint \frac{dx\, dy}{P'\sqrt{Q}},$$

où

$$P = 1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2,$$
$$Q = (1 - ax - by)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2),$$

P' étant obtenu en remplaçant a et b par a' et b', et l'intégration

67) *P. Appell*, Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et les polynomes X_n de Legendre [Annaes da academia polytechnica do Porto 5 (1910), p. 209].*

étant étendue au champ

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Les fonction $\mathfrak{V}_{m,n}$ et $\mathfrak{Q}_{m,n}$ du groupe (II) possèdent des propriétés semblables et s'associent d'une façon analogue. Citons la formule

$$\mathfrak{V}_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+2n+1)}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}$$

qui, par la similitude de forme analytique, rapproche ces fonctions de celles qui donnent, d'après *C. G. J. Jacobi*,

$$\sin\left[(n+1)\arccos x\right] = \frac{(-1)^n(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

Les propriétés de ces polynomes et d'autres plus généraux ont fait l'objet de travaux étendus de *F. Didon*[68]).

F. Didon donne les développements de la fonction $U_{m,n}$ en somme de polynomes V, et de la fonction $V_{m,n}$ en somme de polynomes U. Il étudie de nouvelles fonctions U naissant du développement de

$$\left[(1-ax-by-cz-\cdots)^2-(a^2+b^2+c^2+\cdots)(x^2+y^2+z^2+\cdots-1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances entières et positives de $a, b, c, \ldots$, et il montre que ces fonctions sont des dérivées exactes,

$$\frac{1}{m!\,m'!\,m''!\cdots}\,\frac{1}{2^{m+m'+m''+\cdots}}\,\frac{\partial^{m+m'+m''+\cdots}(x^2+y^2+z^2+\cdots-1)^{m+m'+m''+\cdots}}{\partial x^m\,\partial y^{m'}\,\partial z^{m''}\cdots}$$

et qu'on peut leur associer les polynomes V naissant de la fonction

$$(1-2ax-2by-2cz-\cdots+a^2+b^2+c^2+\cdots)^{-\frac{\mu}{2}} = \sum_{(m,\,m',\,m'',\,\cdots)} a^m b^{m'} c^{m''}\cdots V_{m,m',m'',\cdots}.$$

Il forme des équations différentielles simultanées que vérifient ces divers polynomes: en particulier il forme et intègre celles des polynomes $V_{m,n}$ et il généralise les fonctions $\cos[n \arccos x]$ comme *Ch. Hermite* l'a fait pour $\sin[n \arccos x]$. Il considère des intégrales de la forme

$$\iint \frac{X_m(x)\,X_{n'}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy \qquad (1-x^2-y^2 \geqq 0),$$

où X_m et X_n sont deux polynomes de Legendre. Ces intégrales sont nulles quand $m \gtrless n$. Il étend cette propriété aux polynomes

$$\frac{d^\mu X_{n+\mu}}{dx^\mu}.$$

68) *Ann. Éc. Norm. (1) 5 (1868), p. 229/310; (1) 6 (1869), p. 7/26; (1) 7 (1870), p. 247/68; C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 749.*

Ces recherches de *Ch. Hermite* et de *F. Didon* peuvent être rattachées aux recherches précédemment citées sur les fonctions harmoniques dans l'espace à $n+1$ dimensions. Les fonctions $V_{m,n}$ et $U_{m,n}$ de *Ch. Hermite* et les fonctions plus générales de *F. Didon* apparaissent alors comme des cas particuliers d'un type général de fonctions sphériques. C'est ce que *P. Appell*[69]) a établi par les considérations suivantes. On sait que la fonction

$$T_{n+1,n+1} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2)^{\frac{1-n}{2}}$$

vérifie l'équation

$$\text{(L)} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_{n+1}^2} = 0.$$

Les dérivées partielles par rapport aux n premières variables

$$\frac{(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}\,\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\,T_{n+1,n+1}$$

vérifient également cette équation et, sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1,$$

elles deviennent des polynomes $V_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, définis par la fonction génératrice

$$(1 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 - \cdots - 2a_nx_n + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1-n}{2}}$$
$$= \sum_{(m_1,m_2,\cdots m_n)} a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}\,V_{m_1,m_2,\cdots m_n}.$$

La formule de Green généralisée donne alors le résultat suivant: Si V et V' sont deux de ces polynomes *de degrés différents* l'intégrale n^{uple}

$$I = \int_{(n)} \frac{VV'}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots x_n^2}}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

étendue au domaine $1 - x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_n^2 \geqq 0$ est *nulle*. Il peut se faire que certaines variables manquent dans V et V'. Si, par exemple, il manque les variables $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-s+1}$, au nombre de s, on peut d'abord intégrer par rapport à ces variables et on obtient la nouvelle intégrale $(n-s)^{\text{uple}}$

$$J = \int_{(n-s)} (1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-s}^2)^{\frac{s-1}{2}}\, VV' dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-s}$$

69) **P. Appell*, Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions [C. R. Acad. sc. Paris 156 (1913), p. 1423; Rend. Circ. mat. Palermo 36 (1913), p. 203/12]. Les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace [C. R. Acad. sc. Paris 156 (1913), p. 1582].*

étendue au domaine $1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-s}^2 \geqq 0$ qui est *nulle* quand V et V' sont de degrés différents. La valeur de cette intégrale quand V et V' sont de même degré a été donnée par *J. Kampe de Feriet*[70]. On peut associer à ces polynomes V des polynomes U définis par des dérivations et jouant à l'égard des polynomes généraux V le même rôle que les polynomes $U_{m,n}$ de *Ch. Hermite* à l'égard des polynomes $V_{m,n}$ de *F. Didon*. D'après *P. Appell*[69], ces polynomes adjoints sont des fonctions sphériques dérivant des potentiels $T_{n+1,s}$ définis comme il suit. Soit

$$\delta_p = \frac{a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{p,n+1}x_{n+1} + K_p}{\sqrt{a_{p,1}^2 + a_{p,2}^2 + \cdots + a_{p,n+1}^2}}$$

la distance d'un point quelconque de l'espace à $n+1$ dimensions à un hyperplan fixe P_p, la fonction

$$T_{n+1,s} = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_s^2)^{\frac{2-s}{2}},$$

où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ sont les distances du même point à s hyperplans $P_1, P_2, \ldots, P_s$, deux à deux rectangulaires, vérifie aussi l'équation (L) de Laplace étendue à l'espace à $n+1$ dimensions, à condition que s prenne l'une des valeurs $s = 2, 3, \ldots, n+1$. Il faut convenir que, pour $s = 2$, la fonction $T_{n+1,s}$ devient un logarithme

$$T_{n+1,2} = \log_e (\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

Avec ces notations, les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite sont des fonctions sphériques dérivées de $T_{4,3}$; les polynomes $\mathfrak{V}_{m,n}$ et $\mathfrak{U}_{m,n}$ d'Hermite des fonctions sphériques déduites de $T_{5,5}$ et $T_{5,4}$[71].

Par exemple, dans l'espace à quatre dimensions x, y, z, t, en appelant

$$\delta_1 = \frac{ax + by - 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \delta_2 = z, \quad \delta_3 = t$$

les distances d'un point quelconque aux trois hyperplans rectangulaires

$$ax + by - 1 = 0, \quad z = 0, \quad t = 0,$$

la fonction $T_{4,3}$ est, à un facteur constant près,

$$T_{4,3} = \frac{1}{\sqrt{(ax + by - 1)^2 + (a^2 + b^2)(z^2 + t^2)}}.$$

Si l'on développe cette fonction suivant les puissances positives de a et b, les coefficients sont des polynomes harmoniques et homogènes dans l'espace à quatre dimensions; sur l'hypersphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

70) *C. R. Acad. sc. Paris 157 (1913), p. 912, 1392.*

71) **P. Appell*[69].*

ces polynomes deviennent, par l'élimination de $z^2 + t^2$, les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite, car cette élimination transforme $T_{4,3}$ dans la fonction génératrice des polynomes $U_{m,n}$.

F. Didon[68]) montre aussi qu'on peut former d'une infinité de manières deux séries de polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ de deux variables x et y telles que l'intégrale double

$$\iint U_{m,n} V_{m',n'} dx\, dy$$

étendue au cercle $x^2 + y^2 - 1 \leqq 0$ soit nulle, tant que l'on n'a pas à la fois $m' = m$, $n' = n$. Il indique un système de polynomes dans lequel les deux séries sont identiques. En particulier, *F. Didon* considère les polynomes de degré $m + n$ en x et y

$$P_{m,n} = k_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

où $k_{m,n}$ est une constante. Il démontre la formule

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx\, dy = 0 \qquad (x^2 + y^2 - 1 \leqq 0)$$

à moins que $m = m'$ et $n = n'$. Puis

$$\iint P_{m,n}^2 dx\, dy$$

$$= k_{m,n}^2 \frac{2\pi}{2m+1} 2^{2m} m!\, m!\, n! \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)} (2m+n+2)\ldots(2m+2n+1).$$

En prenant une certaine détermination de $k_{m,n}$, il donne la fonction génératrice

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - ax - by - \frac{2(1-by+\sqrt{1-2by+b^2})}{(a^2+b^2)(y^2-1)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{(m,n)} a^m b^n P_{m,n}.$$

Enfin il étudie le développement d'une fonction $f(x, y)$ en série de polynomes $P_{m,n}$

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}.$$

Ces propositions ont été développées par *G. A. Orlov*[72]). En prenant une autre détermination de $k_{m,n}$, *G. A. Orlov* donne pour $P_{m,n}$ la fonction génératrice plus simple

$$[(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2) - a^2(y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Il généralise ensuite en prenant la fonction

$$(1-2by+b^2)^{\beta} [(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2) - a^2(y^2-1)]^{-(\beta+\frac{1}{2})}$$

72) *Nouv. Ann. math. (2) 20 (1881), p. 481; (3) 1 (1882), p. 311.*

qui donne naissance, comme coefficient de $a^m b^n$, au polynome

$$\Omega_{m,n} = C_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m}.$$

Ce polynome de degré $m+n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m, présente la plus grande analogie avec le polynome de degré l

$$\omega_l(x, \alpha) = C_l \frac{1}{(x^2-1)^\alpha} \frac{d^l (x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l}.$$

F. Didon[73]) démontre que l'intégrale

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{p-1}{2}-1} (1-2ax+a^2)^{-\frac{p-1}{2}} (1-2bx+b^2)^{-\frac{p}{2}} dx\, dy,$$

étendue au cercle $x^2+y^2-1 \leqq 0$, ne dépend que du produit ab, en supposant p entier positif.

G. A. Orlov[74]) montre que la proposition est encore vraie si p est fractionnaire positif. La démonstration repose sur les propriétés des polynomes ω_l définis par

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=+\infty} a^l \omega_l(x, \alpha)$$

qui sont les polynomes C_n^ν de *L. Gegenbauer.*

Les polynomes précédents dérivent de fonctions algébriques. *Ch. Hermite*[75]) a considéré également des polynomes à plusieurs variables analogues à ceux qu'il a déduits[59]) de la dérivation de e^{-x^2}. Soit

$$\varphi(x, y, z, \ldots)$$

une forme quadratique à μ variables $x, y, z, \ldots$ et dont la partie réelle soit définie et positive; désignons par

$$\psi(x, y, z, \ldots)$$

la forme adjointe de Gauss et par δ l'invariant. *Ch. Hermite* considère deux systèmes de polynomes associés. Les polynomes U du premier système sont définis par le développement

$$e^{-\varphi(x+h,\, y+h_1,\, z+h_2,\, \ldots)} = e^{-\varphi(x, y, z, \ldots)} \sum \frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''} \cdots}{n!\, n'!\, n''! \ldots} U_{n, n', n'', \ldots}.$$

Les polynomes V du second système s'obtiennent en introduisant le polynome $\psi(k, k_1, k_2, \ldots)$ et en faisant sur les accroissements $h, h_1, h_2, \ldots$

73) *Ann. Éc. Norm. (1) 7 (1870), p. 247.*

74) *Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 311.*

75) *C. R. Acad. sc. Paris 58 (1864), p. 93, 266; Œuvres, publ. par *É. Picard* 2, Paris 1908, p. 298.*

la substitution linéaire

$$h = \frac{d\psi}{dk}, \quad h_1 = \frac{d\psi}{dk_1}, \quad h_2 = \frac{d\psi}{dk_2}, \dots;$$

ils sont définis par le développement de

$$e^{-\varphi\left(x+\frac{d\psi}{dk},\, y+\frac{d\psi}{dk_1},\, z+\frac{d\psi}{dk_2},\dots\right)}$$

suivant les puissances positives de k, k_1, k_2, ... sous la forme

$$e^{-\varphi(x,y,z,\dots)} \sum \frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''} \dots}{n!\, n'!\, n''! \dots} V_{n,n',n'',\dots}.$$

Ch. Hermite[75]) obtient alors la formule fondamentale

$$\sqrt{\frac{\pi^\mu}{\delta}}\, e^{4\delta(hk+h_1k_1+h_2k_2+\dots)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, dz \cdots e^{-\varphi(x,y,z,\dots)} M,$$

où

$$M = \sum \frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''} \dots}{n!\, n'!\, n''! \dots} U_{n,n',n''\dots} \sum \frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''} \dots}{n!\, n'!\, n''! \dots} V_{n,n',n''\dots},$$

l'intégration étant, comme toutes les suivantes, étendue pour toutes les variables de $-\infty$ à $+\infty$. On en conclut que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, dz \cdots e^{-\varphi(x,y,z)\cdots} U_{n,n',n'',\dots} V_{m,m',m'',\dots}$$

est *nulle* quand les différences $n-m$, $n'-m'$, $n''-m''$, ... sont différentes de zéro, et que pour $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$, ... elle a pour valeur

$$\sqrt{\frac{\pi^\mu}{\delta}}\, n!\, n'!\, n''! \dots (4\delta)^{n+n'+n''\dots}.$$

Cette proposition peut servir de base à l'étude et au calcul des coefficients du développement d'une fonction $F(x, y, z, \dots)$ en série soit de polynomes U soit de polynomes V. C'est au sujet de ces polynomes que *F. G. Mehler* a fait les remarques que nous avons déjà indiquées [n° 2].

De même que le polynome

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n$$

qui rend minimée l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} f^2(x)\, dx$$

est, à un facteur constant près, le polynome X_n, de même le polynome à deux variables $\varphi(x, y)$, de degré $m+n$, dont le coefficient de $x^m y^n$ est l'unité, qui rend minimée l'intégrale

$$\iint_{|1-x^2-y^2\geqq 0|} \varphi^2(x, y)\, dx\, dy$$

est le polynome d'Hermite $U_{m,n}$ à un facteur constant près.*

4. ***Séries hypergéométriques à deux variables et polynomes qui s'y rattachent.** Tout comme les polynomes de Legendre se rattachent à la série hypergéométrique de Gauss, les polynomes d'Hermite à deux variables se rattachent aux séries hypergéométriques à deux variables introduites par *P. Appell*[76]).

Soit, pour abréger,

$$(\lambda, n) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1),$$

λ désignant une constante quelconque et n un entier positif, avec la convention $(\lambda, 0) = 1$; les quatre fonctions hypergéométriques de deux variables sont

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', m)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

la sommation étant étendue aux valeurs entières de m et n, de 0 à $+\infty$.

Les quatre fonctions ainsi définies satisfont respectivement aux équations différentielles simultanées suivantes, dans lesquelles p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$(\mathrm{F}_1) \begin{cases} (x-x^2)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0 \\ (y-y^2)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0 \\ \qquad\qquad (x-y)s - \beta' p + \beta q = 0 \end{cases}$$

où la troisième équation est une conséquence nécessaire des deux premières;

$$(\mathrm{F}_2) \begin{cases} (x-x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ (y-y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{F}_3) \begin{cases} (x-x^2)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0 \\ (y-y^2)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0 \end{cases}$$

76) *Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles [C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 296, 731].*

$$(\mathrm{F}_4)\begin{cases}(x-x^2)r-y^2t-2xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-(\alpha+\beta+1)yq-\alpha\beta z=0\\(y-y^2)t-x^2r-2xys+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]q-(\alpha+\beta+1)xp-\alpha\beta z=0.\end{cases}$$

Ces équations peuvent s'intégrer à l'aide des fonctions correspondantes comme l'équation de la série de Gauss à l'aide de la fonction F. On peut démontrer, pour des équations de cette nature, des théorèmes généraux analogues à ceux de *L. Fuchs* sur les équations différentielles linéaires à une variable[76]), mais cette question générale est en dehors du sujet actuel.

Les points spéciaux relatifs aux systèmes (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) sont les suivants:

L'intégrale générale z des équations (F_1) est une fonction linéaire, à coefficients constants, de *trois* intégrales particulières z_1, z_2, z_3,

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3;$$

les intégrales générales des équations (F_2), (F_3) et (F_4), respectivement, sont des fonctions linéaires à coefficients constants de *quatre* intégrales particulières z_1, z_2, z_3, z_4,

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4.$$

Par exemple, l'intégrale générale de l'équation (F_2) est

$$\begin{aligned}z=C_1F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y)+C_2x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,\beta',2-\gamma,\gamma',x,y)\\+C_3y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+1-\gamma',\beta,\beta'+1-\gamma',\gamma,2-\gamma',x,y)\\+C_4x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma',\beta+1-\gamma,\beta'+1-\gamma',2-\gamma,2-\gamma',x,y).\end{aligned}$$

Les équations (F_3) se ramènent à (F_2) par la substitution

$$x=\frac{1}{\xi},\quad y=\frac{1}{\eta},\quad z=\xi^{\alpha}\xi^{\alpha'}u.$$

L'intégrale des équations (F_4) a une forme semblable que nous n'écrirons pas ici.

Les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 donnent naissance à des polynomes analogues à ceux de Jacobi quand on attribue à certaines des quantités α, α', β, β' des valeurs négatives choisies de façon que les séries se réduisent à des polynomes.

Les polynomes d'Hermite $U_{m,n}$, $V_{m,n}$ et $\mathfrak{U}_{m\,n}$, $\mathfrak{V}_{m\,n}$, définis plus haut, s'expriment à l'aide de la fonction F_2.

Les polynomes

$$U_{m,n}=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\frac{\partial^{m+n}\left[x^{m+\gamma-1}y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}\right]}{\partial x^m\partial y^n}$$

de degré $m+n$, analogues aux polynomes de Jacobi, sont donnés par

$$U_{m,n}=CF_2(-m,-n,m+\gamma,n+\gamma',\gamma,\gamma',x,y),$$

où C est une constante. Ils possèdent des propriétés semblables à celles des polynomes à deux variables d'Hermite et des fonctions Y_n de Laplace; la propriété fondamentale est que l'intégrale double

$$I_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} U_{\mu,\nu} \, dx \, dy$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$$

est *nulle* quand $m + n$ est différent de $\mu + \nu$. Cette intégrale, au contraire, n'est pas nulle quand $m + n = \mu + \nu$; sa valeur est alors

$$\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(\gamma+\mu+m)\Gamma(\gamma'+\nu+n)}{\Gamma(2m+2n+\gamma+\gamma'+1)}.$$

Les formules ainsi obtenues permettent de calculer, par $N + 1$ équations du premier degré, les $N + 1$ coefficients des polynomes $U_{m,n}$ d'un degré donné $m + n = N$, dans le développement d'une fonction de deux variables x et y en série procédant suivant les polynomes $U_{m,n}$. Le calcul des coefficients se simplifie par l'introduction d'un polynome adjoint $V_{m,n}$, également défini à l'aide de la fonction F_2,

$$V_{m,n} = F_2(m + n + \gamma + \gamma', -m, -n, \gamma, \gamma', x),$$

possédant la propriété que l'intégrale

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} V_{\mu,\nu} \, dx \, dy$$

est nulle tant que l'on n'a pas à la fois $\mu = m$, $\nu = n$; tandis que

$$K_{m,n}^{m,n} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{(2m+2n+\gamma+\gamma')\Gamma(m+n+\gamma+\gamma')}.$$

On peut alors obtenir séparément le coefficient du polynome $U_{m,n}$ dans le développement en série.

Plus généralement[77]) les polynomes

$$A_{m,n} = x^{-a} y^{-b} (1 - x - y)^{-c} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[x^{m+a} y^{n+b} (1 - x - y)^{m+n+c}\right]$$

possèdent des propriétés analogues; on a, en désignant par H une constante,

$$A_{m,n} = H(1 - x - y)^{m+n} F_2,$$

où

$$F_2 = F_2\left[-(m+n+c), -m, -n, a+1, b+1, \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right]$$

et l'intégrale double

$$\iint x^a y^b (1 - x - y)^c A_{m,n} A_{\mu,\nu} \, dx \, dy$$

est nulle tant que $m + n$ est différent de $\mu + \nu$.

77) **P. Appell*, Sur des polynomes de deux variables [Archiv Math. Physik (1) 65 (1880), p. 238].*

La notion de polynomes associés introduits par *Ch. Hermite* peut être généralisée et rattachée à la considération d'une certaine forme quadratique[78]).

Les propriétés précédentes résultent, comme cas particuliers, d'un théorème général[79]) sur les fonctions vérifiant l'équation différentielle unique

$$(\mathrm{E})\quad (x-x^2)r-2xys+(y-y^2)t+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p + [\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]q-\alpha\delta z=0.$$

Ce théorème est le suivant:

Les constantes γ, γ', $1+\alpha+\delta-\gamma-\gamma'$ étant supposées positives, soient z une intégrale de l'équation (E) *et z_1 une intégrale de l'équation* (E_1) *obtenue en remplaçant α et δ par $\alpha+\lambda$ et $\delta-\lambda$; l'intégrale double*

$$\iint x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}z\cdot z_1\,dx\,dy$$

étendue au triangle formé par les droites

$$x=0,\quad y=0,\quad 1-x-y=0$$

est nulle, si les fonctions z et z_1 et leurs dérivées premières restent finies dans les limites de l'intégration, quand $\lambda(\delta-\alpha+\lambda)$ est différent de zéro.

Ce théorème comprend non seulement les propriétés des polynomes d'Hermite, des polynomes que nous venons d'indiquer, mais aussi, et c'est là un fait qui établit un nouveau rapport entre ces théories et celle des fonctions sphériques, les propriétés des fonctions $Y_n(\theta, \varphi)$ de Laplace; en effet l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les fonctions Y_n se ramène à la forme générale (E) par la substitution[79])

$$\sin\theta\cos\varphi=\sqrt{x},\qquad \sin\theta\sin\varphi=\sqrt{y}.$$

En particulier, en faisant dans l'équation (E) $\gamma=\frac{1}{2}$, $\gamma'=\frac{1}{2}$,

$$x=\xi^2,\quad y=\eta^2,$$

on la ramène à la forme[79])

$$(\mathrm{E}')\quad (1-\xi^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-2\eta\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+(1-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}-(2\alpha+2\delta+1)\left(\xi\frac{\partial z}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial z}{\partial\eta}\right) - 4\alpha\delta z=0.$$

Soient alors z une solution de cette équation et z_1 une solution de l'équation obtenue en remplaçant α et δ par $\alpha+\lambda$ et $\delta-\lambda$; si

78) **P. Appell,* Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles [Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 8, p. 1/20].*

79) **P. Appell,* C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 290, 731, 977; 91 (1880), p. 364; J. math. pures appl. (3) 8 (1882), p. 173/216.*

l'on a

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0,$$

on a, sous des conditions analogues,

$$\iint (1 - \xi^2 - \eta^2)^{\alpha + \delta - 1} z z_1 \, d\xi \, d\eta = 0,$$

le domaine d'intégration étant le cercle

$$1 - \xi^2 - \eta^2 \geqq 0.$$

C'est dans ce dernier cas particulier que rentrent plus spécialement les fonctions Y_n, les polynomes d'Hermite déduits de la différentiation de $(\xi^2 + \eta^2 - 1)^{m+n}$ et les fonctions plus générales considérées par *F. Didon*[68])

$$\frac{\partial^{m+n} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^{m+n+h}}{\partial \xi^m \partial \eta^n}.$$

Ce même théorème comprend, comme cas limite, certaines formules données par *Ch. Hermite*[75]) sur les polynomes à deux variables qui naissent de la différentiation d'une exponentielle dont l'exposant est une forme quadratique de x et y.

Un de ces polynomes hypergéométriques à deux variables se rencontre dans une question posée par *F. Tisserand*[80]), au sujet d'un développement employé en mécanique céleste. Soit $P_N(p, z)$ le polynome de degré N en z qui forme le coefficient de θ^N dans le développement en séries de puissances de

$$\varphi(z) = (1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{1-p}{2}};$$

il s'agit de trouver une formule générale donnant le développement du polynome $P_N(p, z)$ suivant les cosinus des multiples de x et de y quand on pose

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y.$$

Si l'on fait

$$P_N(p, z) = 4 \sum B_{i,j}^{N,p} \cos ix \cos jy,$$

le coefficient $B_{i,j}^{N,p}$ s'exprime par un polynome hypergéométrique de deux variables[81])

$$B_{i,j}^{N,p} = C \mu^i \nu^j F_4 \left(\frac{p-1}{2} + \frac{N+i+j}{2}, \frac{i+j-N}{2}, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2 \right),$$

---

80) *Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable [C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 815, 880]; Ann. Observ. Paris, Mémoires 18 (1885), mém. n° 3.*

81) **P. Appell*, Sur certaines formules de Hansen et de Tisserand [C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 1036].*

le facteur C étant une constante connue; le développement de la fonction F_4 s'arrête de lui-même, car le second élément est un entier négatif. *R. Radau*[82]) a donné une autre démonstration de cette formule.

Si l'on tient compte de la relation

$$\mu + \nu = 1$$

ce qui est le cas du problème de mécanique céleste, le polynome devient un polynome entier, en ν par exemple, satisfaisant à une équation[83]) du troisième ordre[84]). Pour $p = 2$ le polynome se réduit à un polynome hypergéométrique de Gauss à une variable, tandis que pour $p = 3$ il devient le carré d'un tel polynome.

D'une façon générale, si dans les fonctions hypergéométriques F_2 et F_4 on considère x et y comme fonctions d'un paramètre t, ces fonctions F_2 et F_4 de t vérifient des équations linéaires du quatrième ordre qui peuvent s'abaisser au troisième pour certaines relations spéciales entre x et y, comme $x + y = 1$ pour F_2 et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ pour F_4[84]).

Des polynomes de plusieurs variables généralisant la théorie des fonctions sphériques se rencontrent dans un mémoire de *V. Steklov*[85]). Dans le cas de deux variables, *V. Steklov* traite notamment un exemple dans lequel le domaine d'intégration est l'ellipse

$$p = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

et la fonction caractéristique p^α, α étant un nombre positif. Il obtient ainsi des polynomes qui généralisent les polynomes Ω obtenus par *G. A. Orlov*, polynomes correspondant au cas où $a = 1$, $b = 1$[86]).

L'une des équations différentielles vérifiée par le polynome $\Omega^{(k)}$ de *G. A. Orlov* est

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (2\alpha + 3)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ - k[k + r(\alpha + 1)]z = 0;$$

82) *Remarques sur une formule de Tisserand [C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 1130, 1275].*

83) **O. Callandreau*, C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 1187.*

84) **P. Appell*, Sur une formule de Tisserand et sur les séries hypergéométriques de deux variables [J. math. pures appl. (3) 10 (1884), p. 407/28]. Voir aussi *H. Poincaré*, Leçons de mécanique céleste 2, Paris 1907, p. 65/85 (chap. 18).*

85) *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables [Zapiski imperati acad. nauk (Mém. Acad. sc. Pétersb.) (8) 30 (1911), classe phys. math., mém. nº 4 [présenté le 4 mai 1911]].*

86) *Thèse, St Pétersbourg 1881.*

elle est identique à l'équation (E'). Le polynome de *G. Orlov* est, à un facteur constant près, comme nous l'avons dit, égal à

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\alpha+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dy^n}\left[(y^2-1)^{\alpha+m+n+\frac{1}{2}}\right] \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha} \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2+y^2-1)^{\alpha+m}\right],$$

où

$$m+n=k.$$

V. Steklov démontre le théorème suivant:

Toute fonction $f(x, y)$ admettant des dérivées partielles des quatre premiers ordres à l'intérieur du cercle (C)

$$x^2+y^2=1$$

se développe, en tous les points (x, y) intérieurs à tout contour fermé (C') en entier compris à l'intérieur du cercle (C), en série uniformément et absolument convergente de la forme

$$f(x, y)=\sum_{k=0}^{k=+\infty} \sum_{l=1}^{l=k+1} A_l^{(k)} \Omega_l^{(k)}(x, y),$$

où

$$A_l^{(k)}=\iint(1-x^2-y^2)^\alpha f(x, y) \Omega_l^{(k)}(x, y)\, dx\, dy,$$

$\Omega_l^{(k)}$ $[k=0, 1, 2, \ldots\ldots; l=1, 2, \ldots, k+1]$ étant les polynomes de *G. Orlov*.*

4. *Représentation des fonctions hypergéométriques par des intégrales définies. Généralisation du problème de Riemann pour la série de Gauss. Pour faire un Tableau d'ensemble, nous indiquerons rapidement quelques recherches connexes aux précédentes qui devraient plutôt être développées dans la théorie des équations différentielles linéaires simultanées analogues aux équations des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 et des groupes de ces équations.

On peut représenter[87]) les fonctions hypergéométriques de deux variables par des intégrales définies, analogues à celles qui expriment la série de Gauss. Par exemple la série F_3 peut être représentée par une intégrale définie analogue à celle dont s'est occupé *C. G. J. Jacobi*[88]). Posons

$$f(u, v)=u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1},$$
$$\alpha>0, \quad \alpha'>0, \quad \gamma-\alpha-\alpha'>0;$$

87) **P. Appell*, Sur la série $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ [C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 977].*

88) *J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 149/65; Werke 6, Berlin 1891, p. 184/202.*

alors on a

$$\iint f(u, v)(1 - ux)^{-\beta}(1 - vy)^{-\beta'} du\, dv$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma - \alpha - \alpha')}{\Gamma(\gamma)} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

l'intégrale double étant étendue au champ

$$u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 1 - u - v \geqq 0.$$

En partant de cette expression, on peut démontrer, pour le cas $\beta = 1$, $\beta' = 1$, une proposition analogue à celle que *C. G. J. Jacobi* a démontrée dans le § 8 de son mémoire[88]). Dans cette proposition figurent des polynomes à deux variables déduits d'une des séries hypergéométriques et se rattachant à ceux de *P. Appell*[89]) [cf. nº **5**].

Les autres fonctions F_1 et F_2 s'expriment de même (cf. notes 78 et 79) par des intégrales doubles

$$\iint u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1 - u - v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1 - ux - vy)^{-\alpha} du\, dv$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma - \beta - \beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$$

le champ étant le même que plus haut;

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1 - u)^{\gamma-\beta-1}(1 - v)^{\gamma'-\beta'-1}(1 - ux - vy)^{-\alpha} du\, dv$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\gamma' - \beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$$

H. Poincaré[90]) rattache les déterminations multiples, linéairement indépendantes, de ces intégrales à la notion de périodes des intégrales doubles.

E. Picard[91]), cherchant à définir les fonctions hypergéométriques de deux variables, *in abstracto*, par la considération de leurs points singuliers, comme *B. Riemann* l'a fait pour la série de Gauss, a retrouvé par cette voie la fonction F_1 qu'il rattache ainsi aux recherches de *L. Pochhammer*[92]). Il donne, à cette occasion, l'expression de la fonc-

---

89) **P. Appell*[77]), Archiv Math. Phys. (1) 65 (1880), p. 238.*

90) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 2, Paris 1893, p. 72.*

91) *Sur une extension aux fonctions à deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques [C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 1267; Ann. Éc. Norm. (2) 10 (1881), p. 305/22].*

92) *Über hypergeometrische Funktionen höherer Ordnung [J. reine angew. Math. 71 (1870), p. 316/52].*

tion F_1 par une intégrale simple

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

E. Goursat[93]), poursuivant ces recherches, a montré ensuite que les fonctions F_2 et F_3 sont susceptibles d'une définition analogue.

Quand les variables x et y décrivent des contours fermés, dans le champ complexe, les intégrales des équations différentielles définissant les fonctions hypergéométriques de deux variables subissent des substitutions linéaires conduisant à des formules analogues à celles de *C. F. Gauss.*

P. Appell[94]) a donné un certain nombre de ces formules. *E. Goursat*[95]) a étudié et résolu le problème d'une façon systématique; pour la fonction F_1 il a trouvé jusqu'à soixante intégrales du type

$$x^{l}(1-x)^{m}y^{p}(1-y)^{m'}(x-y)^{n}F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

t et t' désignant des fonctions rationnelles du premier degré de x et y.

Les fonctions hypergéométriques de n variables $n > 2$ ont été étudiées par *G. Lauricella*[96]) qui généralise un grand nombre des résultats précédents. Il donne notamment l'expression, à l'aide d'une de ces fonctions, des polynomes $U_{m,m',m'',\dots}$ et $V_{m,m',m'',\dots}$ que *F. Didon*[97]) a introduits, et l'intégration des équations correspondantes.*

5. *Fractions continues et quadratures mécaniques. On connaît [cf. II 6] les relations qui existent entre la théorie des fonctions sphériques et les théories des fonctions continues et des quadratures mécaniques. Nous nous proposons ici d'indiquer sommairement quelques points de théories analogues dans le domaine des fonctions sphériques à plusieurs variables.

F. Didon[98]) a considéré les polynomes

$$P_{m,n} = k_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n[(y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}]}{dy^n} \frac{d^m[(x^2+y^2-1)^m]}{dx^m}$$

93) *C. R. Acad. sc. Paris 95 (1882), p. 903, 1044.*

94) *Sur certaines formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables [C. R. Acad. sc. Paris 91 (1880), p. 364/6; J. math pures appl. (3) 8 (1882), p. 173/216].*

95) *C. R. Acad. sc. Paris 95 (1882), p. 717/9.*

96) *Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili [Rend. Circ. mat. Palermo 7 (1893), p. 111/58].*

97) *Ann. Éc. Norm. (1) 5 (1868), p. 229/310.*

98) *Id. (1) 7 (1870), p. 247/60.*

où $k_{m,n}$ désigne une constante. L'expression $P_{m,n}$ est un polynome de degré $m+n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m. Ces polynomes sont identiques à leurs associés en ce sens que l'intégrale

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'}\, dx\, dy$$

étendue au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0$$

est nulle tant que

$$(m - m')^2 + (n - n')^2 > 0.$$

F. Didon exprime les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ de *Ch. Hermite* au moyen de ces polynomes $P_{m,n}$. Mais voici le point spécial où se rencontrent des résultats analogues à ceux de la théorie des fractions continues. Si l'on considère la fonction

$$S = \iint \frac{1}{(x-z)(y-z')}\, dz\, dz',$$

où l'intégration est faite par rapport à z et à z' dans le domaine

$$z^2 + z'^2 - 1 \leqq 0,$$

et si l'on développe cette fonction suivant les puissances positives entières de $\frac{1}{x}$ et de $\frac{1}{y}$,

$$S = \frac{S_{0,0}}{xy} + \frac{S_{0,1}}{xy^2} + \frac{S_{1,0}}{x^2 y} + \cdots + \frac{S_{pq}}{x^{p+1} y^{q+1}} + \cdots\cdots,$$

dans le produit $S \cdot P_{m,n}$ de cette série par $P_{m,n}$ le terme en

$$\frac{1}{x^{h+1} y^{k+1}}$$

n'existe pas, pour toutes les valeurs entières et positives de h et de k dont la somme est inférieure à $m+n$ et aussi, quand cette somme est égale à $m+n$, pour les valeurs de h inférieures à m.

Si l'on remarque que l'intégrale S a pour valeur

$$S = 2\pi \operatorname{arctg} \frac{1}{x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1}},$$

on voit l'analogie de ce fait avec celui qui se présente pour le polynome X_n de Legendre à l'égard du produit

$$X_n \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z} = X_n \log_e \frac{x+1}{x-1}.$$

F. Didon[99]) généralise le résultat précédent, en considérant une

---

99) *Ann. Éc. Norm. (1) 7 (1870), p. 265.*

intégrale de la forme

$$I = \iint \frac{f(z, z')}{(x-z)(y-z')}\, dz\, dz',$$

où le champ d'intégration des variables z et z' est limité par une condition quelconque indépendante de x et y.

En partant de l'expression de la fonction

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$$

sous la forme

$$\iint (1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'} f(u, v)\, du\, dv,$$

l'intégrale étant étendue au domaine

$$u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 1-u-v \geqq 0,$$

et $f(u, v)$ désignant la fonction

$$f(u, v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1},$$

P. Appell[100]) étend à cette fonction certaines propriétés que *C. G. J. Jacobi* a démontrées pour la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

de *C. F. Gauss* et qui se rattachent au développement de

$$F(\alpha, 1, \gamma, x)$$

en fraction continue.

Les polynomes de Legendre interviennent dans le calcul approché des intégrales définies simples, comme l'a montré *C. F. Gauss,* et les polynomes plus généraux $P_n(x)$, caractérisés par la condition

$$\int_a^b K(x) P_n(x) P_\nu(x)\, dx = 0, \qquad \text{pour } n \gtrless \nu,$$

dans le calcul approché des intégrales de la forme

$$\int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

où $K(x)$ est une fonction donnée, comme il est connu.

Il y a lieu de penser que les polynomes de *Ch. Hermite,* ceux de *F. Didon* et les polynomes plus généraux indiqués ci-dessus, interviendront de même dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$\iint K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

100) **P. Appell,* Sur la série $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ [C. R. Acad. sc. Paris 26 1880), p. 977/9].*

K étant une fonction déterminée servant à la définition des polynomes et le champ d'intégration ayant une forme déterminée.

P. Appell[101]) a mis ce fait en évidence dans des cas simples pouvant servir de types à une théorie générale. Soit $K(x, y)$ une fonction déterminée une fois pour toutes de x et y, gardant un signe constant dans le champ d'intégration; soit d'autre part $f(x, y)$ une fonction quelconque développable, dans ce champ, en une série de puissances entières et positives de x et de y. Pour évaluer approximativement l'intégrale double

$$I = \iint K(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

P. Appell prend un polynome $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y, contenant par conséquent un nombre

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

de coefficients; puis il détermine ces coefficients par des équations linéaires exprimant que le polynome φ prend la même valeur que la fonction $f(x, y)$ en n points

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

situés dans le champ d'intégration et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p. La valeur approchée de l'intégrale est alors

$$J = \iint K(x, y) \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Comme le fait *C. F. Gauss* pour les intégrales simples, il s'agit de déterminer les points (x_i, y_i) de manière à obtenir la plus grande approximation possible au sens de *C. F. Gauss.*

P. Appell forme les équations caractérisant ces points et montre comment les polynomes de *Ch. Hermite* et les analogues interviennent dans la détermination de ces points. Sans entrer ici dans des détails à ce sujet, voici deux résultats particulièrement simples.

Dans le cas le plus élémentaire, on a

$$p = 0, \quad n = 1.$$

On substitue alors à la fonction $f(x, y)$ une constante

$$f(x_1, y_1)$$

égale à la valeur que prend $f(x, y)$ en un point (x_1, y_1) pour le moment inconnu. Pour que l'erreur soit la moindre possible, il faut que

101) **P. Appell,* Sur une classe de polynomes à deux variables et sur le calcul approché des intégrales doubles [Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 4 (1890), mém. n° 8, p. 1/20].*

le point (x_1, y_1) soit le centre de masses du champ d'intégration, la densité en chaque point étant $K(x, y)$.

Si l'on forme le polynome le plus général P, *du premier degré en x et y,* s'annulant pour

$$x = x_1, \quad y = y_1,$$

ce polynome possède la propriété exprimée par l'équation

$$\iint K(x, y)\, P \cdot dx dy = 0;$$

c'est le polynome le plus général du premier degré remplissant les conditions analogues à celles des polynomes de *Ch. Hermite* et de *F. Didon.* L'équation

$$P = 0$$

représente une droite arbitraire passant par le point cherché (x_1, y_1).

Comme deuxième exemple, supposons que K soit égal à 1 et que le champ d'intégration soit le cercle

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Prenons trois points

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

sur un cercle concentrique et remplaçons $f(x, y)$ par un polynome du premier degré $\varphi(x, y)$ devenant égal à $f(x, y)$ en ces trois points. Pour que l'erreur soit la plus petite possible, il faut que les trois points (x_i, y_i) soient les sommets d'un triangle équilatéral quelconque inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Un complément à cette théorie a été apporté par *H. Bourget*[102]).*

102) **H. Bourget,* C. R. Acad. sc. Paris 126 (1898), p. 634/6.*

ŒUVRES COMPLÈTES
DE LAPLACE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PAR LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS

Avec le concours de PUISEUX, Membre de l'Institut, de F. TISSERAND, Membre de l'Institut, de J. HOÜEL, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, de SOUILLART, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille, de H. POINCARE, Membre de l'Institut, et de LEBEUF, Directeur de l'Observatoire de Besançon.

Nouvelle édition avec un portrait de Laplace, gravé par *Tony Goutière.*

QUATORZE VOLUMES IN-4 (28 × 23).

Extrait de l'Avertissement.

« L'Académie, sur le Rapport de la Section d'Astronomie et de la Commission administrative, après avoir pris connaissance des conditions dans lesquelles devait s'accomplir le travail et des soins dont il était entouré, a décidé, dans sa séance du 16 juillet 1877, que la nouvelle édition serait publiée sous ses auspices et sous sa responsabilité. »

Les éditions précédentes, qui sont devenues très rares, ne contenaient que 7 Volumes, savoir : *Traité de Mécanique céleste* (5 Volumes), *Exposition du système du Monde* et *Théorie analytique des probabilités.* La nouvelle édition comprendra de plus 9 Volumes renfermant tous les autres Mémoires de Laplace, dont la dissémination dans de nombreux Recueils académiques et périodiques rendait jusqu'à ce jour l'étude si difficile.

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4. 100 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre); 5 vol. in-4 .... 130 fr.
Les Tomes III, IV et V, papier vergé, se vendent séparément. 20 fr.
Les Tomes I à V, papier hollande, se vendent séparément... 26 fr.

Exposition du système du Monde. Tome VI (1884).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........... 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace......... 25 fr.

Théorie des probabilités, Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........... 35 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace......... 43 fr.

Nous avons divisé un certain nombre d'exemplaires en deux fascicules qui se vendent séparement :

PREMIER FASCICULE.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........... 15 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace......... 18 fr.

SECOND FASCICULE.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........... 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace.. ...... 25 fr.

Mémoires divers. Tomes VIII à XIV.

TOMES VIII, IX, X, XI et XII. — *Mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences;* 1891-1898. Prix de chaque volume :

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace....... 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace.......... 25 fr.

TOME XIII. — *Mémoires extraits de la Connaissance des Temps;* 1904.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace.......... 15 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace .... 18 fr.

TOME XIV. — *Mémoires divers ;* 1912.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace........... 20 fr.
Tirage sur papier de hollande, au chiffre de Laplace......... 25 fr.

Tables générales. *Table synoptique. Table analytique. Table alphabétique des auteurs cités;* 1912.............................. 4 fr.

Tome I.

Avertissement. Notice sur le Général Marquis de Laplace. Plan de l'Ouvrage. — ***Des lois générales de l'equilibre et du mouvement.*** De l'équilibre et de la composition des forces qui agissent sur un point matériel. — Du mouvement d'un point matériel. — De l'équilibre d'un système de corps. — De l'équilibre des fluides. — Principes généraux du mouvement d'un système de corps. — Des lois du mouvement d'un système de corps, dans toutes les relations mathématiquement possibles entre la force et la vitesse. — Des mouvements d'un corps solide de figure quelconque. — Du mouvement des fluides. — ***De la loi de la pesanteur universelle et du mouvement des centres de gravité des corps célestes.*** De la loi de la pesanteur universelle, tirée des phénomènes. — Des équations différentielles du mouvement d'un système de corps soumis à leur attraction mutuelle. — Première approximation des mouvements célestes, ou théorie du mouvement elliptique. — Détermination des éléments du mouvement elliptique. — Methodes générales pour determiner, par des approximations successives, les mouvements des corps célestes. — Seconde approximation des mouvements célestes, ou théorie de leurs perturbations. — Des inégalités séculaires des mouvements célestes. — Seconde méthode d'approximation des mouvements célestes.

Tome II.

De la figure des corps célestes. Des attractions des sphéroïdes homogènes terminés par des surfaces du second ordre. — Développement en série des attractions des sphéroïdes quelconques. — De la figure d'une masse fluide homogène en équilibre et douée d'un mouvement de rotation. — De la figure d'un sphéroïde très peu différent d'une sphère et recouvert d'une couche de fluide en équilibre. — Comparaison de la theorie précédente avec les observations. — De la figure de l'anneau de Saturne. — De la figure des atmosphères des corps célestes. — *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère.* Théorie du flux et du reflux de la mer. — De la stabilité de l'équilibre des mers. — De la manière d'avoir égard, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, aux diverses circonstances qui, dans chaque port, influent sur les marées. — Comparaison de la théorie précédente aux observations. — Des oscillations de l'atmosphère. — *Des mouvements des corps célestes autour de leurs propres centres de gravité.* Des mouvements de la Terre autour de son centre de gravité. — Des mouvements de la Lune autour de son centre de gravité. — Des mouvements des anneaux de Saturne autour de leurs centres de gravité.

Tome III.

Dédicace. Préface. Théories particulières des mouvements célestes. *Theorie des mouvements planétaires.* Objet de cette théorie. — Formules des inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. — Inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice. — Des perturbations dues à l'ellipticité du Soleil. — Des perturbations du mouvement des planètes par l'action de leurs satellites. — Considérations sur la partie elliptique du rayon vecteur et du mouvement des planètes. — Valeurs numériques des quantités qui entrent dans les expressions des inégalités planétaires. — Expressions numériques des variations séculaires des éléments des orbites planétaires. — Théorie de Mercure. — Théorie de Vénus. — Théorie du mouvement de la Terre. — Théorie de Mars. — Théorie de Jupiter. — Théorie de Saturne. — Théorie d'Uranus. — De quelques équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires, et qui peuvent servir à les vérifier. — Sur les masses des planètes et de la Lune. — Sur la formation des Tables astronomiques, et sur le plan invariable du système planétaire. — De l'action des étoiles sur le système planétaire. — *Theorie de la Lune.* Exposé de cette théorie; ses difficultés particulieres. Intégration des équations différentielles du mouvement lunaire. — Des inégalités lunaires dues à la non sphéricité de la Terre et de la Lune. — Des inégalités de la Lune dues à l'action des planètes. — Comparaison de la théorie précédente avec les observations. — Sur une inégalité à longue période qui paraît exister dans le mouvement de la Lune. — Des variations séculaires des mouvements de la Lune et de la Terre, qui peuvent être produites par la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du Soleil. — SUPPLEMENT.

Tome IV.

Préface. — Théories particulières des mouvements célestes. *Théorie des satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.* Objet de cette théorie. — Equations du mouvement des satellites de Jupiter, en ayant égard à leurs actions réciproques, à l'attraction du Soleil et à celle du sphéroïde aplati de Jupiter. — Des inégalités du mouvement des satellites de Jupiter, indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites. — Des inégalités du mouvement des satellites, dépendantes des excentricités des orbites. — Des inégalités du mouvement des satellites en latitude. — Des inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. — Des inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice. — *Sur différents points relatifs au système du Monde.* Des réfractions astronomiques. — Des réfractions terrestres. — De l'extinction de la lumière des astres dans l'atmosphère, et de l'atmosphère du Soleil. — De la mesure des hauteurs par le barometre. — De la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur. — Sur quelques cas où l'on peut rigoureusement obtenir le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent. — Sur les altérations que le mouvement des planètes et des comètes peut éprouver par la résistance des milieux qu'elles traversent, et par la transmission successive de la pesanteur. — Supplement aux théories de Jupiter, de Saturne et de la Lune. — Sur les masses des planètes et des satellites. — Sur les Tables astronomiques. Moyen de rectifier et de perfectionner ces Tables en employant la méthode des équations de condition. SUPPLEMENT. *Sur l'action capillaire.* — Théorie de l'action capillaire. — Comparaison de la théorie précédente avec l'expérience. — *Supplement à la théorie de l'action capillaire.* Sur l'équation fondamentale de l'action capillaire. Nouvelle manière de considérer l'action capillaire. De l'attraction et de la répulsion apparente des petits corps qui nagent à la surface des fluides. Sur l'adhésion des disques à la surface des fluides. De la figure d'une large goutte de mercure, et de la dépression de ce fluide dans un tube de verre d'un grand diamètre. Considérations générales.

Tome V.

Avertissement. Notice historique des travaux des géomètres sur la Mécanique céleste, et nouvelles recherches sur le système du Monde. — *De la figure et de la rotation de la Terre.* Notice historique des travaux des géomètres sur cet objet. — De la figure de la Terre. — De l'axe de rotation de la Terre. — De la chaleur de la Terre et de la diminution de la durée du jour par son refroidissement. — *De l'attraction et de la répulsion des sphères et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques.* Notice historique des recherches des géomètres sur cet objet. — Sur l'attraction des sphères et sur la répulsion des fluides élastiques. — De la vitesse du son, du mouvement des fluides élastiques et de la vapeur aqueuse. — *Des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes.* Notice historique des travaux des géomètres sur cet objet, et spécialement sur le flux et le reflux de la mer. — Nouvelles recherches sur la théorie des marées. — Comparaison de l'analyse précédente avec les observations des hauteurs des marées dont la période est d'environ un demi-jour. — Comparaison de l'analyse avec les observations des heures et des intervalles des marées. — Des flux partiels dont la période est à peu près d'un jour. — Des flux partiels qui dépendent de la quatrième puissance inverse de la distance de la Lune à la Terre. — Du flux et reflux de l'atmosphère. — Remarques sur la page 115 du premier Volume de la *Mécanique celeste*. — *Des mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité.* De la précession des équinoxes. Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet. Formules générales du mouvement de l'équateur terrestre. — De la libration de la Lune. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet. Remarques sur la théorie de la libration de la Lune. — Des anneaux de Saturne. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet. — *Du mouvement des planètes et des comètes.* Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet. — Considérations sur quelques objets du second Livre. Sur les variations des éléments du mouvement elliptique. Sur le développement en série des puissances du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes. De la grande inégalité de Jupiter et de Saturne. Sur la détermination des orbites des comètes par les observations. — *Du mouvement des satellites.* Du mouvement de la Lune. Notice historique des travaux des géomètres et des astronomes sur cet objet. — Sur la théorie lunaire de Newton. — De l'inégalité lunaire à longue période dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres. — Des inégalités lunaires dépendantes de la partie elliptique du rayon terrestre. — Sur la loi de l'attraction universelle. — Du mouvement des satellites de Jupiter. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet. — De l'influence des grandes inégalités de Jupiter sur les mouvements de ses satellites. Des satellites de Saturne et d'Uranus. — Supplement au cinquième Volume du *Traité de Mécanique céleste*. — Note.

Tome VI.

Avertissement. Exposition du système du Monde. — *Des mouvements apparents des corps célestes.* Du mouvement diurne du ciel. — Du soleil et de ses mouvements. — Du temps et de sa mesure. — Des mouvements de la Lune, de ses phases et des éclipses. — Des planètes et, en particulier, de Mercure et de Vénus. — De Mars. — De Jupiter et de ses satellites. — De Saturne, de ses satellites et de son anneau. — D'Uranus et de ses satellites. — Des planètes télescopiques, Cérès, Pallas, Junon et Vesta. — Du mouvement des planètes autour du Soleil. — Des comètes. — Des étoiles et de leurs mouvements. — De la figure de la Terre, de la variation de la pesanteur à sa surface, et du système décimal des poids et mesures. — Du flux et du reflux de la mer, ou des variations diurnes de sa figure. — De l'atmosphère terrestre et des réfractions astronomiques. — *Des mouvements réels des corps célestes.* Du mouvement de rotation de la Terre. — Du mouvement de la Terre autour du Soleil. — Des apparences dues au mouvement de la Terre. — Des lois du mouvement des planètes autour du Soleil et de la figure de leurs orbites. — De la figure des orbes des comètes et des lois de leur mouvement autour du Soleil. — Des lois du mouvement des satellites autour de leurs planètes. — *Des lois du mouvement.* Des forces, de leur composition et de l'équilibre d'un point matériel. — Du mouvement d'un point matériel. De l'équilibre d'un système de corps. — De l'équilibre des fluides. — Du mouvement d'un système de corps. — *De la théorie de la pesanteur universelle.* — Du principe de la pesanteur universelle. — Des perturbations du mouvement elliptique des planètes. — Des masses des planètes et de la pesanteur à leur surface. — Des perturbations du mouvement elliptique des comètes. — Des perturbations du mouvement de la Lune. — Des perturbations des satellites de Jupiter. — Des satellites de Saturne et d'Uranus. — De la figure de la Terre et des planètes et de la loi de la pesanteur à leur surface. — De la figure de l'anneau de Saturne. — Des atmosphères des corps célestes. — Du flux et du reflux de la mer. — De la stabilité de l'équilibre des mers. — Des oscillations de l'atmosphère. — De la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre. — De la libration de la Lune. — Des mouvements propres des étoiles. — Réflexions sur la loi de la pesanteur universelle. — De l'attraction moléculaire. — *Précis de l'histoire de l'Astronomie.* De l'Astronomie ancienne, jusqu'à la fondation de l'école d'Alexandrie. — De l'Astronomie depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'aux Arabes. — De l'Astronomie depuis Ptolémée jusqu'à son renouvellement en Europe. — De l'Astronomie dans l'Europe moderne. — De la découverte de la pesanteur universelle. — Considérations sur le système du Monde et sur les progrès futurs de l'Astronomie. — NOTE I à VII.

Tome VII.

Théorie des probabilités. Avertissement de la seconde édition. Avertissement de la troisième édition. *Introduction.* De la probabilité. Principes généraux du Calcul des Probabilités. De l'espérance. Des méthodes analytiques du Calcul des Probabilités. *Applications du Calcul des Probabilités.* Des jeux. Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales. Des lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements. Application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle. Application du Calcul des Probabilités aux sciences morales. De la probabilité des témoignages. Des choix et des décisions des Assemblées. De la probabilité des jugements des tribunaux. Des Tables de mortalité et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques. Des bénéfices des établissements qui dépendent de la probabilité des événements. Des illusions dans l'estimation des probabilités. Des divers moyens d'approcher de la certitude. Notice historique sur le calcul des Probabilités. — *Calcul des fonctions génératrices.* Considérations générales sur les éléments des grandeurs. — Des fonctions génératrices à une variable, à deux variables. — *Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres.* De l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. De l'intégration par approximation des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites. Application des méthodes précédentes à l'approximation de diverses fonctions de très grands nombres. — *Théorie générale des probabilités.* Principes généraux de cette théorie. De la probabilité des événements composés d'événements simples dont les probabilités respectives sont données. Des lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements. De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux. Application du Calcul des Probabilités à la recherche des phénomènes et de leurs causes. De la probabilité des causes et des événements futurs, tirée des événements observés. De l'influence des inégalités inconnues qu' peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales. D s durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconqu s. Des bénéfices dépendant de la probabilité des événements futurs. De l'espérance morale. De la probabilité des témoignages. — ADDITIONS. — Suppléments I à IV.

Tome VIII.

Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards. — Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. — Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards. — Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planetes qui en dépendent. — Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la Terre et sur les fonctions. — Memoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes. — Recherches sur le Calcul intégral et sur le système du Monde. — Additions.

Tome IX.

Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles. — Recherches sur plusieurs points du système du monde. — Suite des recherches sur plusieurs points du système du monde. — Mémoire sur l'usage du Calcul aux différences partielles dans la théorie des suites. — Memoire sur la précession des équinoxes. — Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation — Mémoire sur les probabilités.

Tome X.

Mémoire sur les suites. — Mémoire sur la détermination des orbites des comètes. — Mémoire sur la chaleur. — Mémoire sur l'électricité qu'absorbent les corps qui se réduisent en vapeurs. — Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de tres grands nombres. — Suite du Memoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. — Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. — PLANCHES I et II.

Tome XI.

Mémoire sur la figure de la Terre. — Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France, pendant les années 1781 et 1782. — Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites, théorie de Jupiter et de Saturne. — Sur l'équation séculaire de la Lune. — Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne. — Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes. — Théorie des satellites de Jupiter. — Sur quelques points du système du monde.

Tome XII.

Mémoire sur le flux et le reflux de la mer. — Mémoire sur les mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité. — Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, de son apogée et de ses nœuds. — Memoire sur le mouvement des orbites des satellites de Saturne et d'Uranus. — Mémoire sur la théorie de la Lune. — Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes. — Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités. — Supplément au Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. — Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations. — Mémoire sur la figure de la Terre. — Addition au Mémoire sur la figure de la Terre. — Memoire sur le flux et le reflux de la mer. — Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité.

Tome XIII.

Mémoires extraits de la Connaissance des temps : Sur les équations séculaires des mouvements de l'apogée et des nœuds de l'orbite lunaire. Addition au Mémoire précédent. Sur les plus grandes marées de l'an IX. Sur quelques équations des Tables lunaires. Sur les Tables de Jupiter et sur la masse de Saturne. Sur la théorie de Jupiter et de Saturne. Sur l'anneau de Saturne. Mémoire sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique qui résulte des observations anciennes. Sur la dépression du mercure dans un tube de baromètre due à sa capillarité. Du milieu qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations. Sur l'inégalité à longue période du mouvement lunaire.

Sur les comètes. Sur l'application du calcul des probabilités appliqué à la philosophie naturelle. Sur la longueur du pendule à secondes. Addition au Mémoire précédent. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques. Sur la rotation de la Terre. Sur la loi de la pesanteur en supposant le sphéroïde terrestre homogène et de même densité que la mer. Addition au Mémoire précédent. Sur l'influence de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne dans le mouvement des corps du système solaire. Sur la figure de la Terre et la loi de la pesanteur à sa surface. Application du Calcul des probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne. Sur les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre. Sur le perfectionnement de la théorie et des Tables lunaires. Sur l'inégalité lunaire à longue période dépendante de la différence des deux hémispheres terrestres. Mémoire sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la Terre. Sur la densité moyenne de la Terre. Eclaircissements sur les Mémoires précédents relatifs aux inégalités lunaires dépendantes de la figure de la Terre, et au perfectionnement de la théorie des Tables de la Lune. Sur les variations des éléments du mouvement elliptique et sur les inégalités lunaires à longues périodes. Sur la détermination des orbites des comètes. De l'orbite de la seconde comète de 1805, par *M. Bouvard*. Sur l'attraction des sphères et sur la répulsion des fluides élastiques. Développement de la théorie des fluides élastiques et application de cette théorie à la vitesse du son. Sur la vitesse du son. Addition au Mémoire sur la théorie des fluides élastiques. De l'action de la Lune sur l'atmosphère. Sur les variations de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes. Sur le développement en série du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes, et sur le développement du rayon vecteur elliptique. Mémoire sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. Mémoire sur divers points de Mécanique céleste. Mémoire sur un moyen de détruire les effets de la capillarité dans les baromètres. Tables nouvelles des dépressions du mercure dans le baromètre dues à sa capillarité. Mémoire sur le flux et reflux lunaire atmosphérique.

Tome XIV.

Mémoires extraits du Journal de l'Ecole Polytechnique. Mémoire sur la détermination d'un plan qui reste toujours parallèle à lui-même, dans le mouvement d'un système de corps agissant d'une manière quelconque les uns sur les autres et libres de toute action étrangère. Sur la Mécanique. *Leçons de Mathématiques données à l'Ecole normale en* 1795. Mémoire sur divers points d'Analyse. — **Mémoires extraits du Journal de Physique.** Sur l'action capillaire. Sur la théorie des tubes capillaires. Sur l'attraction et la répulsion apparente des petits corps qui nagent à la surface des fluides. Extrait d'un Mémoire sur l'adhésion des corps à la surface des fluides. Sur la loi de réfraction extraordinaire de la lumière dans les cristaux diaphanes. Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. — **Mémoires extraits du Bulletin de la Société philomathique.** Sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur. Sur la double réfraction de la lumière dans les cristaux diaphanes. Sur la transmission du son à travers les solides. — **Mémoires extraits des Annales de Chimie.** Sur l'action réciproque des pendules. Sur la vitesse du son. Application du calcul des probabilités aux observations et spécialement aux opérations du nivellement. Eclaircissements de la théorie des fluides élastiques. Sur la réduction de la longueur du pendule au niveau de la mer. — **Mémoires extraits du Journal des Mines.** Rapport sur un Mémoire de M. Malus sur divers phénomenes de la double réfraction de la lumière. — **Pièces diverses.** Note extraite de la *Statique chimique* de Berthollet. Rapport sur un Ouvrage de Du Séjour sur l'anneau de Saturne. Lettres publiées par Ch. Henry. Discours prononcés à la Chambre des pairs. Eloge de Laplace par M. de Pastoret.

Tables générales des quatorze volumes.

C'est certainement Charles Neumann qui a donné, le premier, des séries de fonctions analytiques uniformément convergentes dans une partie *finie*, et à deux dimensions, du plan qui n'est pas un cercle avec son centre dans l'origine, et sans que les séries en question soient des transformations d'une série de puissances, comme celles de Burmann. Il est bien connu que le domaine de convergence des séries de Neumann est l'intérieur d'une ellipse ayant ses foyers dans les points $(\pm 1{,}0)$. Ce résultat de l'illustre Maître m'a vivement intéressé. Dans une lettre adressée à Neumann, j'ai donné des réflexions générales sur de telles séries et j'ai indiqué la possibilité d'une évaluation commune de toutes les séries connues de ce genre. Dans le Chapitre XIII, on trouvera un développement détaillé de ces séries connues et un grand nombre d'autres, nouvelles, je le crois.

Dans ces recherches, je n'étudie que les propriétés analytiques des fonctions métasphériques. De sorte que je ne trouve aucune occasion de mentionner, dans le texte, les recherches aussi essentielles qu'ingénieuses de M. Fejér sur les séries de fonctions sphériques n'étant convergentes que dans la partie de l'axe réelle située entre les points ± 1. Il serait très intéressant d'étudier les séries analogues de fonctions ultrasphériques et d'en déduire peut-être, comme un autre cas particulier, les résultats de l'éminent géomètre concernant les séries de Fourier ordinaires.

Quant à la rédaction de mon présent Livre, je donne dans la première Partie une suite de théorèmes et de formules auxiliaires, de sorte que le lecteur n'a besoin que de la connaissance des fondements de la théorie élémentaire des fonctions analytiques. Cependant, il faut avouer que cette remarque n'est pas exacte pour les deux derniers paragraphes qui appliquent l'intégrale de M. N. de Sonine des fonctions cylindriques.

Table des Matières.

SÉRIES INFINIES. CHAP. X. *Séries de Charles Neumann.* Théorème de Neumann. Généralisations des formules classiques. Généralisations d'autres formules classiques. Autres propriétés des séries neumaniennes. — CHAP. XI. *Séries de François Neumann.* Evaluation d'une série particulière. Le théorème général. Exemples des séries de F. Neumann. — CHAP. XII. *Séries de produits de deux fonctions métasphériques.* Développement d'une seule fonction métasphérique. Théorèmes généraux. — CHAP. XIII. *Séries de fonctions hypergéométriques généralisées.* Séries de première espèce. Séries de seconde espèce. Séries de Ch. Neumann de fonctions cylindriques. Sur quelques séries de polynomes entiers. — CHAP. XIV. *Formules d'addition.* Equations aux dérivées partielles. Première formule d'addition. Autres applications des séries de Ch. Neumann. Seconde formule d'addition. — IV^e PARTIE. INTÉGRALES DÉFINIES. CHAP. XV. *Généralisations des intégrales classiques.* Intégrales de Jacobi et Laplace et formules analogues. L'intégrale de Heine. Les intégrales de Dirichlet. Les intégrales de Dirichlet. — CHAP. XVI. *Applications des séries de Ch. Neumann.* Expressions intégrales des coefficients. Application aux séries particulières. Application des formules d'addition. — CHAP. XVII. *Application d'une intégrale de M. de Sonine.* Les fonctions métasphériques. Les fonctions ultrasphériques.

TRAITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS,

PAR

G.-H. HALPHEN,
Membre de l'Institut.

TROIS VOLUMES GRAND IN-8, AVEC FIGURES.

Ire PARTIE. — *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries;* 1886 .... 15 fr.

IIe PARTIE. — *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888 .... 20 fr.

IIIe PARTIE. — *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et particulièrement à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891 .... 8 fr. 50 c.

Extrait de la Préface.

Dans le domaine des Mathématiques pures on peut distinguer deux parties : l'une, la plus élevée, qui s'augmente constamment, presque toujours par degrés insensibles, ne regarde que les mathématiciens; l'autre, longtemps immuable, s'accroît brusquement, à des intervalles éloignés, par l'adoption de quelque théorie nouvelle : c'est la matière de l'enseignement, ce que doivent retenir et savoir appliquer tous les hommes qui s'adonnent aux sciences exactes et, sans cultiver les Mathématiques, ont toujours besoin de les connaître.

Dans laquelle de ces deux parties faut-il aujourd'hui ranger les fonctions elliptiques? Partout on les enseigne; seuls les mathématiciens savent s'en servir. Elles traversent, semble-t-il, une période de transition. C'est avec l'espoir de hâter la fin de cette période que j'ai entrepris cet Ouvrage.

Trois Volumes contiendront à peu près complète, je l'espère, la théorie des fonctions elliptiques, avec ses principales applications, au point où l'on est aujourd'hui parvenu. Mais, en offrant au lecteur le moyen de s'instruire complètement dans cette partie des Mathématiques, j'ai voulu lui permettre de graduer son instruction. J'ai donc réservé pour le troisième Volume ce qu'il y a de plus abstrait, la théorie de la *transformation*, les applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique supérieure; cette partie ne regarde que les mathématiciens, et les travaux incessants dont elle est actuellement l'objet prouvent qu'elle n'est pas encore parvenue à la dernière perfection.

Titres des Chapitres.

Ire Partie. — Fonctions elliptiques à discriminant positif, avec un argument réel. Arguments imaginaires. Double périodicité. Discriminants négatifs. Propriétés communes aux fonctions *elliptiques, quel que soit le signe du* discriminant. Multiplication. La fonction ζu. Inversion. La fonction σu. Décompositions en éléments simples et en facteurs. Les séries $\mathfrak{S}$. Dérivées par rapport aux invariants et aux périodes. Développement des périodes en séries hypergéométriques. Développement des fonctions elliptiques en séries à doubles indices. Développement des fonctions σ et $\mathfrak{S}$ en produits simples. Développements en séries trigonométriques. Applications de la théorie générale des fonctions à *celle des fonctions elliptiques.*

IIe Partie. — Formules elliptiques pour la rotation des corps. Les mouvements à la Poinsot. Rotation d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe. La courbe élastique gauche. Mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, en l'absence de force accélératrice. La courbe élastique plane sous pression normale uniforme. Lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. Problèmes de Géodésie. Attraction d'un anneau elliptique. Equation d'Euler. Les polygones de Poncelet. Les courbes du premier genre; la cubique plane. Equation de Lamé. Equations différentielles linéaires. Fractions continues et intégrales pseudo-elliptiques.

IIIe Partie. — Division des périodes par 5. Résolution de l'équation du *cinquième degré par les* fonctions elliptiques. Division des périodes par 7. *Fragments divers.* I. Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques, et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$. II. Parties aliquotes de périodes; leur répartition en groupes, quand le diviseur est un nombre premier. III. Fragments relatifs à la transformation.

Ici, au contraire, je me borne à reproduire les leçons que j'ai professées devant les élèves de la Sorbonne et je prends le problème à son début, en supposant connus seulement les principes de l'Analyse et de la Mécanique, ainsi que les lois de Képler et de Newton. Je n'emprunte aux méthodes nouvelles que leurs résultats essentiels, ceux qui sont susceptibles d'une application immédiate, en m'efforçant de les rattacher le plus intimement possible à la méthode classique de la variation des constantes.

D'un autre côté, Tisserand s'est constamment préoccupé de reproduire aussi fidèlement qu'il a pu la pensée des fondateurs de la Mécanique céleste et, en effet, son Livre nous la rend tout entière sous une forme condensée. Je n'avais pas à refaire ce qu'il avait fait et bien fait. J'ai été plus droit au but; le chemin suivi par nos devanciers n'a pas toujours été le plus direct : en pareil cas, j'ai coupé au court; je me privais ainsi de tout ce qu'ils avaient vu en route et qui souvent était plein d'intérêt; mais je n'avais pas à le regretter, puisque Tisserand nous l'avait montré.

Ce nouveau Livre ne dispensera donc pas de lire les deux Livres anciens et dans la suite j'y ferai de fréquents renvois.

Table des Matières du Tome I.

Principes de la Dynamique. Le problème des trois corps. Le mouvement elliptique. Principes de la méthode de Lagrange. Applications de la méthode de Lagrange. Transformations diverses des développements. Le problème restreint. Théorie élémentaire des perturbations séculaires. Cas général du problème des trois corps. Théorème de Poisson. Système des développements. Solutions périodiques. Principe de la méthode de Delaunay.

Table des Matières du Tome II (Iʳᵉ Partie).

Le problème de la fonction perturbatrice. Application des fonctions de Bessel. Propriétés générales de la fonction perturbatrice. Les coefficients de Laplace. Les polynomes de Tisserand. Les opérateurs de Newcomb. Convergence des séries. Relations de récurrence et équations différentielles. Calcul numérique des coefficients. Termes d'ordre élevé.

Table des Matières du Tome II (IIᵉ Partie).

Généralités sur la théorie de la Lune. La variation. Mouvement du nœud. Mouvement du périgée. Termes d'ordre supérieur. Seconde méthode. Action des planètes. Accélérations séculaires.

Table des Matières du Tome III.

Introduction. — Iʳᵉ Partie. *Théorie générale des marées.* Oscillations d'un système mécanique. Application des principes généraux au phénomène des marées. Etude des marées à longue période. Etude des marées à courte période ou marées dynamiques. Influence de la courbure. Oscillations d'un liquide recouvrant une sphère attirante non tournante. Influence de la force centrifuge composée. Oscillations d'un liquide pesant dans un vase tournant. Oscillations d'un liquide pesant recouvrant une sphère tournante Etude des marées statiques de la seconde sorte. Influence du frottement. Etude des marées se produisant dans un réseau de canaux étroits. Etude des procédés d'intégration des équations du problème des marées. — IIᵉ Partie. *Méthodes pratiques de prédiction des marees.* Analyse harmonique. Méthode de Laplace. — IIIᵉ Partie. *Synthèse des observations. Comparaison avec la théorie.* Résultats des observations. Résultats expérimentaux. Essais de synthèse des observations. Théorie de Whewell Théorie de Harris. — IVᵉ Partie. *Marées fluviales.* — Vᵉ Partie. *Etude de l'influence des marées sur les corps célestes.* Marées du noyau interne du globe. Influence des marées sur les mouvements des corps célestes. — PLANCHES. I. Lignes cotidales de la marée semi-diurne, d'après Rollin A. Harris. II. Systèmes semi-diurnes, d'après Rollin A. Harris.

Extrait de l'Introduction du Tome I.

Le Problème des trois corps a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté. Une intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, c'est aux procédés d'approximation que l'on a dû faire appel. Les méthodes employées d'abord ont consisté à chercher des développements procédant suivant les puissances des masses. Au commencement de ce siècle, les conquêtes de Lagrange et de Laplace et, plus récemment, les calculs de Le Verrier, ont amené ces méthodes à un tel degré de perfection qu'elles ont pu suffire largement jusqu'ici aux besoins de la pratique. Je puis ajouter qu'elles y suffiront encore longtemps, malgré quelques divergences de détails; il est certain néanmoins qu'elles n'y suffiront pas toujours, un peu de réflexion le fait très aisément comprendre.

Le but final de la Mécanique céleste est de résoudre cette grande question de savoir si la loi de Newton explique à elle seule tous les phénomènes astronomiques; le seul moyen d'y parvenir est de faire des observations aussi précises que possible et de les comparer ensuite aux résultats du calcul. Ce calcul ne peut être qu'approximatif et il ne servirait à rien, d'ailleurs, de calculer plus de décimales que les observations n'en peuvent faire connaître. Il est donc inutile de demander au calcul plus de précision qu'aux observations; mais on ne doit pas non plus lui en demander moins. Aussi l'approximation dont nous pouvons nous contenter aujourd'hui sera-t-elle insuffisante dans quelques siècles. Et, en effet, en admettant même, ce qui est très improbable, que les instruments de mesure ne se perfectionnent plus, l'accumulation seule des observations pendant plusieurs siècles nous fera connaître avec plus de précision les coefficients des diverses inégalités.

Cette époque, où l'on sera obligé de renoncer aux méthodes anciennes, est sans doute encore très éloignée; mais le théoricien est obligé de la devancer, puisque son œuvre doit précéder, et souvent d'un grand nombre d'années, celle du calculateur numérique.

Il ne faudrait pas croire que, pour obtenir les éphémérides avec une grande précision pendant un grand nombre d'années, il suffira de calculer un plus grand nombre de termes dans les développements auxquels conduisent les méthodes anciennes.

Ces méthodes, qui consistent à développer les coordonnées des astres suivant les puissances des masses, ont, en effet, un caractère commun qui s'oppose à leur emploi pour le calcul des éphémérides à longue échéance. Les séries obtenues contiennent des termes dits *séculaires*, où le temps sort des signes sinus et cosinus, et il en résulte que leur convergence pourrait devenir douteuse si l'on donnait à ce temps t une grande valeur.

La présence de ces termes séculaires ne tient pas à la nature du problème, mais seulement à la méthode employée. C'est là un point dont tous les astronomes ont depuis longtemps le sentiment, et les fondateurs de la Mécanique céleste eux-mêmes, dans toutes les circonstances où ils ont voulu obtenir des formules applicables à longue échéance, comme par exemple dans le calcul des inégalités séculaires, ont dû opérer d'une autre manière et renoncer à développer simplement suivant les puissances des masses. L'étude des inégalités séculaires par le moyen d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants peut donc être regardée comme se rattachant plutôt aux méthodes nouvelles qu'aux méthodes anciennes.

Aussi tous les efforts des savants géomètres, tels que Delaunay, Hill, Gyldén, Lindstedt, dans la seconde partie de ce siècle, ont-ils eu pour but principal de faire disparaître les termes séculaires. Grâce à leurs travaux, la difficulté prevenant des termes séculaires peut être regardée comme définitivement vaincue et les procédés nouveaux suffiront probablement pendant fort longtemps encore aux besoins de la pratique.

Tout n'est pas fait cependant. La plupart de ces développements ne sont pas convergents au sens que les géomètres donnent à ce mot. Sans doute, cela importe peu pour le moment, puisque l'on est assuré que le calcul des premiers termes donne une approximation très satisfaisante; mais il n'en est pas moins vrai que ces séries ne sont pas susceptibles de donner une approximation indéfinie. Il viendra donc aussi un moment où elles deviendront insuffisantes. D'ailleurs, certaines conséquences théoriques que l'on pourrait être tenté de tirer de la forme de ces séries ne sont pas légitimes à cause de leur divergence. C'est ainsi qu'elles ne peuvent servir à résoudre la question de la stabilité du système solaire.

La discussion de la convergence de ces développements doit attirer l'attention des géomètres, d'abord pour les raisons que je viens d'exposer et en outre pour la suivante : le but de la Mécanique céleste n'est pas atteint quand on a calculé des éphémérides plus ou moins approchées sans pouvoir se rendre compte du degré d'approximation obtenu. Si l'on constate, en effet, une divergence entre ces éphémérides et les observations, il faut que l'on puisse reconnaître si la loi de Newton est en défaut ou si tout peut s'expliquer par l'imperfection de la théorie. Il importe donc de déterminer une limite supérieure de l'erreur commise, ce dont on ne s'est peut-être pas assez préoccupé jusqu'ici. Or les méthodes qui permettent de discuter les convergences nous donnent en même temps cette limite supérieure, ce qui en accroît beaucoup l'importance et l'utilité. On ne devra donc pas s'étonner de la place que je leur accorderai dans cet Ouvrage, bien que je n'en aie peut-être pas tiré tout le parti qu'il eût convenu.

Je me suis moi-même occupé de ces questions, et j'y ai consacré un Mémoire qui a paru dans le tome XIII des *Acta mathematica;* je m'y suis surtout efforcé de mettre en évidence les rares résultats relatifs au Problème des trois Corps, qui peuvent être établis avec la rigueur absolue qu'exigent les Mathématiques. C'est cette rigueur qui seule donne quelque prix à mes théorèmes sur les solutions périodiques, asymptotiques et doublement asymptotiques. On y trouvera, en effet, un terrain solide sur lequel on pourra s'appuyer avec confiance, et ce sera là un avantage précieux dans toutes les recherches, même dans celles où l'on ne sera pas astreint à la même rigueur.

Il m'a semblé, d'autre part, que mes résultats me permettaient de réunir dans une sorte de synthèse la plupart des méthodes nouvelles récemment proposées, et c'est ce qui m'a déterminé à entreprendre le présent Ouvrage.

Dans ce premier Volume, j'ai dû me borner à l'étude des solutions périodiques du premier genre, à la démonstration de la non-existence des intégrales uniformes, ainsi qu'à l'exposition et à la discussion des méthodes de M. Lindstedt.

Je consacrerai les Volumes suivants à la discussion des méthodes de M. Gyldén, à la théorie des invariants intégraux, à la question de la stabilité, à l'étude des solutions périodiques du second genre, des solutions asymptotiques et doublement asymptotiques, et enfin aux résultats que je pourrais obtenir d'ici à leur publication.

Table des Matières du Tome I.

Extrait de l'avant-propos du Tome II.

Les méthodes que je vais exposer dans ce second Volume sont dues aux efforts d'un grand nombre d'astronomes contemporains, mais c'est à l'exposition de celles de M. Gyldén que je consacrerai le plus de pages.

Toutes ces méthodes ont un caractère commun ; les savants qui les ont imaginées se sont efforcés de développer les coordonnées des astres en séries dont tous les termes soient périodiques et de faire disparaître ainsi les termes dits *séculaires* que l'on rencontrait avec les anciens procédés d'approximation successive, et où le temps sortait des signes sinus et cosinus; mais, en revanche, ces savants ne se sont pas préoccupés de savoir si les séries qu'ils obtenaient étaient convergentes au sens que les géomètres donnent à ce mot.

Aussi, tandis que les résultats obtenus dans le premier Volume étaient établis avec toute la rigueur à laquelle les mathématiciens sont accoutumés, ceux que je vais exposer ne sont vrais qu'avec une certaine approximation, qui est certainement très grande, d'autant plus grande que les masses sont plus petites.

Les termes de ces séries décroissent d'abord très rapidement et se mettent ensuite à croître; mais, comme les astronomes s'arrêtent aux premiers termes de la série et bien avant que ces termes aient cessé de décroître, l'approximation est suffisante pour les besoins de la pratique. La divergence de ces développements n'aurait d'inconvénient que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabilité du système solaire.

Dans les Chapitres suivants, j'expose les plus simples des méthodes nouvelles, celles qui sont dues à MM. Newcomb et Lindstedt. Je montre comment on peut triompher de certaines difficultés que l'on rencontre quand on veut les appliquer au cas le plus général du Problème des trois Corps.

J'exposerai ensuite les premières méthodes de M. Gyldén ; fondées sur des principes qui ne sont pas sans analogie avec ceux dont je viens de parler, elles permettent de triompher des mêmes obstacles ; mais, en outre, beaucoup de difficultés de détail sont vaincues par des artifices aussi élégants qu'ingénieux.

Dans l'étude de ces méthodes, je m'écarte souvent beaucoup du mode d'exposition de leurs auteurs ; je ne voulais pas, en effet, refaire ce qu'ils avaient si bien fait : aussi me suis-je moins préoccupé de mettre ces méthodes sous la forme la plus commode pour le calculateur numérique que d'en faire comprendre l'esprit, afin que la comparaison en devînt facile.

Table des Matières du Tome II.

Table des Matières du Tome III.

tanées. Remarques sur le théorème de M. Sturm. Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés. Remarques sur un Mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. Sur le nombre limité d'irrationnalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés. Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. Lettre à Cayley sur les formes cubiques. Extrait d'une Lettre à J.-J. Sylvester. Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. Remarque sur un théorème de Cauchy. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques.

Extrait de l'Avertissement du Tome II.

Comme pour le premier Volume, nous suivons à peu près dans le Tome II l'ordre chronologique. Les Mémoires ici reproduits vont de 1858 à 1872; nous y avons joint des Notes publiées par Hermite dans différents Ouvrages, quelques pages de son *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique, et une Lettre de M. Tannery se rapportant aux fonctions modulaires.

Table des Matières du Tome II.

Avertissement. Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Lettre de Charles Hermite à M. Jules Tannery sur les fonctions modulaires. Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Sur quelques théorèmes d'Algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré. Sur la théorie des équations modulaires. Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré. Sur l'interpolation. Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées. Extrait d'une Lettre à M. Borchardt sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires. Extrait de deux lettres à M. Borchardt sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes du cinquième degré. Lettre adressée à M. Liouville sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'Arithmétique. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. Extrait d'une lettre à l'éditeur sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. Sur les théorèmes de M. Kronecker, relatifs aux formes quadratiques. Sur la théorie des formes quadratiques. Remarques sur le développement de cos am x. Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques. Sur les fonctions de sept lettres. Extrait d'une Lettre de M. Hermite à M. Brioschi. Sur un nouveau développement en série des fonctions. Extrait d'une Lettre de M. Hermite à M. Borchardt. Sur deux intégrales doubles. Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. Sur l'équation du cinquième degré. Sur les invariants des formes du cinquième degré. Sur l'invariant gauche des formes du sixième degré. Sur la théorie des polygones homogènes du second degré. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. Sur la transcendante E$n$. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce. Sur l'élimination des fonctions arbitraires.

Extrait de l'Avertissement du Tome III.

Les Mémoires ici reproduits vont de 1872 à 1880. Ce Volume commence toutefois par un travail inédit *Sur l'extension du théorème de Sturm à un système d'équations simultanées*, datant de la jeunesse d'Hermite, retrouvé récemment dans les papiers de Liouville. On lira aussi dans ce Tome divers Chapitres empruntés au *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, une Note publiée dans l'*Algèbre supérieure* de Serret sur les équations résolubles par radicaux, et enfin une leçon sur *l'équation de Lamé*, faite à l'École Polytechnique pendant l'hiver de 1872-73, qui, à notre connaissance, contient les premières recherches d'Hermite sur une question qu'il devait approfondir quelques années plus tard. Le portrait placé au commencement du Volume représente Hermite vers l'âge de soixante-cinq ans.

Table des Matières du Tome III

ŒUVRES DE FOURIER

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

M. GASTON DARBOUX,

SOUS LES AUSPICES DU

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME I. — *Théorie analytique de la Chaleur.* In-4; 1888....... **25 fr**

TOME II. — *Mémoires divers.* In-4, avec un portrait de Fourier, reproduit par la photoglyptographie; 1890........ **25 fr**

Avertissement du Tome I.

L'édition des Œuvres de Fourier, dont nous publions aujourd'hui le premier Volume, était réclamée depuis longtemps par les physiciens et les géomètres; entreprise avec l'appui bienveillant du Ministère de l'Instruction publique, elle prendra place dans la collection des Documents inédits, à côté des Œuvres de Laplace, de Lagrange, de Lavoisier, de Fresnel et de Cauchy. Par l'importance de ses découvertes, par l'influence décisive qu'il a exercée sur le développement de la Physique mathématique, Fourier méritait l'hommage qui est rendu aujourd'hui à ses travaux et à sa mémoire. Son nom figurera dignement à côté des noms, illustres entre tous, dont la liste, destinée à s'accroître avec les années, constitue dès à présent un véritable titre d'honneur pour notre pays.

La *Théorie analytique de la Chaleur,* qui forme à elle seule ce premier Volume, a paru en 1822. Ce bel Ouvrage, que l'on peut placer sans injustice à côté des écrits scientifiques les plus parfaits de tous les temps, se recommande par une exposition intéressante et originale des principes fondamentaux; il éclaire de la lumière la plus vive et la plus pénétrante toutes les idées essentielles que nous devons à Fourier et sur lesquelles doit reposer désormais la Philosophie naturelle; mais il contient, nous devons le reconnaître, beaucoup de négligences, des erreurs de calcul et de détail que Fourier a su éviter dans d'autres écrits. Guidé par les conseils de notre éditeur, M. Gauthier-Villars, nous nous sommes appliqué à faire disparaître les incorrections typographiques. Nous avons refait les calculs, corrigé avec le plus grand soin les renvois inexacts, les erreurs de notation et d'impression, mais en nous attachant toujours à respecter la forme si élégante et si pure que Fourier donne habituellement à sa pensée. Un membre distingué de l'Enseignement supérieur, M. Paul Morin, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, nous a beaucoup aidé dans cette partie essentielle de notre tâche : nous nous plaisons à lui adresser ici nos plus vifs remerciements. M. Morin veut bien nous continuer son concours pour le second Volume, dont l'impression est déjà commencée.

Les recherches de Fourier relatives à la théorie de la chaleur remontent à la fin du XVIII^e siècle; elles ont été communiquées à l'Académie des Sciences le 21 décembre 1807. Cette première publication ne nous est pas parvenue; on ne la connaît que par un extrait de quatre pages inséré en 1808 au *Bulletin de la Société philomathique;* elle a été lue et déposée, mais a, sans doute, été retirée par Fourier dans le courant de l'année 1810.

L'Académie ayant mis au concours, pour 1811, la question suivante : « Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes », Fourier envoya, le 28 septembre 1811, un travail très étendu, formé, d'après ses propres déclarations, du Mémoire primitivement soumis à l'Académie et des notes qu'il y avait successivement ajoutées. Ce nouveau travail fut couronné dans la séance publique du 6 janvier 1812. Les juges du concours étaient Lagrange, Laplace, Malus, Haüy et Legendre. Leur rapport nous a été conservé. Toutes les appréciations, sauf une peut-être, y sont d'une rigoureuse exactitude, et, cependant, il est permis de penser que, dans son ensemble, il ne rend pas pleine justice aux efforts et aux découvertes de Fourier.

« Cette pièce, dit le Rapporteur en parlant du Mémoire de Fourier, renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. »

Le manuscrit de Fourier fait partie, aujourd'hui encore, des Archives de l'Académie. Le grand géomètre, devenu Secrétaire perpétuel après la mort de Delambre, l'a fait imprimer, sans y apporter aucun changement, dans les Volumes de *Mémoires* pour 1819-1820 et 1821-1822, deux ans après la publication de la *Théorie de la Chaleur.* Fourier désirait, sans doute, établir ainsi d'une manière incontestable ses droits de priorité; car la première Partie du Mémoire de 1811, celle qui a paru dans le Volume pour 1819-1820, ne diffère qu'en des points tout à fait secondaires de la rédaction définitive à laquelle il s'est arrêté dans la *Théorie de la Chaleur.* Nous avons donc renoncé à reproduire cette première Partie; mais la seconde, qui a été imprimée en 1826, dans le Volume des *Mémoires* pour 1821-1822, offre le plus vif intérêt; elle commencera notre second Volume et sera, croyons-nous, bien accueillie de tous.

Il y a aujourd'hui quatre-vingts ans que Fourier fit à l'Académie des Sciences sa première Communication sur les études qui ont occupé toute sa vie. Les méthodes dont l'illustre savant a enrichi la Science trouvent maintenant devant elles un champ vaste et presque inexploré d'applications nouvelles dans la théorie moderne de l'électricité. Puisse notre édition les répandre encore, puisse-t-elle maintenir et accroître dans notre pays et parmi nos jeunes géomètres le goût de la Physique mathématique. « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue, elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. » C'est par ces réflexions, empruntées à l'admirable *Discours préliminaire* que l'on va lire, que nous terminerons ces quelques lignes, dans lesquelles nous nous proposions surtout de remercier tous ceux qui ont pris part à notre publication ou qui l'ont rendue possible. G. D.

Table des Chapitres et Sections du Tome I.

Extrait de l'Avertissement du Tome II.

Les Mémoires que nous publions dans ce second Volume se distribuent en trois groupes distincts.

Les plus importants peuvent être considérés comme formant un complément naturel de la *Théorie analytique de la chaleur*. On y trouvera développées les recherches que Fourier a poursuivies pendant tant d'années sur la théorie physique de la chaleur rayonnante, sur le refroidissement séculaire du globe terrestre, sur la température des espaces planétaires.

Une autre série de travaux se rapporte à la résolution des équations numériques. Fourier a, comme on sait, apporté sur cette importante question des vues qui étaient absolument neuves, et qui se sont montrées fécondes entre les mains de ses successeurs. Nous avons aussi, par quelques emprunts à l'*Histoire de l'Académie* pour les années 1823 et 1824, pu faire connaître d'une manière assez précise certaines idées sur la théorie des inegalités auxquelles l'illustre géomètre attachait une importance qu'il est permis, aujourd'hui, de trouver un peu exagérée.

Enfin, sur l'invitation de notre maître M. Joseph Bertrand, nous avons tenu à faire connaître quelques-uns des Mémoires sur l'analyse des probabilités que Fourier a publiés pour éclairer les recherches statistiques dont la direction lui avait été confiée par le comte de Chabrol.

Un seul travail échappe à cette classification : il mérite pourtant d'être signalé ici, car il a servi de début à Fourier. C'est le *Mémoire sur le principe des vitesses virtuelles*, publié en 1796 dans le V^{e} Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Nous avons reproduit ce Mémoire, remarquable à bien des égards, où se trouve donnée pour la première fois la démonstration du principe des vitesses virtuelles qui est aujourd'hui généralement adoptée.

Dans l'Avertissement du premier Volume, nous avions signalé comme perdu le premier Mémoire de Fourier sur la théorie de la chaleur, celui qu'il a présenté le 21 décembre 1807 à la première Classe de l'Institut. Nous l'avons heureusement retrouvé dans le riche Catalogue de la Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées, et nous le reproduisons dans ce volume.

La liste des écrits scientifiques de Fourier, que le lecteur trouvera à la suite de cet Avertissement et que nous avons tâché de rendre aussi complète que possible, montrera, nous l'espérons, que rien d'essentiel n'a été oublié dans notre édition. Comme nous n'avons jamais songé à publier les Œuvres complètes, littéraires et scientifiques, de Fourier, nous considérons notre tâche comme terminée, au moins pour le moment.

Table des Matières du Tome II.

liarisés avec les formes de l'enseignement anglais. Dans le même but, on a complété l'Ouvrage par des Notes sur certaines questions qui ne sont pas encore entrées dans notre enseignement (*Théorie des Quaternions*, *Théorie des Sphériques harmoniques*, etc.), et par des renseignements bibliographiques.

Sous cette forme, l'édition française peut être lue avec fruit par nos professeurs et même par les élèves des Facultés et des Écoles spéciales.

Avec les progrès qui s'accomplissent tous les jours dans l'utilisation pratique de l'Électricité, les ingénieurs-électriciens sont amenés inévitablement à perfectionner leurs connaissances théoriques, spécialement en ce qui concerne les mesures électriques. L'Ouvrage de Maxwell contient précisément un bon nombre de Chapitres, d'une lecture aisée, où se trouvent exposées, avec une clarté parfaite, les théories de ces méthodes rigoureuses dont l'usage est devenu si général. Les Notes relatives aux questions soulevées par le dernier congrès des électriciens ajouteront encore à l'intérêt qui s'attache actuellement à ces études. L'ingénieur-électricien trouvera donc également grand profit à consulter et à méditer le livre de Maxwell

TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

électrisée. Surface électrisée d'un conducteur. Des lignes de force. Du pouvoir inducteur spécifique. Distribution apparente de l'électricité.

CHAPITRE III. — **Du travail électrique et de l'énergie d'un système de conducteurs.** — Du travail que doit exécuter un agent extérieur pour charger d'une manière donnée un système électrisé. Théorie d'un système de conducteurs. Dimensions des coefficients. De certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients. Travail des forces électriques pendant le déplacement d'un système de conducteurs isolés et électrisés. Travail des forces électriques pendant le déplacement d'un système dont les potentiels sont maintenus constants. De la comparaison des systèmes électrisés semblables.

CHAPITRE IV. — **Théorèmes généraux.** Théorème de Green. Énoncé du théorème de Green. Fonction de Green. Théorème de Thomson. Limites entre lesquelles doit être comprise la capacité électrique d'un conducteur.

CHAPITRE V. — **Action mécanique entre deux systèmes électrisés.**

CHAPITRE VI. — **Des points et des lignes d'équilibre.** Théorème d'Earnshaw.

CHAPITRE VII. — **Forme des surfaces équipotentielles et des lignes d'induction dans des cas simples.** Note I, relative à la construction de la planche III; par M. *A. Cornu.* Note II, relative au tracé des lignes de force dans le cas où le champ électrique est symétrique autour d'un axe de révolution; par MM. *A. Cornu et A. Potier.*

CHAPITRE VIII. — **Cas simples de distribution.** Deux plans parallèles. Deux surfaces sphériques concentriques. Deux surfaces cylindriques infinies ayant même axe.

CHAPITRE IX. — **Sphériques harmoniques.** Des points singuliers où le potentiel devient infini. Harmoniques conjugués. Distribution de l'électricité sur un conducteur à peu près sphérique. Note sur les sphériques harmoniques; par M. *Potier.*

CHAPITRE X. — **Surfaces du deuxième degré homofocales.** Solutions particulières. Hyperboloïdes à deux nappes. Hyperboloïde à une nappe. Ellipsoïdes. Cas particuliers.

CHAPITRE XI. — **Théorie des images électriques et de l'inversion électrique.** Théorie des images électriques. Images dans une surface plane conductrice indéfinie. De l'inversion électrique. Sur les systèmes finis d'images successives. Cas de deux sphères orthogonales. Distribution de l'électricité sur trois surfaces sphériques orthogonales. Système de quatre sphères orthogonales soumis à l'influence d'un point électrisé. Deux sphères qui ne se coupent pas. Distribution électrique sur deux sphères en contact. Application de l'inversion électrique au cas d'une calotte sphérique. Distribution sur un ellipsoïde. Distribution sur un disque. Application du principe de l'inversion électrique. Influence d'un point électrisé situé sur la partie non employée de la surface sphérique. Influence d'un nombre quelconque de points électrisés.

CHAPITRE XII. **Théorie des fonctions conjuguées à deux dimensions.** Définitions des fonctions conjuguées. Représentation graphique d'une fonction qui est la somme de deux fonctions données. Théorèmes additionnels relatifs aux fonctions conjuguées. Exemple I : Inversion. Inversion des figures à deux dimensions. Exemple II : Images électriques dans les figures à deux dimensions. Exemple III : Transformation du cas précédent par Neumann. Exemple IV : Distribution près de l'arête d'un conducteur formé de deux faces planes. Exemple V : Ellipses et hyperboles. Exemple VI : *Pl. XI.* Correction pour l'épaisseur du plateau. Densité près des bords. Théorie de l'anneau de garde de Thomson. Exemple VII : *Pl. XII.* Exemple VIII : Théorie d'un grillage de fils parallèles (*Pl. XIII*). Méthode d'approximation.

CHAPITRE XIII. — **Instruments électrostatiques.** Instruments électrostatiques. Machines électriques. L'électrophore de Volta. Des machines qui produisent de l'électricité au moyen de travail mécanique. Des électromètres et des électroscopes. Balance de torsion de Coulomb. Électromètres pour la mesure des potentiels. De la mesure du potentiel électrique. Mesurer le potentiel en un point de l'air. Mesure de la densité superficielle ou de la distribution. Théorie du plan d'épreuve. Des accumulateurs électriques et de la mesure des capacités. Le condensateur à anneau de garde. Comparaison de la capacité des condensateurs.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

CHAPITRE III. — **Solénoïdes et feuillets magnétiques.** Formes particulières d'aimants. Feuillets magnétiques. Forme du potentiel des aimants solénoïdaux et lamellaires. Des angles solides. Energie potentielle d'un feuillet magnétique placé dans un champ de force magnétique.

CHAPITRE IV. — **Aimantation induite.** Définition du coefficient d'aimantation induite.

CHAPITRE V. — **Problèmes particuliers relatifs à l'induction magnétique.** Feuillet sphérique creux. Cas d'une sphère où les coefficients d'aimantation ne sont pas les mêmes dans les différentes directions. Magnétisme d'un navire. — Pl. XV : Cylindre aimanté transversalement, placé nord et sud, dans un champ magnétique uniforme. — Pl. XVI : Cylindre aimanté transversalement placé est et ouest dans un champ magnétique uniforme.

CHAPITRE VI. — **Théorie du magnétisme induit de Weber.** — Effet de l'aimantation sur les dimensions de l'aimant.

CHAPITRE VII. — **Mesures magnétiques.** Théorie de la méthode du miroir. Détermination de la direction de l'axe d'un aimant et de la direction du magnétisme terrestre. Mesure des forces magnétiques. — Méthode des sinus. — Méthodes des oscillations. Suspension bifilaire.

CHAPITRE VIII. — **Du Magnétisme terrestre.** — Cartes magnétiques. Trouver la partie de la force magnétique observée qui est due aux causes extérieures et celle qui est due aux causes intérieures.

Quatrième Partie. — Électromagnétisme.

CHAPITRE Ier. — **Force électromagnétique.** Action d'un circuit électrique sur un système magnétique. Réaction du système magnétique sur le courant électrique. **Note I.** — De l'équivalence d'un courant plan infiniment petit et d'un petit aimant de même puissance, par A. Cornu. — **Note II** relative à la construction de la Pl. XVII, par A. Cornu. — Pl. XVII et XVIII : Champ magnétique uniforme troublé par un courant électrique dans un conducteur rectiligne. — Pl. XVII *bis* : Construction des lignes de force, des lignes équipotentielles.

CHAPITRE II. — **Recherches d'Ampère sur l'action mutuelle de deux courants.**

CHAPITRE III. — **Induction des courants électriques.** Phénomènes d'induction électromagnétique. Loi de Lenz.

CHAPITRE IV. — **Induction d'un courant sur lui-même.**

CHAPITRE V. — **Sur les équations du mouvement d'un système à liaisons.** Les variables. Les vitesses. Les forces. Les quantités de mouvement. Accroissement de l'énergie cinétique. Equations du mouvement de Hamilton. Expression de l'énergie cinétique en fonction des quantités de mouvement et des vitesses. **Note** relative aux équations de Lagrange, par A. Potier.

CHAPITRE VI. — **Théorie dynamique de l'Electromagnétisme.**

CHAPITRE VII. — **Théorie des circuits électriques.** Force électromotrice. Force électromagnétique. Action mécanique entre les deux circuits.

CHAPITRE VIII. — **Exploration du champ au moyen du circuit secondaire.** Force électromotrice agissant sur la pièce glissante. Force électromagnétique agissant sur la pièce glissante. Quatre définitions d'une ligne d'induction magnétique. Equations générales de la force électromotrice. Force électromagnétique agissant sur un conducteur traversé par un courant et mobile dans un champ magnétique.

CHAPITRE IX. — **Equations générales du champ magnétique.** Expressions en quaternions des équations électromagnétiques.

CHAPITRE X. — **Dimensions des unités électriques.** Nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique. Système pratique d'unités électriques.

CHAPITRE XI. — **Energie et tensions dans le champ électromagnétique.** Énergie électrostatique, magnétique, électrocinétique.

CHAPITRE XII. — **Nappes de courant.** Fonction de courant. Induction de courants électriques dans une nappe de conductibilité infinie. Théorie d'une nappe de courant plane. Théorie du disque tournant d'Arago. Nappe de courant sphérique. Aimant cylindrique ou solénoïde. Solénoïde sans fin.

CHAPITRE XIII. — **Courants parallèles.** Trouver la répulsion X entre deux parties du fil. Force électromotrice nécessaire pour produire un courant d'in-

53951. Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

Abréviations.

Dans les publications de l'académie des sciences de Paris, H. signifie Histoire; M. signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

I 2, 19 — renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, *š* se prononce comme *ch* dans *chat*, *ž* se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numismatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomathique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift.