COURS

DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

COURS

DE

MÉCANIQUE

ANALYTIQUE

PAR

J. GRAINDORGE

CHEVALIER DE L'ORDRE DE LÉOPOLD

DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

TOME III

MÉCANIQUE DES FLUIDES

—

ADDITIONS

HECTOR MANCEAUX, ÉDITEUR

1893

TABLE DES MATIÈRES

QUATRIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES FLUIDES

LIVRE PREMIER

HYDROSTATIQUE

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

LIVRE II

HYDRODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

ADDITIONS

NOTIONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

ERRATA

Page 78, ligne 9, *lisez :* $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{g}{k(1+\alpha t)}dz.$

» 81, dernière ligne, *lisez :* $\dfrac{p_0}{p} = \dfrac{g_0 h_0}{g'h}.$

» 108, ligne 5 en bas, *lisez :* Cette équation (4) servira à déterminer la vitesse c à l'orifice de sortie. Cette vitesse étant connue, l'équation (2) déterminera la vitesse u dans une section quelconque ω, et l'équation (3) donnera la pression p dans cette section.

» 140, ligne 4 en bas, *lisez :* $A\sqrt{2g\left(h + \dfrac{p_0}{\varpi} - \dfrac{p_1}{\varpi}\right)}.$

» 160, ligne 4, *lisez :* $\dfrac{V^2}{2g} = h + \dfrac{p_0}{\varpi} - \dfrac{p}{\varpi} - \dfrac{(V'-V)^2}{2g}.$ (4)

» 279, dernière ligne, *lisez :* $\Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}$.

» 334, ligne 10, *au lieu de :* suivant Oz, *lisez :* suivant Ox.

» 338, ligne 2 en bas, *lisez :* Or, les forces élastiques ap_x, bp_y, cp_z et $p'\omega'$, exercées sur les faces, sont du second ordre.

» 352, ligne 19, *au lieu de :* la même direction, *lisez :* les mêmes directions.

» 350, ligne 9, *lisez :*

$$\frac{x'-x}{Pp_{z,y} + p_{y,x}\,p_{z,x} - p_{x,x}\,p_{z,y}} + \frac{y'-y}{Pp_{z,x} + p_{y,x}\,p_{z,y} - p_{y,y}\,p_{z,x}} + \frac{z'-z}{Pp_{y,x} + p_{z,x}\,p_{z,y} - p_{z,z}\,p_{y,x}} = 0.$$

» 354, ligne 10, *au lieu de :* ω, *lisez :* ω_1.

COURS
DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE DES FLUIDES.

LIVRE I.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes fondamentaux.

1. Nous allons étudier maintenant les conditions de l'équilibre et du mouvement des fluides. Cette partie de la Mécanique s'appelle la *Mécanique des fluides*[1].

On donne le nom de *fluides* à des corps formés de molécules très rapprochées les unes des autres,

1. Elle porte aussi le nom d'*Hydraulique*, lorsqu'elle est étudiée particulièrement au point de vue de ses applications usuelles.

et jouissant d'une très grande mobilité les unes par rapport aux autres. L'*Hydrostatique* a pour objet l'étude des lois de l'équilibre des fluides. C'est la *Statique des fluides*.

2. La *fluidité parfaite* suppose que les molécules puissent glisser les unes sur les autres sans exercer aucun frottement. Les fluides, tels qu'ils existent dans la nature, ne jouissent pas d'une fluidité parfaite. Ils possèdent une certaine *viscosité* ou *cohésion*, qui s'oppose au mouvement relatif de leurs molécules. Cependant, la plupart d'entre eux se rapprochent suffisamment de cette fluidité parfaite, pour que nous puissions, sans erreur sensible, les supposer parfaitement fluides.

On divise les fluides en *liquides* et *gaz* ou *fluides aériformes*.

Les *liquides* n'éprouvent que des variations de volume inappréciables sous l'action de pressions même très grandes. C'est pour cette raison qu'on les appelle *fluides incompressibles*. Nous les considérerons comme jouissant d'une incompressibilité absolue.

Les *gaz*, au contraire, sont *compressibles*. On peut, en les soumettant à des pressions, réduire leur volume. Si la pression vient à cesser, le gaz revient de lui-même à son volume primitif, pourvu que la température n'ait pas varié. On donne aux gaz, pour cette raison, le nom de *fluides élastiques*.

Les fluides étant des systèmes de points matériels, les lois et les propriétés générales de l'équilibre et du mouvement des systèmes leur sont applicables. Mais, à cause de l'ignorance où nous sommes des liaisons et des réactions intérieures dans ces systèmes, on a dû fonder la théorie des fluides sur certains principes spéciaux tirés de l'expérience et que nous allons faire connaître.

3. Considérons un fluide quelconque, contenu dans un vase ouvert ou fermé, et en équilibre sous l'action de forces quelconques. Ce fluide exercera une pression sur les parois du vase qui le renferme. Cette pression peut varier d'un point à un autre. Nous allons définir ce que l'on entend par *pression en un point de la paroi.* A cet effet, considérons un élément quelconque de la paroi du vase, et supposons cet élément plan. Il éprouvera de la part du fluide une certaine pression, et la direction de cette pression est *normale à la surface de l'élément.* On peut facilement s'en assurer de la manière suivante: Pratiquons dans l'enveloppe une ouverture plane, dont la surface soit égale à ω. Imaginons un bout de tuyau adapté à cette ouverture, et faisons glisser dans ce tuyau un piston A. L'expérience nous apprend que les forces qu'il faut appliquer sur le piston A pour le maintenir en équilibre, se réduisent à une force normale à l'aire ω, et appliquée en un point de cette aire.

En divisant la pression exercée sur l'élément ω par l'aire de cet élément, on a la *pression moyenne sur cet élément,* ou la *pression par unité de surface* sur cet élément.

On appelle *pression en un point* M donné de la paroi, la limite de la pression moyenne, lorsque la surface ω de l'élément devient infiniment petite.

4. Nous admettrons comme *second principe expérimental* que, si une certaine quantité de fluide, en équilibre sous l'action de forces quelconques, remplit exactement un vase fermé de toutes parts, et si, au moyen d'un piston, on exerce une pression quelconque sur une portion de la surface de ce fluide, *cette pression* *est transmise avec la même intensité sur toute portion équivalente de la surface des parois*. Par conséquent, sur deux portions inégales, la pression est en raison directe des aires, pourvu que ces surfaces soient planes. Pour les surfaces courbes, il n'en sera de même que pour des portions infiniment petites. Si nous considérons, au contraire, une portion finie, la pression sur chaque élément de surface étant normale à cet élément, les pressions élémentaires ne seront pas parallèles, et, par conséquent, ces forces ne se composent pas en une force unique.

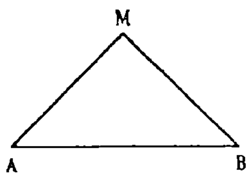
5. Les deux principes que nous venons d'établir pour les parois des vases, s'appliquent aux pressions intérieures. Un *élément* placé à l'*intérieur du vase* est de même soumis à une pression normale à cet élément. En effet, le fluide étant supposé en équilibre, l'équilibre ne serait pas troublé si l'on supposait une partie du fluide solidifiée. On peut donc supposer au point M une paroi plane solide, et sur chaque élément de cette surface on aura une pression normale à son plan, tout comme dans le premier cas (n° **3**). De même aussi, si cette pression provient d'une *pression exercée à la surface du fluide renfermé dans un vase plein*, elle sera égale à la première pour une surface d'égale étendue. C'est le principe de la *transmission des pressions*.

On définira comme précédemment *la pression moyenne*, et alors *la pression en un point* M à l'intérieur de la masse fluide sera la limite du rapport de la pression normale à un élément ω, divisée par la surface de cet élément, lorsque la surface de l'élément devient infiniment petite.

6. Enfin, il est facile de voir que *l'intensité de la pression en un point* M *d'une masse fluide en équilibre*, *est indépendante de l'orientation autour du point* M *de l'élément plan auquel elle est normale*. C'est le principe de Pascal, ou le *principe de l'égalité de la pression dans tous les sens* autour d'un point du fluide.

Pour démontrer cette proposition, faisons passer par le point M deux plans (fig. 1). Soient MA, MB les traces de ces deux plans sur le plan de la figure, supposé perpendiculaire à leur intersection. Considérons cette intersection comme la base de deux rectangles égaux ayant pour hauteurs les lignes très petites et égales MA et MB. Ces deux rectangles pourront être considérés comme les faces d'un prisme triangulaire droit dont la base serait le triangle isocèle AMB. Or, le fluide étant en équilibre, il est évident que l'on ne détruira pas l'équilibre du prisme en le supposant solidifié. Cela posé, les forces qui sollicitent ce prisme sont les pressions exercées sur ses faces et les forces extérieures. Or, ces dernières sont négligeables en présence des pressions; car, elles sont de l'ordre du cube des dimensions du prisme, tandis que les pressions sont de l'ordre du carré de ces mêmes dimensions. Nous devrons écrire que la somme des projections des forces qui sollicitent le prisme sur une droite quelconque, par exemple sur la droite AB, est nulle. Mais cette somme se réduit à la somme des projections des pressions exercées sur les faces MA et MB, puisque les autres pressions sont normales à AB. L'équilibre exige donc que ces projections soient égales et de signes contraires. Mais les faces MA et MB étant également inclinées sur AB, les pressions sur ces faces font avec AB des angles supplémentaires. Donc, ces pressions, dont les projections sont égales et de signes contraires,

Fig. 1.



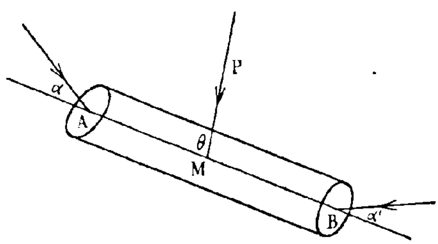
IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

doivent être égales. Par conséquent, la pression sur un élément plan est indépendante de l'orientation de cet élément.

7. Remarque I. — On peut arriver aux mêmes conséquences de la manière suivante :

Considérons un liquide en équilibre sous l'action de forces quelconques, variant d'une manière continue en passant d'un point à un point voisin. Imaginons dans ce fluide un filet cylindrique (fig. 2) dont les deux bases σ et σ' soient inclinées par rapport aux génératrices,

Fig. 2.



et soit ω la section droite du filet, et l la distance des centres de gravité des deux bases. Il est évident que l'on ne détruira pas l'équilibre, en supposant le filet solidifié. Or, il y a équilibre entre les forces extérieures appliquées aux différents éléments du filet, et les pressions exercées sur les éléments de sa surface. Par conséquent, il y a équilibre entre les pressions sur les faces σ et σ', les pressions sur les surfaces latérales et les forces extérieures. Il nous suffira d'écrire que la somme des projections de ces forces sur une direction quelconque, par exemple sur l'axe du cylindre, est nulle. Or, les projections sur cet axe des pressions latérales sont nulles, puisqu'elles sont perpendiculaires à l'axe.

D'autre part, les pressions sur les deux bases sont : $p\sigma$ et $p'\sigma'$, et elle sont normales à ces bases (n° **5**). Si α et α' sont les angles aigus que ces pressions font avec l'axe du cylindre, on a pour les projections de ces pressions sur l'axe :

$$p\sigma \cos \alpha, \quad \text{et} \quad p'\sigma' \cos \alpha',$$

ou bien :

$$p\omega, \quad \text{et} \quad p'\omega.$$

Cela posé, soient P la force *accélératrice* en un point M du filet, tel que l'on ait AM $= s$, et ρ la densité du fluide en ce point.

La masse de l'élément correspondant sera $\rho\omega ds$, et par conséquent la force motrice au point M est $P\rho\omega ds$; sa projection sur l'axe sera $P\rho\omega ds \cos \theta$, en désignant par θ l'angle aigu qu'elle fait avec l'axe. La force totale projetée sur l'axe aura donc pour expression $\int_0^l P\rho\omega ds \cos \theta$.

Par conséquent, la condition d'équilibre nous donne :

$$p'\omega = p\omega + \int_0^l P\rho\,\omega\, ds \cos \theta\,;$$

ou bien :

$$p' = p + \int_0^l P\rho\, ds \cos \theta.$$

Cette formule nous apprend que *la pression exercée sur l'élément σ' est indépendante de la position de cet élément par rapport à l'axe*, puisque le second membre ne change pas avec la direction de σ'.

D'ailleurs, si $l = 0$, c'est-à-dire si les éléments σ et σ' de directions différentes passent par un même point du fluide, on a :

$$p' = p.$$

Donc, *la pression en un point quelconque est indépendante de l'orientation de l'élément autour du point considéré* (n° **6**).

En particulier, si les forces se réduisent à l'action de la pesanteur, nous aurons $P = g$; de plus, θ est constant, la direction de la pesanteur étant constante. Enfin, si l'on suppose le fluide homogène, ρ est constant, et l'on a alors :

$$\int_0^l P\rho\, ds \cos\theta = \int_0^l g\rho\, ds \cos\theta = g\rho \cos\theta \int_0^l ds = g\rho\, l \cos\theta.$$

Or, si nous désignons par z la différence de niveau des centres de gravité des deux bases σ et σ', on a :

$$l \cos\theta = z,$$

et, par suite,

$$p' = p + g\rho z.$$

Donc, *la pression en un point est égale à la pression en un autre point du fluide augmentée du poids d'une colonne fluide ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur la différence de niveau des deux points.*

Cette formule contient le principe de *la transmission des pressions.* En effet, si nous supposons le fluide soustrait à l'action de la pesanteur, et de toute autre force accélératrice, nous aurons :

$$p' = p.$$

Donc, *si un fluide en équilibre est renfermé dans une enveloppe solide, et si l'on exerce une pression en un point quelconque de ce fluide, cette pression se transmet également dans toute l'étendue du fluide.*

REMARQUE II. — Dans un fluide pesant et homogène, la pression est la même en tous les points d'un même plan horizontal. Cela est évident, puisque, pour tous ces points, z a la même valeur.

REMARQUE III. — Il résulte de la formule :

$$p' = p + \int_{o}^{l} \mathrm{P}\rho\, ds \cos\theta,$$

que, quand un fluide en équilibre est sollicité par la pesanteur, ou par d'autres forces accélératrices, la pression en un point se compose de deux parties : la première, partout la même, provient des forces appliquées à la surface du fluide ; la seconde, variable d'un point à un autre, est due à la pesanteur ou aux forces accélératrices.

REMARQUE IV. — Il résulte de tout ce que nous venons de voir que la pression en un point d'un fluide est une fonction de la position de ce point (c'est-à-dire des coordonnées de ce point) et des forces qui le sollicitent.

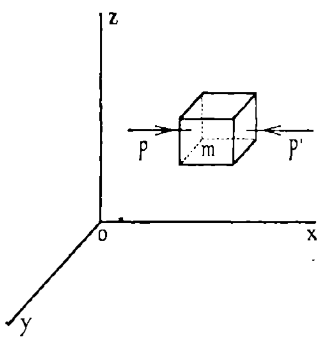
CHAPITRE II.

Équations générales de l'équilibre des fluides.

8. Proposons-nous maintenant de trouver les *équations d'équilibre d'une molécule fluide.*

Supposons une masse fluide en équilibre, rapportée à trois axes rectangulaires; considérons une molécule m de cette masse, et supposons que cette molécule ait la forme d'un parallélipipède rectangle. En désignant par x, y, z les coordonnées du point m (fig. 3), le volume de la molécule est $dxdydz$, et sa masse sera, en désignant par ρ la densité du fluide au point m :

Fig. 3.



$$dm = \rho dxdydz.$$

Soit $p = f(x, y, z)$ la pression exercée au point m, rapportée à l'unité de surface. En vertu du principe de l'égalité des pressions dans tous les sens (n° **6**), p sera la pression par unité de surface sur chacune des trois faces qui forment le trièdre au point m.

Les pressions totales sur les trois faces adjacentes au point m sont :

$$p\,dy\,dz, \quad p\,dz\,dx \quad \text{et} \quad p\,dx\,dy,$$

respectivement perpendiculaires aux faces (n° **5**), c'est-à-dire parallèles aux axes coordonnés, et dirigées vers l'intérieur du volume.

Les pressions sur les faces opposées du parallélipipède seront :

$$p'\,dy\,dz, \quad p''\,dz\,dx \quad \text{et} \quad p'''\,dx\,dy\,;$$

or, la pression p' étant fonction des coordonnées $x + dx$, y, z, on a :

$$p' = f(x + dx, y, z) = p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,;$$

par conséquent, les pressions sur les trois dernières faces sont :

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz,$$

$$\left(p + \frac{\partial p}{dy}\,dy\right) dz\,dx,$$

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy\,;$$

elles sont perpendiculaires à ces faces et dirigées vers l'intérieur du volume.

Les pressions $p\,dy\,dz$ et $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$ étant de sens contraires et dirigées suivant l'axe des x, la résultante de ces deux pressions nous donne suivant l'axe des x une pression :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Nous aurons de même suivant les axes des y et des z, les deux pressions :

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Mais, la force accélératrice au point m ayant pour composantes X, Y, Z, les composantes de la force motrice suivant les axes sont :

$$\mathrm{X}dm = \mathrm{X}\rho\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{Y}dm = \mathrm{Y}\rho\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{Z}dm = \mathrm{Z}\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Or, la molécule dm étant en équilibre sous l'action des pressions et des forces qui lui sont appliquées, l'équilibre ne sera pas troublé si l'on suppose le parallélipipède solidifié. Par conséquent, les sommes des composantes de toutes les forces suivant les axes sont nulles, et il vient :

$$\left(\mathrm{X}\rho - \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz = 0,$$

$$\left(\mathrm{Y}\rho - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz = 0,$$

$$\left(\mathrm{Z}\rho - \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$

Ce sont les *équations d'équilibre de la molécule dm*. On en tire l'équation :

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (2)$$

Cette formule (2) nous donne la loi suivant laquelle la pression varie d'un point à un autre du fluide, en supposant que ρ, X, Y, Z soient connues.

9. Remarque. — La pression p est une fonction des trois variables x, y, z ; par conséquent, le second membre de l'équation (2) doit être une différentielle exacte. Donc, si le fluide est en équilibre, on doit avoir les équations de condition :

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z}.$$

Les conditions exprimées par ces équations (3) sont donc *nécessaires* pour que le fluide soit en équilibre. Quand elles seront vérifiées, la pression p sera donnée en fonction de x, y, z, au moyen de l'équation (2). Mais, ces *conditions* (3) *ne sont pas suffisantes*. En effet, si elles sont vérifiées, l'équation (2) sera intégrable, et donnera p en fonction de x, y, z. Or, pour que le fluide soit en équilibre, il faut encore qu'en chaque point, la densité soit telle que le fluide puisse supporter la pression p relative à ce point. Cette dernière condition est toujours satisfaite pour les liquides qui sont incompressibles ; mais, il n'en est pas de même pour les gaz qui, avec une densité donnée, ne peuvent supporter qu'une pression donnée.

Lorsque les équations (3) seront vérifiées, l'équation (2) nous donne :

$$p = f(x, y, z) + const. \qquad (4)$$

La constante sera déterminée quand on connaîtra la pression p_0 en un point particulier x_0, y_0, z_0.

10. Propriété. — Lorsque le trinome $Xdx + Ydy + Zdz$ est la différentielle exacte d'une fonction φ (x, y, z), c'est-à-dire lorsqu'il existe une *fonction de force* φ, on a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi\,(x, y, z),$$

et il vient alors :

$$dp = \rho d\varphi. \qquad (5)$$

Il résulte de là, puisque le second membre doit être une différentielle exacte, que ρ doit être une fonction de φ. Par conséquent, en intégrant, p sera une fonction de φ, et, par suite, ρ est une fonction de p.

Il s'ensuit que, *dans le cas où il existe une fonction de force, la pression p et la densité ρ sont des fonctions l'une de l'autre, et, par conséquent, elles sont constantes en même temps.*

Ce cas se présentera, par exemple, lorsque les forces motrices seront dirigées vers des centres fixes, et qu'elles ne dépendront que des distances à ces centres, ou bien encore, lorsqu'elles proviendront d'actions mutuelles entre les différents points de la masse fluide.

Surfaces de niveau.

11. On appelle *surface de niveau* dans une masse fluide en équilibre, le lieu géométrique des points où la pression a la même valeur.

On a donc, pour une surface de niveau :

$$p = const., \quad \text{ou bien} \quad dp = 0,$$

ou bien encore :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0.$$

C'est l'*équation différentielle des surfaces de niveau.*

Si p est la valeur constante de la pression, on aura pour l'équation finie des surfaces de niveau :

$$p = f(x, y, z) + \mathrm{C},$$

ou bien :

$$f(x, y, z) = a. \qquad (6)$$

Observons que $f(x, y, z)$ est la fonction dont la différentielle est $\rho\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$. En attribuant à a différentes valeurs, l'équation (6) nous donnera les différentes surfaces de niveau de la masse fluide.

12. Théorème. — *Dans une masse fluide en équilibre, les surfaces de niveau ne peuvent se couper.*

En effet, l'équation d'une surface de niveau est :

$$f(x, y, z) = a\,;$$

la constante a variant d'une surface à une autre, on aura pour une autre surface de niveau :

$$f(x, y, z) = a'.$$

Or, il est évident que ces deux équations ne peuvent être vérifiées par les mêmes valeurs de x, y, z. Par suite, les deux surfaces ne peuvent pas se couper.

Nous admettons nécessairement que l'équation :

$$f(x, y, z) = a,$$

ne représente qu'une seule surface pour chaque valeur de a.

13. Propriété. — *Par chaque point du fluide il passe une surface de niveau*, c'est-à-dire une surface, lieu des points pour lesquels la pression est la même qu'en ce point.

14. Propriété. — *En chaque point du fluide la force motrice est normale à la surface de niveau qui passe par ce point.*

Cette propriété résulte immédiatement de l'équation :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0,$$

qui nous donne :

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}}\frac{dy}{ds} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\frac{dz}{ds} = 0.$$

Or, cette équation exprime que la force P est perpendiculaire à un élément ds quelconque de courbe tracée sur la surface et passant par le point m.

15. Remarque. — Si la surface libre d'un liquide est soumise à une pression constante ou nulle, cette surface sera une surface de niveau. Dans certains liquides la pression à la surface peut être nulle ; mais, il n'en est pas de même pour les gaz, comme nous le verrons plus loin.

16. Propriété. — Nous avons vu (n° **10**) que si le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte d'une fonction φ de x, y, z, la pression et la densité sont fonctions l'une de l'autre, et, par conséquent, elles sont constantes en même temps. *La densité est donc constante en tous les points d'une surface de niveau*. Il s'ensuit que, si l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, *les surfaces de niveau sont aussi des surfaces d'égale densité*.

17. Propriété. — *Dans un fluide pesant en équilibre, et sollicité uniquement par la pesanteur, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.*

En effet, si nous prenons l'axe des z parallèle à la direction de la pesanteur, nous aurons :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

L'équation différentielle des surfaces de niveau est donc :

$$g\,dz = 0, \quad \text{ou bien :} \quad dz = 0,$$

d'où :

$$z = const.$$

C'est l'équation d'un *plan horizontal*.

L'équation d'équilibre nous donne alors :

$$dp = g\rho dz\,;$$

or, l'expression $g\rho dz$ ne peut être une différentielle exacte qu'à la condition que ρ dépende de z seulement. Donc, *pour un fluide pesant en équilibre, la densité sera constante en tous les points d'un même plan horizontal.* C'est d'ailleurs ce qui résulte de la propriété précédente que la densité est constante en tous les points d'une surface de niveau.

18. PROPRIÉTÉ. — *Lorsque, dans un fluide en équilibre, les forces sollicitantes sont dirigées vers un centre fixe, les surfaces de niveau sont des sphères ayant pour centre le point fixe.*

Prenons le centre fixe pour origine, et soit r la distance d'un point m (x, y, z) au centre fixe ; nous aurons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Or, l'équation différentielle des surfaces de niveau est :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0.$$

Mais, si l'on désigne par P la force dirigée vers le centre fixe, on a :

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\frac{x}{r}, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{P}\frac{y}{r}, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{P}\frac{z}{r},$$

et l'équation des surfaces de niveau devient alors :

$$\frac{\mathrm{P}}{r}(xdx + ydy + zdz) = 0,$$

ou bien :

$$P\,dr = 0.$$

On en tire :

$$dr = 0, \quad \text{d'où} \quad r = const.;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Discussion de l'équation $dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$.

19. Lorsqu'il s'agit d'un *liquide homogène*, ρ est une constante.

Alors évidemment l'équation d'équilibre :

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz),$$

exige que l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z. Par conséquent, dans le cas d'un liquide homogène, *pour qu'il y ait équilibre, il doit exister*, pour les forces extérieures qui agissent sur le fluide, *une fonction de force.*

20. S'il s'agit d'un *gaz à température constante*, il résulte de la loi de Mariotte que la densité en chaque point est proportionnelle à la pression. On a donc, dans ce cas,

$$p = k\rho,$$

et l'équation d'équilibre devient :

$$k\,\frac{dp}{p} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Or, le premier membre étant évidemment une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, il doit en être de même du second membre, et, par conséquent, dans ce cas encore, *il devra exister une fonction de force.*

Nous aurons alors :

$$k\frac{dp}{p} = d\varphi,$$

d'où :

$$l\frac{p}{c} = \frac{\varphi}{k},$$

ou bien :

$$p = ce^{\frac{\varphi}{k}},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{c}{k}e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

21. S'il s'agit *d'un gaz dont la température n'est pas constante*, k n'est pas constant, et l'on a, en vertu des lois de Mariotte et de Gay Lussac :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha t),$$

k étant une constante, t la température et α le coefficient de dilatation des gaz, égal à 0,00366 ou $\frac{1}{273}$.

L'équation d'équilibre devient alors :

$$k\frac{dp}{p} = \frac{1}{1+\alpha t}(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

L'équilibre exige que le second membre soit, comme le premier, une différentielle exacte.

Si l'expression $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ est une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, c'est-à-dire s'il *existe une fonction de force*, il vient :

$$k\frac{dp}{p} = \frac{1}{1+\alpha t}\,d\varphi.$$

Il résulte de là que $\frac{1}{1+\alpha t}$, et, par conséquent, t doit être une fonction de φ, et, par suite, une fonction de p. Donc, la température sera constante en même temps que p ; par conséquent, p, ρ et t seront constantes en même temps. Donc, si $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ est une différentielle exacte, *les surfaces de niveau* (ou d'égale pression) *sont des surfaces d'égale densité et d'égale température.*

De l'équation ci-dessus on tire :

$$p = ce^{\int \frac{d\varphi}{k(1+\alpha t)}},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{c}{k(1+\alpha t)}e^{\int \frac{d\varphi}{k(1+\alpha t)}}$$

Remarque I. — Considérons, en particulier, l'atmosphère qui enveloppe la terre, et faisons abstraction du mouvement de rotation de la terre que nous supposerons sphérique. La force motrice pour chaque molécule de l'atmosphère est dirigée vers le centre de la terre, et elle est fonction de la distance. Les surfaces de niveau sont des sphères concentriques à la terre (n° **18**). L'équilibre de l'atmosphère exigerait donc que la température soit partout la même à égale distance de la surface de la terre, ce qui est impossible à cause de la présence du soleil ; donc, l'équilibre ne saurait exister.

Remarque II. — De l'équation $p = k\rho$, k étant constante ou variable, il résulte que les gaz ne peuvent avoir de surface libre sur laquelle la pression serait nulle. Car alors, on aurait, pour ces points, $\rho = 0$, et il faudrait qu'il n'y eût pas de matière à la surface.

De là résulte la nécessité de maintenir les gaz dans des vases fermés de toutes parts.

Cas où le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ n'est pas une différentielle exacte.

22. Lorsque le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ n'est pas une différentielle exacte, les surfaces d'égale pression, d'égale densité et d'égale température ne coïncident plus.

1er Cas. — Si le *fluide* est *hétérogène* et *incompressible*, les surfaces d'égale pression sont données par l'équation :

$$dp = 0, \quad \text{ou} \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

et les surfaces d'égale densité par l'équation :

$$d\rho = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}\, dz = 0.$$

Ces surfaces par leurs intersections déterminent des courbes d'égale pression et d'égale densité, représentées par ces deux équations.

On en tire :

$$\frac{dx}{Y\dfrac{\partial \rho}{\partial z} - Z\dfrac{\partial \rho}{\partial y}} = \frac{dy}{Z\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - X\dfrac{\partial \rho}{\partial z}} = \frac{dz}{X\dfrac{\partial \rho}{\partial y} - Y\dfrac{\partial \rho}{\partial x}}.$$

Mais les équations de condition (n° 9) :

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z},$$

nous donnent :

$$\rho\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = Y\frac{\partial \rho}{\partial x} - X\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

$$\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = Z\frac{\partial \rho}{\partial y} - Y\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

$$\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) = X\frac{\partial \rho}{\partial z} - Z\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Par conséquent, nous aurons pour les courbes d'égale pression et d'égale densité :

$$\frac{dx}{\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}}=\frac{dz}{\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}}.$$

2[e] Cas. — Si le *fluide* est *élastique* et à *température variable*, on a :

$$k\frac{dp}{p}=\frac{1}{1+\alpha t}(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz).$$

Les surfaces d'égale pression sont données par l'équation :

$$dp=0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz=0, \qquad (1)$$

les surfaces d'égale densité par l'équation :

$$d\rho=0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\rho}{\partial x}dx+\frac{\partial\rho}{\partial y}dy+\frac{\partial\rho}{\partial z}dz=0, \quad (2)$$

et les surfaces d'égale température par l'équation :

$$dt=0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy+\frac{\partial t}{\partial z}dz=0. \quad (3)$$

Les courbes d'égale pression et d'égale densité sont donc déterminées par les équations (1) et (2), ou bien par les équations :

$$\frac{dx}{\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}}=\frac{dz}{\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}}. \qquad (4)$$

Les courbes d'égale pression et d'égale température sont déterminées par les équations (1) et (3), qui nous donnent :

$$\frac{dx}{Y\frac{\partial t}{\partial z}-Z\frac{\partial t}{\partial y}}=\frac{dy}{Z\frac{\partial t}{\partial x}-X\frac{\partial t}{\partial z}}=\frac{dz}{X\frac{\partial t}{\partial y}-Y\frac{\partial t}{\partial x}}.$$

Or, des conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{1+\alpha t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{1+\alpha t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Y}{1+\alpha t}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Z}{1+\alpha t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z}{1+\alpha t}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{X}{1+\alpha t}\right),$$

on tire facilement :

$$(1+\alpha t)\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=\alpha\left(X\frac{\partial t}{\partial y}-Y\frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

$$(1+\alpha t)\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\alpha\left(Y\frac{\partial t}{\partial z}-Z\frac{\partial t}{\partial y}\right),$$

$$(1+\alpha t)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=\alpha\left(Z\frac{\partial t}{\partial x}-X\frac{\partial t}{\partial z}\right),$$

et, par conséquent, on a pour les courbes d'égale pression et d'égale température :

$$\frac{dx}{\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}}=\frac{dz}{\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}}. \qquad (5)$$

Ces équations (5) étant identiques aux équations (4), il s'ensuit que les courbes d'égale pression et d'égale densité sont aussi des courbes d'égale température.

CHAPITRE III.

Équilibre relatif d'un fluide. Figure permanente d'un fluide tournant autour d'un axe.

23. Il résulte de ce que nous avons vu dans l'étude du mouvement relatif (II, n° **229**) que, si un système matériel est en repos relativement à un système d'axes mobiles, on peut le considérer comme en repos absolu à la condition de joindre aux forces qui agissent réellement en chaque point, les forces apparentes ou fictives. D'ailleurs, dans ce cas, ces forces apparentes se réduisent pour chaque point à la force d'inertie d'entraînement (II, n° **214**).

On arriverait au même résultat en appliquant le principe de d'Alembert, et en écrivant qu'il y a équilibre entre les forces motrices et les forces d'inertie. En effet, dans le cas du repos relatif, l'accélération du mouvement d'entraînement et l'accélération du mouvement absolu sont identiques (I, n° **164**). Par conséquent, les forces d'inertie des différents points se réduisent aux forces d'inertie d'entraînement.

24. Comme application, considérons un fluide contenu dans un vase de forme quelconque, et supposons que le tout soit animé d'un *mouvement de rotation uniforme autour d'un axe* que nous prendrons pour axe des z.

Au bout d'un certain temps, le fluide prendra une figure permanente d'équilibre que nous nous proposons de déterminer.

Soient X, Y, Z les composantes de la force accélératrice en un point m (x, y, z) du fluide. Nous appliquerons le principe de d'Alembert, et nous écrirons qu'il y a équilibre entre les forces motrices et les forces d'inertie. Or, la molécule m décrit une circonférence de cercle autour de l'axe Oz, et si ω est la vitesse angulaire, et r le rayon du parallèle décrit par le point m, la force effective qui, dans ce cas, se réduit à la force centripète (I, n° **164**) aura pour expression $-\omega^2 r dm$. La force d'inertie sera donc la force centrifuge $\omega^2 r dm$, dont les composantes sont $\omega^2 x dm$ et $\omega^2 y dm$.

Nous aurons donc l'équation :

$$dp = \rho\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz + \omega^2 x dx + \omega^2 y dy). \quad (1)$$

25. Si le fluide est homogène, et *sollicité par la pesanteur seule*, on aura, en supposant l'axe des z vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur :

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = -g,$$

et l'équation (1) nous donne :

$$dp = \rho\,(-gdz + \omega^2 x dx + \omega^2 y dy). \quad (2)$$

L'équation différentielle des surfaces de niveau est donc :

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - gdz = 0,$$

ou bien, en intégrant,

$$\omega^2 (x^2 + y^2) - 2g\,(z - c) = 0. \quad (3)$$

Par conséquent, les surfaces de niveau sont des *paraboloïdes de révolution*, ayant pour axe l'axe des z. La parabole méridienne du plan des zx a pour équation :

$$\omega^2 x^2 = 2g(z - c).$$

On voit que cette parabole ne change pas de grandeur avec c, c'est-à-dire avec la pression, puisque son paramètre $\frac{2g}{\omega^2}$ est indépendant de c, et, par conséquent, de p ; la position du sommet seule change avec c.

D'ailleurs, en intégrant l'équation (2), on obtient pour la pression en un point quelconque de la masse fluide :

$$p = \rho \left\{ \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} - gz \right\} + c',$$

ou bien :

$$p = - g\rho z + \frac{\rho\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + c'.$$

Remarque. — La surface du liquide étant une surface de niveau, son équation doit être comprise dans l'équation (3). Cherchons à déterminer la valeur correspondante de c ; il suffira pour cela d'exprimer que le volume total compris entre cette surface et le vase est égal au volume primitif du liquide.

Si le vase a la forme d'un cylindre circulaire, a étant son rayon, et h la hauteur du liquide dans le vase en repos, on a pour le volume primitif du liquide :

$$V = \pi a^2 h.$$

Le fond du vase étant pris pour plan des xy, soit h' la hauteur dans le vase en mouvement, c'est-à-dire la hauteur du point où la parabole génératrice rencontre le vase ; cette hauteur h' sera déterminée en faisant $x = a$, $z = h'$, dans la section du plan des zx, ce qui nous donne :

$$\omega^2 a^2 = 2g\,(h' - c),$$

d'où :

$$c = h' - \frac{\omega^2 a^2}{2g}.$$

Mais, il est facile de s'assurer que le volume compris entre cette surface de niveau et le vase a pour expression :

$$\pi a^2 h' - \frac{\pi \omega^2 a^4}{4g}.$$

On a donc, en égalant les deux expressions du volume :

$$\pi a^2 h = \pi a^2 h' - \frac{\pi \omega^2 a^4}{4g},$$

d'où l'on tire :

$$h' = h + \frac{\omega^2 a^2}{4g},$$

et, par suite,

$$c = h - \frac{\omega^2 a^2}{4g}.$$

L'équation de la surface libre du liquide est donc, en vertu de l'équation (3) :

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

26. Considérons encore le cas d'un liquide homogène animé d'un *mouvement de rotation uniforme* autour d'un axe Oz et dont *tous les points sont attirés par un centre fixe* O *situé sur l'axe, et proportionnellement à la distance à ce point.*

En désignant par μ la valeur de la force à l'unité de distance, et prenant le point fixe pour origine, nous aurons :

$$X = -\mu x, \quad Y = -\mu y, \quad Z = -\mu z,$$

et l'équation (1) nous donne :

$$dp = \rho(-\mu x dx - \mu y dy - \mu z dz + \omega^2 x dx + \omega^2 y dy).$$

L'équation différentielle des surfaces de niveau est :

$$(\omega^2 - \mu)\, x dx + (\omega^2 - \mu)\, y dy - \mu\, z dz = 0,$$

d'où, en intégrant :

$$(\omega^2 - \mu)(x^2 + y^2) - \mu z^2 = const.,$$

ou bien :

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu z^2}{\mu - \omega^2} = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Par conséquent, les surfaces de niveau sont des surfaces du second ordre, de révolution autour de l'axe de rotation.

Si $\omega^2 < \mu$, les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes.

Si $\omega^2 = \mu$, ces surfaces sont des plans perpendiculaires à l'axe des z, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe de rotation.

Si $\omega^2 > \mu$, les surfaces de niveau sont des hyperboloïdes à une nappe ou à deux nappes, ou un cône, suivant que c sera positif ou négatif, ou nul.

Enfin, si $\omega = 0$, les surfaces de niveau sont des sphères concentriques.

Il résulte de ce qui précède que, pour $\omega = 0$, les surfaces de niveau sont des sphères concentriques; si ω varie entre 0 et $\sqrt{\mu}$, ces surfaces sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe Oz ; pour $\omega > \sqrt{\mu}$, ces surfaces deviennent des hyperboloïdes de révolution.

Il est évident que l'on obtiendra la valeur de la constante c correspondante à la surface du liquide en calculant le volume du liquide compris entre cette surface de niveau et la surface du vase, et en égalant la valeur trouvée au volume de la masse donnée du liquide.

CHAPITRE IV.

Équilibre des fluides pesants.
Pression sur une paroi plane.
Pression sur le fond d'un vase.

27. Considérons un fluide pesant en équilibre rapporté à trois axes rectangulaires, l'axe des z étant dirigé dans le sens de la pesanteur, et soit m (x, y, z) un point de ce fluide. Nous aurons :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

et il vient :

$$dp = g\rho dz.$$

Les surfaces de niveau qui ont pour équation (n° **11**):

$$dz = 0, \quad \text{d'où} \quad z = const,$$

sont des plans horizontaux.

Si le fluide est un *liquide homogène*, et si l'on désigne par p_0 la pression correspondante à un plan horizontal situé à une distance z_0 en dessous du plan des xy, par exemple, la surface supérieure du liquide, on a :

$$p = p_0 + g\rho (z - z_0).$$

On en conclut que la partie de la pression totale au point considéré, qui est indépendante de la pression p_0 exercée à la surface supérieure du liquide est $g\rho\,(z - z_0)$, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la profondeur $z - z_0$ de l'élément en dessous du niveau supérieur du liquide.

28. La formule qui détermine la pression en un point d'une masse fluide en équilibre est :

$$dp = g\rho dz.$$

Or, en désignant par ϖ le poids spécifique du fluide au point considéré, on a (I, n° **329**) :

$$\varpi = g\rho,$$

d'où :

$$dp = \varpi dz.$$

On en tire, en désignant par p_0 la pression correspondante à un plan horizontal situé à une distance z_0 en dessous du plan des xy :

$$p = p_0 + \int_{z_0}^{z} \varpi dz.$$

Or, l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \varpi dz$ est évidemment le poids d'une colonne verticale du fluide ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur $z - z_0$. Nous aurons donc le théorème suivant :

Théorème. — *La pression en un point d'un fluide pesant en équilibre, est égale à la pression exercée sur* *un plan horizontal, augmentée du poids d'une colonne verticale du fluide ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur la portion de verticale comprise entre ce plan horizontal et le point considéré.*

29. Si le *fluide* est *homogène*, ϖ = *const.*, et la formule précédente nous donne pour la pression en un point de la masse fluide :

$$p = p_0 + \varpi (z - z_0).$$

Cette pression p rapportée à l'unité de surface peut être représentée par un certain nombre de kilogrammes appliqués sur l'unité de surface, ou par le poids d'une colonne verticale du fluide ayant pour base l'unité de surface. En désignant par H la hauteur de cette colonne, on a :

$$p = \varpi \mathrm{H},$$

d'où :

$$\mathrm{H} = \frac{p}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} + z - z_0.$$

Cette hauteur H est la *hauteur représentative de la pression p* en colonne fluide, cette pression étant exprimée en kilogrammes par mètre carré.

L'équation précédente nous apprend que l'*accroissement de la hauteur représentative de la pression dans un fluide pesant et homogène en équilibre est égal à l'accroissement de l'ordonnée z.*

Remarque I. — Nous venons de voir que l'on peut représenter une pression par la hauteur représentative correspondante. C'est ce que l'on fait souvent en Physique. Ainsi, par exemple, on dit : la pression de 760^{mm} de mercure, la pression de $10^{\mathrm{m}}333$ d'eau.

Il est bon d'observer que les pressions et leurs hauteurs représentatives dans un liquide sont seulement proportionnelles : le rapport entre ces deux quantités est le poids spécifique.

D'après ce qui précède, la pression est un certain nombre de kilogrammes par mètre carré, et il est évident que l'on ne peut pas y substituer un certain nombre de mètres, à moins qu'il ne s'agisse d'évaluer le rapport de deux pressions. Si l'on voulait calculer la pression correspondante à 760^{mm} de mercure, il faudrait se rappeler que le mètre cube de mercure à 0° pèse 13596 kilogrammes ; donc, la pression de 760^{mm} serait égale à $13596 \times 0{,}760 = 10333$ kilogrammes par mètre carré. C'est la valeur de la pression atmosphérique moyenne. Elle est égale à la pression de $10^{m},333$ d'eau, puisque le poids du mètre cube d'eau est de 1000 kilogrammes.

Remarque II. — L'équation :

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} + z - z_0,$$

nous donne :

$$z - \frac{p}{\varpi} = z_0 - \frac{p_0}{\varpi}.$$

Cette relation exprime que si, en chaque point d'un fluide en équilibre, on retranche de la profondeur z de ce point la hauteur représentative $\frac{p}{\varpi}$ de la pression en ce point, on obtient un résultat constant. Elle détermine donc un plan fixe situé à une distance du plan horizontal des xy égale à $z_0 - \frac{p_0}{\varpi}$. Ce plan a reçu le nom de *plan de charge*. Sa distance au plan fixe des xy est :

$$z_1 = z_0 - \frac{p_0}{\varpi}.$$

D'ailleurs, si l'on remplace z par z_1 dans la formule :

$$p = p_0 + \varpi (z - z_0),$$

il vient :

$$p = 0.$$

On en conclut que *la pression est nulle pour tous les points du plan de charge.*

Si l'on désigne par ζ la distance d'un point du fluide au plan de charge, la distance de ce point au plan des xy sera $z_1 + \zeta$, et nous aurons pour la pression en ce point :

$$p = p_0 + \varpi (z_1 + \zeta - z_0),$$

et, en remplaçant z_1 par sa valeur, il vient :

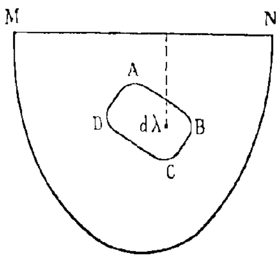
$$p = \varpi\zeta.$$

Donc, *la pression en un point quelconque du fluide est représentée par le poids d'un cylindre du fluide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance de ce point au plan de charge.*

30. Théorème. — *La pression totale exercée par un fluide pesant et homogène sur une paroi plane est égale au poids d'un prisme de ce fluide ayant ce plan* *pour base, et pour hauteur la distance du centre de gravité de ce plan à la surface du niveau supérieur.*

Soit ABCD une surface plane dans un fluide pesant et homogène en équilibre (fig. 4), et soit $d\lambda$ un élément de cette surface situé à une profondeur z en dessous de la surface du niveau supérieur. La pression supportée par cet élément est (n° **27**) :

Fig. 4.



$$g\rho z d\lambda,$$

en faisant abstraction de la pression exercée sur le niveau supérieur, c'est-à-dire, en général, la pression atmosphérique. Cette pression est normale à l'élément (n° **5**). Les pressions exercées sur tous les éléments de la surface plane ABCD sont donc parallèles : elles auront une résultante p égale à leur somme, et normale au plan :

$$p = g\rho \int z d\lambda.$$

Or, en désignant par z_0 la distance du centre de gravité de l'aire ABCD $= \Lambda$ à la surface du niveau supérieur, on a (I, n° **329**) :

$$\int z d\lambda = \Lambda z_0 ;$$

par suite,

$$p = g\rho z_0 \Lambda,$$

formule qui démontre le théorème énoncé.

31. REMARQUE. — Si la surface ABCD est horizontale, z_0 est la profondeur totale de cette surface.

En particulier, si A est la surface du fond du vase, l'équation :

$$p = g\rho z_0 A,$$

nous donnera la pression exercée sur ce fond.

Cette expression est *indépendante de la forme du vase* ; par conséquent, la pression exercée par un liquide sur le fond d'un vase est indépendante de la forme de ce vase. Si l'on fait varier la capacité du vase, sans changer le fond, la pression supportée par celui-ci ne change pas, pourvu que z_0 reste constant. Ce phénomène est connu sur le nom de *paradoxe hydrostatique.*

32. Il en résulte que *la pression d'un liquide sur le fond d'un vase non cylindrique peut être plus grande ou plus petite que le poids du liquide contenu dans le vase.* Ainsi, la pression sur la paroi AB (fig. 5) sera

Fig. 5.

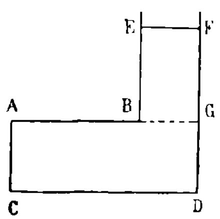


Fig. 6.

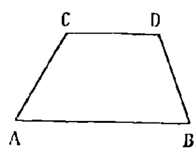
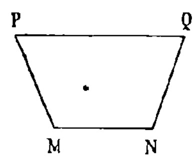


Fig. 7.



égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base AB, et pour hauteur FG.

Dans le trapèze ABCD (fig. 6) la pression sur le fond du vase AB est plus grande que le poids du liquide contenu dans le vase. Le contraire se présente pour le trapèze MNPQ (fig. 7).

Liquides superposés.

33. Supposons maintenant *deux liquides pesants et homogènes contenus dans un même vase* et qui ne se mélangent pas. La surface de séparation sera un plan horizontal. En effet, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux pour chaque liquide (n° **17**); en outre, la densité doit être la même pour tous les points de chacun de ces plans. Or, cela n'aurait pas lieu, si un même plan horizontal pouvait rencontrer les deux liquides.

Cela posé, soient b la base, h la hauteur et ρ la densité de la première couche reposant sur le fond du vase; b', h', ρ' les quantités analogues relatives à la seconde couche. La pression sur l'unité de surface de b' est $g\rho'h'$; cette pression se transmet à la seconde couche et viendra s'ajouter à la pression $g\rho h$ exercée par cette seconde couche sur chaque unité de surface de sa base. La pression sur le fond du vase par unité de surface sera donc $g\rho'h' + g\rho h$, et, par conséquent, la pression totale sur ce fond est $g(\rho'h' + \rho h)b$, c'est-à-dire qu'*elle est égale au poids d'un prisme dont la base serait b, et qui contiendrait une hauteur h du liquide inférieur et une hauteur h' du liquide supérieur*.

Si l'on avait plusieurs liquides superposés dans un même vase, on aurait pour la pression totale sur le fond du vase :

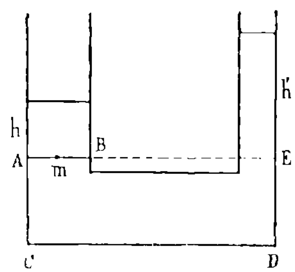
$$g\,(\rho h + \rho'h' + \rho''h'' + \dots)\,b.$$

Vases communiquants.

34. Propriété. — *Dans deux vases communiquants dont chacun contient un liquide pesant et homogène, la surface de séparation des deux liquides est un plan horizontal, et les hauteurs des deux colonnes liquides au-dessus de ce plan sont en raison inverse des densités.*

Soient deux vases communiquants remplis de deux liquides différents (fig. 8). Ces deux liquides étant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux pour chaque liquide, et, par conséquent, il en sera de même de la surface de séparation. Il en résulte que l'un des deux liquides remplira complètement le canal de communication et une partie plus ou moins grande du vase qui contient l'autre liquide.

Fig. 8.



Soient AB la surface de séparation, h et h' les hauteurs des deux liquides au-dessus de ce plan. Si nous prenons un point m de la surface de séparation, la pression exercée en ce point par le premier liquide sera égale à $g\rho h$, *en faisant abstraction de la pression extérieure*, et la pression exercée par le second liquide sera égale à $g\rho'h'$.

L'équilibre exige que ces deux pressions soient égales, et l'on a, par conséquent,

$$g\rho h = g\rho' h',$$

d'où :

$$\frac{h}{h'} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Remarque. — Si les deux liquides sont de même densité, on a $h = h'$.

CHAPITRE V.

Composition des pressions sur une paroi de forme quelconque.

35. Considérons une *paroi de forme quelconque*, et proposons-nous de trouver l'*action exercée sur cette paroi par un fluide en équilibre*.

Supposons donc que la surface pressée par le fluide soit une surface courbe dont la forme est définie par son équation. Soit M (x, y, z) un point de cette surface. La pression sur un élément $d\lambda$ de la surface en ce point M est $pd\lambda$, et elle est normale à cet élément (n° **5**). Les pressions exercées sur les différents éléments de la surface étant normales à ces éléments ne sont donc pas des forces parallèles, et, par conséquent, elles ne se réduisent pas, en général, à une force unique.

Mais, si nous désignons par α, β, γ les angles que la normale à l'élément $d\lambda$ fait avec les axes, les composantes de la pression $pd\lambda$ sont :

$$pd\lambda \cos\alpha, \quad pd\lambda \cos\beta, \quad pd\lambda \cos\gamma.$$

Nous aurons pour chacun des éléments de la surface courbe trois composantes analogues. Si nous étendons à la surface entière, et si nous composons toutes les pressions autour de l'origine, nous aurons suivant les axes les trois forces :

$$A = \int p d\lambda \cos \alpha, \quad B = \int p d\lambda \cos \beta, \quad C = \int p d\lambda \cos \gamma,$$

et dans les plans coordonnés les trois couples :

$$L = \int p d\lambda \, (y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

$$M = \int p d\lambda \, (z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$

$$N = \int p d\lambda \, (x \cos \beta - y \cos \alpha).$$

On en conclut qu'en général, les pressions exercées sur une surface courbe se composent en une force et un couple.

Observons que les intégrales qui précèdent doivent s'étendre à la surface entière de la paroi pressée.

Ainsi donc, lorsque la surface pressée par le fluide n'est pas plane, les pressions exercées sur les différents éléments de cette surface ne se réduisent pas, en général, à une résultante unique. Mais, si l'on a la condition (I, n° **288**) :

$$AL + BM + CN = 0,$$

le couple et la force sont situés dans un même plan, et les pressions se composent alors en une pression unique.

Centre de pression.

36. On appelle *centre de pression* d'une surface le point où cette surface est rencontrée par la résultante des pressions exercées sur ses différents éléments. En général, on restreint le sens de cette expression au cas où le fluide est un liquide pesant et homogène, et où l'on fait abstraction de la pression exercée sur le niveau supérieur.

Une aire plane admet toujours un centre de pression, puisque les pressions exercées sur ses différents éléments étant normales à cette aire sont des forces parallèles et de même sens, qui admettent donc une résultante unique. Au contraire, dans une surface courbe, les pressions étant dirigées suivant les normales à la surface, le centre de pression n'existe pas toujours, puisqu'un système de forces quelconques n'admet pas toujours une résultante unique. Pour qu'une surface courbe admette un centre de pression, il faut que la condition (n° **35**) :

$$AL + BM + CN = 0,$$

soit vérifiée.

Lorsque cette condition sera satisfaite, nous pourrons déterminer les coordonnées du centre de pression, En désignant par x_1, y_1, z_1 ces coordonnées, nous pourrons faire équilibre aux pressions, en introduisant en ce point une force égale et directement opposée à leur résultante unique, et nous aurons les trois équations :

$$Cy_1 - Bz_1 = \int p d\lambda \, (y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

$$Az_1 - Cx_1 = \int p d\lambda \, (z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$

$$Bx_1 - Ay_1 = \int p d\lambda \, (x \cos \beta - y \cos \alpha).$$

Or, ces trois équations se réduisent à deux, en vertu de la relation :

$$AL + BM + CN = 0.$$

Si nous joignons à ces deux équations, l'équation :

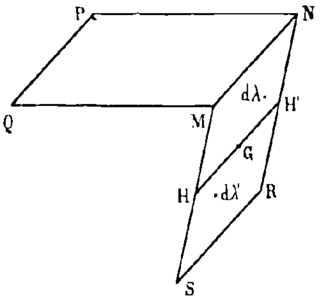
$$f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

qui exprime que le point x_1, y_1, z_1 est sur la surface courbe, nous aurons trois équations pour déterminer x_1, y_1, z_1.

37. Théorème. — *Le centre de pression d'une aire plane inclinée sur l'horizon est situé en dessous du centre de gravité de cette aire par rapport au plan du niveau supérieur.*

Soient G le centre de gravité de l'aire plane située dans le plan MNRS (fig. 9), et HH' une horizontale menée par le point G dans le plan de cette aire. Soit $d\lambda$ un élément de l'aire situé au-dessus de HH' : la pression sur cet élément sera $g\rho z d\lambda$, z étant la distance de l'élément à la surface du niveau supérieur. En désignant par u la distance de l'élément $d\lambda$ à la droite HH', le moment de cette pression par rapport à HH' est (I, n° **233**) :

Fig. 9.



$$g\rho z u d\lambda.$$

Donc, la somme des moments par rapport à l'axe HH' des pressions exercées sur la partie de l'aire comprise dans MNHH' sera :

$$g\rho \int z u d\lambda\,;$$

de même, la somme des moments par rapport à HH' des pressions exercées sur l'autre partie comprise dans HH'RS sera :

$$g\rho \int z' u' d\lambda'.$$

Il résulte de là que le plan MNRS est sollicité à tourner autour de HH' avec un moment égal à :

$$g\rho \int (z' u' d\lambda' - z u d\lambda).$$

Or, pour tous les points de la partie supérieure, l'ordonnée z est moindre que la distance z_0 du centre de gravité G au plan du niveau supérieur : on a donc, pour un quelconque de ces points :

$$z_0 > z, \quad \text{d'où} \quad z_0 u d\lambda > z u d\lambda\,;$$

par conséquent,

$$z_0 \int u d\lambda > \int z u d\lambda.$$

De la même manière, puisque, pour tous les points de la partie inférieure, on a $z' > z_0$, il en résulte :

$$\int z' u' d\lambda' > z_0 \int u' d\lambda'.$$

Mais, d'autre part, la droite HH' passant par le centre de gravité G de l'aire, la somme des moments des éléments de cette aire par rapport à cette droite est nulle (I, n° **323**). On a donc :

$$\int u d\lambda = \int u' d\lambda'\,;$$

par conséquent,

$$z_0 \int u d\lambda = z_0 \int u' d\lambda',$$

et, par suite,

$$\int z' u' d\lambda' > \int z u d\lambda.$$

Il résulte de là que le moment $\int z'u'd\lambda'$ l'emporte sur le moment $\int zud\lambda$ pour faire tourner le plan autour de HH'. Donc, le point d'application de la résultante doit se trouver dans la partie du plan correspondant à ce moment, c'est-à-dire en dessous de la droite HH' par rapport au plan du niveau supérieur.

Coordonnées du centre de pression d'une paroi plane.

38. Considérons une *paroi plane* dans l'intérieur d'un *liquide homogène et pesant*. Prenons le plan du niveau supérieur du liquide pour plan des xy, l'axe des z étant dirigé dans le sens de la pesanteur. Soient $d\lambda$ un élément de la paroi plane, z sa distance au plan des xy : la pression exercée sur cet élément est $g\rho z d\lambda$.

Les moments de cette pression par rapport aux trois plans coordonnés sont :

$$g\rho zxd\lambda, \quad g\rho zyd\lambda, \quad g\rho z^2 d\lambda.$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de pression, et écrivons que le moment de la pression totale supposée appliquée au centre de pression, par rapport aux trois plans coordonnés, est égal à la somme des moments des pressions élémentaires par rapport à ces plans.

Nous aurons donc en représentant par R la pression totale :

$$R = g\rho \int z d\lambda,$$

$$Rx_1 = g\rho \int z x d\lambda,$$

$$Ry_1 = g\rho \int z y d\lambda,$$

$$Rz_1 = g\rho \int z^2 d\lambda.$$

Mais, en désignant par z_0 la distance du centre de gravité au plan du niveau supérieur, et par Λ l'aire de la paroi plane, on a :

$$\int z d\lambda = z_0 \Lambda.$$

On a donc pour les coordonnées du centre de pression :

$$x_1 = \frac{\int z x d\lambda}{z_0 \Lambda}, \quad y_1 = \frac{\int z y d\lambda}{z_0 \Lambda}, \quad z_1 = \frac{\int z^2 d\lambda}{z_0 \Lambda}.$$

39. Remarque. — Il est évident, puisque le centre de pression est situé dans le plan de la paroi, que l'on peut chercher à déterminer les coordonnées de ce point par rapport à deux axes pris dans ce plan.

Prenons pour axes coordonnés l'intersection Ox de la paroi avec le plan horizontal à partir duquel on compte les profondeurs, une perpendiculaire Oy à cette droite *dans le plan de la paroi*, et une perpendiculaire Oz à ce plan.

La pression totale sur la paroi sera, en désignant par u la distance verticale d'un élément au plan horizontal (nº **38**) :

$$R = g\rho \int u d\lambda = g\rho \Lambda u_0,$$

Λ étant l'aire totale de la paroi, et u_0 la distance de son centre de gravité au plan horizontal.

D'ailleurs, x_1, y_1 étant les coordonnées du centre de pression dans le plan des xy, on a évidemment :

$$Rx_1 = g\rho \int xu d\lambda,$$

$$Ry_1 = g\rho \int yu d\lambda.$$

Or, φ étant l'angle que fait le plan de la paroi avec le plan horizontal, et y_0 la distance de son centre de gravité à l'axe Ox, on a :

$$u = y \sin\varphi, \quad u_0 = y_0 \sin\varphi ;$$

par suite,

$$R = g\rho y_0 \Lambda \sin\varphi,$$

$$Rx_1 = g\rho \sin\varphi \int xy d\lambda,$$

$$Ry_1 = g\rho \sin\varphi \int y^2 d\lambda.$$

Par conséquent,

$$x_1 = \frac{\int xy d\lambda}{\Lambda y_0},$$

$$y_1 = \frac{\int y^2 d\lambda}{\Lambda y_0}.$$

Les formules précédentes nous permettent de reconnaître que *le centre de pression d'une paroi plane* n'est autre que *le centre de percussion de cette paroi*, considérée comme un corps dont chaque élément aurait une masse égale à son aire, et qui tournerait autour de l'horizontale Ox.

En effet, d'abord le centre de pression est situé dans un plan passant par le centre de gravité et par l'axe de rotation ; d'autre part, sa distance à l'axe Ox est donnée par la formule :

$$y_1 = \frac{\int y^2 d\lambda}{\Lambda y_0},$$

et il est évident que $\int y^2 d\lambda$ est le moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe Ox. Enfin, si nous transportons le plan yz parallèlement à lui-même, de manière à le faire passer par le centre de pression, alors la coordonnée x du centre de pression sera nulle, et nous aurons :

$$\int x'y d\lambda = 0\,;$$

d'ailleurs, on a aussi :

$$\int x'z d\lambda = 0,$$

puisque, pour tous les points de l'aire, $z = 0$.

Il s'ensuit que l'axe Ox est principal pour la nouvelle origine, c'est-à-dire pour le point où il rencontre le plan mené par le centre de pression perpendiculairement à l'axe de rotation. Donc, le centre de pression satisfait aux conditions qui déterminent le centre de percussion de la paroi (II, n° **239**).

40. La détermination du centre de pression d'une paroi plane est encore simplifiée lorsque l'on connaît à priori une droite sur laquelle se trouve ce centre de pression.

Supposons, par exemple, que l'horizontale MN soit l'intersection de la paroi avec le niveau du liquide, et divisons la surface pressée en tranches élémentaires par des parallèles à MN. Le centre de pression de chacune de ces tranches est évidemment situé en son milieu. Si le lieu des points milieux des cordes parallèles à MN est une ligne droite, le centre de pression sera situé sur cette droite. En d'autres termes, *si la surface pressée a un diamètre conjugué à ses cordes horizontales, le centre de pression sera sur ce diamètre.* Dans ce cas, il suffira de déterminer la distance de ce centre de pression au niveau du liquide, ou sa distance à l'horizontale MN.

En désignant par z_1 la distance du centre de pression au niveau du liquide, nous aurons la formule :

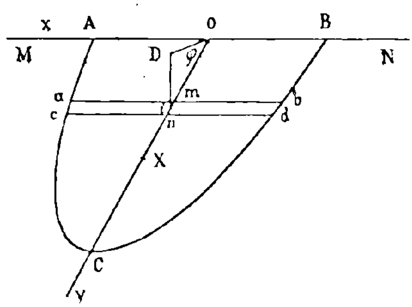
$$z_1 = \frac{\int z^2 d\lambda}{z_0 \Lambda},$$

$d\lambda$ étant l'aire d'une tranche élémentaire située à une distance z du niveau du liquide, z_0 et Λ ayant la même signification que ci-dessus (n° **38**).

Connaissant z_1, il sera facile de trouver la distance du centre de pression à l'horizontale MN.

En particulier, soit ABC la surface pressée (fig. 10), AB étant l'intersection de cette surface avec le niveau du liquide, et supposons que cette surface ait un axe de symétrie OC perpendiculaire à AB. Décomposons la surface ABC en tranches élémentaires par des parallèles à AB, et soit $abcd = d\lambda$ une de ces tranches, dont le centre de pression est en son milieu I. Soient ID $= z$ la distance de cette bande *abcd* au niveau du liquide,

Fig. 10.



COD $= \varphi$ l'angle que fait la surface ABC avec le plan horizontal, et posons : $om = y$, $ma = x$, les droites OA et OC étant prises pour axes des x et des y. Nous aurons :

$$d\lambda = 2xdy.$$

Or, le centre de pression X de la surface ABC étant évidemment situé sur OC, soit z_1 sa distance au niveau du liquide ; la formule ci-dessus :

$$z_1 = \frac{\int z^2 d\lambda}{z_0 \Lambda},$$

nous donne :

$$z_1 = \frac{\int 2z^2 xdy}{z_0 \int 2xdy} = \frac{\int z^2 xdy}{z_0 \int xdy}.$$

Si l'on désigne par y_1 la distance OX du centre de pression à l'horizontale MN, et par y_0 la distance du centre de gravité à cette même horizontale, on a :

$$z = y \sin \varphi, \quad z_1 = y_1 \sin \varphi, \quad z_0 = y_0 \sin \varphi.$$

Par suite, la formule précédente nous donne :

$$y_1 = \frac{\int xy^2 dy}{y_0 \int x dy}.$$

Observons que x, y sont les coordonnées du point a par rapport aux deux axes Ox et Oy.

Application. — Dans le cas d'un rectangle, nous aurons en désignant par a la base, par b la hauteur, et en supposant que la base soit à fleur d'eau :

$$x = \frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{b}{2};$$

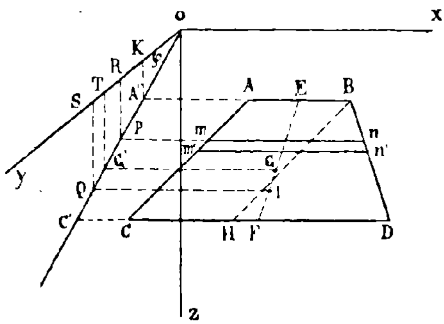
par conséquent,

$$y_1 = \frac{\int_0^b y^2 dy}{\frac{b}{2}\int_0^b dy} = \frac{2}{3} b.$$

41. — Proposons-nous de trouver *le centre de pression d'un trapèze dont les bases* AB *et* CD *sont horizontales.*

Le centre de pression I devant se trouver sur la droite EF qui joint les milieux des deux bases (n° **40**), il suffit de déterminer la coordonnée z_1 = QS de ce point I, situé, comme on sait (n° **37**), en dessous du centre de gravité G du trapèze (fig. 11). Soient $AB = a$,

Fig. 11.



$CD = b$ les deux bases du trapèze, h sa hauteur, $A'K = c$ la distance de la base supérieure au niveau du liquide, φ l'angle que fait le plan du trapèze avec le plan horizontal.

Décomposons le trapèze en éléments parallèles aux bases, et appliquons la formule (n° **40**) :

$$z_1 = \frac{\int z^2 d\lambda}{z_0 \Lambda},$$

Λ étant l'aire du trapèze, et z_0 la distance de son centre de gravité G au plan horizontal.

La surface d'un élément $mnm'n'$, situé à une distance $A'P = u$ de la base supérieure, est :

$$d\lambda = mn \,.\, du.$$

Or, on a évidemment :

$$mn = a + \frac{b-a}{h} u\,;$$

par suite,

$$d\lambda = \left(a + \frac{b-a}{h}u\right)du.$$

D'autre part, on a :

$$z = \text{PR} = \text{A'K} + \text{A'P}\sin\varphi = c + u\sin\varphi,$$

$$\Lambda = (a+b)\frac{h}{2},$$

$$z_0 = \text{G'T} = \text{A'K} + \text{A'G'}\sin\varphi = c + u_0\sin\varphi,$$

en posant $\text{A'G'} = u_0$.

D'ailleurs, nous avons trouvé (I, n° **340**, 7°) :

$$u_0 = \frac{h(2b+a)}{3(a+b)},$$

et, par conséquent,

$$z_0 = c + \frac{h(2b+a)}{3(a+b)}\sin\varphi.$$

Nous aurons donc :

$$z_1 = \frac{\int_0^h (c + u\sin\varphi)^2 \left(a + \frac{b-a}{h}u\right)du}{(a+b)\frac{h}{2}\left\{c + \frac{h(2b+a)}{3(a+b)}\sin\varphi\right\}}.$$

Cette formule servira à calculer la distance z_1 du centre de pression au plan horizontal. Mais, il est préférable de déterminer la distance $\text{A'Q} = u_1$ du point I à la base supérieure du trapèze. Si l'on observe que l'on a :

$$z_1 = \mathrm{QS} = \mathrm{A'K} + \mathrm{A'Q} \sin \varphi = c + u_1 \sin \varphi,$$

on aura :

$$c + u_1 \sin \varphi = \frac{\int_0^h (c + u \sin \varphi)^2 \left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du}{(a+b)\frac{h}{2}\left\{c + \frac{h(2b+a)}{3(a+b)} \sin \varphi\right\}},$$

d'où l'on tire facilement :

$$u_1 = \frac{h^2 (a + 3b) \sin \varphi + 2\,hc\,(a + 2b)}{2h\,(a + 2b) \sin \varphi + 6c\,(a+b)}.$$

Cas particuliers. — 1° Si $c = 0$, c'est-à-dire *si la base supérieure du trapèze est à fleur d'eau*, on a :

$$u_1 = \frac{h\,(a + 3b)}{2\,(a + 2b)};$$

le centre de pression est indépendant de l'inclinaison de la paroi.

2° Si $\varphi = 0$, c'est-à-dire *si le trapèze est horizontal*, on a :

$$u_1 = \frac{h\,(a + 2b)}{3\,(a + b)};$$

le centre de pression coïncide avec le centre de gravité du trapèze.

3° Si $a = 0$, le trapèze se réduit à un *triangle*, et l'on a :

$$u_1 = \frac{h(3h \sin \varphi + 2c)}{2(2h \sin \varphi + 3c)}.$$

4° Si l'on a en même temps $a = 0$, $c = 0$, le *sommet du triangle est à fleur d'eau*, et l'on a :

$$u_1 = \frac{3}{4} h.$$

5° Si l'on a en même temps $b = 0$, $c = 0$, *la base du triangle est à fleur d'eau*, et l'on a :

$$u_1 = \frac{h}{2}.$$

6° Si $a = b$, la paroi est un *parallélogramme*, et il vient :

$$u_1 = \frac{h(2h \sin \varphi + 3c)}{3(h \sin \varphi + 2c)},$$

7° Si $a = b$, en même temps que $c = 0$, la *base supérieure du parallélogramme est à fleur d'eau, et* l'on a :

$$u_1 = \frac{2}{3} h.$$

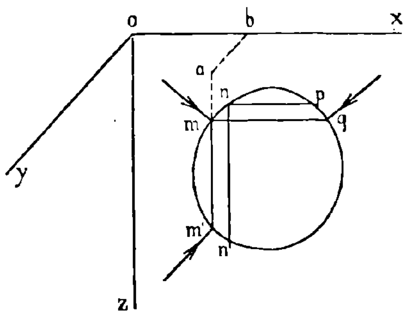
CHAPITRE VI.

Principe d'Archimède.

42. *Quand un corps pesant est plongé dans un fluide pesant en équilibre, les pressions exercées sur la surface de ce corps ont une résultante unique, égale et contraire au poids du fluide déplacé par le corps et appliquée au centre de gravité de cette partie du fluide supposée solidifiée.*

Considérons donc un corps complètement plongé dans un fluide, et soit $mn = d\lambda$ un élément de la surface de ce corps (fig. 12). Choisissons pour plan des xy un

Fig. 12.



plan horizontal pris dans le fluide, l'axe des z étant dirigé dans le sens de la pesanteur. Imaginons un cylindre vertical $mnm'n'$ qui rencontre la surface suivant un élément $m'n' = d\lambda'$; soient $ma = z$ et $m'a = z'$ les distances respectives des points m et m' au plan des xy.

La pression exercée sur l'élément mn est (n° **27**)[1] :

$$g\rho z d\lambda,$$

et elle est normale à cet élément. En désignant par α, β, γ les angles que la normale au point m fait avec les axes, les composantes de cette pression sont :

$$g\rho z d\lambda \cos\alpha, \quad g\rho z d\lambda \cos\beta, \quad g\rho z d\lambda \cos\gamma.$$

De même, la pression exercée sur l'élément $m'n'$ est :

$$g\rho z' d\lambda',$$

et elle a pour composantes :

$$g\rho z' d\lambda' \cos\alpha', \quad g\rho z' d\lambda' \cos\beta', \quad g\rho z' d\lambda' \cos\gamma'.$$

Imaginons aussi un cylindre $mnpq$, parallèle à l'axe des x, et qui rencontre la surface suivant un élément $pq = d\lambda''$. Nous aurons sur l'élément pq une pression :

$$g\rho z d\lambda'',$$

qui aura pour composantes :

$$g\rho z d\lambda'' \cos\alpha'', \quad g\rho z d\lambda'' \cos\beta'', \quad g\rho z d\lambda'' \cos\gamma''.$$

---

1. En faisant abstraction de la pression exercée sur le plan horizontal des xy.

Or, si l'on désigne par $d\omega$ la section droite du cylindre vertical de base mn, on a :

$$d\lambda \cos \gamma = d\lambda' \cos \gamma' = d\omega ;$$

par conséquent, nous aurons sur les deux éléments mn et $m'n'$ deux pressions verticales de sens contraires :

$$g\rho z d\omega \quad \text{et} \quad g\rho z' d\omega,$$

qui se composent en une pression résultante :

$$g\rho (z' - z)\, d\omega,$$

dirigée de bas en haut.

D'autre part, si nous désignons par $d\omega'$ la section droite du cylindre horizontal $mnpq$, nous aurons :

$$d\lambda \cos \alpha = d\lambda'' \cos \alpha'' = d\omega' ;$$

par conséquent, les composantes parallèles à l'axe des x des pressions exercées sur les deux éléments mn et pq sont égales et de sens contraires, et, par suite, elles se détruisent. Il en serait de même des composantes parallèles à l'axe des y, si l'on considérait un cylindre parallèle à l'axe des y.

Si donc nous considérons les pressions exercées aux différents points de la surface du corps, toutes les composantes horizontales se détruisent deux à deux, et les composantes verticales nous donnent une résultante égale à leur somme :

$$g\rho \int (z' - z)\, d\omega,$$

et dirigée de bas en haut.

Or, $\int (z' - z)\, d\omega$ est la somme des volumes des cylindres tels que $mnm'n'$, c'est-à-dire le volume du corps plongé ; et, $g\rho \int (z' - z)\, d\omega$ est le poids du fluide dont le corps tient la place.

Par conséquent, toutes les pressions exercées sur la surface du corps se composent en *une seule force verticale agissant en sens contraire de la pesanteur*, égale au poids de la masse du fluide déplacé par le corps, et appliquée au centre de gravité de cette masse. Cette résultante est appelée la *poussée du fluide* ; son point d'application est le *centre de poussée.*

Remarque. — Nous avons supposé que les cylindres rencontrent la surface du corps deux fois seulement. Si ces cylindres la rencontraient plusieurs fois, ce serait toujours un nombre pair de fois. Il serait facile d'étendre la démonstration précédente en groupant les faces d'entrée avec les faces de sortie, et l'on arriverait au même résultat. Le théorème énoncé est donc démontré.

43. Le principe d'Archimède a encore lieu lorsque le fluide n'est pas homogène. En effet, si nous désignons par u la distance d'un point quelconque de ce fluide au plan des xy, on a :

$$p' - p = \int_{z}^{z'} \varpi du,$$

p et p' étant les pressions par unité de surface en mn et $m'n'$, z et z' les distances de ces éléments au plan des xy ; d'ailleurs, $d\omega$ étant la section droite du cylindre $mn\,m'n'$, nous aurons :

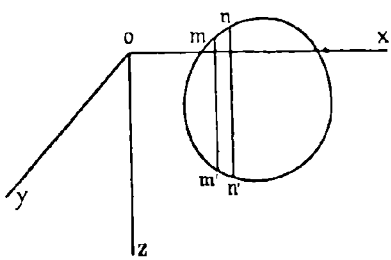
$$(p' - p)\, d\omega = \int_{z}^{z'} \varpi d\omega du.$$

Or, $\varpi d\omega du$ est le poids d'une colonne du fluide qui aurait une section droite $d\omega$, une hauteur du et un poids ϖ par unité de volume égal à celui du fluide à la distance u ; par suite, $\int_z^{z'} \varpi d\omega du$ est le poids qu'aurait la colonne $mnm'n'$, si le fluide occupait le volume de cette colonne.

La résultante totale est donc égale et contraire au poids de la masse du fluide déplacé par le corps et passera par le centre de gravité de cette masse.

44. Nous avons supposé que le corps était entièrement plongé dans le fluide. Le théorème s'applique facilement au cas d'un corps plongé en partie (corps flottant) dans un liquide pesant dont le plan des xy serait la surface libre. On verrait facilement, en effet, que les pressions horizontales se détruisent deux à deux ; d'ailleurs, si un cylindre vertical $mnm'n'$ a une partie

Fig. 13.



en dehors du fluide (fig. 13), les composantes verticales des pressions sur les deux bases mn et $m'n'$ sont respectivement :

$$p_0 d\omega \quad \text{et} \quad p_0 d\omega + g\rho z' d\omega,$$

et elles sont de sens contraires ; la pression résultante est donc $g\rho z' d\omega$, c'est-à-dire qu'elle est égale au poids d'un volume du liquide égal à la partie du cylindre plongée dans le liquide, et elle est dirigée de bas en haut.

Par conséquent, toutes les pressions exercées sur la surface du corps se composent en une seule force verticale satisfaisant aux mêmes conditions que ci-dessus (n° **42**). On en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Tout corps solide plongé en tout ou en partie dans un liquide pesant en équilibre reçoit de ce liquide une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé, et appliquée au centre de gravité de ce liquide.*

45. Remarque. — Il résulte de la théorie précédente qu'un corps plongé dans un fluide en équilibre subit de la part de ce fluide une poussée de bas en haut. Cette poussée s'appelle improprement *la perte de poids du corps*. On énonce alors le principe d'Archimède de la manière suivante :

Théorème. — *Tout corps plongé dans un fluide pesant en équilibre perd une partie de son poids égale au poids du volume du fluide qu'il déplace.*

En effet, tout corps plongé dans un fluide est sollicité par deux forces verticales de sens contraires : l'une Z_1 égale à son poids, et appliquée à son centre de gravité G ; l'autre Z égale au poids du fluide déplacé, dirigée de bas en haut, et appliquée au centre de poussée G_1. Ces forces étant parallèles, si nous les composons autour du centre de gravité G, elles nous donnent une force unique $Z_1 - Z$, appliquée au point G, et un couple unique Zh, en désignant par h la perpendiculaire abaissée de G_1 sur GZ_1.

On voit par là que la force unique $Z_1 - Z$ qui sollicite réellement le corps de haut en bas est égale à son poids diminué du poids du volume du fluide déplacé.

Mais, cela ne signifie évidemment pas que le poids du corps a diminué.

Dans le cas où le fluide et le corps sont homogènes, si nous désignons par ρ_1 la densité du corps, par V_1 son volume, par V le volume du fluide déplacé (V étant différent de V_1 dans le cas où le corps est plongé en partie), par ρ la densité du fluide, les deux forces Z_1 et Z ont respectivement pour valeurs :

$$Z_1 = g\rho_1 V_1, \quad Z = g\rho V,$$

et la force unique est :

$$Z_1 - Z = g\,(\rho_1 V_1 - \rho V).$$

Discussion. — 1° Si $\rho_1 > \rho$, c'est-à-dire *si la densité du corps est plus grande que celle du fluide*, on aura, puisque le volume V_1 du corps ne peut jamais être plus petit que V :

$$Z_1 - Z > 0.$$

Le solide descendra jusqu'à ce qu'il rencontre un obstacle qui arrête son mouvement, par exemple le fond du vase.

2° Si $\rho_1 = \rho$, c'est-à-dire *si la densité du corps est égale à celle du fluide*, le corps descendra à moins que l'on n'ait $V_1 = V$, et alors il plonge complètement dans le fluide.

3° Si $\rho_1 < \rho$, c'est-à-dire *si la densité du corps est moindre que celle du liquide*, nous aurons :

$$Z_1 - Z \gtrless 0,$$

à moins que l'on n'ait :

$$V = \frac{\rho_1 V_1}{\rho},$$

et alors le corps flottera.

46. PROPRIÉTÉ. — *Pour qu'un solide homogène plongé dans un fluide homogène soit en équilibre, il faut que le poids du solide soit égal à celui du fluide déplacé, et que le centre de gravité du solide et le centre de poussée se trouvent sur une même verticale.*

En effet, les forces qui sollicitent le corps se réduisant (n° **45**) à une force unique $Z_1 - Z$, et un couple Zh, il faut pour l'équilibre, que l'on ait :

$$Z_1 - Z = 0, \quad h = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

47. REMARQUE. — Le raisonnement que nous avons fait ci-dessus (n° **42**) nous permet de démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. — *Si une surface fermée est soumise en tous ses points à une pression constante par unité de surface, toutes les pressions élémentaires se réduisent à une résultante nulle, et, par conséquent se font équilibre.*

Il est, en effet, évident que, dans ce cas, la pression sur chaque élément $d\lambda$ étant égale à $pd\lambda$, non seulement les composantes horizontales des pressions élémentaires se détruisent deux à deux, mais aussi les composantes verticales. Par conséquent, les pressions élémentaires se réduisent à une résultante nulle.

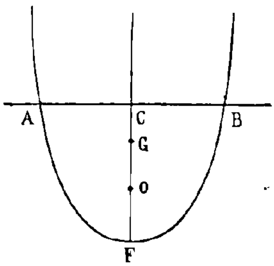
CHAPITRE VII.

Stabilité des corps flottants.

48. Considérons un corps flottant sur un liquide homogène en équilibre. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce corps soit en équilibre sont : 1° que le poids du corps soit égal au poids du liquide déplacé ; 2° que le centre de gravité du corps et le centre de poussée[1] soient sur la même verticale.

L'équilibre sera *stable* ou *instable* suivant qu'après avoir été dérangé extrêmement peu de sa position d'équilibre, le corps, abandonné à lui-même, tend à y revenir sous l'action des forces qui lui sont appliquées ou à s'en écarter davantage.

Fig. 14.

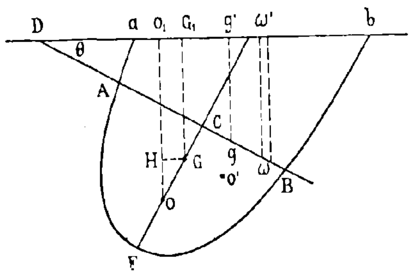


Soient AB le plan de flottaison primitif du corps (fig. 14), c'est-à-dire le plan suivant lequel ce corps dans sa position d'équilibre est coupé par la surface libre du liquide, et AFB une section faite par un plan vertical passant par le centre de gravité G et par le centre de poussée O.

1. Ce point s'appelle aussi *centre de Carène*.

Le corps ayant été infiniment peu dérangé de sa position d'équilibre, soit *ab* la nouvelle section de flottaison (fig. 15), et soit une coupe du corps par un plan perpendiculaire à l'intersection D des deux plans de

Fig. 15.



flottaison. Soient O' le nouveau centre de poussée, m la masse d'un élément du corps, μ la masse d'un élément du liquide homogène. Désignons par $GC = a_0$, $OC = b_0$ les distances du centre de gravité et du centre de poussée à la section de flottaison dans la position d'équilibre, et soient $GG_1 = a_1$, $OO_1 = b_1$ les distances de ces points à la nouvelle section de flottaison au bout du temps t.

Soient Σmu^2 la somme des forces vives communiquées au corps pour le déranger de sa position d'équilibre, et Σmv^2 la somme des forces vives acquises par le corps au bout du temps t. Nous aurons :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = 2\sum\int_0^t (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Prenons la surface du niveau supérieur pour plan des xy, l'axe des z étant dirigé de haut en bas; les seules forces qui agissent sur le corps pendant le déplacement sont le poids du corps, et la poussée du liquide déplacé. Par suite, on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg - \mu g\,;$$

d'où :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = 2\sum \int_0^t g\,(m - \mu)\,dz.$$

Considérons d'abord la partie du second membre relative au poids du corps ; nous aurons :

$$\sum \int_0^t gmdz = g\Sigma m \int_0^t dz = g\Sigma m\,(z - z_0),$$

en désignant par z et z_0 les distances de l'élément m du corps au plan des xy à la fin du temps t, et à l'origine du temps. Or, Σmz est la somme des moments par rapport au plan des xy des éléments du corps à la fin du temps t ; par conséquent,

$$\Sigma mz = \mathrm{M}a_1\,;$$

de même,

$$\Sigma mz_0 = \mathrm{M}a_0.$$

On a donc :

$$\sum \int_0^t gmdz = g\mathrm{M}\,(a_1 - a_0).$$

Désignons par V = ABF le volume du liquide déplacé à l'origine du temps, et par ρ la densité du liquide ; le poids du volume déplacé sera $g\rho$V. Or, dans la position d'équilibre, le poids du liquide déplacé est égal au poids du corps ; on a donc :

$$g\rho V = gM,$$

et, par suite,

$$\sum \int_0^t gm\,dz = g\rho V\,(a_1 - a_0).$$

Passons maintenant à la deuxième partie du second membre, c'est-à-dire à la partie qui se rapporte au poids du liquide déplacé ; nous aurons :

$$\sum \int_0^t g\mu\,dz = g\Sigma\mu \int_0^t dz = g\Sigma\mu\,(z - z_0).$$

A l'origine du temps, la somme des moments $\Sigma\mu z_0$ des éléments est égale au moment de la masse totale appliquée au centre de gravité du liquide déplacé, c'est-à-dire au centre de poussée O ; on a donc :

$$\Sigma\mu z_0 = \rho V b_0.$$

A la fin du temps t, $\Sigma\mu z$ est égal au moment de la masse totale appliquée au centre de poussée O' ; or, la masse totale du liquide déplacé à la fin du temps t est égale à la masse ABF, augmentée de la masse aABb. Le moment de la première de ces deux masses est $\rho V b_1$. Cherchons le moment de la masse aABb.

Soit θ le déplacement infiniment petit : le volume aABb peut être considéré comme engendré par la section de flottaison AB tournant autour de l'axe D d'un angle θ. Soit ω un élément de la surface de flottaison, situé à une distance r de l'axe ; cet élément engendrera un cylindre élémentaire dont la base est ω, et dont la hauteur est $\omega\omega' = r\theta$. Le volume de ce cylindre est donc égal à $\omega r\theta$, et sa masse est $\rho\omega r\theta$; le centre de gravité de ce cylindre étant au milieu de sa hauteur, sera à une distance $\frac{r\theta}{2}$ de la surface de flottaison, et, par conséquent, le moment par rapport à la surface de flottaison est :

$$\rho\omega r\theta \frac{r\theta}{2} = \frac{\rho\omega r^2\theta^2}{2}.$$

La somme des moments des éléments par rapport à la section de flottaison est donc :

$$\frac{1}{2}\rho\theta^2\Sigma\omega r^2 ;$$

par suite,

$$\Sigma\mu z = \rho V b_1 + \frac{1}{2}\rho\theta^2\Sigma\omega r^2.$$

On a donc enfin :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = 2g\rho V(a_1 - a_0) - 2g\rho V b_1$$
$$- g\rho\theta^2\Sigma\omega r^2 + 2g\rho V b_0,$$

ou bien :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = 2g\rho V\{(b_0 - a_0) - (b_1 - a_1)\} - g\rho\theta^2\Sigma\omega r^2.$$

49. Cette formule peut encore être transformée de la manière suivante : d'abord, on a :

$$b_0 - a_0 = OG = \delta,$$

c'est la *distance du centre de poussée au centre de gravité dans la position d'équilibre ; cette distance* δ *sera positive ou négative, suivant que le centre de poussée est en dessous ou au-dessus du centre de gravité.*

D'autre part, on a :

$$b_1 - a_1 = OH = OG \cos\theta = \delta \cos\theta ;$$

par conséquent,

$$(b_0 - a_0) - (b_1 - a_1) = \delta\,(1 - \cos\theta),$$

et, comme l'angle θ est très petit,

$$(b_0 - a_0) - (b_1 - a_1) = \frac{\delta\theta^2}{2}.$$

Il vient alors :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = g\rho V\delta\theta^2 - g\rho\theta^2\Sigma\omega r^2,$$

ou bien :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mu^2 = -g\rho\theta^2 \{\Sigma\omega r^2 \mp V\delta\}.$$

On prendra le signe — ou le signe +, suivant que *le centre de poussée* O *sera en dessous ou au-dessus* *du centre de gravité* G. Mais, $\Sigma\omega r^2$ est le moment d'inertie de la section AB par rapport à l'axe D. Soit g l'intersection par le plan vertical d'une parallèle à D, menée par le centre de gravité de AB : nous aurons, en désignant par I_g le moment d'inertie de AB par rapport à cette parallèle, et en posant $Dg = l$ (II, n° **141**) :

$$\Sigma\omega r^2 = I_g + \Omega l^2,$$

Ω étant l'aire de la section AB.

D'autre part, si h est la profondeur gg' à laquelle le centre de gravité de AB est descendu en dessous de la surface du niveau, nous aurons :

$$h = l \sin\theta = l\theta\,;$$

d'où :

$$\Sigma\omega r^2 = I_g + \frac{\Omega h^2}{\theta^2},$$

et, par suite,

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m u^2 = - g\rho\,[\Omega h^2 + \theta^2\,(I_g \mp V\delta)].$$

Cela posé, l'*équilibre est stable ou instable*, suivant que l'on a :

$$\Sigma m v^2 \lessgtr \Sigma m u^2,$$

c'est-à-dire suivant que les forces tendent à retarder ou à accélérer le mouvement.

Il en résulte donc que l'équilibre est stable ou instable, suivant que l'on a :

$$\Omega h^2 + \theta^2 (I_g \mp V\delta) \gtrless 0.$$

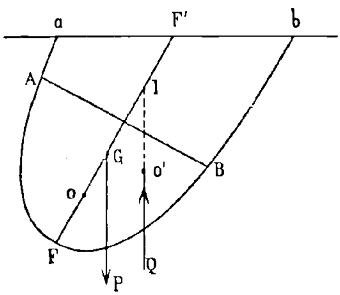
Or, si le *centre de gravité* G *est au-dessous du centre de poussée* O, on doit prendre $V\delta$ avec le signe +; tous les termes sont alors positifs, et l'*équilibre est toujours stable*. Si le *centre de gravité* G *est au-dessus du centre de poussée* O, on doit prendre $V\delta$ avec le signe —, et l'*équilibre est encore stable*, lorsque le minimum de $I_g \geqq V\delta$. Mais, si $I_g < V\delta$, on ne pourra pas en conclure que l'équilibre est instable, puisque l'on peut avoir, en valeur absolue :

$$\Omega h^2 > \theta^2 (V\delta - I_g).$$

50. Remarque. — On peut encore établir les conditions de stabilité d'un corps flottant par la considération du *métacentre*.

Considérons un corps plongé en partie dans un liquide: il flottera lorsque le poids du liquide déplacé sera égal au poids du corps, et il sera en équilibre lorsque le centre de gravité et le centre de poussée seront sur la même verticale. Supposons qu'après un déplacement, la surface de flottaison soit *ab* (fig. 16). Le centre de gravité G du corps restera invariable sur FF', et il sera entraîné par le corps. Le centre de poussée primitivement en O sur FF', sera, après le déplacement,

Fig. 16.



le point O', centre de gravité du volume liquide *aFb*. Par le point O' menons la verticale qui rencontre FF' au point I. Ce point I est le *métacentre*.

Soient P et Q le poids du corps et le poids du liquide déplacé, appliqués respectivement en G et O'. Si nous composons ces deux forces autour du point G, nous obtiendrons en ce point une force P — Q, et un couple (Q, — Q). Or, il est évident que si la force Q rencontre FF' au point I au-dessus de G, le couple tendra à ramener le corps dans sa position primitive, et l'équilibre sera *stable*. Au contraire, si le point I est constamment en dessous de G, le couple tendra à continuer le mouvement, et l'équilibre sera *instable*.

Donc, l'*équilibre* est *stable* ou *instable*, suivant que le *métacentre est constamment au-dessus ou au-dessous du centre de gravité*. Si le métacentre peut être tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de G, on ne pourra rien conclure pour la stabilité.

CHAPITRE VIII.

Mesure des hauteurs par les observations barométriques.

51. L'atmosphère terrestre est une masse gazeuse que l'on peut supposer en équilibre sur le globe terrestre. Les molécules qui composent l'atmosphère sont pesantes: c'est sous l'action de la pesanteur qu'elles sont en équilibre. La masse gazeuse enveloppant la terre de toutes parts, et la pesanteur aux différents points de la surface de la terre étant à peu près dirigée vers le centre de la terre, il s'ensuit que les surfaces de niveau sont des sphères concentriques (n° **18**) ayant leur centre au centre de la terre. Ces surfaces sont un peu aplaties vers les pôles, et renflées à l'équateur par l'effet de la force centrifuge qui se combine avec l'attraction terrestre pour produire ce que nous avons appelé *la pesanteur* (II, n° **218**). Dans le cas où l'on ne considère qu'une portion limitée de l'atmosphère, on peut supposer la pesanteur constante en grandeur et en direction : les surfaces de niveau sont alors des plans horizontaux (n° **17**).

52. Nous nous proposons de trouver la formule qui sert à déterminer les différences de niveau au moyen des observations barométriques. A cet effet, nous chercherons à déterminer *la loi de variation de la pression atmosphérique quand on passe d'un point à un autre suivant la même verticale.*

Or, l'axe des z étant dirigé en sens contraire de la pesanteur, on a la formule :

$$dp = - g\rho dz\,;$$

d'ailleurs, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, si l'on désigne par t la température d'un gaz, par α son coefficient de dilatation, on a :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha t),$$

p étant la pression et ρ la densité en un point de ce gaz : le coefficient α, qui est à peu près le même pour tous les gaz, a pour valeur 0,00366 ou $\frac{1}{273}$. Cette formule est applicable à l'atmosphère, ρ étant la densité en un point de l'atmosphère, t la température de l'air en ce point. Si la composition de l'air était partout la même, et si la température aux différents points de la verticale était connue en fonction de z, on obtiendrait facilement la valeur exacte de p en fonction de z ; il suffirait d'éliminer ρ entre les deux équations ci-dessus, et ensuite d'intégrer. Mais, la température de l'air varie avec la hauteur du point, suivant une loi inconnue ; t est donc une fonction inconnue de z. D'autre part, la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air augmentant avec la température, et la vapeur d'eau ayant une densité moindre que l'air sous la même pression, il s'ensuit que la densité de l'air diminue un peu plus rapidement que ne l'indiquerait la formule ci-dessus. Pour suppléer à ce que nous ne connaissons pas, on prendra pour t la moyenne arithmétique des températures t_0 et t_1, correspondantes aux deux points pour lesquels on veut calculer la différence des hauteurs ; de plus, afin de tenir compte de la présence de la vapeur d'eau, qui équivaut à une certaine augmentation du coefficient de dilatation, nous prendrons pour α la valeur 0,004 au lieu de 0,00366.

En éliminant ρ, il vient :

$$dp = -\frac{gp}{k\,(1 + \alpha t)}\,dz,$$

d'où :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k\,(1 + \alpha t)}\,z.$$

Désignons par H la différence des hauteurs des deux points, et intégrons entre les limites correspondantes à ces deux points, p_0 et p_1 étant les valeurs de p en ces points, nous aurons :

$$l\,.\,\frac{p_0}{p_1} = \frac{g}{k\,(1 + \alpha t)}\,\mathrm{H}\,;$$

d'où :

$$\mathrm{H} = \frac{k}{g}\,(1 + \alpha t)\;l\,.\,\frac{p_0}{p_1}.$$

On peut remplacer les pressions p_0 et p_1 par les hauteurs h_0 et h_1 des colonnes barométriques qui leur servent de mesure et qui leur sont proportionnelles, et l'on a :

$$\mathrm{H} = \frac{k}{g}\,(1 + \alpha t)\;l\,.\,\frac{h_0}{h_1}.$$

Cette formule qui sert à déterminer la différence de niveau H de deux points a été trouvée en supposant les deux points sur une même verticale. Or, les surfaces de niveau de l'atmosphère sont parallèles dans une certaine étendue tout autour de chaque verticale. On peut donc appliquer la formule, même si les deux points considérés ne sont pas sur la même verticale, pourvu qu'ils ne soient pas très éloignés l'un de l'autre.

53. Si l'on veut obtenir une formule plus exacte, il faudra tenir compte de la variation de l'intensité de la pesanteur avec la latitude du lieu et la hauteur du point considéré au-dessus de la surface de la terre.

Supposons que la pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre, et ne tenons pas compte du changement insensible provenant de la force centrifuge dans l'étendue de la verticale où se trouvent les deux points considérés. En désignant par g' l'intensité de la pesanteur en un point, par z l'ordonnée verticale de ce point, comptée à partir de la surface de la terre, r la distance du point correspondant de la surface au centre de la terre, et par g l'intensité de la pesanteur en ce point de la surface, nous aurons :

$$g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2};$$

par suite, l'équation d'équilibre :

$$dp = -g'\rho dz,$$

nous donne alors :

$$dp = -\frac{gr^2}{(r+z)^2}\rho dz,$$

et, en remplaçant ρ par sa valeur déduite de la formule :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha t),$$

on a :

$$dp = -\frac{gr^2}{k\,(1 + \alpha t)}\,\frac{p\,dz}{(r + z)^2},$$

ou bien :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gr^2}{k\,(1 + \alpha t)}\,\frac{dz}{(r + z)^2}.$$

En intégrant, et désignant par z_0 et p_0 les valeurs de z et p à la première des deux stations, il vient :

$$l\,.\,\frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{k\,(1 + \alpha t)}\,\frac{z - z_0}{(r + z_0)\,(r + z)}.$$

Désignons par $\mathrm{H} = z - z_0$ la différence des hauteurs des deux stations, et posons :

$$r + z_0 = \mathrm{R}, \quad \text{d'où} \quad r + z = \mathrm{R} + \mathrm{H};$$

nous aurons la formule :

$$l\,.\,\frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{k\,(1 + \alpha t)}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + \mathrm{H})};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + \mathrm{H})} = \frac{k\,(1 + \alpha t)}{gr^2}\,l\,.\,\frac{p_0}{p},$$

ou bien :

$$H\left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1} = \frac{kR^2(1+\alpha t)}{gr^2}\, l \,.\, \frac{p_0}{p}.$$

Or, H étant très petit par rapport à R, nous pourrons poser :

$$\left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1} = 1-\frac{H}{R},$$

et nous aurons :

$$H\left(1-\frac{H}{R}\right) = \frac{kR^2(1+\alpha t)}{gr^2}\, l \,.\, \frac{p_0}{p}. \qquad \text{(A)}$$

54. On exprimera dans cette formule le rapport $\frac{p_0}{p}$ en fonction des hauteurs barométriques correspondantes, le mercure étant ramené à une même température, à zéro degré, par exemple, et en ayant égard à la variation de la pesanteur aux deux stations. A cet effet, désignons par D la densité du mercure à 0 degré, par h_0 et h les hauteurs barométriques aux deux points, ces hauteurs étant ramenées à la température de 0 degré, g_0 et g' les valeurs de la pesanteur en ces points, nous aurons :

$$p_0 = g_0 D h_0, \quad p = g' D h,$$

$$g_0 = \frac{gr^2}{(r+z_0)^2}, \quad g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2};$$

donc,

$$\frac{p_0}{p} = \frac{gh_0}{g'h} = \frac{(r+z)^2\, h_0}{(r+z_0)^2\, h} = \frac{h_0}{h}\left(1+\frac{H}{R}\right)^2.$$

6

55. Voici comment on peut déterminer le rapport $\frac{h_0}{h}$. Soient H_0 et H_1 les hauteurs barométriques observées aux deux stations, t_0 et t_1 les températures du mercure en ces deux points, indiquées par le thermomètre. Nous aurons :

$$H_0 = h_0 \left(1 + \frac{t_0}{5550}\right),$$

$$H_1 = h \left(1 + \frac{t_1}{5550}\right);$$

d'où :

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H_1} \frac{1 + \frac{t_1}{5550}}{1 + \frac{t_0}{5550}},$$

ou bien :

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H_1 \left(1 + \frac{t_0 - t_1}{5550}\right)}.$$

Nous conserverons, pour plus de simplicité, le rapport $\frac{p_0}{p}$, et nous emploierons la formule trouvée ci-dessus :

$$H \left(1 - \frac{H}{R}\right) = \frac{kR^2 (1 + \alpha t)}{gr^2} \, l \, . \, \frac{p_0}{p}. \qquad (A)$$

Dans une première approximation, on pourra négliger $\frac{H}{R}$ par rapport à l'unité, et l'on aura la formule :

$$H = \frac{kR^2 (1 + \alpha t)}{gr^2} \, l \, . \, \frac{p_0}{p}.$$

On pourra même remplacer R par r, et l'on aura :

$$H = \frac{k(1 + \alpha t}{g} l . \frac{p_0}{p}.$$

C'est la valeur que nous avons trouvée plus haut (n° **52**). Substituant cette valeur approchée de H dans le facteur $1 - \frac{H}{R}$ de la formule (A), on aura une valeur plus exacte de H, et ainsi de suite.

LIVRE II.

HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Mouvement des fluides.

56. L'*hydrodynamique* est la science qui traite du mouvement des fluides.

Pour se faire une idée exacte du problème que l'on a à résoudre, il faut supposer qu'à un instant déterminé que l'on prendra, par exemple, pour *origine du temps* ($t = 0$), on connaisse *les positions de toutes les molécules* qui composent le fluide, et *les vitesses* dont elles sont animées. De plus, on donne *les forces extérieures* qui agissent sur tous les points du fluide, à un instant quelconque, les *pressions* et les *autres conditions* relatives à ses limites dans tous les sens.

Cela posé, il s'agit de déterminer le mouvement de chaque molécule en particulier, c'est-à-dire de trouver les *coordonnées* et la *vitesse* de cette molécule en fonction du temps, la *trajectoire* qu'elle décrit, et de connaître la *pression* et la *densité* en un point quelconque et à un instant quelconque.

Dans le cas d'un gaz, il faut encore déterminer la température en un point quelconque.

57. Les coordonnées x, y, z d'une molécule déterminée sont des fonctions de la variable t ; mais, ces fonctions changent d'une molécule à l'autre, et dépendent, par conséquent, des coordonnées a, b, c du point où la molécule se trouvait à l'origine du mouvement.

On doit donc regarder x, y, z comme des fonctions des quatre variables a, b, c, t, et si l'on peut trouver l'expression générale de ces trois fonctions, on connaîtra exactement le mouvement de telle molécule que l'on voudra à partir de sa position initiale.

58. Mais, ce n'est pas ainsi que l'on traite ordinairement la question. Au lieu de suivre une seule et même molécule dans son mouvement, on se place en un point M (x, y, z) déterminé de l'espace occupé actuellement par le fluide, et l'on cherche à *déterminer la vitesse de la molécule fluide qui, au bout d'un temps quelconque passe par ce point, ainsi que la pression et la densité du fluide en ce point qui reste fixe.*

Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule qui passe par ce point M à l'époque t. Au bout d'un certain temps, cette molécule se sera transportée ailleurs, et elle sera remplacée au point M par une autre molécule qui sera animée d'une autre vitesse (u_1, v_1, w_1). Il résulte de là qu'en un même point du fluide, les composantes u, v, w varient avec le temps t, et, à un même instant, elles varient quand on passe d'un point à un autre. Donc, en résumé, les composantes u, v, w doivent être considérées comme des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z et t ; il en sera de même de la pression p et de la densité ρ.

Lorsque ces fonctions u, v, w, p et ρ seront connues, on connaîtra à un instant quelconque, et en un point quelconque :

1° La vitesse en grandeur, direction et sens, ce qui caractérise l'état du mouvement; 2° la pression p et la densité ρ qui caractérisent l'état physique du fluide.

59. D'ailleurs, il est facile de s'assurer que, quand les trois quantités u, v, w seront déterminées, le problème primitif sera résolu. En effet, supposons que l'on ait trouvé les trois équations :

$$u = f_1(x, y, z, t),$$

$$v = f_2(x, y, z, t),$$

$$w = f_3(x, y, z, t),$$

dans lesquelles x, y, z sont les coordonnées d'un point particulier pris à volonté dans l'espace occupé par le fluide.

Si l'on veut connaître le mouvement d'une molécule particulière, les coordonnées x, y, z de ce point cesseront d'être des variables indépendantes, et elles devront être considérées comme des fonctions du temps t. Nous aurons alors, pour les composantes de la vitesse de ce point:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

et, en remplaçant u, v, w par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t).$$

En intégrant ces équations du premier ordre, et déterminant les constantes au moyen de la position initiale (a, b, c) de la molécule, on aura x, y, z en fonction de t, et le mouvement de la molécule sera déterminé. D'ailleurs, en éliminant t, on aura les deux équations de la trajectoire de la molécule.

Le problème se réduit donc à déterminer u, v, w, p et ρ en fonction de x, y, z, t, considérées comme variables indépendantes.

Équations différentielles du mouvement des fluides.

60. Pour trouver ces équations, nous appliquerons le principe de d'Alembert, et nous écrirons qu'il y a équilibre entre les forces motrices et les forces d'inertie de toutes les molécules qui composent la masse fluide.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de l'espace rempli par le fluide, X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse en ce point ; Xdm, Ydm, Zdm seront les composantes de la force motrice appliquée à la molécule dont la masse est dm ; soient V la vitesse du fluide au point M à la fin du temps t ; u, v, w les composantes de V, nous aurons :

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Désignons par u', v', w', les dérivées totales de u, v, w par rapport à t : ce sont les projections sur les axes de l'accélération totale de la molécule qui occupe la position M à la fin du temps t. Les composantes de la force effective de la molécule de masse dm sont :

$$u'dm, \quad v'dm, \quad w'dm.$$

Il résulte du principe de d'Alembert que le fluide sera en équilibre, si chaque molécule dm est sollicitée par une force ayant pour composantes :

$$(X - u')\,dm, \quad (Y - v')\,dm, \quad (Z - w')\,dm.$$

Nous devrons donc remplacer dans les équations générales de l'équilibre des fluides (n° **8**), X, Y, Z par $X - u'$, $Y - v'$, $Z - w'$, ce qui nous donne les équations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,(X - u'),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\,(Y - v'),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\,(Z - w').$$

Pour obtenir u', v', w', il faut différentier u, v, w en y regardant x, y, z comme des fonctions de t; on aura donc :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

ou bien :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

On a alors pour les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \mathrm{X} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \mathrm{Y} - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad (1)\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \mathrm{Z} - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ces trois équations ne suffisent pas pour déterminer les cinq quantités u, v, w, p, ρ. Il faut encore deux équations, à moins que ρ ne soit constant, et alors il y aurait encore une équation à trouver.

61. On trouve une quatrième équation, en écrivant que *le fluide est continu*, et l'on obtient ainsi l'*équation de continuité.*

Pour exprimer la continuité du fluide, nous exprimerons que la masse fluide reste constante dans le passage de la position x, y, z, à la position infiniment voisine x', y', z'. Or, le volume $dx\,dy\,dz$ et la densité ρ changent d'une manière continue, et deviennent $dx'dy'dz'$ et ρ', en posant :

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz\,;$$

nous aurons donc, si la masse dm reste constante :

$$\rho\, dx\,dy\,dz = \rho'\, dx'\,dy'\,dz'.$$

Or, des formules :

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

on tire :

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt\,;$$

d'où :

$$x' = x + u\,dt, \quad y' = y + v\,dt, \quad z' = z + w\,dt.$$

Pour former $dx'dy'dz'$ nous ferons varier successivement x, y, z, en supposant d'abord x variable, y et z constants ; puis, y variable, x et z constants, etc. Nous aurons ainsi :

$$dx' = dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\,dt,$$

$$dy' = dy + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\,dt,$$

$$dz' = dz + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz\,dt$$

D'autre part, on a :

$$\rho' = \rho + d\rho = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt$$

$$= \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\right) dt.$$

On a donc, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur :

$$dx'\, dy'\, dz' = dx\, dy\, dz \left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt \right\}.$$

d'où :

$$\rho'\, dx'\, dy'\, dz' = dx\, dy\, dz \left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt \right\}$$

$$\left\{ \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\right) dt \right\}.$$

Par suite, l'équation :

$$\rho\, dx\, dy\, dz = \rho'\, dx'\, dy'\, dz',$$

nous donne en négligeant les termes d'un ordre supérieur :

$$0 = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\right). \quad (2)$$

Telle est l'*équation de continuité* ; elle doit être vérifiée en chacun des points de la masse.

On peut mettre cette équation (2) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

62. La cinquième équation est déterminée par la nature du fluide

1° Si la densité du fluide est constante dans toute la masse, pendant toute la durée du mouvement (c'est ce qui arrive pour les fluides homogènes et incompressibles), on a :

$$\rho = const.$$

L'équation de continuité nous donne alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (4)$$

Cette équation (4) et les équations (1) suffisent pour déterminer les inconnues u, v, w et p en fonction de x, y, z, t.

2° Si le fluide est *incompressible* et *non homogène*, la densité de chaque molécule est invariable dans le cours de son mouvement, mais elle varie à chaque instant avec le temps en un point M déterminé et fixe. Ainsi donc, la densité au point M est une fonction de x, y, z, t, et cette fonction reste constante pour une même molécule pendant toute la durée de son mouvement. Pour exprimer cette propriété, on cherchera la différentielle totale $d\rho$, en exprimant que dx, dy, dz ont les valeurs correspondantes au mouvement de cette molécule, et on égalera cette différentielle totale à zéro. On a donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = 0,$$

et l'équation de continuité (2) se réduit alors aux deux équations :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

En joignant ces équations (5) aux équations (1), on aura cinq équations entre les cinq inconnues u, v, w, p et ρ.

3° Si le fluide est *compressible* et à *température constante*, on a :

$$p = k\rho. \tag{6}$$

Cette équation (6), jointe aux équations (1) et (2), nous donnera les cinq équations nécessaires pour déterminer les cinq inconnues u, v, w, p et ρ en fonction de x, y, z et t.

4° En général, la nature du fluide donne une relation entre la densité ρ et la pression p que cette densité permet au fluide de supporter. Cette relation qui est de la forme :

$$\rho = f(p),$$

étant jointe aux équations (1) et (2) donne un système de cinq équations pour déterminer u, v, w, p et ρ en fonction de x, y, z et t.

63. Remarque. – On peut encore obtenir l'équation de continuité en exprimant que le *mouvement ne crée pas de vide au sein de la masse fluide.*

Soit au point M (x, y, z) un volume élémentaire ayant la forme d'un parallélipipède dont les arêtes sont dx, dy, dz. La masse du fluide qui remplit ce parallélipipède à la fin du temps t est :

$$\rho \, dx \, dy \, dz.$$

Or, la densité ρ varie en un même point avec le temps t, et. par suite, ρ est une fonction de x, y, z et t. Au bout du temps $t + dt$, la densité au point M est donc devenue

$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt$, et la masse fluide qui remplit le parallélipipède à cet instant est :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx\,dy\,dz.$$

Donc, pendant le temps dt la masse s'est accrue de $\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt\,dx\,dy\,dz$.

Nous pouvons trouver d'une autre manière l'expression de la variation de la masse fluide : il suffira pour cela d'évaluer la masse qui entre dans le parallélipipède pendant le temps dt, et celle qui en sort, et de faire la différence. Or, pendant le temps dt, le volume qui entre par la face $dy\,dz$ est celui d'un prisme ayant pour base $dy\,dz$ et pour hauteur udt; par conséquent, la masse qui entre par cette face est $\rho u\,dy\,dz\,dt$. Pendant le même temps, il sort par la face opposée une masse :

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt.$$

La différence entre ces deux masses est :

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

On obtient des résultats analogues pour les deux autres couples de faces; par conséquent, l'accroissement total sera :

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt.$$

En égalant les deux expressions de l'accroissement total, nous aurons l'équation :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

C'est l'équation que nous avons trouvée ci-dessus (n° **61**).

64. Les équations que nous venons d'obtenir sont suffisantes pour déterminer le mouvement, lorsque le fluide est indéfini, et que l'on connait son état initial, c'est-à-dire les valeurs de u, v, w, p et ρ pour $t = 0$. Mais, si le fluide est terminé, on doit y ajouter des conditions particulières, que l'on appelle les *conditions à la surface.*

On suppose que les molécules d'abord en contact avec une paroi fixe ou mobile, y restent indéfiniment, et que les molécules de la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie.

Soit $f(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle un point du fluide doit rester constamment. Pour exprimer cette condition, il suffit d'écrire que la molécule sera encore sur cette surface au bout du temps $t + dt$, ce qui nous donne :

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0,$$

ou bien :

$$f(x + udt, y + vdt, z + wdt, t + dt) = 0.$$

On en tire l'équation de condition :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0. \qquad (7)$$

Si la paroi est fixe, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, et l'on a alors l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0. \qquad (8)$$

Cette équation nous apprend que la vitesse du point est à chaque instant dirigée suivant la tangente à la paroi.

L'équation (7) doit être vérifiée pendant toute la durée du mouvement pour tous les points qui se trouvaient d'abord en contact avec la paroi. On aura des équations analogues pour les conditions du même genre.

Quant à la surface libre, elle est soumise à une pression p_0 qui est ordinairement la même en tous ses points, mais qui peut cependant varier avec le temps.

L'équation de cette surface sera donc :

$$p = p_0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w = 0. \qquad (9)$$

Les équations (7) et (9), ou (8) et (9), jointes aux conditions initiales, servent à déterminer les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations (1) et (3).

Remarque I. — Les équations que nous avons obtenues ci-dessus, et qui donnent la solution complète du problème de l'hydrodynamique, n'ont pu être intégrées complètement jusqu'ici. On ne peut en tirer des résultats utiles qu'en restreignant la généralité du problème.

Fonction de force. — Fonction de vitesse.

65. Supposons qu'il existe une *fonction de force*, c'est-à-dire que la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ soit la différentielle exacte d'une fonction U de x, y, z, et supposons, en outre, que l'expression $udx + vdy + wdz$ soit, *à un instant t*, la différentielle exacte par rapport à x, y, z d'une fonction φ de x, y, z, t. Cette fonction φ s'appelle *fonction de vitesse.*

Il est facile de s'assurer que, dans ce cas, l'*expression $udx + vdy + wdz$ sera une différentielle exacte pendant toute la durée du mouvement.*

En effet, il résulte des conditions énoncées que l'on a, à l'instant t :

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU,$$

$$udx + vdy + wdz = d\varphi\,;$$

d'où :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les équations (1) (n° **60**) peuvent alors être mises sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right).$$

En les multipliant respectivement par dx, dy, dz, et ajoutant, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = dU - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}\,dy + \frac{\partial w}{\partial t}\,dz\right)$$
$$- \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right], \qquad (10)$$

les différentielles étant prises par rapport à x, y, z, sans faire varier le temps t.

Le premier membre de l'équation (10) est une différentielle exacte, lorsque ρ sera constant, ce qui arrive dans le cas des liquides homogènes, ou une fonction connue de p, ce qui arrive dans le cas des gaz à température constante.

Or, de cette équation (10) il résulte que, si $\frac{dp}{\rho}$ est une différentielle exacte, il doit en être de même du second membre, et, par conséquent, l'expression :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{\partial v}{\partial t}\,dy + \frac{\partial w}{\partial t}\,dz,$$

est une différentielle exacte.

Cela posé, soient u_1, v_1, w_1 les valeurs de u, v, w au temps $t + \theta$, θ étant un infiniment petit; nous aurons:

$$u_1 = u + \theta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_1 = v + \theta \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w_1 = w + \theta \frac{\partial w}{\partial t},$$

et, par suite,

$$u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz = (udx + vdy + wdz) \\ + \theta \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right).$$

Mais, par hypothèse, le premier terme du second membre est une différentielle exacte, et nous venons de démontrer que le second terme est aussi une différentielle exacte ; il en sera donc de même du premier membre $u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz$, et nous aurons le théorème suivant :

Théorème de Lagrange. — *Lorsque l'expression $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte à une certaine époque, il en est de même à un instant quelconque du mouvement.*

Par conséquent, si $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte à l'origine du mouvement, ce que l'on peut toujours vérifier, cette condition sera remplie pendant toute la durée du mouvement. C'est ce qui arrive lorsque les vitesses initiales sont nulles, c'est-à-dire lorsque le fluide part du repos.

66. Il résulte de ce qui précède que l'équation (10) a lieu à toute époque du mouvement.

D'ailleurs, on a évidemment :

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} dz \\ = d \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

par suite, l'équation (10) nous donne :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\mathrm{U} - d\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \quad (11)$$

ou bien :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\mathrm{U} - d\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2, \quad (12)$$

en observant que l'on a :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{V}^2.$$

Sous la forme (12) on voit que l'équation est indépendante du choix des axes.

L'équation (11) est intégrable, comme nous l'avons dit plus haut, si ρ est une constante, ou une fonction de p, et même si ρ est une fonction de t, puisque t est considéré comme une constante dans les calculs.

L'intégration de cette équation (11) introduit une fonction arbitraire de t ; mais, cette fonction peut être supposée contenue dans φ. On a alors :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{U} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \quad (13)$$

D'ailleurs, l'équation de continuité nous donne :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Lorsque la loi de variation de la densité est connue, c'est-à-dire lorsque l'on connaît la relation entre p et ρ, l'équation (13) donne ρ en fonction de φ, et, en substituant dans l'équation (14), on a une équation différentielle pour déterminer φ ; la fonction φ étant connue, on en déduira u, v, w, en prenant les dérivées partielles de la fonction φ respectivement par rapport à x, y, z.

67. Cas particulier. — Dans le cas d'un *liquide homogène*, $\rho = const.$; l'équation (14) devient :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{15}$$

et l'équation (13) nous donne :

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{U} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{16}$$

L'équation (15) détermine la fonction φ, et l'équation (16) donne p en fonction de x, y, z et t. Quant à u, v, w, on les obtient comme ci-dessus, en différentiant la fonction φ.

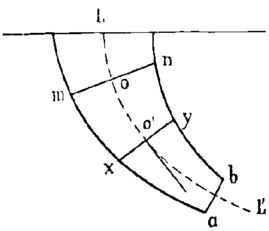
Hypothèse du mouvement linéaire.

68. Dans le cas d'un liquide homogène et pesant, on fait une hypothèse appelée *hypothèse du mouvement linéaire*. Elle consiste en ceci :

Quelles que soient la direction du courant, et la directrice du mouvement, on admet que, pour une section normale à la directrice, toutes les molécules possèdent des vitesses égales et parallèles à l'élément de la directrice, c'est-à-dire *à la tangente à la directrice au point considéré.*

La directrice dépend évidemment de la forme du vase. Ainsi, si LL′ est la directrice (fig. 17), tous les points de la section XY sont animés de vitesses égales et parallèles à l'élément de la directrice au point O′, c'est-à-dire que leur vitesse commune est parallèle à la tangente à la courbe LL′ au point O′.

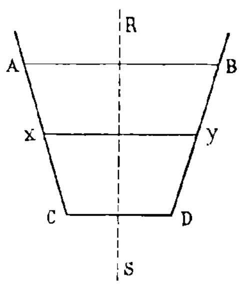
Fig. 17.



La vitesse commune à toutes les molécules d'une même section s'appelle *vitesse moyenne*. Elle doit satisfaire à la condition de fournir pour le volume passant par une section en un temps donné un volume égal au volume réel.

69. Lorsque la *directrice* est une *ligne droite*, l'hypothèse du mouvement linéaire nous conduit au *parallélisme des tranches*. Ainsi, soit un vase ABCD (fig. 18) contenant un liquide homogène et pesant, qui s'écoule par un orifice pratiqué au fond du vase. Toutes les molécules de la section XY sont animées de vitesses égales et parallèles à la droite RS, qui est la directrice. En d'autres termes, les tranches horizontales infiniment minces se remplacent successivement en restant parallèles à elles-mêmes.

Fig. 18.



70. Il résulte de ce qui précède que, dans le cas d'un liquide homogène et pesant, la loi de continuité, combinée avec l'hypothèse du mouvement linéaire, peut se formuler très simplement de la manière suivante :

Par chaque section, à un instant donné, il passe pendant le même temps, la même quantité de liquide, mais la vitesse varie avec la section.

S'il n'en était pas ainsi, il y aurait des ruptures.

D'après cela, si l'on désigne par ω l'aire de la section en un point quelconque, V la vitesse moyenne des molécules dans cette section, ω' l'aire d'une autre section, V' la vitesse moyenne des molécules dans cette section, les quantités de liquide qui passent par les sections ω et ω' pendant le temps dt, sont :

$$\omega V dt \quad \text{et} \quad \omega' V' dt,$$

et l'on aura :

$$\omega V = \omega' V'.$$

La quantité ωV est le *débit* ou la *dépense* ; c'est le volume du liquide qui s'écoule par la section ω pendant l'unité de temps.

L'équation $\omega V = \omega' V'$ s'appelle l'*équation du débit* ou *de la dépense.*

71. REMARQUE I. — Quand un liquide est en mouvement, ses diverses molécules frottent les unes contre les autres, et contre les parois. La pression élémentaire sur un élément est l'action du liquide sur cet élément, abstraction faite du frottement. L'action totale du liquide sur cet élément sera la résultante de la pression élémentaire et du frottement. Si l'on veut tenir compte des frottements, les forces de frottement pourront être traitées comme des forces extérieures (quoiqu'en réalité elles soient des forces intérieures) appliquées aux diverses molécules du fluide.

72. REMARQUE II. — En général, *dans un fluide en mouvement, la pression ne varie pas d'un point à un autre suivant la loi hydrostatique.*

En effet, soient X, Y, Z les composantes de la force extérieure agissant sur le point M, force qui sera la résultante de la force extérieure donnée et du frottement. Nous aurons les équations :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - u',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - v',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - w'.$$

Or, ces formules, qui déterminent la pression au point M, diffèrent de celles qui déterminent la pression en hydrostatique (n° **8**).

CHAPITRE II.

Propriétés du mouvement d'un fluide pesant.

73. Considérons un *liquide homogène et pesant* renfermé dans un vase, et qui s'écoule par un orifice horizontal pratiqué dans le fond du vase ; supposons cet orifice très petit par rapport aux sections horizontales du vase.

Nous appliquerons l'hypothèse du parallélisme des tranches, et nous négligerons les vitesses horizontales, ce qui est permis lorsque les sections varient peu dans toute l'étendue du vase, et que leurs dimensions sont très petites par rapport à la hauteur.

Les inconnues de la question sont *la vitesse verticale d'une tranche* et *la pression*, et nous nous proposons de déterminer ces inconnues en fonction du temps et de la distance de la tranche à un plan horizontal.

Nous prendrons l'axe de x vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur ; nous aurons :

$$X = g, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et, puisque nous négligeons les vitesses horizontales :

$$v = 0, \quad w = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0.$$

Les équations du mouvement (n° **60**) nous donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(g - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Ces deux dernières équations nous apprennent que la pression est la même pour tous les points d'une même tranche horizontale.

L'équation du débit nous donne :

$$\omega u = fc, \tag{2}$$

en désignant par ω la section faite à la distance x du plan horizontal des yz, f la section de l'orifice de sortie, et c la vitesse à cet orifice.

Les vitesses u et c se rapportent à un même instant t; c est une fonction de t seulement, u est une fonction de x et de t.

En éliminant u entre les équations (1) et (2), on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(g - \frac{f}{\omega} \frac{dc}{dt} + \frac{f^2 c^2}{\omega^3} \frac{d\omega}{dx} \right),$$

d'où, en multipliant par dx, et intégrant par rapport à x :

$$p = \mathrm{C} + g\rho x - \rho f \frac{dc}{dt} \int \frac{dx}{\omega} - \rho \frac{f^2 c^2}{2\,\omega^2},$$

C étant une constante indépendante de x, mais qui peut être une fonction de t.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\omega}$ peut être obtenue dans chaque cas particulier, puisque ω est une fonction donnée de x.

74. Soient P la pression constante exercée sur la surface supérieure du liquide, et h la distance du niveau supérieur au plan horizontal des yz. Nous aurons pour $x = h$, $p = \mathrm{P}$, et il vient, en désignant par Ω l'aire de la section supérieure :

$$p = \mathrm{P} + g\rho(x - h) - \rho f \frac{dc}{dt} \int_h^x \frac{dx}{\omega} - \rho \frac{f^2c^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right), \quad (3)$$

formule qui détermine la *pression pour une section quelconque du vase.*

Soient P' la pression à l'orifice de sortie, et l la distance de cet orifice au niveau supérieur du liquide; nous aurons pour $x = h + l$, $p = \mathrm{P}'$, et $\omega = f$; d'où :

$$\mathrm{P}' = \mathrm{P} + g\rho l - \rho f \frac{dc}{dt} \int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} - \rho \frac{f^2c^2}{2}\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right),$$

ou bien, en posant :

$$\int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} = m, \quad \mathrm{P} - \mathrm{P}' = g\rho\delta,$$

il vient :

$$g(l + \delta) = mf\frac{dc}{dt} + \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{f^2}{\Omega^2}\right). \quad (4)$$

Cette équation (4) servira à déterminer la vitesse c à l'orifice de sortie.

Nous allons maintenant appliquer cette formule (4) aux deux cas particuliers où le niveau du liquide dans le vase est constant, ou variable.

Niveau constant.

75. Si nous posons :

$$2g(l+\delta)=k^2, \quad 1-\frac{f^2}{\Omega^2}=\alpha^2,$$

α étant une constante très peu différente de l'unité, l'équation (4) nous donne :

$$dt=\frac{2mf}{k^2-\alpha^2c^2}\,dc, \tag{5}$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$t=\frac{mf}{k\alpha}\,l\,\frac{k+\alpha c}{k-\alpha c}+\mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C au moyen des circonstances initiales, nous supposerons que, pour $t=0$, les vitesses sont nulles; par conséquent, pour $t=0$, on aura $c=0$, et nous en déduirons $\mathrm{C}=0$.

On a alors :

$$t=\frac{mf}{k\alpha}\,l\,\frac{k+\alpha c}{k-\alpha c},$$

d'où :

$$c=\frac{k}{\alpha}\,\frac{1-e^{-\frac{k\alpha t}{mf}}}{1+e^{-\frac{k\alpha t}{mf}}}. \tag{6}$$

Cette équation (6) détermine la vitesse c à l'orifice de sortie. Cette vitesse étant connue, on déterminera u au moyen de l'équation (2) qui nous donne :

$$u = \frac{fc}{\omega},$$

et alors la pression p dans la section u sera donnée par l'équation (3).

76. Remarque I. — De l'équation (6) on conclut qu'après un certain temps, qui sera d'autant moindre que f sera plus petit, les exponentielles sont sensiblement nulles, et la vitesse c sera sensiblement constante, et tendra vers une limite :

$$\frac{k}{\alpha} = \sqrt{\frac{2g\,(l+\delta)}{1-\frac{f^2}{\Omega^2}}} = \sqrt{\frac{2g\left(l+\frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'}{g\rho}\right)}{1-\frac{f^2}{\Omega^2}}}.$$

Les quantités u et p tendront vers des limites correspondantes.

Si l'on néglige le carré $\frac{f^2}{\Omega^2}$, la vitesse c aura pour limite $\sqrt{2g\,(l+\delta)}$, ou $\sqrt{2gl}$, lorsque δ sera nul, c'est-à-dire lorsque la pression extérieure sera la même à l'orifice de sortie qu'au niveau supérieur du liquide.

Cette vitesse est donc la même que celle qu'acquerrait un corps pesant en tombant dans le vide d'une hauteur égale à celle du liquide dans le vase.

Cette propriété constitue le *théorème de Torricelli.*

77. Remarque II. — Lorsque la vitesse c est devenue constante, on a $\frac{dc}{dt} = 0$, et l'équation (3) devient alors :

$$p = \mathrm{P} + g\rho\,(x-h) - \rho\,\frac{f^2c^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right).$$

Or, dans l'état d'équilibre, la pression (n° **27**) serait égale à :

$$P + g\rho(x - h);$$

par conséquent, dans l'état de mouvement, la pression est moindre que dans l'état d'équilibre pour les sections telles que l'on ait $\omega < \Omega$, c'est-à-dire pour celles qui ont des aires moindres que celle de la surface libre du liquide ; elle est, au contraire, plus grande que dans l'état d'équilibre pour les sections dont les aires sont plus grandes que Ω.

78. Remarque III. — Si l'on veut connaître le volume du liquide qui est sorti du vase au bout du temps t, il faudra intégrer l'expression $fcdt$ entre les limites 0 et t, et l'on aura, en désignant ce volume par Q :

$$Q = \int_0^t fcdt = f\int_0^t \frac{k}{\alpha}\,\frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{mf}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{mf}}}\,dt,$$

ou bien :

$$Q = f\int_0^t \frac{k}{\alpha}\,\frac{e^{\frac{k\alpha t}{2mf}} - e^{-\frac{k\alpha t}{2mf}}}{e^{\frac{k\alpha t}{2mf}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2mf}}}\,dt = \frac{2mf^2}{\alpha^2}\; l\,\frac{e^{\frac{k\alpha t}{2mf}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2mf}}}{2};$$

d'où, en remplaçant α^2 par sa valeur :

$$Q = \frac{2m}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}}\; l\,\frac{e^{\frac{k\alpha t}{2mf}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2mf}}}{2}.$$

Au bout d'un certain temps, on peut négliger la seconde exponentielle, et l'on aura sensiblement :

$$Q = \frac{2m}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}}\, l\, \frac{e^{\frac{k\alpha t}{2mf}}}{2} = \frac{2m}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}} \left\{ \frac{k\alpha t}{2mf} - l2 \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}}}\, t - \frac{2m}{\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}}\, l2\,;$$

il est facile de voir que le premier terme est le volume qui serait sorti, si la vitesse avait été constante, et égale à la valeur limite (n° **76**) :

$$\frac{k}{\alpha} = \sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1 - \frac{f^2}{\Omega^2}}}.$$

79. Cas particulier. — Nous avons vu (n° **76**) qu'un liquide homogène et pesant, s'écoulant par un orifice, d'un vase à niveau constant, atteint en peu de temps une vitesse constante. On peut alors profiter de la force vive dont il est animé et l'introduire dans un espace où la pression serait supérieure à celle du liquide en mouvement à l'orifice. C'est le principe du *bélier hydraulique*.

Pour trouver la loi du mouvement nous appliquerons la formule (n° **74**) :

$$P' = P + g\rho l - \rho f m \frac{dc}{dt} - \frac{\rho c^2}{2}\left(1 - \frac{f^2}{\Omega^2}\right),$$

dans laquelle P′ sera la pression dans l'espace où l'on introduit le liquide ; P′ est supérieure à P, et même à $P + g\rho l$.

Si nous posons :

$$P' - P = g\rho\delta, \quad 1 - \frac{f^2}{\Omega^2} = \alpha^2, \quad 2g(l - \delta) = -k^2,$$

nous aurons l'équation :

$$2mf\frac{dc}{dt} + \alpha^2c^2 + k^2 = 0\,;$$

d'où :

$$dt = -\frac{2mfdc}{k^2 + \alpha^2c^2},$$

et, en intégrant,

$$t = \frac{2mf}{k\alpha}\left\{\text{arc tg}\,\frac{\alpha c_1}{k} - \text{arc tg}\,\frac{\alpha c}{k}\right\},$$

ou bien :

$$t = \frac{2mf}{k\alpha}\,\text{arc tg}\,\frac{\alpha}{k}\,\frac{c_1 - c}{1 + \frac{\alpha^2}{k^2}cc_1}\,;$$

on en tire :

$$c = \frac{c_1 - \frac{k}{\alpha}\,\text{tg}\,\frac{k\alpha t}{2mf}}{1 + \frac{\alpha}{k}c_1\,\text{tg}\,\frac{k\alpha t}{2mf}}.$$

La durée du mouvement s'obtient en faisant $c = 0$; d'où :

$$T = \frac{2mf}{k\alpha}\,\text{arc tg}\,\frac{\alpha c_1}{k}.$$

Quant au volume de liquide introduit au bout du temps t, il est donné par la formule :

$$Q = \int_0^t fcdt = f \int_0^t \frac{c_1 \cos \frac{k\alpha t}{2mf} - \frac{k}{\alpha} \sin \frac{k\alpha t}{2mf}}{\cos \frac{k\alpha t}{2mf} + \frac{\alpha c_1}{k} \sin \frac{k\alpha t}{2mf}} dt,$$

d'où, en observant que pour $t = 0$, on a $Q = 0$,

$$Q = \frac{2mf^2}{\alpha^2} l \left(\cos \frac{k\alpha t}{2mf} + \frac{\alpha c_1}{k} \sin \frac{k\alpha t}{2mf}\right),$$

Le volume total sera donc :

$$Q' = \frac{2mf^2}{\alpha^2} l \left(\cos \frac{k\alpha T}{2mf} + \frac{\alpha c_1}{k} \sin \frac{k\alpha T}{2mf}\right),$$

ou, en remplaçant T par sa valeur, et réduisant :

$$Q' = \frac{mf^2}{\alpha^2} l \left(1 + \frac{\alpha^2 c_1^2}{k^2}\right).$$

Niveau variable.

80. Dans le cas où le niveau est variable, h est une fonction de t. Les équations (1), (2), (3) et (4) (n^{os} **73** et **74**) ont encore lieu ; mais alors m et Ω sont des fonctions connues de h, et l est une fonction de h, reliée à cette dernière par l'équation :

$$h + l = a,$$

a étant la distance constante de l'orifice au plan horizontal des yz. Nous devons alors ajouter une équation qui exprime que *la quantité du liquide écoulé pendant le temps dt, est égale au volume compris entre les deux niveaux qui correspondent au commencement et à la fin de cet intervalle de temps dt.* Nous aurons donc l'équation :

$$\Omega V dt = fcdt,$$

V étant la vitesse dans la section Ω dont la distance au plan horizontal est égale à h. Or, on a évidemment :

$$V = \frac{dh}{dt},$$

et l'équation précédente nous donne :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{fc}{\Omega}.$$

L'équation (4) devient, en remplaçant l par $a - h$,

$$g\,(a - h + \delta) = mf\,\frac{dc}{dt} + \frac{1}{2}\,f^2c^2\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right),$$

et, en éliminant dt entre les deux dernières équations, il vient :

$$g\,(a - h + \delta) = \frac{mf^2}{\Omega}\,c\,\frac{dc}{dh} + \frac{1}{2}\,f^2c^2\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right).$$

Si l'on pose :

$$c^2 = 2gz,$$

on a :

$$g(a - h + \delta) = \frac{mf^2}{\Omega} g \frac{dz}{dh} + f^2 gz \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dz}{dh} + \frac{\Omega}{m}\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) z + \frac{\Omega}{mf^2}(h - a - \delta) = 0.$$

Cette équation du premier ordre et linéaire par rapport à z peut être intégrée dans tous les cas, puisque Ω et m sont des fonctions connues de h.

Lorsque z sera connu en fonction de h, on déterminera c par l'équation :

$$c^2 = 2gz,$$

et ensuite t, au moyen de l'équation :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{fc}{\Omega}.$$

Par conséquent, h et c seront connues en fonction de t, et la valeur de u sera donnée par l'équation :

$$\omega u = fc,$$

et celle de p par l'équation (3).

La quantité de liquide écoulé pendant un certain temps se détermine en calculant le volume du vase compris entre le niveau initial et le niveau variable ; enfin, on obtient la durée de l'écoulement total en faisant $h = a$ dans la valeur de t.

81. Remarque. — Si l'on suppose f très petit par rapport aux sections horizontales du vase, l'équation (4) se simplifie. En effet, on peut alors négliger $\frac{f}{\Omega}$ et mf, à moins que $\frac{dc}{dt}$ ne soit très grand, ce qui a lieu au commencement du mouvement.

L'équation (4) nous donne alors :

$$c^2 = 2g\,(l + \delta),$$

c'est-à-dire que nous trouvons pour c la valeur limite que l'on obtient pour $t = \infty$ dans le cas du niveau constant (n° **76**).

La vitesse que donne l'expérience est moindre que la vitesse théorique déterminée par la formule précédente, dans le rapport de 0,62 à 1.

CHAPITRE III.

Équation du régime permanent.

82. On appelle *mouvement permanent* ou *régime permanent* d'un fluide, l'état d'un fluide en mouvement, dans lequel il passe en chaque point, à chaque instant, une molécule possédant la même densité, soumise à la même pression par unité de surface, et animée de la même vitesse.

Le mouvement permanent est donc tel que, pour chaque point de l'espace occupé par le fluide, les cinq quantités u, v, w, p, ρ conservent constamment les mêmes valeurs. Ces quantités ne changent que quand on passe d'un point à un autre de l'espace dont il s'agit. Dans ce mouvement, chaque molécule ne conserve pas constamment la même vitesse ; mais, les différentes molécules qui viennent successivement passer par un même point de l'espace, y prennent des vitesses de même grandeur et de même direction. Le mouvement du système reproduit à chaque instant l'état qui existait à l'instant précédent ; cela constitue donc une sorte d'équilibre mobile. Ainsi, un cours d'eau dans lequel chaque masse liquide qui s'écoule est remplacée immédiatement par une masse identique et animée du même mouvement, donne l'idée de la permanence du régime.

L'ensemble des molécules fluides qui ont passé, ou qui passeront par un même point géométrique, constitue un *filet fluide*.

Analytiquement, le régime permanent est défini par la condition que les cinq fonctions u, v, w, p et ρ sont indépendantes du temps t ; en d'autres termes, leurs dérivées partielles prises par rapport à t sont nulles. Ces cinq quantités ne sont fonctions que de x, y, z.

83. Proposons-nous de trouver l'*équation du régime permanent*. A cet effet nous remarquerons que les conditions nécessaires et suffisantes de la permanence sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Or, si nous reprenons les équations du mouvement (n° **60**) :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - u',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \mathrm{Y} - v',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Z} - w',$$

si nous les multiplions respectivement par dx, dy, dz, et si nous ajoutons, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$$
$$- (u'dx + v'dy + w'dz).$$

Mais, le mouvement étant permanent, p ne dépend que de x, y, z seulement, et l'on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = dp\,;$$

d'autre part, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs udt, vdt, wdt qui se rapportent au mouvement de la molécule fluide sur sa trajectoire, on a :

$$u'dx + v'dy + w'dz = (uu' + vv' + ww')\,dt$$

$$= udu + vdv + wdw = \frac{1}{2}\,d\,(u^2 + v^2 + w^2),$$

ou bien, en désignant par V la *vitesse absolue* de la molécule qui passe au point (x, y, z) :

$$u'dx + v'dy + w'dz = \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2.$$

On a donc l'équation :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz - \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2.$$

Si nous supposons qu'il existe une *fonction de force*, ne renfermant pas explicitement le temps, et si nous désignons par U cette fonction de x, y, z, dont la différentielle est $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\mathrm{U} - \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2\,;$$

d'où en intégrant,

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = const.^{1} \qquad (1)$$

C'est l'*équation du régime permanent*. Dans cette équation V est la vitesse que possède la molécule dm à l'instant t où elle passe au point (x, y, z) ; dp est l'accroissement de la pression quand on passe du point M au point où la molécule arrive après le temps dt (la pression en un même point M étant indépendante du temps).

L'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ pourra toujours être obtenue du moment où l'on connaîtra la relation entre ρ et p.

84. REMARQUE. — Dans le cas d'un *liquide homogène*, on a $\rho = const$; d'où :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

et l'équation (1) est alors :

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = const. \qquad (2)$$

Dans le cas d'un *gaz* à *température constante*, on a :

$$p = k\rho ;$$

---

1. Il ne faut pas confondre cette équation avec celle que nous avons trouvée (n° 66). En effet, l'équation du n° 66 a été obtenue en supposant qu'il existe une fonction de vitesse, et elle s'étend à tout déplacement. L'équation actuelle n'exige pas qu'il y ait une fonction de vitesse, mais les différentielles se rapportent à un déplacement suivant un filet.

d'où :

$$\int \frac{dp}{\rho} = k \int \frac{dp}{p} = k\,l\,p\,;$$

l'équation (1) est alors :

$$\mathrm{U} - k\,l\,p - \frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = const. \qquad (3)$$

Théorème de Daniel Bernoulli.

85. Appliquons l'équation du régime permanent au cas d'un *liquide homogène et pesant*. Nous aurons, en supposant l'axe des z vertical :

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = -g\,;$$

d'où :

$$\mathrm{U} = -\int g dz = -gz,$$

et l'équation (2) nous donne :

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = const,$$

ou bien :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\mathrm{V}^2}{2g} = const.$$

Or, si l'on désigne par ϖ le poids spécifique du liquide, on a (I, n° **329**) :

$$\varpi = \rho g,$$

et la formule ci-dessus nous donne :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = const = H.$$

Cette formule constitue le *théorème de Daniel Bernoulli*.

Tous les termes de cette équation représentent des hauteurs : z est la hauteur d'un point du liquide au dessus d'un plan de comparaison horizontal (plan des xy) ; $\frac{V^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse V en ce point; enfin, $\frac{p}{\varpi}$ est la hauteur représentative de la pression en ce point, la pression p étant exprimée en colonne liquide de poids spécifique ϖ.

La formule précédente exprime que *la somme* H *de ces trois hauteurs est constante pour tous les points d'un même filet fluide soumis à un régime permanent*, c'est-à-dire que la somme de ces trois hauteurs qui varient chacune avec le point considéré du filet est une constante H. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *En chaque point d'un filet liquide pesant et homogène animé d'un mouvement permanent, la somme de la hauteur du point au-dessus d'un plan horizontal de comparaison, de la hauteur représentative de la pression, et de la hauteur due à la vitesse, est une quantité constante.*

86. Il résulte de là que la somme H de ces trois hauteurs détermine un niveau constant que l'on appelle le *plan de charge*, et nous aurons le théorème suivant :

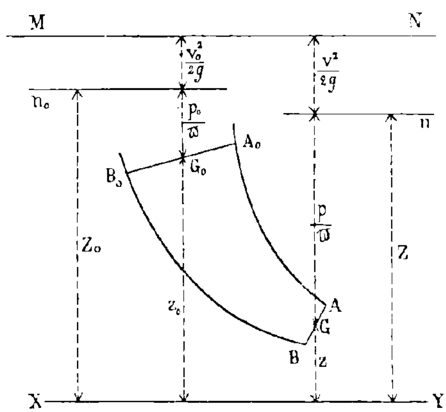
THÉORÈME. — *En tous les points d'un filet liquide homogène et pesant satisfaisant aux conditions de la permanence du régime, la hauteur du plan de charge est constante.*

Le théorème de D. Bernoulli permet de déterminer la vitesse V en un point quelconque d'un filet liquide animé d'un mouvement permanent, lorsque l'on connaît la pression en ce point.

87. Remarque. — Comme nous l'avons dit (n° **71**), lorsqu'un liquide est en mouvement, ses diverses molécules frottent les unes contre les autres, ou contre les parois. Dans la démonstration du théorème de D. Bernoulli que nous venons de donner, nous avons fait abstraction des forces de frottement. Nous avons supposé que les filets liquides n'éprouvent aucun frottement. Si l'on tenait compte du frottement, on constaterait d'un point à un autre d'un même filet des différences de niveau dans le plan de charge, dues au travail des frottements. Ces différences s'appellent *pertes de charge* : nous y reviendrons plus loin.

88. Comme application de la formule de D. Bernoulli, considérons une masse liquide pesante comprise entre deux plans A_0B_0 et AB (fig 19), et un tuyau quelconque aboutissant normalement à ces deux surfaces.

Fig. 19.



Nous supposons que le mouvement du fluide soit permanent, et que les filets liquides n'éprouvent aucun frottement. Soient G_0 et G les centres de gravité des sections A_0B_0 et AB, V_0 et V les vitesses des molécules traversant ces sections ; enfin, nous supposerons que la section transversale du tuyau varie d'une manière continue.

Le théorème de D. Bernoulli nous donne :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{V_0^2}{2g} = H.$$

Soit n_0 le niveau d'un plan horizontal dont la hauteur au-dessus du point G_0 est égale à la hauteur due à la pression au point G_0 : cette hauteur sera donc $\frac{p_0}{\varpi}$, c'est-à-dire la hauteur représentative de la pression p_0 au point G_0 (n° **29**). Ce niveau s'appelle le *niveau piézométrique*[1] de la section A_0B_0. Soit de même, n le *niveau piézométrique* de la section AB.

Posons :

$$z_0 + \frac{p_0}{\varpi} = Z_0,$$

$$z + \frac{p}{\varpi} = Z;$$

Z_0 et Z seront les hauteurs de ces deux niveaux n_0 et n au-dessus du plan de comparaison XY.[2] La formule

1. De πιέσις, pression, μέτρον, mesure.

2. Si, aux différents points du filet, on élève des tubes étroits ouverts aux deux bouts et débouchant dans le vide, le liquide s'élèvera dans ces tubes à des hauteurs indiquées par les valeurs de $\frac{p}{\varpi}$ relatives à ces différents points. Ces tubes s'appellent *tubes piézométriques*. Z_0 et Z seront les hauteurs des colonnes piézométriques au-dessus du plan de comparaison XY.

de *Bernoulli* exprime que, si, à la hauteur du niveau piézométrique d'un point quelconque on ajoute une hauteur égale à la hauteur due à la vitesse du filet liquide en ce point, on arrive à un niveau constant qui est le plan de charge.

Cette formule nous donne :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = Z_0 - Z.$$

Soit h la *différence de niveau* des deux niveaux piézométriques n_0 et n, ou la *dénivellation piézométrique* des deux points G_0 et G. Nous aurons :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = h. \qquad \text{(A)}$$

Cette quantité h, qui est l'abaissement vertical du niveau piézométrique en passant de G_0 à G, s'appelle la charge entre les deux sections.

La formule (A) nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *La différence des hauteurs dues aux vitesses en deux points quelconques d'un même filet fluide satisfaisant aux conditions de permanence est égale à la charge entre ces deux points, ou à la dénivellation piézométrique de ces deux points.*

89. Remarque I. On appelle *charge en un point* G la somme :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi};$$

c'est la distance du point G au plan de charge. En hydrostatique, la charge se compose seulement du terme $\frac{p}{\varpi}$: ici, la charge est augmentée de la hauteur $\frac{V^2}{2g}$, due à la vitesse V. L'effet du mouvement est donc de *remonter le plan de charge*.

90. REMARQUE II. — Lorsque la constante H est connue, comme la distance z au plan de comparaison est une donnée de la question, on connaîtra la charge $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi}$ en un point quelconque, laquelle est déterminée par la formule :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} = H - z. \qquad (B)$$

D'ailleurs, la loi de continuité nous donne :

$$\omega V = \omega_0 V_0 = Q,$$

ω et ω_0 étant les sections, et Q la dépense.

Donc, connaissant la dépense Q et les sections ω et ω_0, on connaîtra V et V_0, et la formule (B) nous donnera les pressions p et p_0 aux points G et G_0.

91. REMARQUE. III. — On peut encore dans la formule de D. Bernoulli introduire le rapport des aires des sections ω et ω_0. En effet, la formule :

$$\omega V = \omega_0 V_0,$$

nous permet de remplacer $\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}$ par l'une ou l'autre des expressions :

$$\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right).$$

Dans le premier cas, la formule de Bernoulli nous donne :

$$\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi};$$

d'où l'on tire :

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Si l'on suppose, en particulier, que la section ω soit pratiquée au fond d'un vase dont ω_0 serait l'aire de la section supérieure, $z_0 - z$ sera la distance de l'orifice au niveau supérieur, et cette formule sera identique à celle que nous avons trouvée précédemment (n° **76**).

92. REMARQUE IV. — Il résulte encore de la formule de Bernoulli (n° **88**) que *le plan de charge* indique la plus grande hauteur à laquelle le filet liquide puisse parvenir sans vitesse, et à la condition de déboucher sous une pression nulle.

En effet, si l'on fait $V = 0$, $p = 0$, il vient :

$$z = z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{V_0^2}{2g} = H.$$

93. REMARQUE V. — La formule :

$$h = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi},$$

nous apprend que la hauteur correspondante à la variation de vitesse entre deux sections n'est pas égale à la différence $z_0 - z$ des niveaux de ces deux sections, mais à cette différence augmentée de la différence des hauteurs piézométriques de ces deux sections.

94. CAS PARTICULIERS. — 1° Si le *filet liquide* est *horizontal*, on a $z = z_0$, et alors il résulte de la formule de Bernoulli que la somme :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi},$$

sera constante pour une section quelconque.

Donc, *dans un filet liquide horizontal, la somme de la hauteur due à la vitesse et de la hauteur représentative de la pression est constante pour une section quelconque.*

2° Si la *section du filet* est *constante*, on a $\omega = \omega_0$, et, par suite, en vertu de la loi de continuité, $V = V_0$. Il résulte alors de la formule de Bernoulli que la somme :

$$\frac{p}{\varpi} + z,$$

est constante pour toutes les sections.

Donc, *dans un filet liquide de section constante, la somme de la hauteur représentative de la pression et de la hauteur du centre de gravité de la section au-dessus du plan de comparaison est constante pour toutes les sections.*

3° Si le *canal* est *horizontal* et à *section constante*, on a en même temps $z = z_0$, et $V = V_0$; par conséquent, $p = p_0 = const.$ Donc, dans ce cas, *la pression est constante dans toutes les sections.*

Cas particuliers du mouvement des fluides.

95. Nous avons vu (n° **72**) que, dans un fluide en mouvement, la pression ne varie pas, en général, d'un point à un autre suivant la loi hydrostatique.

Il est facile de s'assurer que si, *dans un fluide parfait, les différentes molécules ont un mouvement rectiligne et uniforme, la pression varie suivant la loi hydrostatique, quand on passe d'un point à un autre, à un même instant.*

9

En effet, si le mouvement est rectiligne et uniforme, on a :

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0,$$

et les équations du mouvement (n° **60**) deviennent alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z\,;$$

ce sont les formules de l'hydrostatique (n° **8**). Par conséquent, *à un même instant*, la pression varie avec x, y, z, comme dans le cas de l'équilibre.

96. PROPRIÉTÉ. — *Dans un liquide homogène, si le mouvement est permanent et rectiligne, il sera uniforme.*

En effet, si nous prenons l'axe des x parallèle à la direction du mouvement des différentes molécules, nous aurons :

$$v = 0, \quad w = 0\,;$$

par suite, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

et l'équation (4) de continuité (n° **62**) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

nous donne alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

D'ailleurs, le mouvement étant permanent, on a (nº **83**) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Par conséquent, puisque v et w sont nulles, il résulte de la formule (nº **60**) :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

que $u' = 0$. Par suite, la vitesse u est constante pour un même filet. Le *mouvement est donc uniforme.*

97. Propriété — *Lorsque les molécules d'un fluide sont animées de mouvements quelconques, mais très lents, la pression varie suivant la loi hydrostatique.*

En effet, les mouvements étant très lents, il s'ensuit que les forces satisfont à peu près aux conditions d'équilibre ; par conséquent, on peut, avec une approximation suffisante, appliquer les équations qui auraient lieu si la masse fluide était en repos.

98. Propriété. — *Lorsque les molécules d'un fluide parfait ont des mouvements identiques à ceux qu'elles prendraient si chacune d'elles se mouvait isolément sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées, la pression est constante à un même instant dans toute l'étendue du fluide.*

En effet, on a alors :

$$X = u', \quad Y = v', \quad Z = w',$$

et, par conséquent, les équations du mouvement (nº **60**) nous donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Il en résulte qu'à *un même instant* la pression ne varie pas d'un point à un autre du fluide. D'ailleurs, dans le cas du mouvement permanent, elle serait constante d'une manière absolue, puisqu'alors la pression en un point donné ne varie pas avec le temps.

Ce cas se présente quand un liquide pesant et homogène sort d'un vase à niveau constant par un orifice de dimensions assez petites par rapport à celles du vase. On constate que le jet a une forme parabolique qui ne diffère pas de la trajectoire que décrirait une molécule isolée (II, n° **55**).

CHAPITRE IV.

Mouvement d'un liquide s'écoulant d'un réservoir à niveau constant par un orifice percé en mince paroi.

99. Considérons un liquide homogène contenu dans un vase et s'écoulant par un petit orifice pratiqué dans la paroi. Nous supposerons l'orifice percé en *mince paroi*, c'est-à-dire que l'épaisseur de la paroi soit très faible sur le contour de l'orifice. L'écoulement est supposé *permanent*, ce qui exige que le niveau soit entretenu à une hauteur constante.

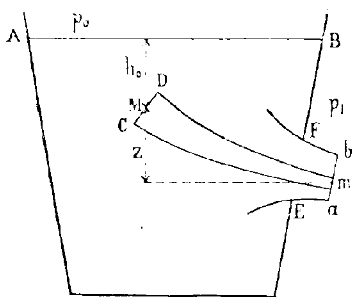
Lorsqu'un liquide s'écoule par un orifice, on observe que la section de la veine diminue à partir de l'orifice jusqu'à une certaine distance de cet orifice, où la section est minimum et appelée *section contractée*. Ainsi, au moment où le liquide sort du vase, les filets extrêmes *convergent* vers l'axe, et cette convergence cesse à une petite distance de l'orifice.

Cette *contraction* de la veine entraîne pour les filets intérieurs une pression plus grande que celle qui résulterait de la loi hydrostatique.

On s'explique la contraction de la veine de la manière suivante : Pour que le liquide sorte du vase, il faut que ses molécules convergent vers le centre de l'orifice, suivant toutes les directions. Dans le cas où l'orifice est percé au fond du vase, les filets vers l'axe de l'orifice seuls décrivent une ligne verticale ; les autres filets, qui sont obligés de se détourner de la verticale pour converger vers l'orifice, prennent des directions qui se rapprochent plus ou moins de l'horizontale. Ces filets se gênent dans leurs mouvements, et les molécules liquides décrivent des trajectoires courbes. Ces trajectoires donnent naissance à des forces centrifuges qui ont pour effet d'augmenter la pression dans l'intérieur de la veine.

100. Cela posé, soient AB le niveau constant du liquide (fig. 20), p_0 la pression sur AB, et p_1 la pression du gaz dans lequel s'échappe le filet qui sort de l'orifice EF. Au bout d'un temps assez court, le *régime permanent* s'établit : les filets liquides vont en convergeant vers l'orifice, jusqu'à une section *ab* parallèle à l'orifice, et qui est la *section contractée*. Nous nous proposons de *déterminer la vitesse* V *du liquide dans cette section contractée ab*. La pression en tous les points de la section *ab* est égale à la pression p_1 : car, autrement la veine liquide tendrait soit à se dilater, soit à se contracter sous cette pression p_1.

Fig. 20.



Considérons un filet liquide qui passe par le point m de la section *ab* : soit CDm ce filet prolongé vers l'intérieur du liquide.

L'équation du débit étant :

$$\omega V = \omega' V' = Q,$$

il en résulte que la vitesse varie en raison inverse de la section. Or, la section du vase étant beaucoup plus grande que celle de l'orifice, il s'ensuit que la vitesse à l'intérieur du vase est beaucoup moindre que la vitesse à la sortie. On peut donc admettre que la vitesse en M est négligeable. Si nous appliquons au filet le théorème de D. Bernoulli, et si nous désignons par V la vitesse en m, et par z la distance verticale des centres M et m des sections CD et ab, [1] nous aurons :

$$\frac{V^2}{2g} = z + \frac{p}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi},$$

p étant la pression sur l'unité de surface au point M. Nous ne connaissons pas z et p ; mais, au point M, le liquide est, comme nous venons de le voir, à peu près en repos : il s'ensuit que l'on peut considérer la pression en ce point comme exprimée par la loi hydrostatique, comme s'il s'agissait d'un liquide pesant en repos. On a donc (n° **29**) :

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} + h_0,$$

h_0 étant la profondeur du point M en dessous du niveau du liquide.

Par suite, il vient :

$$\frac{V^2}{2g} = z + h_0 + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}.$$

---

1. z est donc la différence des distances des points M et m au plan horizontal de comparaison.

Or, h_0 varie avec la position du point M ; mais, si l'on désigne par H la profondeur du point m de la section contractée en dessous du niveau du liquide, on a :

$$H = z + h_0 ;$$

par conséquent :

$$\frac{V^2}{2g} = H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi},$$

d'où :

$$V = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}. \qquad (1)$$

La quantité $H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}$ est l'abaissement du niveau piézométrique en passant de l'intérieur du vase au point m de la section contractée (n° **88**). Le point de départ M est d'ailleurs indifférent, pourvu qu'on ne la prenne pas trop près de l'orifice. Cette quantité $H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}$ est donc la charge sur l'élément au point m (n° **88**).

On conclut de cette formule que *la hauteur due à la vitesse dans un élément de la section contractée au point m est égale à la charge sur cet élément.*

La quantité H différant très peu de la profondeur du centre de gravité de ab en dessous du niveau supérieur du liquide, on peut, sans erreur sensible, prendre cette dernière profondeur pour la valeur de H ; mais la profondeur du centre de gravité de ab qui est inconnue, diffère peu de la profondeur du centre de gravité de l'orifice EF qui est une quantité connue.

Nous pourrons donc prendre pour l'expression de la *vitesse moyenne dans la section contractée* :

$$V = m' \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}, \qquad (2)$$

en désignant par H la distance du centre de gravité de EF au niveau supérieur du liquide, m' étant un coefficient qui diffère très peu de l'unité.

101. Cas particulier. — Si $p_1 = p_0$, ce qui est le cas ordinaire, on a, en faisant abstraction du coefficient m' :

$$V = \sqrt{2gH}.$$

Donc, *la vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi est égale à la vitesse due à la hauteur de la surface libre du liquide au-dessus du centre de l'orifice*, c'est-à-dire *la vitesse d'un corps qui tombe librement dans le vide de cette hauteur* H, *sans vitesse initiale*. C'est le théorème de Torricelli.

Coefficient de contraction.
Coefficient de dépense.

102. Nous avons appelé *dépense d'un orifice* la quantité de liquide qui s'écoule par cet orifice pendant l'unité de temps. Il en résulte que ω étant l'aire de la section contractée, la dépense par seconde sera :

$$Q = \omega V = \omega m' \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}.$$

Ordinairement, on ne connaît pas l'aire ω de la section contractée, mais on la déduit de l'aire de l'orifice qui est connue. En désignant par Ω l'aire de l'orifice, on aura :

$$\omega = m''\Omega,$$

et il vient alors, en posant $m'm'' = m$:

$$Q = m\Omega \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}. \qquad (3)$$

Le coefficient m'', qui est le rapport entre l'aire de la section contractée et l'aire de la section de l'orifice, s'appelle *coefficient de contraction*. Ce coefficient ne peut être obtenu théoriquement. On doit recourir à des expériences.

En opérant sur des orifices circulaires de $0^m,02$ à $0^m,16$ de diamètre percés dans une paroi plane, on a trouvé par tâtonnements que la section contractée, qui est aussi de forme circulaire, est à une distance de l'orifice à peu près égale à la moitié du diamètre de l'orifice, et que le rapport des rayons de ces deux sections est environ 0,79 ; par suite, on a, pour le coefficient de contraction :

$$m'' = \frac{\omega}{\Omega} = (0,79)^2 = 0,624.$$

Quand l'orifice n'est pas circulaire on admet comme valeur approximative de m'' le nombre 0,62. Mais, il est évident que cette valeur est plus ou moins incertaine. Aussi, on a eu recours à une autre méthode qui nous donne la valeur d'un coefficient que nous allons définir.

103. On appelle *dépense théorique* l'expression :

$$\Omega \sqrt{2g\left(\mathrm{H} + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)},$$

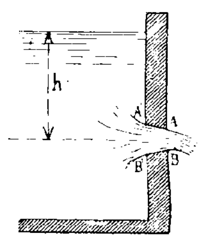
que l'on obtiendrait en faisant abstraction de la contraction de la veine. D'autre part, on peut évaluer par expérience la *dépense réelle*, en recevant le liquide qui s'écoule dans un bassin de forme simple, et déterminant le volume du liquide qui s'écoule pendant chaque seconde; on pourra alors obtenir le rapport entre la dépense réelle et la dépense théorique. Ce rapport, qui sera la valeur du nombre m, a reçu le nom de *coefficient de dépense ;* il diffère peu du coefficient de contraction, et est généralement confondu avec celui-ci. Il résulte des expériences que le coefficient de dépense est à peu près constant.

Pour un petit orifice circulaire de $0^m,02$ à $0^m,16$ percé en mince paroi et pour des charges inférieures à 7^m, on a trouvé que ce coefficient est 0,62. On a la même valeur pour un orifice rectangulaire dont la hauteur est moindre que la moitié de la largeur. Pour un orifice carré, on trouve 0,60.

Écoulement par un orifice parfaitement évasé.

104. Imaginons un *orifice évasé en dedans* AB A'B', de manière à lui donner la forme que la veine prendrait en sortant d'un orifice A'B' percé en mince paroi (fig. 21). Il n'y aura plus de contraction ; l'orifice AB est alors la section contractée, et le coefficient de contraction m est égal à l'unité. Un tel orifice est ce que l'on appelle un *orifice parfaitement évasé*.

Fig. 21.



Dans ce cas, la dépense diffère peu[1] du produit :

$$A\sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)},$$

A étant l'aire de la section AB, et h la distance du centre de cette section au niveau supérieur du liquide.

1. Cette faible différence provient de l'influence retardatrice due au frottement du conduit A'B'AB.

Si l'on prend le rapport entre la dépense réelle Q et l'expression ci-dessus, on trouve que ce rapport ou le *coefficient de dépense* a pour valeur 0,984. En représentant ce coefficient par μ, nous aurons :

$$Q = \mu A \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi}\right)}.$$

Le coefficient μ porte évidemment sur la vitesse.

Écoulement par un orifice latéral.

105. Nous avons vu (n° **101**) que si l'écoulement a lieu par un petit orifice et si la pression est la même à la surface libre du liquide et à l'orifice de sortie, la vitesse est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{2gh},$$

h étant la distance du centre de gravité de l'orifice au niveau supérieur du liquide, et, par suite la dépense est :

$$Q = \omega \sqrt{2gh}.$$

Cette formule n'est pas applicable à un orifice latéral de grandes dimensions, puisque pour ce dernier la charge est différente pour les différentes sections horizontales de l'orifice. Il en résulte que la vitesse varie pour chaque élément horizontal.

Nous admettrons que les molécules qui partent successivement d'un même point de la surface, suivent toutes une même trajectoire jusqu'à l'orifice de sortie.

Nous pouvons donc décomposer la masse liquide en un faisceau de filets, à chacun desquels nous pourrons appliquer la formule de D. Bernoulli. Or, les sections extrêmes d'un filet étant $d\omega$ et $d\Omega$, nous aurons pour ce filet (n° **91**) :

$$\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{d\omega^2}{d\Omega^2}\right) = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi};$$

mais, il est évident que l'on peut remplacer le rapport $\frac{d\omega}{d\Omega}$ par $\frac{\omega}{\Omega}$, et ensuite négliger ce dernier rapport en présence de l'unité, ce qui nous donne, en supposant $p = p_0$, la formule :

$$V = \sqrt{2gh},$$

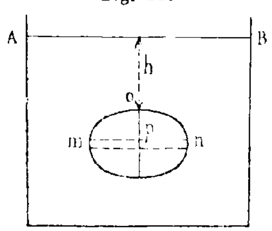
et la dépense par la section $d\omega$ du filet sera :

$$dQ = d\omega \sqrt{2gh},$$

h étant la distance de cette section $d\omega$ au niveau supérieur.

106. Nous allons déduire de là la formule à appliquer dans le cas d'un *orifice latéral*, que nous supposerons *symétrique* par rapport à la verticale. Soit h la distance au niveau supérieur du point O (fig. 22) où la verticale rencontre la section de l'orifice : c'est la charge sur ce point. En prenant ce point O pour origine de deux axes rectangulaires, l'axe des y étant vertical, nous aurons

Fig. 22.



$d\omega = dx\,dy$, et alors la dépense totale aura pour expression :

$$Q = \int_0^b \int_{-x}^{+x} dx\,dy \sqrt{2g(h+y)},$$

ou bien :

$$Q = \int_0^b 2x \sqrt{2g(h+y)}\,dy,$$

b étant la hauteur de l'orifice.

Observons que l'on obtiendrait la même formule, si l'on divisait l'orifice en tranches horizontales infiniment minces, et si l'on appliquait à chacune de ces tranches la formule relative à un orifice en mince paroi (n° **101**). Nous aurions, en effet (fig. 22), pour une tranche $mn = 2x\,dy$, dont la distance au niveau supérieur serait $h + y$, la dépense :

$$2x\,dy \sqrt{2g(h+y)},$$

et la dépense totale serait :

$$Q = \int_0^b 2x \sqrt{2g(h+y)}\,dy.$$

Lorsque l'on connaîtra la forme de l'orifice, on pourra déterminer x en fonction de y, et alors on calculera la dépense totale en effectuant l'intégration indiquée.

107. On peut se proposer de déterminer ce que l'on appelle la *hauteur moyenne de l'orifice*, ou la *charge moyenne*.

A cet effet, nous observerons que la vitesse variant depuis la partie supérieure jusqu'à la partie inférieure de l'orifice, il existe nécessairement un point de cet orifice dont la vitesse est égale à la vitesse moyenne u, telle que l'on ait :

$$Q = \omega u,$$

ω étant la section de l'orifice.

En désignant par H la distance de ce point au niveau supérieur, distance que l'on appelle la *hauteur moyenne de l'orifice*, nous aurons évidemment :

$$u = \sqrt{2g\mathrm{H}},$$

et, par suite,

$$Q = \omega \sqrt{2g\mathrm{H}}.$$

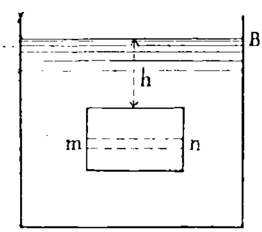
En égalant les deux valeurs de Q, on a l'équation :

$$\omega \sqrt{\mathrm{H}} = \int_0^b 2x \sqrt{h + y}\, dy,$$

qui servira à déterminer H.

108. Dans le cas d'un *orifice rectangulaire* (fig. 23), soient l la longueur de l'orifice et b sa hauteur ; nous aurons $2x = l$, et, par conséquent :

Fig. 23.



$$Q = \int_0^b l \sqrt{2g(h + y)}\, dy$$

$$= \frac{2}{3} l \sqrt{2g} \left[(h + b)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right].$$

On a donc, puisque $\omega = bl$:

$$b\sqrt{\mathrm{H}} = \frac{2}{3}\left[(h+b)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right],$$

d'où :

$$\mathrm{H} = \frac{4}{9b^2}\left[(h+b)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right]^2.$$

En particulier, si le *bord supérieur de l'orifice* est *à fleur d'eau*, $h = 0$, et il vient :

$$\mathrm{Q} = \frac{2}{3} l \sqrt{2g} \,.\, b^{\frac{3}{2}}, \quad \mathrm{H} = \frac{4}{9} b.$$

109. Remarque. — Si l'on avait déterminé la dépense Q' comme dans le cas où la hauteur de l'orifice est très petite, on aurait obtenu en appliquant les formules trouvées précédemment (nos **100** et **101**) :

$$\mathrm{Q}' = bl\sqrt{2g\left(h + \frac{b}{2}\right)}.$$

Or, si l'on prend le rapport des deux dépenses, on trouve :

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'} = \frac{2}{3}\frac{(h+b)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{b\left(h + \frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on donne au rapport $\frac{h}{h+b}$ différentes valeurs particulières, on trouve que l'écart entre les deux valeurs de Q et Q' n'atteint jamais 6 centièmes, et, par conséquent, l'on peut prendre l'une ou l'autre des deux formules pour déterminer la dépense.

110. Considérons encore le cas d'un *orifice circulaire* dont le diamètre soit égal à b.

L'équation du cercle étant :

$$y^2 + x^2 - by = 0,$$

on en tire :

$$x = \sqrt{by - y^2}.$$

Par suite,

$$Q = 2\sqrt{2g}\int_0^b \sqrt{by - y^2}\,\sqrt{h + y}\,dy.$$

Pour trouver l'intégrale, nous poserons :

$$\frac{b}{2} - y = \frac{b}{2}\cos\varphi,$$

d'où :

$$y = \frac{b}{2}(1 - \cos\varphi), \quad dy = \frac{b}{2}\sin\varphi\, d\varphi,$$

et nous aurons :

$$Q = \frac{b^2}{2}\sqrt{g}\int_0^\pi \sin^2\varphi\,\sqrt{2h + b(1 - \cos\varphi)}\,d\varphi.$$

On a aussi :

$$Q' = \frac{\pi b^2}{4}\sqrt{2g\left(h + \frac{b}{2}\right)};$$

par conséquent,

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^\pi \sin^2 \varphi \sqrt{2h + b(1 - \cos\varphi)}\, d\varphi}{\sqrt{2h + b}}.$$

111. En particulier, pour $h = 0$, on a :

$$Q = \frac{b^2}{2} \sqrt{2bg} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi\, d\varphi\ ;$$

pour intégrer cette expression, on posera $\frac{1}{2} \varphi = \theta$, et il vient :

$$Q = 4b^2 \sqrt{2bg} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \,.\, \sin \theta\, d\theta = \frac{8b^2 \sqrt{2bg}}{15}.$$

D'autre part, on a aussi :

$$Q' = \frac{\pi b^2}{4} \sqrt{bg}\ ,$$

et par suite,

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{32\sqrt{2}}{15\pi} = 0{,}960.$$

L'écart est donc moindre pour l'orifice circulaire que pour l'orifice rectangulaire, et l'on en conclut que l'on peut prendre aussi l'une ou l'autre des deux formules pour calculer la dépense.

112. On admet les mêmes conclusions pour des orifices de forme quelconque. Il est bon d'observer que Q et Q' sont les dépenses théoriques qui se rapporteraient à l'aire de l'orifice, tandis qu'il faut prendre l'aire de la section contractée. On doit donc multiplier dans les formules l'aire de l'orifice par 0,62 (n° **102**).

Écoulement par un déversoir.

113. Un *déversoir* est un orifice découvert à sa partie supérieure, et dont le bord inférieur est une horizontale, appelée *seuil*. Un déversoir peut être assimilé à un orifice rectangulaire dont le côté supérieur aurait disparu.

Soient l la longueur du seuil, y la distance verticale du seuil au niveau du réservoir, en un point où le liquide serait en repos, η l'épaisseur de la veine au-dessus du seuil et Q la dépense par seconde. Si nous appliquons la formule (3) (n° **102**), en observant que les pressions p_0 et p_1 sont égales[1], et que le centre de gravité de l'orifice est au milieu de la hauteur η, nous aurons :

$$\Omega = l\eta, \quad \mathrm{H} = y - \frac{1}{2}\eta,$$

et :

$$\mathrm{Q} = ml\eta\sqrt{2g\left(y - \frac{1}{2}\eta\right)}.$$

1. Nous supposons que l'écoulement se produise librement dans l'air ou dans un gaz quelconque.

Or, η est une inconnue évidemment moindre que y ; d'ailleurs, il résulte des expériences que le rapport $\frac{\eta}{y}$ n'est jamais inférieur à 0,72 ; de plus, il est toujours moindre que l'unité. Nous prendrons pour ce rapport la moyenne arithmétique entre 0,72 et 1, et nous poserons :

$$\eta = 0{,}86y,$$

ce qui nous donnera, en remplaçant m par la valeur moyenne 0,62 :

$$Q = 0{,}62 \times 0{,}86\, ly \sqrt{2g \times 0{,}57\, y},$$

ou bien :

$$Q = 0{,}403\, ly \sqrt{2gy}.$$

Or, il résulte d'expériences faites par Poncelet et Lesbros sur un déversoir de $0^m{,}20$ de longueur, que, si l'on pose :

$$Q = Mly \sqrt{2gy},$$

on trouve que le coefficient M varie entre 0,424 et 0,385, valeurs qui diffèrent peu de la valeur 0,403.

CHAPITRE V.

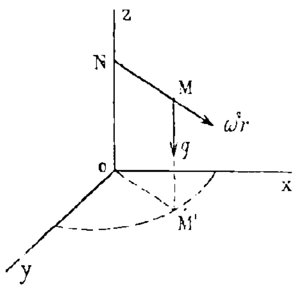
Extension du théorème de Bernoulli au mouvement relatif.

114. D'après ce que nous avons vu (II, n° **229**), le mouvement relatif peut être traité comme un mouvement absolu, pourvu que l'on joigne en chaque point, aux forces réellement appliquées, deux forces fictives, savoir : la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée.

Or, dans l'équation du mouvement permanent, si l'on considère les positions successives d'une même molécule fluide sur sa trajectoire, l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ est le travail élémentaire des forces appliquées à ce point. Mais, d'après ce que nous avons vu (II, n° **215**), la force centrifuge composée étant perpendiculaire au déplacement relatif de son point d'application, le travail relatif de cette force est nul en chaque point, et, par conséquent ces forces n'entrent pas dans l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$. Quant à l'autre force fictive, si nous désignons par φ_c l'accélération d'entraînement, la force d'inertie d'entraînement rapportée à l'unité de masse est $-\varphi_c$. Nous devrons donc dans la formule de Bernoulli ajouter les composantes de cette dernière force aux composantes X, Y, Z.

115. En particulier, considérons un liquide pesant animé d'un mouvement relatif permanent par rapport à des axes mobiles animés d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale Oz.

Fig. 24.



Soient ω la vitesse angulaire constante du mouvement de rotation, M un point du fluide (fig. 24), x, y, z ses coordonnées, $MN = OM' = r$ sa distance à l'axe de rotation Oz. Les forces que l'on a à considérer sont : le poids de la molécule et la force d'inertie d'entraînement qui se réduit ici à la force centrifuge (I, n° **164**). Cette dernière rapportée à l'unité de masse est $\omega^2 r$ et ses composantes parallèles aux axes Ox et Oy sont $\omega^2 x$ et $\omega^2 y$. Nous aurons donc :

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz &= - g dz + \omega^2 x dx + \omega^2 y dy \\ &= - g dz + \omega^2 r dr, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$U = - gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Nous aurons donc, en désignant par V' la vitesse relative au point M, et en appliquant au mouvement relatif l'équation (2) (n° **84**) :

$$- gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V'^2 = const.,$$

ou bien :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V'^2}{2g} - \frac{1}{2g}\,\omega^2 r^2 = const.$$

Si nous désignons par V'_0 la vitesse relative au point de départ M_0, situé sur la même trajectoire que M, et par z_0, r_0, p_0 les valeurs de z, r, p correspondantes, nous aurons :

$$z_0 + \frac{p_0}{\varpi} + \frac{V_0'^2}{2g} - \frac{1}{2g}\,\omega^2 r_0^2 = const.,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V_0'^2}{2g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2).$$

Cette équation nous apprend que *la différence des hauteurs dues aux vitesses relatives en deux points quelconques d'un même filet fluide, satisfaisant aux conditions de permanence, n'est plus égale à la charge comme dans le mouvement absolu* (n° **88**), *mais à cette charge augmentée de l'expression* $\frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$.

Cette augmentation peut être considérée comme une *charge fictive* qu'il faut ajouter à la *charge réelle* pour pouvoir appliquer le théorème de D. Bernoulli au mouvement relatif.

Il est bon d'observer que cette charge fictive n'est autre chose que la variation de la hauteur due à la vitesse d'entraînement.

Extension du théorème de D. Bernoulli aux fluides imparfaits.

116. Dans les démonstrations qui précèdent nous avons supposé le *fluide parfait*.

Lorsque la *viscosité* produit des effets sensibles, il est évident que l'on peut en tenir compte, en introduisant les forces dues à la viscosité parmi les forces directement appliquées à chaque molécule, et alors on peut considérer le fluide comme parfait.

Soit φ la force rapportée à l'unité de masse que produit la viscosité pour une molécule quelconque, et désignons par φ_x, φ_y, φ_z les composantes de cette force. En introduisant cette force dans l'équation différentielle du régime permanent (n° **83**), on a, pour le cas d'un *fluide imparfait*, l'équation :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\mathrm{U} + (\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz) - \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2\,;$$

si l'on désigne par γ l'angle que fait la force φ avec l'élément ds de la trajectoire de la molécule, on a :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\mathrm{U} + \varphi\,ds\cos\gamma - \frac{1}{2}\,d\mathrm{V}^2.$$

En intégrant entre deux positions d'une même molécule et désignant par s_0 et s les valeurs de l'arc de la trajectoire correspondantes à ces deux points M_0 et M, et par U_0 la valeur de U pour $s = s_0$, il vient :

$$\int \frac{dp}{\rho} = U - U_0 + \int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma \, ds - \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2),$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = U - U_0 + \int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma \, ds - \int \frac{dp}{\rho}.$$

En particulier, si le *fluide* est un *liquide pesant* et *homogène*, on a :

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p - p_0), \quad U = -\int g dz = -gz,$$

et l'équation précédente nous donne :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma \, ds.$$

Il est facile de voir quelle est la signification du dernier terme : en effet, la force de viscosité étant égale à $m\varphi$, son travail entre les deux positions M_0 et M sera $\int_{s_0}^{s} m\varphi \cos\gamma \, ds$; en prenant la force rapportée à l'unité de poids il faut diviser par mg, et le travail sera égal à :

$$\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} \varphi \cos\gamma \, ds,$$

c'est-à-dire au dernier terme du second membre.

D'ailleurs, puisque la viscosité agit comme un frottement, opposé à la vitesse de la molécule, ce travail sera négatif ; il en résulte que si nous désignons ce travail par $-\zeta$, et si nous représentons comme précédemment (nº **88**) par h la charge entre les deux points, on a :

$$h = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi},$$

et, par suite,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = h - \zeta. \qquad \text{(A)}$$

Cette quantité ζ s'appelle *perte de charge* puisqu'on la retranche de la charge h. Elle est égale au travail changé de signe, que produit la force de viscosité rapportée à l'unité de poids.

Le théorème de Bernoulli s'énonce alors de la manière suivante :

THÉORÈME. — *La variation de la hauteur due à la vitesse est égale à la charge diminuée de la perte de charge.*

CHAPITRE VI.

Écoulement par les ajutages.

117. Nous avons étudié (n° **99**) le mouvement d'un liquide qui s'écoule d'un réservoir par un orifice percé en mince paroi. Lorsque l'on adapte à l'orifice un tuyau ou *ajutage*, les circonstances du mouvement sont modifiées. Nous nous proposons de trouver l'influence d'un ajutage sur les lois du mouvement. Ordinairement, les ajutages sont *cylindriques* ou *coniques*. Les ajutages cylindriques sont *extérieurs* ou *intérieurs*. Les ajutages coniques sont *convergents* ou *divergents*.

Ajutages cylindriques extérieurs.

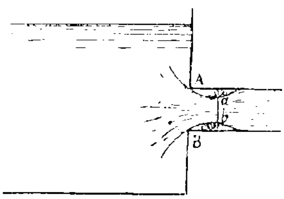
118. Supposons que, l'orifice d'écoulement étant circulaire, on adapte à cet orifice un *ajutage cylindrique* de même diamètre que l'orifice, et d'une longueur égale à une fois et demie ce diamètre ; au bout d'un certain temps, l'écoulement se fait à plein tuyau, ou, comme on dit à *gueule bée*. Si la longueur de cet ajutage est moindre, le phénomène est variable selon les circonstances ; si la longueur est plus grande, il se produit des frottements dont il faudra tenir compte.

Par la présence de l'ajutage, il n'y a plus de contraction sensible à la sortie de la veine ; mais on constate une diminution de vitesse, ou une perte de charge due au travail des actions moléculaires.

119. Voici comment on peut se rendre compte du phénomène qui se produit.

Au moment où le liquide commence à sortir par l'orifice AB, (fig. 25), il se forme une veine contractée jusqu'en *ab*, à une distance égale à la moitié du diamètre de l'orifice ; à partir de là, la veine s'élargit. Il se produit donc dans le tuyau un espace annulaire autour de la veine, et cet espace est rempli d'air au commencement du mouvement. Mais le courant entraîne en partie l'air qui l'entoure ; l'air restant se dilatant, la veine sera moins pressée, et tendra à se dilater. Au bout d'un certain temps, l'air est entièrement entraîné et remplacé par du liquide qui ne participe pas au mouvement.

Fig. 25.

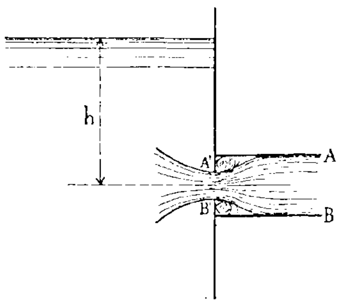


La veine contractée est donc entourée d'une portion de liquide à l'état de *remous*, c'est-à-dire qui tournoie lentement autour du courant, et cette portion est entourée elle-même de liquide à l'état stagnant. On peut donc dire que l'on a en *ab* une veine qui débouche dans une section plus grande déjà occupée par le même liquide. Il en résulte une agitation et une perte de charge.

120. Nous nous proposons de déterminer cette perte de charge. A cet effet, considérons, en général, un liquide sortant d'un réservoir (fig. 26) par un orifice A'B', et possédant dans cette section une vitesse V'. Supposons que la veine fluide en sortant de l'orifice pénètre dans un tuyau dont la section AB est plus grande que la section A'B' de l'orifice, et proposons-nous d'étudier ce qui se passe par ce changement brusque de section.

Soient p_0 la pression sur la surface libre du liquide, V' et p' la vitesse et la pression du liquide dans la section contractée A'B', V et p la vitesse et la pression à l'extrémité AB de l'ajutage, et h la hauteur du liquide dans le réservoir au-dessus du centre de gravité de l'orifice.

Fig. 26.



Le théorème de Bernoulli qui est applicable depuis le niveau supérieur jusqu'à la section A'B' nous donne :

$$\frac{V'^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}, \qquad (1)$$

en négligeant la vitesse au niveau supérieur, laquelle est assez faible.

Appliquons pour la partie du liquide comprise entre AB et A'B' le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe horizontal (II, n° **182**).

Soient Ω l'aire A'B', A l'aire AB : la dépense par seconde sera :

$$Q = \Omega V' = AV.$$

La masse élémentaire qui traverse chaque section est :

$$\frac{\varpi Q dt}{g},$$

l'accroissement de la quantité de mouvement sera donc :

$$\frac{\varpi Q dt}{g}(V - V').$$

D'autre part, en projection, les forces extérieures se réduisent aux pressions horizontales. Or, la pression sur la section A'B' est dirigée dans le sens positif, et elle est égale à Ap' : en effet, le liquide en cet endroit se compose de deux parties : l'une qui est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme, c'est la veine proprement dite ; l'autre qui est le volume annulaire du liquide qui entoure la veine, est animée d'un mouvement très lent. On peut donc, dans les deux cas, (n^{os} **95** et **97**) admettre que les pressions suivent la loi hydrostatique.

La pression sur la section AB est égale à Ap, dirigée en sens contraire de la précédente. Par conséquent, le théorème des quantités de mouvement projetées nous donne :

$$\frac{\varpi Q dt}{g}(V - V') = A(p' - p)\,dt,$$

ou bien, en remplacant Q par AV, et divisant les deux membres par $A\varpi dt$:

$$\frac{V(V - V')}{g} = \frac{p'}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}. \qquad (2)$$

Or, cette dernière équation peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{p'}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} - \frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} + \frac{2VV'}{2g},$$

ou bien :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{p'}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} - \frac{(V' - V)^2}{2g}. \qquad (3)$$

En ajoutant les équations (1) et (3), il vient :

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} - \frac{(V' - V)^2}{2g}.$$

On voit par cette formule que l'on peut appliquer le théorème de D. Bernoulli depuis la surface libre jusqu'à l'orifice [1], à la condition de diminuer la charge de $\frac{(V'-V)^2}{2g}$. Cette dernière quantité, que nous désignerons par ζ, est donc la *perte de charge* due au renflement.

Il résulte de là que la *perte de charge produite par un changement brusque de section est égale à la hauteur due à la diminution de vitesse.*

121. Remarque. — On peut donner à la perte de charge une autre forme en y introduisant les aires des sections. En effet, de la formule :

$$Q = \Omega V' = AV,$$

on tire :

$$V = \frac{Q}{A}, \quad V' = \frac{Q}{\Omega},$$

---

1. Le théorème de D. Bernoulli, appliqué depuis la surface libre jusqu'à l'orifice, nous donnerait la formule :

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}.$$

et, par suite, on a, pour la perte de charge :

$$\zeta = \frac{(V' - V)^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A}{\Omega} - 1\right)^2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{A}\right)^2.$$

122. Si l'on veut appliquer les résultats précédents au cas d'un *orifice circulaire* prolongé par un *ajutage cylindrique* d'une longueur égale à une fois et demie le diamètre de l'orifice, on peut admettre que Ω est la section contractée (n° **119**), et, en désignant par m le coefficient de contraction, on a :

$$\Omega = mA, \quad \text{d'où} \quad V' = \frac{V}{m}.$$

Par conséquent,

$$\frac{(V' - V)^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2.$$

La formule (4) nous donne alors :

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2;$$

d'où l'on tire :

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}},$$

ou bien :

$$V = \mu\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)},$$

en posant :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - 2m(1 - m)}}.$$

D'ailleurs, la formule (1) nous donne :

$$V' = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}\right)}.$$

La dépense est donc :

$$Q = \mu A \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)};$$

s'il n'y avait pas d'ajutage la dépense serait (n° **102**) :

$$q = mA \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)}.$$

Or, il est évident, puisque $1 - m > 0$, que $\mu > m$; par conséquent, l'ajutage a pour effet d'augmenter la dépense, quoiqu'il produise une perte de charge, et une diminution de la vitesse d'écoulement. Cette augmentation de la dépense est due à la suppression de la contraction de la veine à sa sortie.

123. Cherchons à déterminer *la pression p' dans la section contractée ab.*

La formule (1) nous donne :

$$\frac{p'}{\varpi} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{V'^2}{2g},$$

ou bien, puisque $V' = \frac{V}{m}$,

$$\frac{p'}{\varpi} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{V^2}{2gm^2};$$

d'où, en remplaçant V par sa valeur :

$$\frac{p'}{\varpi} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{\mu^2}{m^2}\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)$$

$$= \frac{\mu^2}{m^2}\frac{p}{\varpi} - \left(\frac{\mu^2}{m^2} - 1\right)\left(h + \frac{p_0}{\varpi}\right). \qquad (5)$$

C'est la valeur de la pression à la section contractée en fonction de p_0 et p.

D'ailleurs, la formule (2) nous donne :

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p}{\varpi} + \frac{V(V - V')}{g} = \frac{p}{\varpi} - \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{m} - 1\right);$$

par conséquent,

$$\frac{p'}{\varpi} < \frac{p}{\varpi}.$$

La pression dans la section contractée est donc toujours inférieure à celle du milieu environnant l'ajutage.

124. Il est facile de calculer la *dépression* dans la région de la section contractée. Elle est donnée par la formule :

$$\frac{p - p'}{\varpi} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 2\mu^2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right),$$

ou bien :

$$\frac{p-p'}{\varpi} = \frac{2m(1-m)}{1-2m(1-m)}\left(h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2m(1-m)}-1}\left(h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi}\right).$$

De cette formule il résulte que le vide relatif créé par l'écoulement dans l'ajutage sera d'autant plus sensible que le produit $m(1-m)$ sera grand. Or, le maximum de ce produit dont la somme des facteurs est constante, correspond à $m = \frac{1}{2}$, et nous aurons pour ce cas limite :

$$\frac{p-p'}{\varpi} = h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi},$$

c'est-à-dire que le vide maximum dont l'écoulement est capable dans la région de la section contractée est représenté par la charge moyenne.

La valeur correspondante de μ est $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71$.

125. La perte de charge ζ à l'extrémité de l'ajutage sera :

$$\zeta = \frac{(V'-V)^2}{2g} = \frac{h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi}}{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} = (1-\mu^2)\left(h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi}\right); \quad (6)$$

pour $m = \frac{1}{2}$, on aura :

$$\zeta = \frac{(V' - V)^2}{2g} = \frac{1}{2}\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right).$$

126. On a fait de nombreuses expériences sur l'écoulement de l'eau dans le but de déterminer les valeurs des coefficients m et μ. Ces paramètres doivent nécessairement varier avec la charge : mais, pour des charges ne dépassant pas 7^m, l'expérience a donné :

$$m = 0{,}62, \text{ et } \mu = 0{,}82.$$

En adoptant pour m la valeur 0,62, on trouve :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}} = 0{,}85, \text{ au lieu de } 0{,}82;$$

en prenant $\mu = 0{,}82$, on trouve :

$$m = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - 1}} = 0{,}59, \text{ au lieu de } 0{,}62.$$

Ces faibles écarts s'expliquent : on a admis, en effet, que tous les filets constituant la veine avaient une même vitesse, la vitesse moyenne de l'écoulement. Or, cette supposition doit nécessairement altérer légèrement l'évaluation de la force vive de la veine dans la section considérée.

127. Quant à la dépression produite par la contraction, l'équation (5) nous donne :

$$\frac{p - p'}{\varpi} = \left(\frac{\mu^2}{m^2} - 1\right)\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right);$$

or, si l'on fait $m = 0,62$, et $\mu = 0,82$, on a :

$$\frac{\mu^2}{m^2} - 1 = 0,749,$$

et, par suite,

$$\frac{p - p'}{\varpi} = 0,749\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right).$$

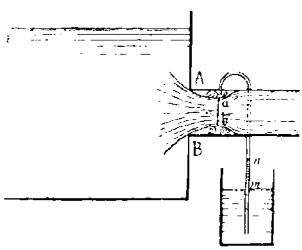
Dans le cas où la pression est la même à la sortie et au niveau supérieur (pression atmosphérique), on a :

$$\frac{p - p'}{\varpi} = 0,749\,h, \text{ à peu près.}$$

La dépression à l'ajutage est donc approximativement égale aux trois quarts de la hauteur h du niveau supérieur dans le réservoir au-dessus du centre de l'orifice.

128. Une expérience remarquable due à Venturi a mis ce résultat en évidence. Si l'on adapte à l'ajutage un tube en verre recourbé s'ouvrant par son extrémité supérieure autour de la veine contractée, et plongeant son extrémité inférieure dans un vase rempli d'eau (fig. 27), la dépression provoque l'ascension du liquide inférieur qui se maintiendra sur une hauteur mn pendant toute la durée de l'écoulement. Cette hauteur mesure évidemment la différence entre la pression atmosphérique agissant sur l'eau du vase, et la pression autour de la veine contractée et dans cette veine elle-même.

Fig. 27.



Or, Venturi a constaté que, pour $h = 0^m,88$, on a $mn = 0^m,65$, et effectivement, la théorie nous donne :

$$\frac{p - p'}{\varpi} = 0,749h = 0,749 \times 0,88 = 0,659.$$

Ce phénomène d'aspiration latérale due au mouvement d'un fluide, qui s'applique également aux gaz et aux vapeurs, a reçu plusieurs applications industrielles.

Il explique le tirage dans les cheminées des locomotives produit par l'échappement de la vapeur.

L'injecteur Giffard est une des applications les plus remarquables de ce phénomène.

129. La perte de charge sera, d'après la formule (6) :

$$\text{pour } \mu = 0,82, \quad \zeta = 0,33\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right),$$

$$\text{pour } \mu = 0,85, \quad \zeta = 0,28\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right);$$

et, si l'on suppose $p_0 = p$, on a :

$$\zeta = 0,33h, \quad \text{ou} \quad \zeta = 0,28h.$$

On voit que la perte de charge approche du tiers de la hauteur.

130. Ainsi donc, on peut résumer comme suit la théorie de l'ajutage cylindrique externe, l'écoulement se faisant à l'air libre sous des charges inférieures à 7^m :

1° la vitesse à la sortie du tuyau a pour expression :

$$V = 0,82\sqrt{2gh};$$

2° la dépense est :

$$Q = 0,82A\sqrt{2gh}.$$

Le coefficient 0,82 porte ici sur la vitesse, et non sur la section ; le contraire a lieu dans l'écoulement en mince paroi.

3° les effets de l'ajutage sont :

a) d'augmenter la section d'écoulement dans le rapport de 0,62 à 1, comparé au cas de l'écoulement en mince paroi.

b) de diminuer la vitesse dans le rapport de 1 à 0,82.

c) d'augmenter le débit dans le rapport de 0,62 à 0,82 ou dans le rapport de 1 à 1,323.

d) de produire à la section contractée une dépression égale aux trois quarts de la charge sur cette section, et à l'orifice de l'ajutage une baisse du plan de charge égale au tiers de cette charge.

131. Remarque. — Les valeurs de m et μ que nous avons adoptées jusqu'ici se rapportent à des charges ne dépassant pas 7^m. Si la charge devient plus grande, on ne pourra plus conserver ces valeurs. En effet, puisque l'on doit avoir $\frac{p'}{\varpi} > 0$, il résulte de l'équation (5) que :

$$\frac{\mu^2}{m^2}\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right) < h + \frac{p_0}{\varpi};$$

d'où l'on conclut :

$$1 < \frac{\mu}{m} < \sqrt{1 + \frac{\frac{p}{\varpi}}{h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}}}.$$

Si donc h croît, le rapport $\frac{\mu}{m}$ se trouve compris entre deux expressions qui diffèrent de moins en moins de la limite $\mu = m$.

D'un autre côté, si l'on admet $\frac{\mu^2}{m^2} = \left(\frac{82}{62}\right)^2 = \frac{7}{4}$ à peu près, on devra avoir, en vertu de la formule (5) :

$$h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} < \frac{4}{7}\left(h + \frac{p_0}{\varpi}\right);$$

d'où :

$$h < \frac{7}{3}\frac{p}{\varpi} - \frac{p_0}{\varpi},$$

et, si $p = p_0$, il vient :

$$h < \frac{4}{3}\frac{p}{\varpi},$$

et, comme $\frac{p}{\varpi} = 10^{m}333$, on a :

$$h < \frac{4}{3} \times 10^{m},333 = 13^{m},777.$$

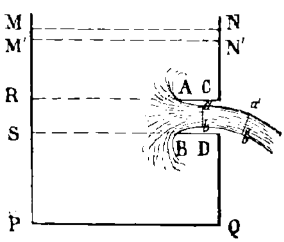
Au-delà de cette limite, on ne connaîtrait donc plus d'une manière certaine les valeurs de m et μ.

Ajutage rentrant de Borda.

132. Les *ajutages internes* ne présentent qu'un intérêt théorique résultant de ce qu'ils permettent de déterminer par le calcul le coefficient de contraction. Ils ne sont jamais employés.

Imaginons que l'orifice de sortie, au lieu d'être en mince paroi, soit pourvu d'un ajutage cylindrique ABCD, pénétrant dans l'intérieur du vase (fig. 28). Cet ajutage doit être très mince, et sa longueur doit être telle que la veine liquide ne mouille pas les parois de ce tuyau. On peut prendre une longueur égale à une fois et demie le diamètre.

Fig. 28.



Supposons le mouvement permanent établi, et soit ab le section contractée. A partir de ab, la veine sort dans un gaz de pression p, et prend la forme parabolique. D'ailleurs, l'orifice AB étant très petit par rapport à la section horizontale du vase, il s'ensuit que, dans l'intérieur du vase, on peut négliger la vitesse, même en C et D[1], et, par conséquent, la pression varie suivant la loi hydrostatique aux différents points du liquide.

1. Car, à cause de l'ajutage, il y a toujours une distance notable entre les parois du vase et l'orifice AB.

Cela posé, appliquons le théorème des quantités de mouvement projetées (II, n° **182**) à la portion de liquide comprise à un instant t entre le niveau MN et la section contractée ab. Prenons l'axe de projection horizontal dans le sens de la vitesse de sortie en ab.

Au bout du temps dt, cette portion MNab s'est transportée en M'N'$a'b'$. Or, en vertu de la permanence, la partie commune M'N'ab possède la même quantité de mouvement au commencement et à la fin du temps dt; par conséquent, la variation de la somme des quantités de mouvement projetées sera égale à la quantité de mouvement projetée relative à la portion $aba'b'$, moins celle relative à la portion MNM'N'. Mais, cette dernière est négligeable, puisque les vitesses des différents points de MN sont verticales, et que l'on projette sur un axe horizontal. Par conséquent, l'accroissement total de la projection de la quantité de mouvement du système considéré se réduit à la projection de la quantité de mouvement de la partie $aba'b'$. Or, la quantité de mouvement de $aba'b'$ se projette en vraie grandeur.

D'ailleurs, si V est la vitesse de sortie, Ω la section contractée, le volume $aba'b'$ a pour expression $\Omega V dt$, sa masse est $\frac{\varpi}{g}\,\Omega V dt$, et sa quantité de mouvement sera $\frac{\varpi}{g}\,\Omega V^2 dt$. Comme elle se projette en vraie grandeur, il s'ensuit que cette dernière quantité sera l'expression de l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe de l'ajutage.

Cherchons maintenant la *somme des impulsions élémentaires des forces extérieures projetées sur le même axe*. D'abord, l'action de la pesanteur ne donne que des forces verticales perpendiculaires à l'axe, et dont les projections sont nulles ; par conséquent, ces forces disparaissent. On n'a donc à tenir compte que des pressions exercées sur tout le contour du système, qui comprennent les pressions exercées par l'ajutage, par la surface du réservoir et par l'atmosphère gazeuse dans laquelle la veine liquide s'écoule.

1° Les pressions exercées par la surface latérale extérieure de l'ajutage étant normales à l'axe disparaissent en projection ;

2° Les pressions exercées par la surface annulaire qui entoure l'orifice AB (section droite du cylindre) sont négligeables à cause du peu d'étendue de cette surface annulaire ;

3° Les pressions sur toute la surface du vase suivent la loi hydrostatique ; les pressions exercées par les parois verticales sont des forces horizontales, qui se détruisent les unes les autres, excepté la pression exercée par la partie RS, de même étendue que la section de l'ajutage ; cette dernière pression n'est pas équilibrée, et se réduit à une force normale à RS, [1] et égale à :

$$A\,(p_0 + \varpi h),$$

A étant l'aire de l'orifice AB, p_0 la pression exercée sur le niveau supérieur, et h la distance du centre de l'orifice au niveau supérieur. Cette force étant parallèle à l'axe de projection, se projette en vraie grandeur, et l'impulsion élémentaire correspondante est :

$$A\,(p_0 + \varpi h)\,dt.$$

Les pressions exercées par le fond du réservoir sont verticales, et, par suite, leurs projections sur l'axe sont nulles.

---

1. Cette force serait équilibrée, si l'ajutage était supprimé, et remplacé par une paroi solide de même étendue que la section AB de l'ajutage. Par conséquent, elle est égale et contraire à la pression qu'exercerait cette paroi solide.

4° Enfin, la portion de veine ABab supporte sur sa surface latérale la pression p, et cette pression s'exerce aussi dans la section ab (n° **98**). Si l'on supposait cette pression p exercée de même sur la section AB, extérieurement à ce volume, la résultante de ces pressions serait nulle (n° **47**). Donc, la résultante des pressions exercées sur la surface latérale de la veine et sur ab est égale et contraire à celle que supporterait AB, ce qui nous donne une force Ap dirigée en sens contraire de la vitesse V. Cette force se projette en vraie grandeur sur l'axe, et son impulsion élémentaire est Apdt.

Par conséquent, la somme des impulsions élémentaires des pressions exercées sur tout le contour du système liquide, projetées sur l'axe de l'ajutage est :

$$\mathrm{A}\,(p_0 + \varpi h)\,dt - \mathrm{A}p\,dt,$$

et nous aurons l'équation (II, n° **182**) :

$$\frac{\varpi}{g}\,\Omega \mathrm{V}^2 dt = \mathrm{A}\,(p_0 + \varpi h)\,dt - \mathrm{A}p\,dt,$$

ou bien :

$$\frac{\Omega}{\mathrm{A}}\,\frac{\mathrm{V}^2}{g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}.$$

D'autre part, en appliquant le théorème de D. Bernoulli qui est applicable depuis le niveau supérieur jusqu'en ab, on a :

$$\frac{\mathrm{V}^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}.$$

En comparant les deux dernières formules, on a :

$$\frac{\Omega}{A} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que le coefficient de contraction est égal à $\frac{1}{2}$, ou 0,50.

Ce résultat a été vérifié par une expérience faite par Borda qui a trouvé $\frac{\Omega}{A} = 0{,}515$, valeur qui diffère très peu du résultat théorique.

Ajutages coniques convergents.

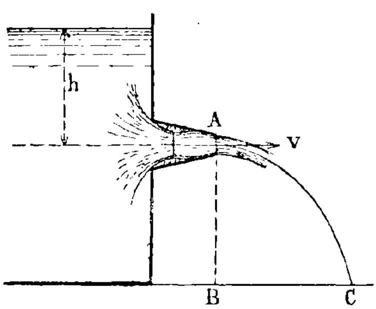
133. Dans un ajutage *convergent*, il se produit :

1° à l'intérieur, une contraction de la veine, suivie d'un renflement, et, par suite, une perte de charge ;

2° à l'extérieur, une contraclion résultant de la convergence des filets sortants.

Soit h la hauteur du niveau du liquide au-dessus du centre de l'orifice d'écoulement (fig. 29); la vitesse théorique serait :

Fig. 29.



$$\sqrt{2gh}.$$

et la vitesse réelle, vu la perte de charge, aura pour valeur :

$$V = \mu \sqrt{2gh},$$

μ étant un coefficient constant à déterminer dans chaque cas particulier.

En l'absence de contraction de la veine externe, la dépense serait :

$$\mu A \sqrt{2gh};$$

si donc m est le coefficient dû à cette contraction, on aura :

$$Q = m\mu A \sqrt{2gh}.$$

Les coefficients m et μ dépendent de l'angle d'ouverture du cône. Si cet angle est nul, l'ajutage est cylindrique : la contraction externe ne se fera pas, et, par conséquent, $m = 1$; la perte de charge assignera au coefficient μ la valeur 0,82 (n° **126**). Si l'ouverture du cône est égale à π, l'écoulement se fait en mince paroi : la perte de charge est nulle, et l'on a $\mu = 1$; la contraction externe a pour résultat de réduire m à la valeur 0,62 (n° **103**).

Lorsque l'angle du cône varie de 0 à π, la vitesse de sortie augmente, parce que la section diminue ; la perte de charge diminue donc aussi, et μ augmente. D'un autre côté, la convergence des filets s'accentuant, la contraction grandit et m diminue. Le produit $m\mu$ varie donc suivant une loi que la pratique seule peut déterminer.

Dans certaines expériences, on a trouvé que ce produit $m\mu$, coefficient de la dépense, allait en augmentant avec l'ouverture du cône depuis 0 jusque 12°. A cette limite, on constate que :

$$m = 0{,}99, \quad \mu = 0{,}955, \quad \text{et} \quad m\mu = 0{,}945.$$

Au-delà, ce coefficient diminue jusqu'à la valeur 0,62 relative à l'écoulement en mince paroi.

134. Pour déterminer les coefficients m et μ, on peut opérer de la manière suivante :

Le jet liquide sortant de la section contractée en A a une vitesse horizontale V ; on le reçoit sur un plan horizontal BC à une distance AB $= a$ de l'orifice et on mesure la portée du jet BC $= b$. La courbe AC étant une parabole, les coordonnées x, y d'un point quelconque de cette courbe sont données par les formules :

$$x = \mathrm{V}t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2,$$

t désignant le temps employé par la molécule pour passer de l'orifice au point considéré.

L'équation de la trajectoire est donc :

$$x^2 = 2\frac{\mathrm{V}^2}{g}y\,;$$

on en déduit pour le point C :

$$b^2 = 2\frac{\mathrm{V}^2}{g}a, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{V} = b\sqrt{\frac{g}{2a}}\,;$$

par conséquent,

$$\mu = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{ah}}.$$

Quant au coefficient m, on l'obtiendra par le procédé indiqué (n° **103**), en mesurant la quantité de liquide écoulé pendant un temps donné, et recueilli dans un vase de forme simple ; si Q est la dépense par seconde, on aura :

$$m = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{AV}}.$$

135. Cas particulier. — Si l'on pratique dans la paroi suffisamment épaisse du réservoir un orifice ayant exactement la même forme que la veine depuis l'orifice interne jusqu'à la section contractée, la vitesse théorique sera égale à la vitesse pratique ; la perte de charge et la contraction externe seront annulées, et l'on aura :

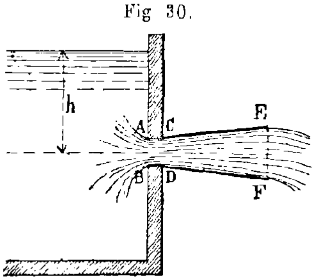
$$V = \sqrt{2gh}, \qquad Q = A\sqrt{2gh}.$$

La vitesse et la dépense seront donc augmentées dans le rapport de 0,62 à 1, ou de 1 à 1,61.

Ajutages coniques divergents.

136. Proposons-nous maintenant d'étudier l'effet des *ajutages divergents*. L'emploi de ces ajutages bien conçus permet d'augmenter très sensiblement le débit. Plusieurs dispositions ont été prises pour atteindre ce but dans un grand nombre d'appareils, notamment dans les ventilateurs où ces ajutages portent le nom spécial de *diffusoirs* ou *cheminées*. Pour déterminer l'effet des ajutages divergents, imaginons que l'on ait ménagé dans la paroi du vase un orifice ayant exactement la forme de la veine qui sortirait librement par l'orifice AB en mince paroi, et dont CD serait la veine contractée (fig. 30), ou, si la chose est impossible dans la paroi même, que l'on ait adapté à l'orifice un premier ajutage remplissant cette condition.

Fig 30.



Puis prolongeons l'orifice CD par un ajutage CDEF se raccordant tangentiellement avec la partie ABCD et s'élargissant progressivement jusqu'en EF. Dans ce cas, comme il n'y a pas de changement brusque de section, il n'y aura pas de tourbillons, ni, par conséquent, de perte de charge, et l'écoulement se fera partout à gueule bée. Nous pourrons donc appliquer le théorème de D. Bernoulli (nº **85**) depuis le niveau supérieur jusqu'en CD, et de CD en EF.

En désignant par p_0 la pression sur le niveau supérieur du liquide, par h la hauteur de ce niveau par rapport à l'axe de l'ajutage, par V' et p' la vitesse et la pression en CD, par V et p les mêmes éléments à la sortie en EF, nous aurons :

$$h + \frac{p_0}{\varpi} = \frac{V'^2}{2g} + \frac{p'}{\varpi} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi}, \qquad (1)$$

et l'équation de continuité nous donne, en désignant par a la section contractée CD, et par A la section de sortie EF :

$$aV' = AV. \qquad (2)$$

Par conséquent, on a :

$$V = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)},$$

$$V' = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)},$$

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p}{\varpi} - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right).$$

137. On voit que l'ajutage a pour effet de diminuer la pression à l'orifice CD. La diminution de pression est donnée par la formule :

$$\frac{p}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right).$$

Quant à la dépense, elle serait, s'il n'y avait pas d'ajutage (n° **102**) :

$$q = a\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)}\,;$$

grâce à l'ajutage divergent, on a :

$$Q = A\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right)} = q \cdot \frac{A}{a}.$$

Par conséquent, le débit croît proportionnellement à la section terminale A ; mais, il faut bien se garder d'admettre que la dépense peut être augmentée indéfiniment. En effet, il est facile de s'assurer qu'il existe pour la section A une limite que l'on ne peut pas dépasser.

138. Les résultats de la théorie précédente ne se vérifient dans la pratique que pour autant que l'hypothèse de la continuité se réalise. Si l'écoulement ne se faisait pas à gueule bée dans l'ajutage, on ne pourrait pas écrire l'équation (2), et c'est ce qui arriverait infailliblement si la section A dépassait une certaine limite.

139. Il est évident que l'ajutage dont l'effet est de diminuer la pression p', ne saurait annuler complètement cette dernière, ou la rendre négative. En effet, un fluide parfait est incapable de se trouver en état de tension ; car, l'absence de cohésion amènerait la rupture de la partie tendue. En admettant qu'il en soit de même pour les fluides naturels, nous pouvons dire qu'il doit réellement y avoir pression dans la section CD.

On doit donc avoir :

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p}{\varpi} - \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) > 0,$$

ou bien :

$$\frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\varpi} + h > \frac{A^2}{a^2}\left(h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}\right);$$

donc,

$$A < a\sqrt{\frac{h + \frac{p_0}{\varpi}}{h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}}},$$

ou bien :

$$A < a\sqrt{1 + \frac{\frac{p}{\varpi}}{h + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}}}.$$

La valeur limite de A doit donc être inférieure au second membre ; en supposant qu'elle puisse l'égaler, l'ajutage divergent aurait pour conséquence d'affranchir l'écoulement de la résistance due à la pression du milieu ambiant, puisque, dans cette hypothèse, on aurait $p' = 0$.

140. En particulier, si l'on a $p_0 = p$, ce qui est le cas ordinaire, nous aurons :

$$\lim A = a \sqrt{1 + \frac{p}{h\varpi}},$$

$$V = \sqrt{2gh}, \qquad Q = a \sqrt{2g\left(h + \frac{p}{\varpi}\right)}.$$

La dépense Q serait égale au débit fourni par l'orifice CD parfaitement évasé à l'intérieur, et débouchant dans le vide (n° **104**).

141. Remarque I. — Anciennement, on a cherché à expliquer l'action des ajutages par l'attraction exercée sur le fluide par la matière même de la paroi de la conduite [1]. Or, les faits constatés s'expliquent complètement par la théorie sans qu'il soit nécessaire de recourir aux actions capillaires.

Venturi a d'ailleurs montré que l'attraction est étrangère aux effets produits ; il suffit de percer quelques trous très petits dans la paroi de l'ajutage pour l'empêcher de fonctionner. C'est qu'alors on rétablit dans l'intérieur de la veine la pression atmosphérique sans rien changer cependant dans les attractions moléculaires.

142. Remarque II. — Il résulte des expériences de Péclet que lorsque l'ouverture d'un ajutage divergent débitant un gaz dépasse 10°, la veine fluide n'occupe plus toute la section de sortie, et il se produit latéralement des rentrées de l'air extérieur.

---

1. D'Aubuisson. *Traité d'Hydraulique*.

Pour s'assurer des effets d'un semblable ajutage, il faut donc que son ouverture soit inférieure à 10°. On conseille même de ne pas dépasser 7°, qui serait donc l'angle naturel d'épanouissement de la veine fluide.

CHAPITRE VII.

Résistance des fluides.
Pression d'une veine liquide sur un plan.

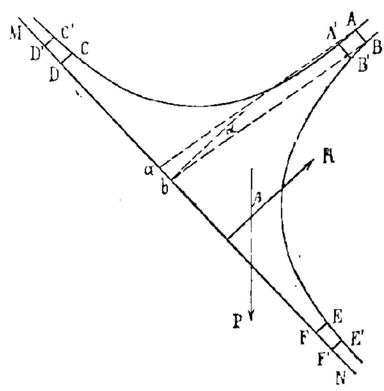
143. Un corps solide est plongé en tout ou en partie dans un fluide par rapport auquel il est en mouvement. Ce corps éprouve sur les éléments de sa surface des pressions de la part du fluide. Ces pressions qui constituent une résistance au mouvement relatif du solide, et que l'on appelle la *résistance du fluide*, sont différentes de ce qu'elles seraient dans le cas d'équilibre.

Si l'on connaissait le mouvement du fluide, et si l'on pouvait faire abstraction de la viscosité, on pourrait appliquer les formules de l'Hydrostatique, en y introduisant les forces d'inertie, et l'on obtiendrait la pression totale supportée par le corps par un calcul analogue à celui que nous avons fait dans le cas de l'équilibre (n° **35**). Mais, en général, dans les questions de ce genre, on ne connaît pas le mouvement relatif du fluide par rapport au corps; tout au plus, on donne le mouvement absolu du corps, et le mouvement que le fluide aurait si le corps était enlevé.

144. Nous étudierons un cas simple : celui du *choc exercé par une veine liquide contre un plan*.

Considérons donc un liquide pesant et homogène sortant d'un vase par un orifice, et tombant dans l'air sous la forme d'un jet parabolique. Ce jet rencontre un plan fixe MN (fig. 31) qui l'oblige à se dévier. On constate par expérience que la veine s'élargit dans le voisinage du plan ; mais, à une certaine distance de ce plan, à partir de la section AB par exemple, le mouvement reste ce qu'il serait s'il n'y avait pas d'obstacle. D'autre part, en se rapprochant du plan MN, les filets liquides tendent à devenir parallèles à ce plan ; nous supposerons qu'en tous les points de la surface cylindrique CDEF les molécules se meuvent parallèlement au plan.

Fig. 31.



Le mouvement permanent étant établi, nous nous proposons de déterminer la *réaction totale* R *exercée normalement par le plan sur le liquide dans l'étendue de la base* DF *du cylindre*, en faisant abstraction de la pression atmosphérique. A cet effet, nous appliquerons au liquide compris entre la section AB et le cylindre CDEF le théorème des quantités de mouvement projetées

(II, n° **182**), en prenant pour axe une perpendiculaire au plan MN, c'est-à-dire la direction de R.

Soient ω l'aire de la section AB, V la vitesse du liquide dans cette section, α l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la normale au plan fixe, β l'angle que ce plan fait avec l'horizon, P le poids du liquide ABCDEF, ϖ le poids spécifique, dt un temps très petit pendant lequel le système passe de la position ABCDEF à la position A'B'C'D'E'F'. Cela posé, les points de la partie A'B'CDEF commune auront, en vertu de la permanence, les mêmes masses et les mêmes vitesses au commencement et à la fin du temps dt ; par conséquent, la quantité de mouvement de cette partie commune sera la même à ces deux instants, et, par suite, elle disparaîtra dans l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées pendant ce temps. D'autre part, les vitesses des molécules comprises entre CD et C'D', EF et E'F', étant parallèles au plan, sont perpendiculaires à l'axe, et, par suite, la projection des quantités de mouvement de ces molécules n'entrera pas dans l'équation.

Par conséquent, l'accroissement total de la quantité de mouvement projetée sera égal à la projection, prise en signe contraire, de la quantité de mouvement du liquide compris entre AB et A'B'. Or, la masse de cette tranche est :

$$\frac{\varpi}{g}\,\omega V dt,$$

et la projection de la vitesse sur l'axe est $-$ V cos α; la quantité de mouvement projetée sur l'axe aura donc pour valeur :

$$-\frac{\varpi}{g}\,\omega V^2 dt \cos\alpha.$$

Par conséquent, cette quantité de mouvement prise en signe contraire est :

$$\frac{\varpi}{g}\,\omega V^2 dt \cos\alpha.$$

Nous devons, en vertu du théorème (II, n° **182**), écrire que cette dernière quantité est égale à la somme des impulsions des forces projetées sur le même axe.

Or, ces forces comprennent : 1° le poids P du liquide considéré, dont la projection sur l'axe est $-$ P cos β, et l'impulsion correspondante :

$$-\,P\cos\beta\,dt\,;$$

2° la force R parallèle à l'axe et dont l'impulsion est :

$$Rdt\,;$$

enfin, 3° la pression atmosphérique. Or, il est évident que cette dernière force agit sur tout le contour du système, et, par conséquent, la somme des projections sur un axe quelconque est nulle (n° **47**).

Nous aurons donc l'équation :

$$R - P\cos\beta = \frac{\varpi}{g}\,\omega V^2 \cos\alpha\,;$$

d'où :

$$R = P\cos\beta + \frac{\varpi}{g}\,\omega V^2 \cos\alpha.$$

Le premier terme du second membre est la composante normale du poids P : c'est la pression qu'exercerait sur le plan le système ABCDEF rendu solide, s'il restait en repos ou glissait sur le plan MN. Le second terme est égal au poids d'un cylindre liquide qui aurait pour base la section ω du courant, et dont les arêtes auraient pour longueur le double de la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ due à la vitesse V, ces arêtes faisant avec la hauteur du cylindre l'angle α que la direction du courant fait avec la normale au plan MN.

145. On peut encore écrire ce second terme sous la forme :

$$\varpi \frac{\omega}{\cos\alpha} \cdot \frac{(V\cos\alpha)^2}{g}.$$

Sous cette forme, on voit que ce terme est le poids d'un cylindre liquide ayant pour base $\frac{\omega}{\cos\alpha}$, c'est-à-dire la portion du plan qu'intercepterait la veine, si toutes les molécules se mouvaient en ligne droite, à partir de la section AB suivant la direction de V, et pour hauteur $\frac{(V\cos\alpha)^2}{g}$, c'est-à-dire le double de la hauteur due à la vitesse $V\cos\alpha$, projection de V sur la normale au plan.

Ce second terme s'appelle la *pression vive* ou la *pression supplémentaire due à l'existence de la vitesse* V.

146. Si le plan MN au lieu d'être fixe est mobile, et se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse V', on décomposera cette vitesse en deux composantes, l'une dans le sens du plan, l'autre suivant la direction de la veine. Cette dernière composante sera égale à $\frac{V'}{\cos\alpha}$; or, si l'on donne au système entier une vitesse égale et contraire à $\frac{V'}{\cos\alpha}$, le plan deviendra immobile et la vitesse dans la section AB sera $V - \frac{V'}{\cos\alpha}$.

Le problème est ainsi ramené à celui que nous venons de traiter, et la pression vive a alors pour expression :

$$\frac{\varpi}{g}\,\omega\left(V - \frac{V'}{\cos\alpha}\right)^2 \cos\alpha = \frac{\varpi}{g}\,\omega\,\frac{(V\cos\alpha - V')^2}{\cos\alpha}.$$

Dans ce cas, on a :

$$R = P\cos\beta + \frac{\varpi}{g}\,\omega\,\frac{(V\cos\alpha - V')^2}{\cos\alpha},$$

formule qui se réduit à la précédente (n° **144**) lorsque $V' = 0$.

147. Cas particulier. — Si le plan MN est vertical, et si la direction de la vitesse V est normale au plan, on a $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, et il vient alors :

1° Si le plan est mobile :

$$R = \frac{\varpi}{g}\,\omega\,(V - V')^2,$$

2° si le plan est fixe :

$$R = \frac{\varpi}{g}\,\omega V^2.$$

Dans ce dernier cas, R se réduit à la pression vive : elle est égale au poids d'un cylindre liquide ayant pour base ω et pour longueur le double de la hauteur due à la vitesse.

Remarque. — Il est évident que la pression subie par le plan se compose de la pression atmosphérique et de la force R dirigée en sens contraire.

Mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

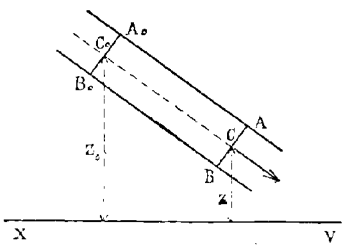
148. Quand un liquide s'écoule par un tuyau cylindrique d'une longueur appréciable, on constate que la dépense diminue à mesure que la longueur du tuyau augmente. Cela résulte de ce qu'un tuyau contenant un liquide en mouvement présente des aspérités qui retardent le mouvement de la couche liquide directement en contact avec le tuyau. Celle-ci, en vertu de la viscosité du liquide, retarde la couche voisine, et ainsi de suite jusqu'au centre, où le retard est minimum. Il en résulte que le frottement de la paroi produit un effet sur toute la masse liquide. Dans le cas d'un écoulement uniforme, le frottement total produit sur le liquide est donné par la formule de Prony :

$$F = Kl\,(\alpha U + \beta U^2),$$

dans laquelle F est la résistance longitudinale du tuyau circulaire, l la longueur de ce tuyau, K le périmètre de la section transversale, U la *vitesse moyenne*, c'est-à-dire le quotient de la dépense par la section Ω du tuyau, α et β deux coefficients indépendants de la nature et des dimensions du tuyau.

149. Considérons le liquide compris à un instant donné, entre deux sections transversales A_0B_0 et AB (fig 32) ; le mouvement des différentes molécules étant rectiligne et uniforme, il s'ensuit que les forces d'inertie des différents points sont nulles. Par conséquent, si l'on applique le principe de d'Alembert, il y aura équilibre entre les forces réellement agissantes, et, par suite, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque, par exemple l'axe du tuyau C_0C, est nulle.

Fig. 32.



Or, les forces réellement agissantes sont : 1° le poids du volume liquide A_0B_0AB lequel est égal à $\varpi\Omega l$, et dont la projection sur C_0C est $\varpi\Omega l \cos\theta$, en désignant par θ l'angle que l'axe C_0C fait avec la verticale ; 2° les pressions sur les deux sections A_0B_0 et AB qui sont égales à $p_0\Omega$ et $-p\Omega$[1] ; 3° le frottement sur la paroi qui a pour expression :

$$Kl(\alpha U + \beta U^2).$$

Ces trois dernières forces étant parallèles à l'axe C_0C se projettent en vraie grandeur, et nous aurons l'équation :

$$\varpi\Omega l \cos\theta + p_0\Omega - p\Omega - Kl(\alpha U + \beta U^2) = 0.$$

D'ailleurs, si nous désignons par z_0 et z les distances des centres C_0 et C au plan horizontal de comparaison XY, nous aurons :

$$l \cos\theta = z_0 - z,$$

1. p_0 et p étant les pressions moyennes dans les sections A_0B_0 et AB, c'est-à-dire les pressions en C_0 et C.

et l'équation précédente nous donne, en divisant par $\varpi\Omega$:

$$z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\varpi} = \frac{Kl}{\varpi\Omega}(\alpha U + \beta U^2).$$

Or, le premier membre de cette dernière équation est la charge entre les deux points C_0 et C, ou l'abaissement du niveau piézométrique de ces deux points (n° **88**). D'autre part, si l'on applique le théorème de D. Bernoulli, étendu au cas des fluides imparfaits, en faisant $V = V_0$ dans la formule (A) (n° **116**), puisque le mouvement est uniforme, il vient :

$$h = \zeta ;$$

par suite, ce premier membre est *la perte de charge* éprouvée par une molécule quelconque en passant de la section A_0B_0 à la section AB ; cette perte de charge aura donc pour expression :

$$\zeta = \frac{Kl}{\varpi\Omega}(\alpha U + \beta U^2),$$

ou bien, par mètre courant de tuyau :

$$J = \frac{K}{\Omega}(aU + bU^2),$$

en posant :

$$J = \frac{\zeta}{l}, \quad \frac{\alpha}{\varpi} = a, \quad \frac{\beta}{\varpi} = b.$$

Si l'on désigne par D le diamètre du tuyau, on a :

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}, \qquad K = \pi D,$$

et l'on obtient alors la formule généralement employée :

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2. \qquad (1)$$

De cette formule il résulte que la perte de charge J par unité de longueur est constante dans toute l'étendue du tuyau, puisque D et U sont des constantes pour toutes les sections.

D'ailleurs, la dépense Q sera donnée par la formule :

$$Q = \Omega U = \frac{1}{4} \pi D^2 U. \qquad (2)$$

Les quantités D, J, U, Q étant liées par les équations (1) et (2), il s'ensuit que, connaissant deux de ces quantités, on pourra en déduire les deux autres.

Prony a conclu d'un assez grand nombre d'expériences les valeurs des constantes a et b ; il a trouvé :

$$a = 0{,}0000173, \qquad b = 0{,}000348.$$

Eytelwein et d'Aubuisson ont proposé respectivement les valeurs suivantes :

$$a = 0{,}0000222, \qquad b = 0{,}000280,$$
$$a = 0{,}0000188, \qquad b = 0{,}000343.$$

CHAPITRE VIII.

Écoulement d'un fluide élastique

150. Nous admettrons l'hypothèse du parallélisme des tranches, et nous ferons abstraction de la pesanteur qui n'influe pas sensiblement sur les pressions.

Si nous prenons l'axe des x vertical, et si nous négligeons les vitesses horizontales, comme nous l'avons fait (n° **73**), nous aurons l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{du}{dt} + \rho u \frac{du}{\partial x} = 0. \qquad (1)$$

Pour obtenir l'équation de continuité, nous considérerons deux sections horizontales correspondantes à x et $x + dx$, et nous chercherons (n° **63**) la masse fluide qui entre pendant le temps dt par la face supérieure, et celle qui sort pendant le même temps par la face inférieure. L'excès de la première quantité sur la seconde sera égal à l'accroissement de la masse comprise entre les deux sections pendant le temps dt.

Or, la masse qui entre par la face supérieure ω pendant le temps dt est égale à $\rho\omega u dt$, et la masse qui sort par la face inférieure est égale à :

$$\left(\rho\omega u + \frac{\partial \rho\omega u}{\partial x} dx\right) dt.$$

L'excès de la première quantité sur la seconde est donc égal à :

$$-\frac{\partial \rho \omega u}{\partial x}\,dx\,dt.$$

D'autre part, la masse comprise entre les deux sections à la fin du temps t est $\rho\omega dx$; à la fin du temps $t + dt$, la densité étant $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt$, la masse comprise entre les deux sections sera :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt\right)\omega dx\,;$$

par conséquent, l'accroissement de la masse pendant le temps dt est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,\omega dx\,dt.$$

En égalant les deux expressions de l'accroissement, on a l'équation :

$$\omega\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\omega u}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

D'ailleurs, en supposant la température constante, on a :

$$p = k\rho, \qquad (3)$$

k étant une constante.

Les équations (1), (2) et (3) déterminent p, ρ et u, en fonction de t et de x.

En éliminant ρ, on a les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\omega\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p\omega u}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ces équations aux dérivées partielles ne sont pas intégrables sous forme finie.

151. Proposons-nous de déterminer la vitesse d'écoulement, lorsque la pression et la vitesse sont devenues constantes en chaque point. C'est ce qui arrive assez vite, si l'on suppose que le vase communique avec un réservoir qui renouvelle le gaz, et détermine une pression constante à la partie supérieure.

Nous aurons alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

et les équations (4) deviennent les suivantes :

$$\frac{k}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p\omega u}{\partial x} = 0.$$

En intégrant, il vient :

$$p\omega u = c, \qquad klp + \frac{u^2}{2} = c', \qquad (5)$$

c et c' étant des constantes arbitraires.

Soient P, U, Ω la pression, la vitesse et l'aire de la section, relatives à la partie supérieure du vase, P', U', Ω' les mêmes quantités relatives à l'orifice. Nous aurons :

$$\begin{aligned} P\Omega U &= c, \qquad & 2klP + U^2 &= 2c', \\ P'\Omega'U' &= c, \qquad & 2klP' + U'^2 &= 2c'. \end{aligned} \tag{6}$$

Ces quatre équations déterminent c, c' et les vitesses U et U'.

On en tire :

$$P\Omega U = P'\Omega'U',$$

$$U^2 + 2klP = U'^2 + 2klP' ;$$

d'où :

$$U' = \frac{P\Omega}{P'\Omega'} U,$$

$$U'^2 = U^2 + 2kl \frac{P}{P'} .$$

En éliminant U', il vient :

$$U = \sqrt{\frac{2kl\frac{P}{P'}}{\frac{P^2\Omega^2}{P'^2\Omega'^2} - 1}} .$$

Or, l'orifice Ω' est plus petit que Ω, et la pression P' est moindre que P (sans cela l'écoulement n'aurait pas lieu) ; donc,

$$\frac{P}{P'} > 1, \qquad l\frac{P}{P'} > 0, \qquad \frac{P^2\Omega^2}{P'^2\Omega'^2} > 1.$$

Par conséquent, le radical est réel, puisque les deux termes de la fraction sont positifs ; par suite, U est réel. On en déduit :

$$U' = \sqrt{\frac{2kl\,\frac{P}{P'}}{1 - \frac{P'^2\Omega'^2}{P^2\Omega^2}}}.$$

Connaissant U et U′, on obtient facilement c et c', au moyen des équations (6), et alors les équations (5) déterminent les valeurs de p et u en fonction de ω, et, par suite, de x.

152. Remarque. — Si $\frac{\Omega'}{\Omega}$ est très petit, U est très petit, et, à la limite, on a pour U′ :

$$U' = \sqrt{2kl\,\frac{P}{P'}}.$$

C'est la vitesse d'écoulement d'un gaz par un petit orifice, lorsque les pressions P et P′ à la partie supérieure et à l'orifice sont constantes.

CHAPITRE IX.

Équation analogue à l'équation de D. Bernoulli.

153. Nous avons trouvé (nº **84**) que l'équation du mouvement permanent d'un gaz à température constante est :

$$U - klp - \frac{1}{2} V^2 = const.$$

Comme nous l'avons vu, la propriété exprimée par cette équation se rapporte à tous les points d'un même filet, c'est-à-dire situés sur la trajectoire d'une même molécule.

En appliquant cette formule au cas d'un *gaz pesant*, la seule force agissante, indépendamment des pressions exercées sur le contour de la masse gazeuse, est la pesanteur, et, si nous supposons l'axe des z vertical, nous aurons :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -g,$$

d'où :

$$U = -\int g dz = -gz\,;$$

l'équation devient alors :

$$gz + klp + \frac{1}{2}V^2 = const,$$

ou bien :

$$z + \frac{k}{g}\,lp + \frac{V^2}{2g} = const.$$

Il en résulte que la quantité :

$$z + \frac{k}{g}\,lp + \frac{V^2}{2g},$$

est constante en tous les points d'un même filet.

De cette formule on conclut la suivante :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{k}{g}\,l\frac{p_0}{p}. \qquad (1)$$

C'est la formule qui, pour les gaz pesants à température constante, remplace la formule de D. Bernoulli.

154. Remarque I. — On peut transformer la formule (1) de manière à y introduire les aires des sections.

A cet effet, nous écrirons que les masses fluides qui passent par les deux sections ω_0 et ω pendant le temps dt sont égales. Or, le volume qui passe par la section ω pendant le temps dt est $\omega V dt$, et sa masse est $\rho\omega V dt$, ou $\frac{p}{k}\,\omega V dt$; la masse qui passe pendant ce même temps par la section ω_0 est $\frac{p_0}{k}\,\omega_0 V_0 dt$. Nous aurons donc l'équation :

$$p_0\omega_0 V_0 = p\omega V;$$

d'où :

$$V_0 = \frac{p\omega}{p_0\omega_0}\,V,$$

et, par suite, l'équation (1) devient :

$$\frac{V^2}{2g}\left(1 - \frac{p^2\omega}{p_0^2\omega_0^2}\right) = z_0 - z + \frac{k}{g}\, l\, \frac{p_0}{p}\,;$$

d'où l'on tire :

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(z_0 - z + \frac{k}{g}\, l\, \frac{p_0}{p}\right)}{1 - \frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}}}\,.$$

En général, on peut négliger[1] la distance $z_0 - z$ des centres des deux sections ω_0 et ω, et alors il vient :

$$V = \sqrt{\frac{2kl\,\frac{p_0}{p}}{1 - \frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}}}\,.$$

C'est la formule que nous avons trouvée précédemment (n° **151**).

155. Remarque II. — On peut encore donner à la formule (1) une autre forme dans laquelle n'entreront pas des logarithmes, lorsque les pressions p_0 et p diffèrent très peu l'une de l'autre, ce qui arrive assez généralement,

Posons $p_0 = p + \varepsilon$, ε étant une quantité très petite ; nous aurons :

$$l\,\frac{p_0}{p} = l\,\frac{p + \varepsilon}{p} = l\left(1 + \frac{\varepsilon}{p}\right);$$

---

1. Cette suppression se justifie, parce que les gaz étant très légers, on peut le plus souvent négliger leur poids, d'où provient le terme $z_0 - z$, en comparaison des pressions exercées à la surface.

d'où, en développant le logarithme :

$$l\frac{p_0}{p} = \frac{\varepsilon}{p} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^3}{p^3} - \ldots\ldots$$

Or, ε étant une quantité très petite, nous pourrons négliger les puissances de $\frac{\varepsilon}{p}$ supérieures à la première, et nous aurons :

$$l\frac{p_0}{p} = \frac{\varepsilon}{p} = \frac{p_0 - p}{p}.$$

La formule (1) devient alors :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{k}{g}\frac{p_0 - p}{p},$$

ou bien, en remplaçant p par sa valeur $k\rho$, et observant que l'on a $\rho g = \varpi$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi}. \qquad (2)$$

Cette formule n'est autre que celle que donnerait le théorème de D. Bernoulli, si l'on considérait le gaz comme un fluide homogène, ce qui est permis puisque sa pression et sa densité varient peu.

Ainsi donc, dans le cas d'un *fluide élastique* dont les modifications s'opèrent à *température constante*, on peut appliquer le *théorème de Bernoulli* lorsque les variations de la pression sont très faibles.

Ces conditions se réalisent dans un très grand nombre d'applications industrielles, notamment dans la ventilation des mines ou des édifices. Les ventilateurs les plus puissants ne produisent pas de dépressions supérieures à $0^m,20$ d'eau. Le rapport $\frac{\varepsilon}{p}$ aura donc, dans ce cas, la valeur :

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{0,20}{10,33} = \frac{20}{1033} = 0,019\,;$$

par conséquent, le premier terme que l'on néglige dans le développement est inférieur à 0,00018.

156. Remarque III. — L'action de la pesanteur étant elle-même négligeable pour les fluides élastiques, nous pourrons écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} = const.$$

157. Remarque IV. — On peut remplacer dans la formule (1) le coefficient $\frac{k}{g}$ par une autre expression que nous allons chercher.

On sait que le poids d'un mètre cube d'air à 0°, et sous la pression de 760 $^m/_m$ est de $1^k,293$; il s'ensuit qu'à la température θ et sous la pression p, ce poids sera :

$$\frac{1,293\,p}{10333\,(1+\alpha\theta)},$$

α étant le coefficient de dilatation des gaz égal à 0,00366.

Pour un gaz quelconque, si l'on désigne par δ le rapport de la densité du gaz à celle de l'air, sous la même pression et à la même température, et par ϖ le poids du mètre cube de gaz, on a :

$$\varpi = \frac{1,293\,p\delta}{10333\,(1+\alpha\theta)} = \frac{p\delta}{7991\,(1+\alpha\theta)}\,;$$

par conséquent,

$$\frac{k}{g} = \frac{p}{g\rho} = \frac{p}{\varpi} = \frac{7991\,(1 + \alpha\theta)}{\delta},$$

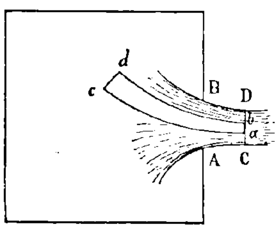
et, en substituant dans la formule (1), il vient :

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = z_0 - z + \frac{7991\,(1 + \alpha\theta)}{\delta}\, l\,\frac{p_0}{p}. \qquad (3)$$

Écoulement d'un gaz à température constante par un orifice en mince paroi.

158. Supposons un réservoir renfermant un gaz entretenu dans un état constant, et qui s'écoule d'un mouvement permanent par un petit orifice AB en mince paroi (fig. 33). Considérons un filet gazeux *abcd*, compris entre les deux sections *cd* et *ab*, cette dernière étant dans la section contractée CD. Soient ω_0 et ω les aires de ces deux sections, et appliquons la formule (3) au mouvement d'une molécule du gaz entre ces deux sections. Observons que nous pouvons considérer la vitesse V_0 relative à la section *cd* comme négligeable par rapport à V, et nous aurons l'équation :

Fig. 33.



$$\frac{V^2}{2g} = z_c - z + \frac{7991\,(1 + \alpha\theta)}{\delta}\, l\,\frac{p_0}{p}.$$

En général, on peut négliger la distance $z_0 - z$ des centres des deux sections ω_0 et ω (n° **154**), et alors il vient :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{7991\,(1 + \alpha\theta)}{\delta}\; l\, \frac{p_0}{p}.$$

Cette formule est identique à celle que nous avons trouvée précédemment (n° **152**).

CHAPITRE X.

Mouvements tourbillonnants.

159. Considérons un *fluide* animé d'un *mouvement symétrique* par rapport à un axe, les forces extérieures qui sollicitent ce fluide rencontrant l'axe de symétrie.

On dit qu'un mouvement est symétrique par rapport à un axe lorsque, pour tous les points situés sur un même parallèle, la pression, la densité et la vitesse sont les mêmes.

Prenons l'axe de symétrie pour axe des z, et soient M (x, y, z) un point du fluide, M' sa projection sur le plan des xy, r et θ les coordonnées polaires du point M'. Nous aurons :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Cela posé, les deux premières équations du mouvement (n° **60**), nous donnent :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - u',$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \mathrm{Y} - v';$$

multipliant par dx, dy et ajoutant, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy - (u'dx + v'dy).$$

Or, si nous supposons que dx et dy se rapportent à un déplacement sur la circonférence de rayon r, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = 0,$$

puisque p est constant à un même instant pour tous les points situés sur cette circonférence.

D'ailleurs, la force extérieure qui sollicite le point M étant normale à la circonférence décrite par ce point, on a aussi :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy = 0.$$

L'équation précédente se réduit alors à :

$$u'dx + v'dy = 0.$$

Mais, dx et dy se rapportant à une même circonférence, on a :

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta,$$

$$dy = r\cos\theta\, d\theta.$$

D'autre part, les coordonnées r et θ de la molécule qui occupe la position M à la fin du temps t, sont des fonctions de t, et l'on a :

$$u' = \frac{d^2(r\cos\theta)}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$v' = \frac{d^2(r \sin \theta)}{dt^2} = \sin \theta \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

En substituant, il vient :

$$2\, r \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

ou bien, en désignant par $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la molécule M,

$$2\, \omega\, r \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d\omega}{dt} = 0\,;$$

d'où, en intégrant :

$$\omega\, r^2 = a,$$

a étant une constante pour une molécule fluide.

On en tire :

$$\omega = \frac{a}{r^2}.$$

Donc, *dans le mouvement d'un fluide qui tourbillonne autour d'un axe de symétrie, la vitesse angulaire d une même molécule varie, pendant son mouvement, en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.*

ADDITIONS.

Propriétés de la fonction potentielle.

160. Dans la démonstration des propriétés de la fonction potentielle V pour un point intérieur, nous avons supposé le corps homogène (I, n^{os} **404** et **405**).

Lorsque le corps n'est pas homogène, notre démonstration n'est plus applicable. Nous ferons un changement de variables, et nous transformerons l'intégrale en une autre telle que la fonction à intégrer reste finie pour tous les éléments des nouvelles variables.

Reprenons la formule :

$$V = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{\rho dv}{r},$$

en désignant par ρ la densité du corps au point M (x, y, z), et par dv un élément de volume en ce point.

Nous admettrons que ρ qui est une fonction de x, y, z, ne devienne infinie en aucun point.

Prenons le point attiré P comme pôle d'un système de coordonnées polaires, et imaginons une pyramide élémentaire ayant son sommet au point P. Une sphère d'un rayon égal à l'unité déterminera dans la pyramide une surface $d\sigma$, qui mesure l'angle solide de cette pyramide. Si donc nous prenons pour élément de volume, le volume compris entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, le volume de cet élément sera[1] :

$$dv = r^2 d\sigma dr,$$

et il vient :

$$V = \int\int \rho r \, d\sigma dr.$$

Or, la fonction ρr n'est pas infinie pour les éléments voisins du point P (elle est, au contraire, infiniment petite pour ces éléments) ; par conséquent, l'intégrale V aura une valeur finie et déterminée, même dans le cas d'un point P situé à l'intérieur du corps.

161. Cherchons maintenant les composantes de la force pour un point P, situé à l'intérieur du corps. Nous déterminerons la composante suivant l'axe des x.

L'action exercée sur le point P (a, b, c) par l'élément dm au point M (x, y, z) est :

$$\frac{f dm \, dm'}{r^2};$$

la composante de cette force suivant l'axe des x est :

$$f dm' \, \frac{dm}{r^2} \, \frac{x - a}{r}.$$

On a donc pour la composante suivant l'axe des x de l'action totale :

$$X = f dm' \int \frac{x - a}{r^3} dm,$$

---

1. C'est le volume d'un prisme élémentaire de base $r^2 d\tau$ et de hauteur dr.

ou bien, en remplaçant dm par sa valeur $\rho r^2 d\sigma dr$:

$$X = fdm' \int \rho \frac{x-a}{r} dr\, d\sigma.$$

Or, $x - a$ est toujours plus petit que r, ou tout au plus égal à r ; donc, $\frac{x-a}{r}$ a une valeur finie pour tous les éléments dr, et l'intégrale aura une valeur finie et déterminée.

D'ailleurs, $\frac{x-a}{r}$ est le cosinus de l'angle que fait le rayon r avec l'axe des x ; en désignant cet angle par θ, on a :

$$X = fdm' \int\int \rho \cos\theta\, dr\, d\sigma\ ^1.$$

162. Cherchons ensuite les *quotients différentiels de la fonction* V *pour un point intérieur.* Nous calculerons donc $\frac{\partial V}{\partial a}$, et nous démontrerons que la composante X que nous venons de trouver est égale au produit de $\frac{\partial V}{\partial a}$ par fdm'.

Or, pour déterminer $\frac{\partial V}{\partial a}$, nous ne pouvons pas nous servir de l'expression :

$$V = \int\int \rho r\, dr\, d\sigma,$$

laquelle suppose le point P fixe, ce qui n'a pas lieu dans le calcul actuel.

---

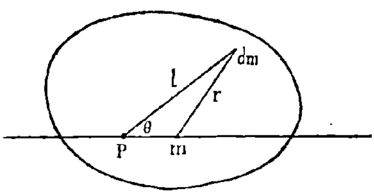
1. L'axe des x étant quelconque, cette formule est également applicable à la composante de la force suivant une direction quelconque ; θ est alors l'angle que fait le rayon r avec cette direction.

Nous continuerons à prendre le point donné pour origine, mais nous déterminerons la fonction potentielle pour un point voisin de l'origine, point dont nous supposerons les coordonnées variables. Nous calculerons les quotients différentiels de cette fonction, et dans les résultats obtenus, nous donnerons aux coordonnées variables des valeurs déterminées que nous choisirons de manière qu'elles correspondent à l'origine des coordonnées polaires.

Observons encore que, pour obtenir le quotient différentiel par rapport à a, il n'est pas nécessaire que le point P soit mobile dans toutes les directions, mais seulement suivant l'axe des x, c'est-à-dire dans la direction suivant laquelle on veut différentier.

Menons donc par le point P une droite parallèle à l'axe des x, et déterminons la fonction V pour un point quelconque m de cette droite. Soient a_1, b_1, c_1 les coordonnées du point donné P, et a, b_1, c_1 les coordonnées du point mobile m (fig. 34). Prenons le point P pour origine des coordonnées polaires ; soient l la longueur du rayon vecteur mené de l'origine P à l'élément dm, θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, et φ l'angle que le plan de ces deux droites fait avec un plan fixe passant par l'axe polaire. L'élément de volume est alors :

Fig. 34.



$$dv = l^2 \sin\theta \, dl \, d\theta \, d\varphi.$$

D'ailleurs, on a :

$$r^2 = l^2 + (a - a_1)^2 - 2l(a - a_1)\cos\theta$$
$$= l^2 \sin^2\theta + (l\cos\theta + a_1 - a)^2.$$

Par suite, la formule :

$$V = \int \frac{\rho dv}{r},$$

nous donne :

$$V = \int\int\int \frac{\rho l^2 \sin\theta}{\sqrt{l^2 \sin^2\theta + (l\cos\theta + a_1 - a)^2}} \, dl \, d\theta \, d\varphi.$$

Or, il est évident que la fonction sous le signe $\int$ est finie pour toutes les valeurs de l, φ, θ, puisque le numérateur renferme le facteur $l \sin\theta$ qui ne peut jamais devenir plus grand que le dénominateur.

De la formule précédente on tire :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\int\int \frac{\rho l^2 \sin\theta \, (l\cos\theta + a_1 - a)}{\left\{ l^2 \sin^2\theta + (l\cos\theta + a_1 - a)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

et si nous remplaçons a par la valeur déterminée a_1, qui correspond à l'origine des coordonnées polaires, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\int\int \rho \sin\theta \cos\theta \, dl \, d\theta \, d\varphi,$$

et il est aussi évident que la fonction sous le signe $\int$ est finie pour toutes les valeurs des variables l, θ, φ, c'est-à-dire pour tous les éléments auxquels s'étend l'intégration.

Il est facile de voir que, si l'on compare cette dernière expression à la formule que nous avons trouvée plus haut (n° **161**) :

$$X = fdm' \int\int \rho \cos\theta \, dr \, d\sigma,$$

on a :

$$X = fdm' \frac{\partial V}{\partial a}.$$

En effet, le produit $\sin\theta \, d\theta d\varphi$ n'est autre que l'élément $d\sigma$ de surface que la pyramide élémentaire intercepte sur la sphère de rayon égal à l'unité, décrite de l'origine comme centre ; d'autre part, puisque le point m coïncide avec l'origine P des coordonnées polaires, on peut remplacer dl par dr, et il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\int \rho \cos\theta \, dr \, d\sigma.$$

Par conséquent :

$$X = fdm' \frac{\partial V}{\partial a};$$

on trouverait de même :

$$Y = fdm' \frac{\partial V}{\partial b},$$

$$Z = fdm' \frac{\partial V}{\partial c}.$$

Nous en concluons que, *pour un point intérieur*, comme pour un point extérieur, *les composantes de la force s'expriment au moyen des quotients différentiels* *du premier ordre de la fonction potentielle par rapport aux coordonnées du point attiré.*

163. Remarque. — L'axe des x étant quelconque, il est évident que la propriété énoncée s'applique à une direction quelconque.

Formule de Laplace. — Formule de Poisson.

164. La formule de Laplace (I, n° **401**) :

$$\Delta V = 0, \tag{A}$$

suppose que le point P est à l'extérieur du corps. En employant les coordonnées polaires, nous avons reconnu (nos **160** et **162**) que la fonction potentielle et ses dérivées partielles du premier ordre restent finies et continues, lorsque le point P est à l'intérieur du corps. Il n'en est plus de même pour les dérivées secondes ; en effet, si, dans l'expression de $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$ (I, n° **401**), nous remplaçons dv par sa valeur $r^2 dr d\sigma$, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} &= \int \frac{\rho}{r} \left\{ -1 + \frac{3(x-a)^2}{r^2} \right\} dr\, d\sigma \\
&= \int \frac{\rho}{r} (-1 + 3\cos^2\theta)\, dr\, d\sigma \\
&= \int \frac{\rho}{r} (-1 + 3\cos^2\theta) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,
\end{aligned}$$

et l'on voit que la fonction sous le signe $\int$ est infinie pour les premiers éléments dr situés dans le voisinage du point P, puisque r reste au dénominateur.

165. Proposons-nous de trouver par quelle formule on doit remplacer (A) pour le cas d'un point intérieur. Nous avons déjà vu (I, n° **405**) que, si le corps est homogène, on a :

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Pour obtenir la formule générale dans le cas d'un corps non homogène, nous allons donner à la fonction potentielle une autre forme.

Considérons d'abord le cas d'un corps homogène, et reprenons la formule :

$$V = \rho \int \frac{dv}{r} = \rho \int d\sigma \int r\,dr.$$

On peut effectuer l'intégrale relative à r, et l'on obtient l'intégrale indéfinie $\frac{r^2}{2}$; mais, les limites de cette intégrale dépendent de la forme du corps et de la position du point P.

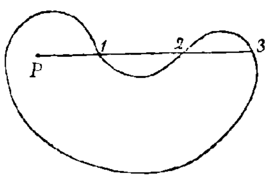
Si nous supposons le point P à l'intérieur du corps, et si la forme du corps est telle que tout rayon partant du point P ne rencontre qu'une seule fois la surface du corps, l'intégrale devra être prise de 0 à R, en désignant par R la distance du point de rencontre au point P, et nous aurons :

$$V = \frac{\rho}{2} \int R^2 d\sigma.$$

L'intégrale relative à σ se rapporte évidemment à tout l'espace angulaire autour du point P.

Si, le point P étant à l'intérieur du corps, la forme du corps est telle que les rayons vecteurs partant de P rencontrent plusieurs fois la surface du corps (fig. 35), il est évident que, *si le corps est fini*, c'est-à-dire si sa surface est entièrement fermée, le nombre des points d'intersection est toujours *impair*. Si donc nous considérons une pyramide élémentaire ayant son sommet au point P, elle sera à l'intérieur du corps depuis le sommet jusqu'au premier point de rencontre, puis à l'extérieur depuis le premier jusqu'au deuxième, à l'intérieur du deuxième au troisième, et ainsi de suite.

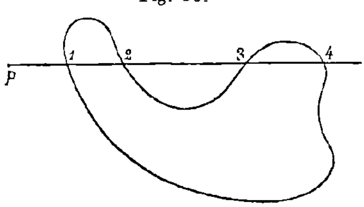
Fig. 35.



Or, on ne doit considérer la fonction potentielle que pour les parties situées à l'intérieur du corps ; si nous désignons donc par R_1, R_2, ... les distances du point P aux différents points de rencontre, nous devrons intégrer de 0 à R_1, puis de R_2 à R_3,...., et nous aurons :

$$V = \frac{\rho}{2}\int (R_1^2 - R_2^2 + R_3^2 - \ldots)\, d\sigma.$$

Fig. 36.



Si le point P est à l'extérieur du corps (fig. 36), le nombre des points de rencontre est *pair;* nous devrons intégrer de R_1 à R_2, puis de R_3 à R_4, ... , et il viendra :

$$V = \frac{\rho}{2}\int (-R_1^2 + R_2^2 - R_3^2 + \ldots)\, d\sigma.$$

Dans cette dernière équation, l'intégrale relative à σ s'étend *seulement* à la partie de l'angle solide autour du point P, dans laquelle le corps est situé. Si nous imaginons un cône ayant son sommet au point P et circonscrit au corps, l'intégrale s'étendra à l'ouverture de ce cône.

Si le corps est creux, et a deux surfaces dont l'une renferme entièrement l'autre, et si le point P est dans la partie creuse, l'intégrale devra être étendue à tout l'espace angulaire 4π.

Si le point P est à la surface du corps, il est évident que l'on pourra employer indifféremment l'une ou l'autre des deux formules.

166. On peut encore donner à ces deux formules une autre forme. A cet effet, considérons dans la pyramide élémentaire dont l'angle solide est $d\sigma$, l'élément de surface $d\omega$ suivant lequel cette pyramide coupe la surface du corps, et cherchons la relation entre $d\sigma$ et $d\omega$.

Soit i le cosinus de l'angle que le rayon vecteur mené du point P à l'élément $d\omega$ fait avec la normale à cet élément ; nous aurons :

$$\frac{d\sigma}{1} = \frac{id\omega}{R^2},$$

$id\omega$ étant la projection de l'élément $d\omega$ sur la sphère de rayon R.

On en tire :

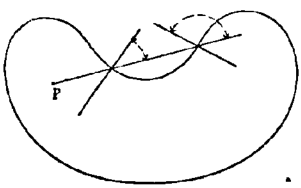
$$id\omega = \pm R^2 d\sigma,$$

ou bien :

$$d\sigma = \pm \frac{i}{R^2} d\omega.$$

On prendra dans cette formule le signe + ou le signe — suivant que i sera positif ou négatif. Nous conviendrons de considérer la direction du rayon vecteur *dans le sens suivant lequel sa longueur croît*, et celle de la normale comme dirigée vers *l'extérieur* du corps. D'après cela, il est évident (fig. 37) que partout où le rayon vecteur en croissant sortira du corps, l'angle compris entre ce rayon et la normale sera moindre que 90°, et, par suite, son cosinus i sera positif ; au contraire, lorsque le rayon vecteur en croissant pénétrera dans le corps, l'angle est plus grand que 90°, et, par suite, i sera négatif.

Fig. 37.



Cela posé, lorsque la pyramide élémentaire rencontre plusieurs fois la surface du corps, au même élément $d\sigma$ correspondront plusieurs éléments de surface $d\omega_1, d\omega_2, ..$ Or, à chacun de ces éléments $d\omega$ correspondra une valeur particulière pour i, et les produits :

$$R_1^2 d\sigma, \qquad R_2^2 d\sigma, \; \ldots .$$

pourront être remplacés par les produits :

$$i_1 d\omega_1, \qquad i_2 d\omega_2, \; \ldots .$$

D'ailleurs, si l'on recherche les signes dont sont affectés les différents facteurs R^2, on trouvera que, pour *i positif*, le facteur R^2 correspondant aura le signe $+$; au contraire, pour *i négatif*, R^2 aura le signe $-$. Il est donc inutile d'affecter d'aucun signe les produits $id\omega$, puisqu'à cause du facteur i, ils prennent d'eux-mêmes le signe convenable. Or, tous les éléments de surface $d\omega$ constituent précisément toute la surface du corps ; nous aurons donc :

$$V = \frac{\rho}{2} \int i d\omega,$$

formule qui convient à toutes les formes du corps, et à toutes les positions du point P. Dans cette formule, l'intégrale relative au volume du corps est remplacée par un intégrale relative à la surface : l'intégration se rapporte à la variable $d\omega$ indépendante des coordonnées a, b, c du point P. Nous pouvons donc différentier par rapport à a, et nous aurons :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\rho}{2}\int \frac{\partial i}{\partial a}\, d\omega,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \frac{\rho}{2}\int \frac{\partial^2 i}{\partial a^2}\, d\omega.$$

Par suite,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \frac{\rho}{2}\int \left(\frac{\partial^2 i}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial c^2}\right) d\omega.$$

167. Pour trouver la valeur du second membre, cherchons d'abord à déterminer i ; dans ce but, désignons par α, β, γ les cosinus directeurs du rayon vecteur mené du point P à l'élément $d\omega$, et par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à cet élément. Nous aurons :

$$i = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma.$$

Or, si ξ, η, ζ sont les coordonnées de l'élément $d\omega$, il vient :

$$\alpha = \frac{\xi - a}{R}, \qquad \beta = \frac{\eta - b}{R}, \qquad \gamma = \frac{\zeta - c}{R};$$

par suite,

$$i = \frac{(\xi - a)\lambda + (\eta - b)\mu + (\zeta - c)\nu}{R},$$

formule dans laquelle :

$$R = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\xi - c)^2}.$$

De ces formules on tire :

$$\frac{\partial i}{\partial a} = \frac{\xi - a}{R^2} i - \frac{\lambda}{R},$$

$$\frac{\partial i}{\partial b} = \frac{\eta - b}{R^2} i - \frac{\mu}{R},$$

$$\frac{\partial i}{\partial c} = \frac{\zeta - c}{R^2} i - \frac{\nu}{R};$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial a^2} = \frac{3(\xi - a)^2 - R^2}{R^4} i - 2 \frac{\xi - a}{R^3} \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial b^2} = \frac{3(\eta - b)^2 - R^2}{R^4} i - 2 \frac{\eta - b}{R^3} \mu, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial c^2} = \frac{3(\zeta - c)^2 - R^2}{R^4} i - 2 \frac{\zeta - c}{R^3} \nu.$$

168. Supposons maintenant que *le point* P *se trouve à une distance finie de la surface* ; alors, R n'étant nul pour aucun des éléments de cette surface, les différents termes des trois formules (1) ne pourront pas devenir infinis, et l'on pourra les intégrer.

Or, on a :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial c^2} = -2 \frac{(\xi - a)\lambda + (\eta - b)\mu + (\zeta - c)\nu}{R^3} = -\frac{2i}{R^2};$$

par conséquent,

$$\Delta V = -\rho \int \frac{i}{R^2}\, d\omega. \tag{2}$$

Or, cette dernière intégrale est facile à obtenir. En effet, on a d'abord :

$$\frac{i}{R^2}\, d\omega = \pm\, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément d'angle solide correspondant à $d\omega$ dans la pyramide élémentaire.

Mais, d'après ce que nous avons vu (n° **166**) plusieurs éléments $d\omega$ peuvent correspondre à une même pyramide élémentaire ; par conséquent, le même élément $d\sigma$ peut entrer plusieurs fois dans l'intégrale avec différents signes, et nous aurons à distinguer si le point P est intérieur ou extérieur au corps.

1° Si le point P est *extérieur*, chacune des pyramides élémentaires qui rencontre le corps coupe sa surface un nombre pair de fois, et l'élément $d\sigma$ entre autant de fois dans l'intégrale avec des signes alternativement négatifs et positifs. L'équation (2) se réduit donc à la suivante :

$$\Delta V = -\rho \int (-1 + 1 - 1 + \ldots .)\, d\sigma\,;$$

or, la quantité entre parenthèses renfermant un nombre pair de termes est nulle, et l'on a :

$$\Delta V = 0.$$

2° Si le point P est *intérieur*, l'élément $d\sigma$ entre un nombre impair de fois dans l'intégrale, avec le signe + d'abord, et ensuite avec les signes — et + alternativement. L'équation (2) nous donne alors :

$$\Delta V = -\rho \int (+1 - 1 + 1 \ldots.) \, d\sigma \; ;$$

la quantité entre parenthèses renferme un nombre impair de termes, qui, à l'exception du premier se détruisent, et il vient :

$$\Delta V = -\rho \int d\sigma.$$

Or, l'intégrale relative à σ devant s'étendre à tout l'espace angulaire solide, sera égale à 4π, et nous aurons :

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

C'est la formule que nous avons trouvée précédemment (I, n° **405**).

169. Proposons-nous maintenant de trouver la formule de Poisson pour le cas *d'un corps non homogène*. Nous supposerons que le point P, situé à l'intérieur du corps, ne se trouve pas dans le voisinage de la surface, et de plus que la densité du corps ne varie dans le voisinage du point P que d'une manière continue. Nous pouvons imaginer une surface fermée enveloppant le point P, située partout à une distance finie de ce point, et à l'intérieur de laquelle la densité varie d'une manière continue. Nous pourrons nous borner à considérer la portion du corps renfermée dans cette surface. En effet, pour l'autre portion, le point P est extérieur, et situé à une distance finie de tous les éléments de cette portion. Par suite, la partie de ΔV qui se rapporte à cette seconde portion est nulle, en vertu des résultats précédents (I, n° **401**). Comme on peut choisir arbitrairement la forme de la surface décrite autour du point P, nous admettrons que tout rayon vecteur émanant du point P ne la rencontre qu'une fois.

Nous avons vu que les composantes de la force que la portion du corps considérée exerce sur le point P s'expriment au moyen des quotients différentiels du premier ordre de la fonction potentielle. Nous aurons donc, en désignant par α le cosinus de l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe des x (N° **161**) :

$$X = fdm' \int\int \rho\alpha \, dr \, d\sigma ;$$

l'intégrale relative à r doit être prise de 0 à R, et celle relative à σ doit s'étendre à tout l'espace angulaire solide. D'ailleurs, α étant indépendant de r, nous aurons :

$$X = fdm' \int \alpha d\sigma \int_0^R \rho dr.$$

En remplaçant l'élément $d\sigma$ par l'élément $d\omega$ de la surface du corps, on a (n° **166**) :

$$d\sigma = \frac{i}{R^2} d\omega,$$

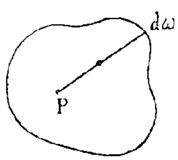
formule dans laquelle on doit prendre le signe +, puisque, dans le cas actuel, chaque rayon vecteur ne rencontrant la surface qu'une seule fois, l'intersection a lieu de l'intérieur vers l'extérieur.

Nous aurons donc :

$$X = fdm' \int \alpha d\omega \, \frac{i}{R^2} \int_0^R \rho dr.$$

170. Nous modifierons encore l'intégrale $\int_0^R \rho dr$; dans cette intégrale, on suppose que l'on parte du point P en s'avançant vers la surface. Nous supposerons, au contraire, que l'on parte du point où le rayon rencontre la surface et que l'on s'avance vers le point P. Si nous considérons un point quelconque sur cette droite (fig. 38), sa distance au point P est r ; désignons par u sa distance au point $d\omega$ où la droite rencontre la surface. Nous aurons :

Fig. 38.



$$r = R - u ;$$

d'où :

$$dr = - du,$$

et les limites de l'intégrale sont : pour $r = 0$, $u = R$, et pour $r = R$, $u = 0$; par conséquent :

$$\int_0^R \rho dr = -\int_R^0 \rho du = \int_0^R \rho du.$$

On a donc :

$$X = fdm' \int \alpha d\omega \frac{i}{R^2} \int_0^R \rho du.$$

Si l'on pose :

$$H = \int_0^R \rho du,$$

il viendra :

$$X = fdm' \int \frac{\alpha i}{R^2} \, H \, d\omega \,;$$

de même,

$$Y = fdm' \int \frac{\beta i}{R^2} \, H \, d\omega,$$

$$Z = fdm' \int \frac{\gamma i}{R^2} \, H \, d\omega.$$

Comme l'élément $d\omega$ est indépendant des coordonnées a, b, c du point P, nous pourrons différentier les trois dernières équations par rapport à a, b, c, et nous aurons :

$$\frac{\partial X}{\partial a} = fdm' \int \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\alpha i}{R^2} \right) H + \frac{\alpha i}{R^2} \frac{\partial H}{\partial a} \right\} d\omega.$$

Or, si l'on désigne par ξ, η, ζ les coordonnées du point où se trouve l'élément $d\omega$, et par λ, μ, ν les cosinus des angles que la normale en ce point fait avec les axes, on a :

$$R = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2},$$

$$\alpha = \frac{\xi - a}{R}, \qquad \beta = \frac{\eta - b}{R}, \qquad \gamma = \frac{\zeta - c}{R},$$

$$i = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

On en tire :

$$\frac{\alpha i}{R^2} = \frac{(\xi - a)^2\lambda + (\xi - a)(\eta - b)\mu + (\xi - a)(\zeta - c)\nu}{\left\{ (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 \right\}^2}.$$

Différentiant par rapport à a, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\alpha i}{R^2}\right) = \frac{-\alpha\lambda + (4\alpha^2 - 1)\, i}{R^3},$$

et, en substituant dans l'expression de $\frac{\partial X}{\partial a}$, on a :

$$\frac{\partial X}{\partial a} = fdm' \int \left\{ \frac{-\alpha\lambda + (4\alpha^2 - 1)\, i}{R^3} H + \frac{\alpha i}{R^2}\frac{\partial H}{\partial a} \right\} d\omega\,;$$

de même,

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = fdm' \int \left\{ \frac{-\beta\mu + (4\beta^2 - 1)\, i}{R^3} H + \frac{\beta i}{R^2}\frac{\partial H}{\partial b} \right\} d\omega,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial c} = fdm' \int \left\{ \frac{-\gamma\nu + (4\gamma^2 - 1)\, i}{R^3} H + \frac{\gamma i}{R^2}\frac{\partial H}{\partial c} \right\} d\omega.$$

Si nous ajoutons ces trois dernières équations, en ayant égard aux suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = i,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = fdm' \int \left(\alpha\frac{\partial H}{\partial a} + \beta\frac{\partial H}{\partial b} + \gamma\frac{\partial H}{\partial c}\right)\frac{i}{R^2}\, d\omega.$$

171. Occupons-nous maintenant des quotients différentiels de la fonction H ; remarquons d'abord que l'intégrale :

$$H = \int_0^R \rho\, du,$$

s'étend à une droite dont les extrémités sont respectivement le point (ξ, η, ζ) de la surface, et le point P (a, b, c). Nous pouvons donc considérer H comme une fonction des six variables ξ, η, ζ, a, b, c. Or, les trois dernières a, b, c sont données par les formules :

$$a = \xi - \alpha R,$$

$$b = \eta - \beta R,$$

$$c = \zeta - \gamma R.$$

D'autre part, on peut exprimer une des variables α, β, γ en fonction des deux autres, ou bien les exprimer toutes les trois en fonction de deux variables qui détermineraient la direction de la droite qui va du point $d\omega$ au point P. Nous conserverons les variables α, β, γ ; si nous remplaçons a, b, c par les valeurs ci-dessus, la fonction H deviendra une fonction de ξ, η, ζ, α, β, γ, R. Pour différentier H par rapport à a, b, c, nous devons regarder les variables ξ, η, ζ comme des constantes, et considérer H comme une fonction de α, β, γ, R, lesquelles seront des fonctions de a, b, c.

On a ainsi :

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial a};$$

mais, on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{-1+\alpha^2}{R}, \; \frac{\partial \beta}{\partial a} = \frac{\alpha\beta}{R}, \; \frac{\partial \gamma}{\partial a} = \frac{\alpha\gamma}{R}, \; \frac{\partial R}{\partial a} = -\alpha;$$

par suite,

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\cdot\frac{-1+\alpha^2}{R} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\alpha\beta}{R} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\alpha\gamma}{R} - \frac{\partial H}{\partial R}\alpha,$$

ou bien :

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \alpha\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right)\right] - \alpha\frac{\partial H}{\partial R}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\int_0^R \rho du,$$

ρ désignant la densité du corps au point qui se trouve à une distance u du point ξ, η, ζ sur la droite qui joint ce dernier point au point P. La position de ce point, et, par conséquent, la densité ρ sont déterminées par les quantités α, β, γ et u, le point de la surface étant supposé donné. Or, dans l'intégration relative à u, les quantités α, β, γ doivent être considérées comme constantes ; u seul étant variable, on pourra considérer ρ comme une fonction de u seulement. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\int_0^R f(u)du = f(R),$$

$f(R)$ étant la valeur que prend la densité ρ au point de la droite qui est à la distance R de la surface, c'est-à-dire au point P. En désignant cette valeur de ρ par ρ_p, nous aurons :

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \rho_p.$$

On a alors :

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \alpha\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right)\right] - \alpha\rho_p;$$

de même,

$$\frac{\partial H}{\partial b} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial \beta} + \beta\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right)\right] - \beta\rho_p.$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial \gamma} + \gamma\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial H}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right)\right] - \gamma\rho_p.$$

Multipliant par α, β, γ et ajoutant, il vient :

$$\alpha\frac{\partial H}{\partial a} + \beta\frac{\partial H}{\partial b} + \gamma\frac{\partial H}{\partial c} = -\rho_p,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = -fdm'\int \rho_p \frac{i}{R^2}\,d\omega.$$

Mais, ρ_p est une quantité qui ne varie pas quand on passe d'un élément de la surface à un autre ; par conséquent, ρ_p est constant dans l'intégrale qui précède, laquelle se rapporte à l'élément de la surface. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = -fdm'.\rho_p\int \frac{i}{R^2}\,d\omega\,;$$

si maintenant nous remplaçons l'élément $d\omega$ de la surface en fonction de l'élément d'angle solide $d\sigma$, au moyen de la formule :

$$d\sigma = \frac{i}{R^2}\,d\omega,$$

il viendra :

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = - fdm' . \rho_p \int d\tau,$$

et comme l'intégrale doit s'étendre à tout l'espace angulaire solide, elle est égale à 4π, et il vient :

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = - 4\pi fdm' . \rho_p.$$

On a donc :

$$\Delta V = - 4\pi\rho_p,$$

et la formule de Poisson est ainsi démontrée d'une manière générale.

La démonstration qui précède est due à M. Clausius.

Fonction potentielle
d'une couche superficielle.

172. Imaginons que la masse d'un corps soit répandue d'une manière continue sur une surface, et faisons abstraction de l'épaisseur (I, n° **331**). Proposons-nous de trouver la *fonction potentielle* de cette masse. Nous supposerons que la *surface* soit *plane*, et que la répartition de la masse sur cette surface soit *uniforme*.

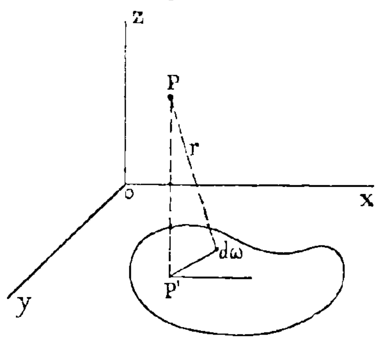
Soient $\rho d\omega$ la masse répandue sur un élément $d\omega$ de la surface, ρ étant la *densité superficielle*, c'est-à-dire la densité de la masse évaluée par unité de surface, r la distance de l'élément $d\omega$ au point P ; nous aurons :

$$V = \rho \int \frac{d\omega}{r},$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface.

Prenons le plan de la figure pour plan des xy, et soient a, b, c les coordonnées du point P (fig. 39). De ce point abaissons une perpendiculaire PP′ sur le plan des xy ; les coordonnées du point P′ seront a, b, 0.

Fig. 39.



Nous prendrons le point P′ pour origine d'un système de coordonnées polaires ; en désignant par u le rayon vecteur qui va du point P′ à l'élément $d\omega$, et par φ l'angle que ce rayon vecteur fait avec l'axe des x, nous aurons :

$$d\omega = u\, du\, d\varphi.$$

Or, ξ, η étant les coordonnées de l'élément $d\omega$, on a :

$$u = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2},$$

$$r = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + c^2} = \sqrt{u^2 + c^2},$$

et il vient :

$$V = \rho \int\int \frac{u\, du\, d\varphi}{\sqrt{u^2 + c^2}} = \rho \int d\varphi \int \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 + c^2}}.$$

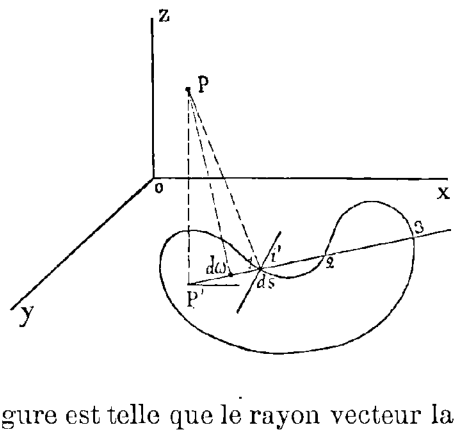
D'ailleurs, l'intégrale relative à u nous donne :

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 + c^2}} = \sqrt{u^2 + c^2}\,;$$

quant aux limites, elles doivent se rapporter aux circonstances particulières de la question que l'on a à traiter, et il faudra distinguer deux cas, suivant que le pied P' de la perpendiculaire abaissée du point P sur le plan tombera à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface plane.

173. Supposons le point P' à *l'intérieur* (fig. 40) : l'intégrale devra être prise depuis $u = 0$, jusqu'à la rencontre du rayon vecteur avec le périmètre de la figure.

Fig. 40.



Si cette figure est telle que le rayon vecteur la rencontre un certain nombre de fois *(nombre qui sera impair)*, il faudra en outre considérer les segments compris entre le deuxième et le troisième points d'intersection, le quatrième et le cinquième, etc.

Désignons par U_1, U_2, ..., les valeurs de u correspondantes aux points d'intersection, et posons :

$$R_1 = \sqrt{U_1^2 + c^2}, \quad R_2 = \sqrt{U_2^2 + c^2}, \ldots\ldots,$$

nous aurons :

$$V = \rho \int (-\sqrt{c^2} + R_1 - R_2 + R_3 - \ldots\ldots) \, d\varphi.$$

Observons que, dans le premier terme, nous ne pouvons pas remplacer $\sqrt{c^2}$ par c, parce que cette racine est une valeur particulière de r, et doit, par conséquent, être *positive*, tandis que c sera positif ou négatif suivant que le point P sera au dessus ou au dessous du plan.

Or, $\sqrt{c^2}$ étant indépendant de φ, on pourra intégrer le premier terme, et, comme l'intégrale doit être prise de 0 à 2π, il vient :

$$V = -2\pi\rho \sqrt{c^2} + \rho \int (R_1 - R_2 + R_3 - \ldots\ldots) \, d\varphi.$$

Cette dernière intégrale peut être mise sous une forme plus avantageuse pour les calculs subséquents. A cet effet, nous introduirons, au lieu de l'angle $d\varphi$, l'élément ds du périmètre intercepté par les côtés de cet angle. Soit i' le cosinus de l'angle compris entre la normale à l'élément ds et le rayon vecteur, la normale étant dirigée vers l'extérieur, et le rayon vecteur dans le sens où il croît ; nous aurons :

$$i' ds = \pm \, U d\varphi.$$

Dans cette formule, pour autant que ds et $d\varphi$ soient tous les deux supposés positifs, on devra prendre le signe + ou le signe —, suivant que le rayon vecteur en croissant coupe le périmètre de l'intérieur vers l'extérieur, ou vice versa. Ces signes seront donc les mêmes que ceux qui affectent les quantités R_1, R_2, . . . Par conséquent, si l'on substitue à l'un des produits $\pm\, R d\varphi$, le produit $\frac{R}{U}\, i' ds$, on devra toujours donner à ce dernier le signe explicite $+$. Comme, pour chaque angle $d\varphi$, il entre dans l'intégrale autant de valeurs de R qu'il y a d'éléments ds correspondants à cet angle, tous les éléments d'arcs qui sont introduits ainsi forment ensemble le périmètre de la figure. Nous pourrons donc écrire :

$$V = -\, 2\pi\rho \sqrt{c^2} + \rho \int \frac{R}{U}\, i' ds,$$

l'intégrale s'étendant à tout le périmètre.

174. Supposons ensuite que le point P' tombe à l'extérieur de la figure : chaque rayon vecteur rencontrera la figure *un nombre pair de fois*, et l'intégrale se rapportera au segment compris entre le premier et le deuxième points d'intersection, entre le troisième et le quatrième, etc. Nous aurons :

$$V = \rho \int (-\, R_1 + R_2 - R_3 + \ldots .)\, d\varphi\,;$$

l'intégrale relative à φ s'étend à tout l'espace angulaire qui correspond à la figure.

Or, si, dans cette formule, nous remplaçons l'angle élémentaire $d\varphi$ par l'arc élémentaire ds, il viendra :

$$V = \rho \int \frac{R}{U}\, i' ds.$$

175. Proposons-nous maintenant de trouver les quotients différentiels de la fonction potentielle :

$$V = -2\pi\rho\sqrt{c^2} + \rho\int\frac{R}{U}\,i'\,ds.$$

La quantité s par rapport à laquelle on doit intégrer étant indépendante des coordonnées a, b, c du point P, on peut différentier sous le signe $\int$.

Désignons par ξ', η' les coordonnées de l'arc élémentaire ds, par α', β' les cosinus des angles que la normale à cet élément fait avec les axes des x et des y ; nous aurons :

$$U = \sqrt{(\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2},$$

$$R = \sqrt{(\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2 + c^2},$$

$$i' = \frac{(\xi' - a)\,\alpha' + (\eta' - b)\,\beta'}{U}.$$

Si le pied P′ de la perpendiculaire est à une distance finie du périmètre de la figure, U et R sont des quantités finies pour tous les éléments qui entrent dans l'intégrale.

Cela posé, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = -2\pi\rho\frac{c}{\sqrt{c^2}} + \rho c\int\frac{i'}{RU}\,ds;$$

la fraction $\frac{c}{\sqrt{c^2}}$ sera égale à $+1$ ou -1, suivant que c sera positif ou négatif[1].

---

1. En effet, $\sqrt{c^2}$ doit, d'après ce que nous avons dit (nº 173), être toujours positif.

176. Cherchons encore par quelles valeurs passe la fonction $\frac{\partial V}{\partial c}$ dans le voisinage de la couche superficielle.

Si c devient infiniment petit, puis nul, le second terme, qui ne renferme, outre le facteur c, que des facteurs qui restent finis, deviendra infiniment petit, et nul. Quant au premier terme, du côté où c est positif, il sera constamment égal à $-2\pi\rho$, de l'autre côté, où c est négatif, il sera constamment égal à $+2\pi\rho$. Il en résulte qu'au moment où le point P traverse la surface, la valeur de ce terme varie brusquement de $4\pi\rho$.

Désignons par $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{+0}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{-0}$ les limites vers lesquelles converge $\frac{\partial V}{\partial c}$ lorsque le point P s'approche indéfiniment de la surface du côté positif et du côté négatif ; nous aurons :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{+0} = -2\pi\rho, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{-0} = 2\pi\rho ;$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{-0} = -4\pi\rho.$$

Cette dernière formule s'étend aussi au cas où la *surface n'est pas plane*, et lorsque la *répartition* de la masse n'est pas *uniforme*.

177. En différentiant V par rapport à a, on trouve :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \rho \int \left\{ \frac{(\xi' - a)(R^2 + c^2)}{RU^3} i' - \frac{R}{U^2} \alpha' \right\} ds ;$$

or, on a :

$$\frac{R}{U^2} = \frac{R^2}{RU^2} = \frac{U^2 + c^2}{RU^2} = \frac{1}{R} + \frac{c^2}{RU^2},$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -\rho \int \frac{\alpha'}{R}\, ds + \rho \int \left\{ \frac{(R^2 + c^2)(\xi' - a)}{RU^3}\, i' - \frac{c^2 \alpha'}{RU^2} \right\} ds.$$

Il est facile de s'assurer que la *seconde intégrale est nulle pour une courbe fermée quelconque.*

On a alors :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -\rho \int \frac{\alpha'}{R}\, ds\,;$$

de même :

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -\rho \int \frac{\beta'}{R}\, ds.$$

On voit immédiatement que ces deux expressions ne subissent aucune variation brusque lorsque le point P s'approche indéfiniment de la surface plane, ou qu'il la traverse ; elles sont donc applicables même quand le point P se trouve dans la surface.

178. Démontrons maintenant que la *seconde intégrale qui entre dans l'expression de* $\frac{\partial V}{\partial a}$ *est nulle pour une courbe fermée quelconque.*

Soit une courbe plane fermée : prenons son plan pour plan des xy, et soit P au point de l'espace, a, b, c ses coordonnées : menons par ce point une perpendiculaire PP' au plan de la courbe. Considérons un point quelconque de cette courbe, ξ', η' ses coordonnées, R sa distance au point P, U le rayon vecteur mené du point P' au point de la courbe. Par ce point et dans le plan de la courbe menons une normale vers l'extérieur, et soient α' le cosinus de l'angle que cette normale fait avec l'axe des x, i' le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le prolongement du rayon vecteur U, et ds un élément de la courbe au point considéré. Nous devons démontrer que l'on a :

$$\int\left(\frac{(\mathrm{R}^2+c^2)(\xi'-a)}{\mathrm{RU}^3}\,i'-\frac{c^2\alpha'}{\mathrm{RU}^2}\right)ds=0,$$

l'intégrale s'étendant à toute la courbe fermée.

Posons :

$$\mathrm{A}=\frac{(\mathrm{R}^2+c^2)(\xi'-a)}{\mathrm{RU}^3}\,i',$$

$$\mathrm{B}=\frac{c^2}{\mathrm{RU}^2}\,\alpha',$$

et nous aurons à démontrer que l'on a :

$$\int(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,ds=0.$$

Soient φ l'angle que le rayon vecteur U fait avec l'axe des x, $d\varphi$ l'élément d'angle correspondant à l'arc ds ; nous aurons :

$$i'ds=\pm\,\mathrm{U}d\varphi.$$

On prendra le signe + ou le signe −, si ds et $d\varphi$ sont tous les deux considérés comme positifs, selon que i' sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que le rayon U en croissant coupe le périmètre de l'intérieur vers l'extérieur, ou vice versa. Mais, si l'on admet qu'en parcourant la courbe dans un même sens, à partir d'un certain point, l'arc s aille toujours en croissant, le quotient différentiel $\frac{d\varphi}{ds}$ pourra être tantôt positif et tantôt négatif, et il changera de signe aux mêmes points de la courbe que le cosinus i'. Si donc on fait croître s dans un sens tel que le coefficient différentiel $\frac{d\varphi}{ds}$ ait en un point de la courbe le même signe que i', ces deux quantités auront le même signe en tous les points, et, par suite, on n'aura plus qu'à employer le signe + dans l'équation ci-dessus. Nous aurons donc :

$$i' = \mathrm{U}\,\frac{d\varphi}{ds}.$$

D'autre part, $\alpha' ds$ est l'accroissement $d\eta'$ que subit l'ordonnée η' d'un point mobile sur la courbe, lorsque le point parcourt l'élément ds de la courbe[1]. Mais, on a :

$$\eta' - b = \mathrm{U} \sin \varphi\,;$$

d'où :

$$d\eta' = d\,(\mathrm{U} \sin \varphi),$$

et, par suite,

$$\alpha' ds = \pm\, d\,(\mathrm{U} \sin \varphi).$$

---

1. α' qui est le cosinus de l'angle de la normale avec l'axe des x est égal au cosinus de l'angle de la tangente avec l'axe des y.

Quant au signe, on devra prendre le signe $+$, si l'arc s croît dans le même sens que précédemment. Nous aurons donc :

$$\alpha' = \frac{d\,(\mathrm{U} \sin \varphi)}{ds}.$$

D'autre part, on a aussi :

$$\xi' - a = \mathrm{U} \cos \varphi,$$

et il vient :

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}^2 + c^2}{\mathrm{RU}} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\mathrm{B} = \frac{c^2}{\mathrm{RU}^2} \frac{d\,(\mathrm{U} \sin \varphi)}{ds} = \frac{c^2}{\mathrm{RU}^2} \sin \varphi \frac{d\mathrm{U}}{ds} + \frac{c^2}{\mathrm{RU}} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{U}} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} - \frac{c^2}{\mathrm{RU}^2} \sin \varphi \frac{d\mathrm{U}}{ds}.$$

Cela posé, de la formule :

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{U}^2 + c^2},$$

on tire, en observant que c est indépendant de s,

$$\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}} \frac{d\mathrm{U}}{ds};$$

par suite,

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{U}}\right)}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}} \frac{d\mathrm{U}}{ds} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{U}^2} \frac{d\mathrm{U}}{ds} = \frac{\mathrm{U}^2 - \mathrm{R}^2}{\mathrm{U}^2\mathrm{R}} \frac{d\mathrm{U}}{ds} = -\frac{c^2}{\mathrm{RU}^2} \frac{d\mathrm{U}}{ds}.$$

On a donc :

$$A - B = \frac{R}{U}\frac{d\sin\varphi}{ds} + \sin\varphi\,\frac{d\left(\frac{R}{U}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds};$$

d'où :

$$\int (A - B)\,ds = \int \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds}\,ds$$

$$= \left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_1 - \left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_0,$$

en indiquant par les indices 0 et 1 les limites de l'intégrale. Si *la courbe est fermée*, le point initial et le point final coïncident; par suite, le second membre est nul, et l'on a :

$$\int \left\{ \frac{(R^2 + c^2)\,(\xi' - a)}{RU^2}\,i' - \frac{c^2}{RU^2}\,\alpha' \right\} ds = 0.$$

179. Remarque. — Nous avons obtenu les quotients différentiels de la fonction V par rapport à trois axes dont l'un est perpendiculaire au plan de la figure, et les deux autres situés dans ce plan.

On peut obtenir facilement le quotient différentiel de la fonction V par rapport à une direction quelconque. En effet, menons par le point P une droite quelconque sur laquelle nous supposerons ce point mobile, et soient l la distance du point P au point où cette droite rencontre le plan[1], et φ, ψ, θ les angles de l avec les axes.

---

1. Cette distance sera positive ou négative suivant que le point est d'un côté du plan ou de l'autre côté.

On trouve facilement :

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial a}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial b}\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial c}\cos\theta,$$

formule qui nous permet de déterminer le quotient différentiel $\frac{\partial V}{\partial l}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0} = &\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{-0}\right\}\cos\varphi \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{-0}\right\}\cos\psi \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{-0}\right\}\cos\theta.\end{aligned}$$

Or, on sait que $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$ ne subissent aucune variation brusque lorsque le point P traverse la surface ; par suite, les deux premières parenthèses sont nulles, et la troisième est égale à $-4\pi\rho$. On a donc pour une direction quelconque, faisant un angle θ avec la normale à la surface :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0} = -4\pi\rho\cos\theta.$$

180. Cherchons maintenant l'expression ΔV lorsque la masse est répandue sur une surface plane.

De la formule :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = -2\pi\rho\frac{c}{\sqrt{c^2}} + \rho c\int\frac{i^?}{RU}\,ds,$$

on tire, en observant que de chaque côté du plan la fonction $\frac{c}{\sqrt{c^2}}$ reste constante,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \rho \int \frac{i'}{RU}\, ds - \rho c^2 \int \frac{i'}{R^3 U}\, ds$$

$$= \rho \int \frac{(R^2 - c^2)}{R^3 U}\, i' ds = \rho \int \frac{U}{R^3}\, i' ds.$$

D'autre part, les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = - \rho \int \frac{\alpha'}{R}\, ds,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = - \rho \int \frac{\beta'}{R}\, ds,$$

nous donnent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = - \rho \int \frac{\alpha' (\xi' - a)}{R^3}\, ds,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = - \rho \int \frac{\beta' (\eta' - b)}{R^3}\, ds;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = - \rho \int \frac{(\xi' - a)\alpha' + (\eta' - b)\beta'}{R^3}\, ds = - \rho \int \frac{U}{R^3}\, i' ds,$$

et, par suite,

$$\Delta V = 0.$$

Formule de Green.

181. Désignons par U et V deux fonctions quelconques de x, y, z, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, et posons comme précédemment,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Considérons l'intégrale :

$$\int\int\int U \Delta V \, dx \, dy \, dz,$$

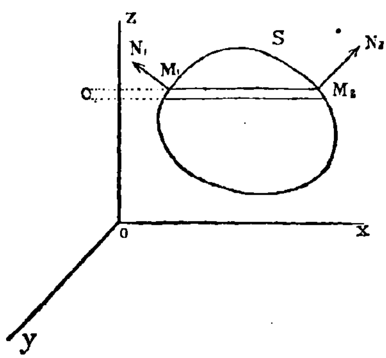


Fig. 41.

étendue au volume enveloppé par une surface fermée convexe S (fig. 41). Cette intégrale se compose de trois termes dont le premier est :

$$\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz = \int\int dy dz \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx.$$

Or, dans l'intégrale :

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, dx,$$

les coordonnées y et z restent constantes, et les limites de l'intégration sont les abscisses, x_1 et x_2 des points M_1, M_2, où une parallèle à l'axe des x rencontre la surface S.

En intégrant par parties, on a :

$$\int_{x_1}^{x_2} U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, dx = \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}\, dx;$$

par suite,

$$\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int\int \left\{ -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \right\} dy\, dz$$
$$- \int\int\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Le produit $dx\, dy\, dz$ représente un élément de volume dv, et le produit $dy\, dz$ un élément de surface $d\omega$ pris dans le plan des yz. Nous pourrons donc écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int \left\{ -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \right\} d\omega - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv.$$

Or, l'élément $d\omega$ est évidemment la projection sur le plan des yz de deux éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ de la surface S, situés aux deux points M_1 et M_2. Si nous désignons donc par α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 les cosinus directeurs des normales N_1 et N_2 à la surface aux points M_1 et M_2, ces normales étant menées vers l'extérieur, nous aurons :

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = \alpha_2 d\sigma_2;$$

par conséquent,

$$\int \left\{ -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \right\} d\omega = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} \alpha_1 d\sigma_1$$

$$+ \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \alpha_2 d\sigma_2.$$

Mais, le second membre de cette dernière formule n'est évidemment autre que l'intégrale :

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) \alpha d\sigma,$$

étendue à toute la surface S. On a donc :

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int \alpha U \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv;$$

de même,

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dv = \int \beta U \frac{\partial V}{\partial y} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} dv,$$

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dv = \int \gamma U \frac{\partial V}{\partial z} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} dv.$$

En ajoutant, il vient :

$$\int U\Delta V dv = \int U\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\sigma$$
$$-\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv.$$

Cela posé, si nous désignons par dn l'élément MM' de la normale à la surface S, menée par le point M (x, y, z) vers l'extérieur, et par dx, dy, dz les projections de cet élément sur les axes, nous aurons pour les cosinus directeurs de cette droite :

$$\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \beta = \frac{dy}{dn}, \quad \gamma = \frac{dz}{dn};$$

par conséquent,

$$\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial V}{\partial n};$$

d'où enfin :

$$\int U\Delta V dv = \int U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv.$$

Dans cette formule l'intégrale double doit être étendue à toute la surface S, et les intégrales triples au volume compris dans cette surface. C'est la *formule de Green.*

182. Si l'on permute U et V, et si l'on retranche, il vient :

$$\int (\mathrm{U}\Delta\mathrm{V} - \mathrm{V}\Delta\mathrm{U})\, dv = \int \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}\right) d\sigma,$$

les limites des intégrales étant déterminées comme précédemment.

183. Remarque. — Nous avons supposé la surface S convexe, mais cette restriction est inutile. En effet, quelle que soit la forme de la surface fermée, une parallèle à l'axe des x la rencontrera un nombre pair de fois, aux points M_1, M_2, M_3, . . . L'intégrale :

$$\int \mathrm{U}\,\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\, dx,$$

doit être prise d'abord de x_1 à x_2, puis de x_3 à x_4, etc. Nous aurons donc :

$$\int \mathrm{U}\,\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\, dx = -\left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_3}$$
$$+ \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_4} - \ldots - \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\, dx,$$

et, par suite, il vient :

$$\int \mathrm{U}\,\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\, dv = \int \left\{ -\left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_3}\right.$$
$$\left. + \left(\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)_{x_4} - \ldots \right\} d\omega - \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\, dv.$$

Or, on a :

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = \alpha_2 d\sigma_2 = -\alpha_3 d\sigma_3 = \ldots .$$

Par conséquent, le premier terme du second membre n'est autre que l'intégrale :

$$\int \mathrm{U} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \alpha d\sigma,$$

étendue à toute la surface S, la normale en chaque point étant dirigée vers l'extérieur du volume.

On conclut de là que la formule de Green est générale.

184. Supposons maintenant que V soit la fonction potentielle d'un corps, ou d'un système de corps, et supposons la fonction U égale à l'unité. La formule de Green nous donne :

$$\int \Delta \mathrm{V} \, dv = \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \, d\tau ;$$

or, V étant la fonction potentielle, on a, en général :

$$\Delta \mathrm{V} = -4\pi \rho_p,$$

ρ_p étant la densité du corps au point où se trouve l'élément attiré ; et, en remplaçant $\Delta \mathrm{V}$ par sa valeur, il vient :

$$-4\pi \int \rho_p \, dv = \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \, d\tau.$$

Mais, $\int \rho_p dv$ est la somme des masses agissantes comprises dans le volume considéré ; en la désignant par M, on a :

$$\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} \, d\tau = -4\pi \int \rho_p \, dv = -4\pi \mathrm{M}.$$

C'est la *formule de Gauss.*

L'intégrale du premier membre est étendue à toute la surface S.

185. Cette formule est applicable au cas où la masse attirée est extérieure pourvu que l'on regarde ρ_p comme nul en dehors de la masse M. On a alors :

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\tau = 0.$$

Théorèmes de M. Bertrand sur les forces centrales.

186. Il résulte des théorèmes que nous avons exposés (II, p. 172 et suiv.) que les orbites des planètes sont des courbes fermées dont le Soleil serait le foyer. C'est la cause principale de la stabilité du système solaire. Cette circonstance importante résulte de la loi d'attraction qui, quelles que soient les circonstances initiales, fait mouvoir chaque corps céleste, qui n'est pas expulsé de notre système, suivant la circonférence d'une ellipse. M. Bertrand a reconnu le premier que la *loi d'attraction newtonienne* est *la seule* qui remplisse cette condition, c'est-à-dire la seule qui donne des orbites fermées. Il a, en effet, démontré le théorème suivant [1]:

THÉORÈME. — *Parmi les lois d'attraction décroissant avec la distance,* c'est-à-dire *qui supposent l'action nulle*

1. Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences, t. LXXVII, 1873, p. 849.

à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un corps attiré vers un centre fixe, et lancé dans une direction arbitraire avec une vitesse inférieure à une certaine limite, décrira certainement autour de ce centre une courbe fermée.

Toutes les lois d'attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de Newton est la seule qui les *impose*.

Désignons par r la distance du corps au centre d'attraction, que nous prendrons pour origine des coordonnées, par θ l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe polaire, et par $\varphi(r)$ l'attraction exercée par le centre sur le point. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi(r) \cdot \frac{y}{r}.$$

On en tire (II, n° **119**) :

$$\varphi(r) = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

En posant :

$$\frac{1}{r} = z, \qquad r^2\varphi(r) = \psi(z),$$

on obtient pour l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{c^2}\psi(z) = 0.$$

Multiplions les deux membres par $2dz$, et intégrons, en posant :

$$2\int \psi(z)\, dz = \varpi(z),$$

nous aurons :

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{c^2}\varpi(z) - h = 0,$$

h étant une constante arbitraire.

Cette dernière équation nous donne :

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{c^2}\varpi(z) - z^2}}. \qquad (1)$$

C'est l'*équation de la trajectoire.*

187. Si la courbe représentée par cette équation est une *courbe fermée*, la valeur de z, ou celle de r, aura nécessairement des maximums et des minimums pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul. Les rayons vecteurs correspondants sont normaux à la trajectoire[1]; de plus, ils sont des axes de symétrie de cette orbite. En effet, si l'on fait varier r ou z à partir de l'une de ces valeurs, et si l'on compte l'angle θ à partir du rayon correspondant à cette valeur, la formule (1) donnera pour θ deux valeurs égales et de signes contraires; par conséquent, ce rayon vecteur est un axe de symétrie. Or, quand une courbe admet deux axes de symétrie, en pliant la figure autour de l'un

1. En effet, si l'on a $\frac{dz}{d\theta} = 0$, il en résulte $\frac{dr}{d\theta} = 0$, et, par suite, $\operatorname{tg} V = \infty$, V étant l'angle du rayon vecteur avec la tangente.

de ces axes on obtient, par le rabattement du second, un troisième axe. Mais, si l'angle que font les deux premiers axes n'est pas commensurable avec deux angles droits, en pliant successivement la figure autour de chaque axe, on en obtiendra une infinité. Or, cela ne peut avoir lieu pour aucune courbe fermée autre que le cercle. Il s'ensuit que, quand une courbe admet deux axes de symétrie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fermée, est que l'angle de ces axes soit commensurable avec π. Si donc α et β représentent un minimum de z, et le maximum qui le suit, nous aurons l'équation :

$$m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{c^2}\varpi(z) - z^2}}, \tag{2}$$

où m désigne un nombre commensurable.

Cette équation doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs de h et c; or, puisque, pour $z = \alpha$, et $z = \beta$, on on a $\frac{dz}{d\theta} = 0$, nous aurons :

$$h + \frac{1}{c^2}\varpi(\alpha) - \alpha^2 = 0,$$

$$h + \frac{1}{c^2}\varpi(\beta) - \beta^2 = 0.$$

De ces équations on tire :

$$h = \frac{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

et, en remplaçant h et c par leurs valeurs dans l'équation (2), il vient :

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\,.\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2\{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)\}}}. \quad (3)$$

La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de h et c, et, par suite, de α et de β, et pour toute valeur de z intermédiaire. Le nombre commensurable m doit être constant d'une orbite à l'autre; car, s'il changeait d'une orbite à l'autre, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans la disposition des axes de symétrie de la trajectoire.

188. Pour déterminer la fonction ϖ, nous supposerons un cas particulier, celui où α et β sont infiniment peu différents, et nous poserons :

$$\beta = \alpha + u,$$

u étant un infiniment petit. Comme z reste compris entre α et β, nous aurons aussi :

$$z = \alpha + y,$$

y étant un infiniment petit comme u.

Nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre au numérateur de l'intégrale (3) :

$$\varpi(\beta) - \varpi(\alpha) = u\,\varpi'(\alpha);$$

d'autre part, dans l'expression placée sous le radical au dénominateur, les infiniment petits du premier ordre se détruisent, ainsi que ceux du second ordre. Si donc nous conservons les infiniment petits du troisième ordre, et si nous négligeons ceux du quatrième ordre et les suivants, nous trouvons que la quantité sous le radical au dénominateur se réduit à la suivante :

$$\left\{ \varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha) \right\} (u^2 y - u y^2).$$

En effet, on a, par la formule de Taylor :

$$\alpha^2 \varpi(\beta) - \beta^2 \varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2 \left\{ \varpi(\beta) - \varpi(\alpha) \right\}$$

$$= \alpha^2 \left\{ \varpi(\alpha) - u\varpi'(\alpha) + \frac{u^2}{1.2}\varpi''(\alpha) + \frac{u^3}{1.2.3}\varpi''(\alpha) \right\}$$

$$- (\alpha^2 + u^2 + 2\alpha u)\varpi(\alpha) + (u^2 + 2\alpha u)\left\{ \varpi(\alpha) + y\varpi'(\alpha) + \frac{y^2}{1.2}\varpi''(\alpha) \right\}$$

$$- (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)\left\{ u\varpi'(\alpha) + \frac{u^2}{1.2}\varpi''(\alpha) + \frac{u^3}{1.2.3}\varpi''(\alpha) \right\}$$

$$= (u^2 + 2\alpha u)\left\{ y\varpi'(\alpha) + \frac{y^2}{1.2}\varpi''(\alpha) \right\} - (2\alpha y + y^2)\left\{ u\varpi'(\alpha) + \frac{u^2}{1.2}\varpi''(\alpha) \right\}$$

$$= \left\{ \varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha) \right\} (u^2 y - u y^2).$$

D'ailleurs, de l'équation $z = \alpha + y$, on tire : $dz = dy$; quant aux limites de y, on a : $y = 0$, pour $z = \alpha$, et $y = u$, pour $z = \beta$.

Par suite, l'équation (3) devient :

$$m\pi = \int_0^u \frac{dy \sqrt{\varpi'(\alpha)}}{\sqrt{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)} \sqrt{uy - y^2}},$$

ou bien :

$$\sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}} \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}},$$

Mais, on a :

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \pi;$$

par conséquent,

$$m = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}},$$

ou bien :

$$(1 - m^2)\,\varpi'(\alpha) + m^2\alpha\varpi''(\alpha) = 0.$$

On tire de là :

$$\frac{\varpi''(\alpha)}{\varpi'(\alpha)} = \frac{m^2 - 1}{m^2\alpha},$$

et, en intégrant,

$$\varpi'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{\frac{1}{m^2} - 1}} = A\alpha^{1 - \frac{1}{m^2}},$$

$$\varpi(\alpha) = \frac{A}{2 - \frac{1}{m^2}}\alpha^{2 - \frac{1}{m^2}} + B,$$

A et B étant des constantes arbitraires.

On en déduit successivement, d'après les relations ci-dessus :

17

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\varpi'(z) = \frac{A}{2} z^{1-\frac{1}{m^2}},$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^2}\psi(z) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{A}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{1}{m^2}},$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{2} r^{\frac{1}{m^2}-3}$$

Cette dernière formule exprime la seule loi d'attraction possible.

189. Mais, m n'est pas un nombre commensurable quelconque. Pour le déterminer, nous observerons que l'équation (3) doit avoir lieu pour des valeurs quelconques de α et β; par conséquent, on doit avoir pour toutes les valeurs de α et β :

$$m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \alpha^{2-\frac{1}{m^2}}}}{\sqrt{\alpha^2\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \beta^2\alpha^{2-\frac{1}{m^2}} + (\beta^2-\alpha^2)z^{2-\frac{1}{m^2}} - z^2\left(\beta^{2-\frac{1}{m^2}} - \alpha^{2-\frac{1}{m^2}}\right)}}. \quad (*) \qquad (4)$$

Cette équation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de α et β, nous pourrons donner à α et β des valeurs particulières.

Supposons d'abord $2 - \frac{1}{m^2}$ positif, et posons $\alpha = 0$, β restant quelconque. L'équation (4) devient alors :

(*) La constante B disparaît dans les substitutions.

$$m\pi = \int_0^\beta \frac{dz\sqrt{\beta^{2-\frac{1}{m^2}}}}{\sqrt{\beta^2 z^{2-\frac{1}{m^2}} - z^2\beta^{2-\frac{1}{m^2}}}} = \int_0^\beta \frac{dz}{\sqrt{\beta^{\frac{1}{m^2}} z^{2-\frac{1}{m^2}} - z^2}}$$

$$= \int_0^\beta \frac{z^{\frac{1}{2m^2}-1}}{\sqrt{\beta^{\frac{1}{m^2}} - z^{\frac{1}{m^2}}}} dz.$$

Or, si l'on pose :

$$z^{\frac{1}{m^2}} = u^2\beta^{\frac{1}{m^2}},$$

on trouve :

$$m\pi = 2m^2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = m^2\pi,$$

et, par suite,

$$m = 1.$$

On en conclut :

$$\varphi(r) = \frac{A}{2r^2},$$

et *l'attraction a lieu en raison inverse du carré de la distance.*

Supposons ensuite $2 - \frac{1}{m^2}$ négatif, ou bien $\frac{1}{m^2} - 2$ positif, et écrivons l'équation (4) sous la forme suivante :

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{\beta^2}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}} + (\beta^2-\alpha^2)\dfrac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2\left(\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}\right)}}$$

ou bien :

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2} - \beta^{\frac{1}{m^2}-2}}}{\sqrt{\alpha^{\frac{1}{m^2}} - \beta^{\frac{1}{m^2}} + (\beta^2-\alpha^2)\dfrac{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}\beta^{\frac{1}{m^2}-2}}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2\left(\alpha^{\frac{1}{m^2}-2} - \beta^{\frac{1}{m^2}-2}\right)}}.$$

Posons $\beta = 0$, en laissant α quelconque, et nous aurons :

$$m\pi = \int_{0}^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2};$$

donc, $m = \dfrac{1}{2}$ en valeur absolue, et il vient :

$$\varphi(r) = \frac{A}{2}r.$$

Par conséquent, dans cette hypothèse, l'*attraction est proportionnelle à la distance.*

Ainsi donc, dans le mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance, il existe seulement deux lois d'attraction pour lesquelles la trajectoire soit une courbe fermée : la loi de Newton, et celle pour laquelle la force est proportionnelle à la distance. La loi de la nature est donc la *seule loi d'attraction décroissant avec la distance*, pour laquelle la trajectoire soit une courbe fermée.

190. Il est facile de s'assurer que, dans le premier cas, l'orbite fermée n'a qu'un axe de symétrie passant par le centre d'action; dans le second cas, elle a deux axes de symétrie passant par le centre d'action.

Pour démontrer cette dernière propriété, calculons $\frac{dz}{d\theta}$ dans les deux hypothèses.

Dans le premier cas, on a $m = 1$, $\alpha = 0$; par suite,

$$h = -\frac{\beta^2 \varpi(o)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}$$

Or, on a :

$$\varpi(o) = \mathrm{B}, \quad \varpi(\beta) - \varpi(o) = \frac{\mathrm{A}}{2 - \frac{1}{m^2}} \beta^{2 - \frac{1}{m^2}};$$

d'où :

$$h = -\frac{\beta^2 \mathrm{B}\left(2 - \frac{1}{m^2}\right)}{\mathrm{A}\beta^{2 - \frac{1}{m^2}}},$$

et, pour $m = 1$,

$$h = -\frac{\beta^2 \mathrm{B}}{\mathrm{A}\beta} = -\frac{\mathrm{B}\beta}{\mathrm{A}};$$

de même, on trouve :

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\beta^2}{\varpi(\beta) - \varpi(o)} = \frac{\beta^2\left(2 - \frac{1}{m^2}\right)}{\mathrm{A}\beta^{2 - \frac{1}{m^2}}} = \frac{\beta}{\mathrm{A}}.$$

D'autre part,

$$\varpi(z) = \frac{A}{2-\frac{1}{m^2}} z^{2-\frac{1}{m^2}} + B = Az + B,$$

et l'équation (1) devient :

$$\frac{dz}{d\theta} = \sqrt{-\frac{B\beta}{A} + \frac{\beta}{A}(Az + B) - z^2} = \sqrt{\beta z - z^2}.$$

Par conséquent, l'équation $\frac{dz}{d\theta} = 0$, nous donne :

$$\beta z - z^2 = 0,$$

ou bien :

$$z = 0,\ z = \beta;$$

d'où :

$$r = \infty, \text{ et } r = \frac{1}{\beta}.$$

Il en résulte que la *courbe n'a qu'un axe de symétrie passant par le centre d'action.*

Dans le second cas, on a $\beta = 0$, $m = \frac{1}{2}$; par suite,

$$h = \frac{\alpha^2 \varpi(o)}{\varpi(o) - \varpi(\alpha)} = \frac{2\alpha^4 B}{A},$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha^2}{\varpi(o) - \varpi(\alpha)} = -\frac{2\alpha^4}{A},$$

$$\varpi(z) = -\frac{A}{2z^2} + B.$$

On a donc :

$$\frac{dz}{d\theta} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{z^2} - z^2},$$

et l'équation $\frac{dz}{d\theta} = 0$, nous donne :

$$z^4 - \alpha^4 = 0,$$

ou bien :

$$z^2 - \alpha^2 = 0; \quad \text{d'où : } z = \pm \alpha;$$

par suite,

$$r = \frac{1}{\alpha}, \text{ et } r = -\frac{1}{\alpha},$$

et, par conséquent, il y a *deux axes de symétrie passant par le centre d'action.*

Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Képler le principe de l'attraction.

191. Les mouvements de révolution des planètes autour du soleil sont soumis à trois lois que Képler a déduites de l'observation. Ces lois qui s'appellent les *lois de Képler*, et qui ont conduit Newton à la découverte de la gravitation universelle, sont les suivantes :

1re Loi. — *Les trajectoires des planètes sont des sections coniques, dont le soleil occupe un des foyers.*

2e Loi. — *Les aires décrites par les rayons vecteurs des planètes dans leurs mouvements autour du soleil sont proportionnelles aux temps.*

3e Loi. — *Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Nous avons établi ces lois (II, n° 123) en partant de la loi de l'attraction. Pour démontrer la troisième (II, n° 129), nous avons dû négliger les masses des planètes comparées à celle du soleil. Il en résulte que cette troisième loi n'est qu'approximative.

M. Bertrand, dans une suite de communications faites à l'Académie des sciences de Paris, en 1877, disait[1] : « Si Kléper n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois : *Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe le foyer,* on aurait pu, de ce seul résultat érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le soleil, et inversement proportionnelle au carré de la distance. »

Il ajoutait : « Il serait intéressant de résoudre la question suivante : *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques, et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, exprimées en fonction des coordonnées de son point d'application.* »

M. Bertrand indiquait un moyen de simplifier les calculs[2], et M. Darboux[3] résolut le problème, en profitant de la simplification indiquée par M. Bertrand.

Cependant, M. Imschenetsky a traité la question d'une manière générale dans un remarquable travail, publié dans les Mémoires de la Société mathématique de Kharkoff, et que je crois intéressant de faire con-

---

1. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences,* 1877, t. 84, p. 671.

2. *Comptes rendus*, 1877, p. 731.

3. *Comptes rendus*, 1877, pages 760 et 936.

naître, en y introduisant quelques modifications [1].

192. En désignant par X, Y, les composantes de la force qui sollicite la planète, les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = \mathrm{X},$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = \mathrm{Y}. \qquad (1)$$

Le problème proposé consiste à déterminer X, Y, en fonction de x, y, de manière que l'équation de la trajectoire soit de la forme :

$$\mathrm{A}y^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2 + 2\mathrm{D}y + 2\mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0. \qquad (2)$$

Pour résoudre la question, observons que l'équation (2) peut être mise sous la forme suivante :

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = (ax + by + c)^2, \qquad (3)$$

en posant :

$$a = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{F}}}, \quad b = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{F}}}, \quad c = \sqrt{\mathrm{F}},$$

$$p = \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}} - \mathrm{C}, \quad q = \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}} - \mathrm{A}, \quad r = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{F}} - \mathrm{B}.$$

---

1. *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2e série, t. IX.

Le travail de M. Imschenetsky a été traduit plus tard par M. Houël. (*Mémoires de la Société des sciences de Bordeaux*, 2e série, t. IV.)

Posant ensuite :

$$u^2 = px^2 + qy^2 + 2rxy,$$

l'équation (3) prend la forme :

$$u = ax + by + c, \qquad (4)$$

et il s'agit de déterminer X, Y, de manière que l'équation (4) soit une intégrale des équations (1), a, b, c, étant des constantes.

A cet effet, nous allons effectuer les calculs nécessaires pour vérifier que l'équation (4) est une intégrale finie du système (1), c'est-à-dire que nous allons éliminer les constantes a, b, c.

En différentiant (4) deux fois de suite par rapport à t, en ayant égard aux équations (1), il vient :

$$ax' + by' = \frac{(px + ry)\,x' + (rx + qy)y'}{u}, \qquad (5)$$

$$aX + bY = \frac{(px + ry)X + (rx + qy)Y}{u}$$

$$+ \frac{[(px' + ry')x' + (rx' + qy')y']\,[(px + ry)x + (rx + qy)y]}{u^3}$$

$$- \frac{[(px + ry)x' + (rx + qy)y']^2}{u^3}. \qquad (6)$$

Or, le coefficient de $\frac{1}{u^3}$ dans cette dernière équation peut se simplifier. En effet, ce coefficient peut-être mis sous la forme d'un déterminant, et il nous donne successivement :

$$\begin{vmatrix} (px+ry)x+(rx+qy)y & (px+ry)x'+(rx+qy)y' \\ (px+ry)x'+(rx+qy)y' & (px'+ry')x'+(rx'+qy')y' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} px+ry & rx+qy \\ px'+ry' & rx'+qy' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & r \\ r & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2$$

$$= (pq - r^2)(xy' - yx')^2.$$

Par suite, l'équation (6) devient :

$$aX + bY = \frac{(px+ry)X + (rx+qy)Y}{u} + \frac{(pq-r^2)(xy'-yx')^2}{u^3}. \quad (7)$$

Des équations (5) et (7) on tire :

$$a = \frac{px+ry}{u} + \frac{(pq-r^2)y'(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}, \quad (8)$$

$$b = \frac{rx+qy}{u} - \frac{(pq-r^2)x'(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}. \quad (9)$$

Ces deux équations (8) et (9) sont des intégrales premières des équations (1).

Pour éliminer définitivement les constantes, il suffit de différentier l'une des deux équations (8) et (9), par exemple la première, par rapport à t, en ayant égard aux équations (1), et à l'équation :

$$u^2 = px^2 + qy^2 + 2rxy,$$

et nous aurons :

$$0 = \frac{px'+ry'}{u} - (px+ry)\frac{(px+ry)x' + (rx+qy)y'}{u^3}$$

$$+\frac{(pq-r^2)(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}\left\{\begin{array}{l} Y-3y'\dfrac{(px+ry)x'+(rx+qy)y'}{u^2} \\ -y'\dfrac{y'\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}x'+\dfrac{\partial X}{\partial y}y'\right)-x'\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}x'+\dfrac{\partial Y}{\partial y}y\right)}{Xy'-Yx'} \end{array}\right\}$$

$$+2\frac{(pq-r^2)y'(xy'-yx')}{u^3(Xy'-Yx')}(Yx-Xy).$$

Or, les deux premiers termes de cette équation nous donnent successivement :

$$\frac{u^2(px'+ry')-(px+ry)\{(px+ry)x'+(rx+qy)y'\}}{u^3}$$

$$=\frac{(px'+ry')\{(px+ry)x+(rx+qy)y\}}{u^3}$$

$$-\frac{(px+ry)\{(px+ry)x'+(rx+qy)y'\}}{u^3}$$

$$=\frac{1}{u^3}\begin{vmatrix}(px+ry)x+(rx+qy)y & px+ry \\ (px'+ry')x+(rx'+qy')y & px'+ry'\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{u^3}\begin{vmatrix}px+ry & rx+qy \\ px'+ry' & rx'+qy'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x & y \\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix}px+ry & rx+qy \\ px'+ry' & rx'+qy'\end{vmatrix}=-\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix}p & r \\ r & q\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x & y \\ x' & y'\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{y}{u^3}(pq-r^2)(xy'-yx').$$

Il s'ensuit que tous les termes de l'équation précédente contiendront le facteur commun :

$$\frac{(pq - r^2)(xy' - yx')}{u^5},$$

et, en supprimant ce facteur, il vient :

$$0 = -y + \frac{xy' - yx'}{Xy' - Yx'} \left\{ \begin{array}{l} Y - 3y' \dfrac{(px + ry)x' + (rx + qy)y'}{u^2} \\ -y' \dfrac{y'\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}x' + \dfrac{\partial X}{\partial y}y'\right) - x'\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}x' + \dfrac{\partial Y}{\partial y}y'\right)}{Xy' - Yx'} \end{array} \right\}$$
$$+ \frac{2y'(Yx - Xy)}{Xy' - Yx'}. \qquad (10)$$

Cette dernière équation, qui est la conséquence des équations (1), ne renferme pas de constante arbitraire. Par conséquent, si les expressions cherchées de X, Y, en fonction de x, y, étaient connues, cette équation devrait être une identité. Or, pour que cette équation (10) soit une identité, quelles que soient X, Y, lesquelles sont indépendantes de x', y', il faut que le binôme $Xy' - Yx'$ soit un diviseur de $xy' - yx'$. Pour le démontrer, supposons $x = x'$, $y = y'$; le terme du milieu est nul, et les deux autres nous donnent $-3y = 0$, équation évidemment absurde. Cette absurdité ne se présenterait pas, si le terme du milieu de l'équation (10) ne devenait pas nul pour $x = x'$, $y = y'$, c'est-à-dire si X et Y étaient tels que le facteur $xy' - yx'$ se réduisît avec son dénominateur $Xy' - Yx'$. Il faut donc que $Xy' - Yx'$ soit divisible par $xy' - yx'$.

Il en résulte que l'on doit avoir :

$$X = Vx, \qquad (11)$$

$$Y = Vy,$$

V étant une nouvelle fonction inconnue de x, y.

On en tire :

$$Xy - Yx = 0;$$

par conséquent, *la force passe par l'origine des coordonnées.*

En remplaçant dans l'équation (10) X et Y par ces valeurs (11), on trouve l'équation :

$$x'\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{3V}{u^2}\left\{x'(px+ry) + y'(rx+qy)\right\}.$$

Si la fonction V était connue, cette équation serait une identité; elle servira donc à déterminer V. Or, cette équation à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue V, est une équation différentielle partielle linéaire du premier ordre.

Pour l'intégrer, nous poserons les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dV}{-\frac{3V}{u^2}\left\{x'(px+ry) + y'(rx+qy)\right\}}.$$

On en tire :

$$\frac{(px+ry)dx + (rx+qy)dy}{x'(px+ry) + y'(rx+qy)} = -\frac{dV}{\frac{3V}{u^2}\left\{x'(px+ry)+y'(rx+qy)\right\}},$$

ou bien :

$$(px+ry)dx + (rx+qy)dy = -\frac{dV}{\frac{3V}{u^2}},$$

ou bien encore :

$$udu = -\frac{dV}{\frac{3V}{u^2}}.$$

On en tire :

$$\frac{du}{u} + \frac{dV}{3V} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$3l.u + l.V = l.\mu,$$

et, par suite,

$$V = \frac{\mu}{u^3}.$$

On a donc :

$$V = \frac{\mu}{(px^2 + qy^2 + 2rxy)^{\frac{3}{2}}},$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{\mu y}{(px^2 + qy^2 + 2rxy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu x}{u^3},$$

$$Y = \frac{\mu y}{(px^2 + qy^2 + 2rxy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu y}{u^3}.$$

Ce sont les composantes d'une force

$$F = \frac{\mu \sqrt{x^2 + y^2}}{(px^2 + qy^2 + 2rxy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu R}{u^3}, \qquad (12)$$

en désignant par R la distance du point à l'origine.

Si l'on désigne par θ l'angle que le rayon R fait avec l'axe des x, il vient :

$$F = \frac{1}{\left[\frac{1}{2}(p-q)\cos 2\theta + r\sin 2\theta + \frac{1}{2}(p+q)\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\mu}{R^2}.$$

Ainsi donc, du seul fait qu'un point matériel libre décrit une section conique, et, en supposant que la force accélératrice ne varie qu'avec la position du point, on conclut :

1° Que la direction de la force passe toujours par un centre fixe, qui peut être un point quelconque du plan de cette section conique;

2° Que l'intensité de la force F varie, non seulement avec la distance R du centre au point mobile, mais aussi avec la direction du rayon vecteur.

193. Il nous reste à voir comment, de cette solution générale, on peut déduire les deux cas particuliers connus, où le centre d'action est au centre de la conique, ou au foyer, ce qui rend l'*intensité de la force indépendante de sa direction,* et, dans le premier cas, proportionnelle au rayon vecteur; dans le second cas, inversement proportionnelle au carré de ce rayon.

1° Si nous supposons le centre d'action au centre de la conique, et si nous transportons l'origine en ce point, nous aurons :

$$D = 0,\ E = 0;$$

par suite, $a = 0$, $b = 0$, et, par conséquent, l'on a, pour l'équation de la conique :

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = c^2.$$

L'équation (12) nous donne alors :

$$F = \frac{\mu R}{c^3},$$

c'est-à-dire que l'*intensité de la force ne dépend pas de sa direction, et est proportionnelle au rayon vecteur*.

2° Si nous supposons le centre d'action au foyer, et si nous prenons ce foyer pour origine, alors le rayon vecteur R, mené de ce centre à un point de la courbe, est une fonction du premier degré des coordonnées du point, et l'équation de la courbe est :

$$R = ax + by + c.$$

On a donc alors :

$$u = R,$$

et, par suite, l'équation (12) nous donne :

$$F = \frac{\mu}{R^2},$$

c'est-à-dire que l'*intensité de la force est indépendante de sa direction, et varie en raison inverse du carré du rayon vecteur*.

Théorème de M. Villarceau. — Théorème de M. Clausius. — Théorème de Lipschitz.

194. Le théorème que nous allons démontrer et qui est dû à M. Yvon Villarceau [1] a des liens très étroits avec le théorème des forces vives. Il se rapporte à une fonction analogue à la fonction de force.

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 juillet 1872, p. 232.

Les équations du mouvement d'un point matériel libre étant :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

on en tire :

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) = Xx + Yy + Zz. \qquad (2)$$

Or, on a :

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)$$
$$- \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right).$$

En désignant par r la distance du point à l'origine, et par v sa vitesse, on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = v^2;$$

par suite,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{dr}{dt}\right) - v^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - v^2.$$

L'équation (2) nous donne donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2} - mv^2 = Xx + Yy + Zz;$$

d'où l'on tire :

$$mv^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2} - (Xx + Yy + Zz). \qquad (3)$$

Si le point m fait partie d'un système matériel, on aura, en faisant la somme des équations analogues que l'on obtiendrait pour chacun des points du système, supposés rendus libres :

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} - \Sigma(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i). \qquad (4)$$

Il faut bien remarquer que dans X_i, Y_i, Z_i sont comprises non seulement les forces extérieures, mais aussi les composantes des attractions mutuelles des différents points du système (actions moléculaires, etc.), puisque, pour établir l'équation (4), nous avons dû rendre libres tous les points du système.

Cette équation (4) qui constitue le théorème de M. Villarceau se distingue du théorème des forces vives en ce qu'elle fait connaître la *force vive du système à un instant donné,* et non la variation de la force vive entre deux positions du système.

195. Si nous séparons dans le second membre de l'équation (4) la partie relative aux actions mutuelles, nous pourrons mettre cette équation sous une autre forme. Soient ρ la distance des deux points m et m', et fmm' la *force,* supposée *attractive,* que ces deux masses exercent l'une sur l'autre (si la force est *répulsive,* f sera négative). Nous aurons, pour les parties relatives aux actions mutuelles :

1° pour le point m :

$$Xx = fmm'.\frac{x' - x}{\rho}x;$$

2° pour le point m' :

$$X'x' = -fmm'.\frac{x'-x}{\rho}x';$$

par conséquent,

$$Xx + X'x' = -fmm'\frac{x-x'}{\rho}(x-x') = -fmm'.\frac{(x-x')^2}{\rho}.$$

On obtiendrait des résultats analogues pour les deux autres axes; donc, l'action mutuelle des points m et m' donne dans l'équation (4) le terme :

$$-\frac{fmm'}{\rho}\left\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right\} = -fmm'\rho.$$

Il s'ensuit que, si nous ne désignons plus par X_i, Y_i, Z que les *composantes des forces extérieures* seulement, nous aurons :

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i r_i^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'} - \Sigma(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i), \quad (5)$$

$r_{i,i'}$ étant la distance $m_i m_{i'}$.

Or, l'expression $X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i$ peut être mise sous une autre forme. En effet, on a facilement :

$$X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i = P_i r_i \cos(P_i r_i),$$

et, par conséquent,

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i r_i^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'} - \Sigma P_i r_i \cos(P_i, r_i). \quad (6)$$

196. Pour trouver la signification du terme $\Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}$ imaginons que toutes les masses m_i soient transportées en un même point O de l'espace, et que dans ce transport leurs actions mutuelles conservent des valeurs *constantes*, et égales à celles qui ont lieu effectivement dans la situation réelle du système. Le terme $\Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}$ représentera *le travail dû aux actions mutuelles à la suite de cette transformation.*

En effet, considérons deux points m et m' (fig. 42); le travail de la force fmm' appliquée en m (action de m' sur m), lorsque son point d'application se déplace de mO, sera :

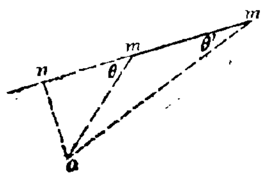


Fig. 42.

$$-fmm'.mn = -fmm'.Om\cos\theta$$

$$= -fmm'r\left\{\frac{x}{r}.\frac{x'-x}{\rho}+\frac{y}{r}.\frac{y'-y}{\rho}+\frac{z}{r}.\frac{z'-z}{\rho}\right\}$$

$$= -fmm'\frac{x(x'-x)+y(y'-y)+z(z'-z)}{\rho};$$

de même, le travail de la force fmm' (action de m sur m') appliquée en m', lorsque son point d'application se déplace de $m'O$, sera :

$$fmm'.m'n = fmm'.Om'\cos\theta'$$

$$= fmm'r'\left\{\frac{x'}{r'}.\frac{x'-x}{\rho}+\frac{y'}{r'}.\frac{y'-y}{\rho}+\frac{z'}{r'}.\frac{z'-z}{\rho}\right\}$$

$$= fmm'\frac{x'(x'-x)+y'(y'-y)+z'(z'-z)}{\rho}.$$

La somme des travaux de ces deux forces sera donc :

$$fmm'\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}{\rho} = fmm'\rho.$$

D'autre part, si l'on observe que l'angle (P_i, r_i) est le supplément de l'angle que fait la direction de P_i avec la droite qui va du point m_i à l'origine (fig. 43), on voit facilement que le terme :

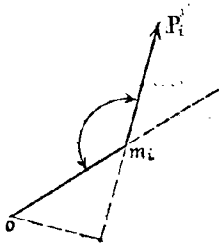


Fig. 43.

$$-\Sigma P_i r_i \cdot \cos(P_i, r_i),$$

représente le travail qui serait développé si toutes les masses m_i étaient transportées à l'origine, et si, dans ce transport, les directions des forces P_i restant constantes, leurs intensités restaient aussi constantes.

197. REMARQUE. — Si le système n'est sollicité que par des forces intérieures (actions mutuelles), nous aurons :

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}.$$

198. Il est facile de s'assurer que le *théorème de M. Villarceau subsiste lorsque l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité du système, les axes conservant une direction constante.*

Nous allons d'abord démontrer que l'*équation* (5) *s'applique au mouvement du centre de gravité.*

A cet effet, multiplions les équations (1), respectivement par les coordonnées du centre de gravité que nous désignerons par A, B, C, et ajoutons; il vient :

$$A\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + B\Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + C\Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i.$$

Or, à cause des relations (I, n° **323**) :

$$MA = \Sigma m_i x_i,$$

$$MB = \Sigma m_i y_i,$$

$$MC = \Sigma m_i z_i,$$

on a :

$$M\left\{A\frac{d^2A}{dt^2} + B\frac{d^2B}{dt^2} + C\frac{d^2C}{dt^2}\right\} = A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i.$$

Mais, on trouve facilement :

$$A\frac{d^2A}{dt^2} + B\frac{d^2B}{dt^2} + C\frac{d^2C}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(A\frac{dA}{dt} + B\frac{dB}{dt} + C\frac{dC}{dt}\right)$$
$$-\left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\};$$

par suite, en désignant par V la vitesse du centre de gravité et par r_1 sa distance à l'origine :

$$A\frac{d^2A}{dt^2} + B\frac{d^2B}{dt^2} + C\frac{d^2C}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r_1\frac{dr_1}{dt}\right) - V^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2(r_1^2)}{dt^2} - V^2.$$

On obtient donc finalement l'équation :

$$MV^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2Mr_1^2}{dt^2} - (A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i), \quad (7)$$

et l'on voit, par conséquent, que l'*équation* (5) *s'applique au mouvement du centre de gravité où toute la masse serait concentrée, et les forces transportées parallèlement à elles-mêmes.*

Il faut observer ici que les composantes des actions mutuelles disparaissent dans cette formule (7), comme égales et de sens contraires deux à deux. Par conséquent, l'équation (7) ne renferme pas le terme

$$\Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}.$$

Cette équation (7) sera applicable aux questions astronomiques où l'on considère les mouvements des centres de gravité des systèmes.

199. Démontrons maintenant que l'équation (5) a lieu aussi dans le mouvement relatif du système par rapport à son centre de gravité. A cet effet, désignons par ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées de m_i par rapport à trois axes parallèles aux premiers et passant par le centre de gravité, par u_i la vitesse de m_i relative au centre de gravité, par ρ_i la distance de m_i au centre de gravité; le théorème de Kœnig (II, n° **207**) nous donne :

$$\Sigma m_i v_i^2 = \mathrm{MV}^2 + \Sigma m_i u_i^2.$$

D'ailleurs, on a aussi (I, n° **327**) :

$$\Sigma m_i r_i^2 = \mathrm{M} r_1^2 + \Sigma m_i \rho_i^2.$$

Substituant dans l'équation (5), il vient :

$$\mathrm{MV}^2 + \Sigma m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i \rho_i^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2 \mathrm{M} r_1^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'}$$

$$- \Sigma(\mathrm{X}_i \xi_i + \mathrm{Y}_i \eta_i + \mathrm{Z}_i \zeta_i) - (\mathrm{A}\Sigma\mathrm{X}_i + \mathrm{B}\Sigma\mathrm{Y}_i + \mathrm{C}\Sigma\mathrm{Z}_i);$$

d'où, en retranchant l'équation (7),

$$\Sigma m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i \rho_i^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'} - \Sigma(\mathrm{X}_i \xi_i + \mathrm{Y}_i \eta_i + \mathrm{Z}_i \zeta_i). \quad (8)$$

Cette dernière formule est identique à (5), et l'on voit par là que cette équation (5) convient non seulement au cas de trois axes fixes dans l'espace, mais aussi au cas d'axes mobiles de direction constante menés par le centre de gravité.

Le théorème de M. Villarceau a donc ce point de commun avec le théorème des aires et celui des forces vives.

200. Remarque. — L'équation (7) qui se rapporte au mouvement du centre de gravité peut être mise sous une forme très utile dans la solution de certaines questions. En désignant par $d\alpha$ l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs du centre de gravité, et par ds_1 l'arc élémentaire décrit par le centre de gravité, on a :

$$ds_1^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\alpha^2;$$

par conséquent,

$$V^2 = \frac{dr_1^2}{dt^2} + r_1^2 \frac{d\alpha^2}{dt^2}.$$

L'équation (7) devient alors :

$$M\frac{dr_1^2}{dt^2} + Mr_1^2\frac{d\alpha^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2Mr_1^2}{dt^2} - (A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i).$$

Or, on a :

$$\frac{d(r_1^2)}{dt} = 2r_1\frac{dr_1}{dt}, \qquad \frac{d^2(r_1^2)}{dt^2} = 2\frac{dr_1^2}{dt^2} + 2r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}.$$

Par suite, l'équation précédente nous donne :

$$M\frac{dr_1^2}{dt^2} + Mr_1^2\frac{d\alpha^2}{dt^2} = M\frac{dr_1^2}{dt^2} + Mr_1\frac{d^2r_1}{dt^2} - (A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i),$$

ou bien :

$$Mr_1^2\frac{d\alpha^2}{dt^2} = Mr_1\frac{d^2r_1}{dt^2} - (A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i).$$

Or, si l'on désigne par R_1 la résultante des forces extérieures supposées transportées au centre de gravité, on a :

$$A\Sigma X_i + B\Sigma Y_i + C\Sigma Z_i = R_1 r_1 \cos(R_1, r_1),$$

et il vient alors :

$$Mr_1 \frac{d\alpha^2}{dt^2} = M \frac{d^2r_1}{dt^2} - R_1 \cos(R_1, r_1).$$

201. Appliquons le théorème de M. Villarceau *à une masse gazeuse en équilibre apparent.*

Remarquons que le dernier terme de l'équation (6) dépend des forces extérieures, telles que la pesanteur, et des pressions exercées par l'enveloppe qui contient la masse gazeuse. Si l'on néglige, comme d'ordinaire, l'action de la pesanteur, la pression est la même sur les divers éléments $d\omega$ d'égale étendue qui limitent la masse considérée (n° **4**), et elle est normale à ces divers éléments (n° **3**).

Cela posé, désignons par ϖ la pression par unité de surface, et supposons l'origine O placée à l'intérieur de la masse (fig. 44). Soit N la direction de la partie intérieure de la normale à l'élément $d\omega$. Nous aurons évidemment :

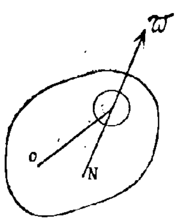


Fig. 44.

$$Pr\cos(P, r) = \varpi d\omega . r\cos(\varpi, r)$$
$$= -\varpi d\omega . r\cos(N, r),$$

et, par conséquent,

$$\Sigma P_i, r_i \cos(P_i, r_i) = -\varpi \int r\cos(N, r) d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à la surface entière.

Or, $\frac{1}{3} r\cos(N, r) d\omega$ est le volume du cône ayant pour sommet l'origine O, et dont la base est $d\omega$, la hauteur de ce cône étant $r\cos(N, r)$. Si donc on désigne par V le volume total de la masse gazeuse, on a :

$$\Sigma P_i r_i \cos(P_i, r_i) = -3\varpi V,$$

et l'équation (6) nous donne alors la suivante :

$$\Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} + \Sigma m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'} + 3\varpi V.$$

Cette dernière formule est utile dans la thermodynamique[1].

Si l'on suppose que la température du gaz est la même dans toutes ses parties, la densité du gaz sera constante dans toute l'étendue de sa masse. Il en résulte qu'une portion très petite du volume total renfermera toujours la même masse de gaz, de sorte que la quantité $\Sigma m_i r_i^2$ pourra être considérée comme sensiblement constante. Si l'on admet, en outre, que les actions mutuelles sont nulles ou insensibles pour les gaz parfaits, la formule précédente nous donnera :

$$\Sigma m_i v_i^2 = 3\varpi V,$$

formule qui montre la relation qui existe entre la pression et le mouvement des molécules gazeuses.

M. Villarceau a donné d'autres applications de son théorème[2].

202. Le théorème de M. Villarceau nous donne immédiatement un autre théorème dû à M. Clausius et relatif à une quantité à laquelle ce dernier a donné le nom de *viriel*[3].

Le *théorème de M. Clausius* se rapporte à un *mouvement stationnaire,* c'est-à-dire à un mouvement tel que les positions et les vitesses des différents points ne

---

1. Résal. *Traité de mécanique générale*, II, pages 351 et 358.
2. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 juillet et 12 août 1872.
3. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 20 juin 1870.

changent pas toujours dans un même sens, mais restent comprises dans de certaines limites. Le mouvement du système solaire, par exemple, est un mouvement stationnaire.

Proposons-nous de déterminer la *force vive moyenne* du système pour un intervalle de temps compris entre deux époques t_0 et t.

En intégrant l'équation (4) entre les limites t_0 et t, il vient :

$$\sum\int_{t_0}^{t} m_i v_i^2 dt = \frac{1}{2}\sum\int_{t_0}^{t} \frac{d^2(m_i r_i^2)}{dt^2} dt$$

$$-\sum\int_{t_0}^{t} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) dt,$$

et, en divisant les deux membres par $t - t_0$,

$$\frac{1}{t-t_0}\sum\int_{t_0}^{t} m_i v_i^2 dt = \frac{1}{2(t-t_0)}\sum\left\{\frac{d(m_i r_i^2)}{dt} - \left(\frac{d(m_i r_i^2)}{dt}\right)_0\right\}$$

$$-\frac{1}{t-t_0}\sum\int_{t_0}^{t} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) dt; \quad (9)$$

nous avons désigné par $\left(\frac{d(m_i r_i^2)}{dt}\right)_0$ la valeur de $\frac{d(m_i r_i^2)}{dt}$ pour $t = t_0$.

Les expressions :

$$\frac{1}{t-t_0}\sum\int_{t_0}^{t} m_i v_i^2 dt, \quad \frac{1}{t-t_0}\sum\int_{t_0}^{t} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i) dt,$$

représentent les valeurs moyennes de

$$\sum m_i v_i^2, \text{ et de } \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i).$$

M. Clausius désigne ces valeurs moyennes par les notations :

$$\sum \overline{m_i v_i^2}, \qquad \sum \overline{(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)}.$$

Or, pour un mouvement périodique, le premier terme du second membre de l'équation (9) devient nul à la fin de chaque période, puisque $\frac{d(m_i r_i^2)}{dt}$ reprend sa valeur initale $\left(\frac{d(m_i r_i^2)}{dt}\right)_0$ à la fin de chaque période. Si le mouvement n'est pas régulièrement périodique, ce terme ne devient pas régulièrement nul ; mais, comme il le devient de temps en temps, et que d'ailleurs il est affecté du coefficient $\frac{1}{t - t_0}$, il est négligeable lorsque $t - t_0$ est très grand.

En supprimant ce terme, et adoptant la notation de M. Clausius, on peut écrire l'équation (9) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \sum \overline{m_i v_i^2} = -\frac{1}{2} \sum \overline{(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)}. \qquad (10)$$

M. Clausius a donné à la quantité qui figure dans le second membre, c'est-à-dire à l'expression :

$$-\frac{1}{2} \sum \overline{(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)},$$

le nom de *viriel* du système de points. La formule (10) exprime alors le théorème suivant :

THÉORÈME DE M. CLAUSIUS. — *La demi force vive moyenne du système est égale à son viriel.*

203. REMARQUE. — Dans l'équation (4) les lettres X_i, Y_i, Z_i, ne désignent pas seulement les composantes des *forces extérieures,* mais les *composantes de toutes les forces* auxquelles les points sont soumis. Il en est donc de même des équations (9) et (10), et, par suite, les actions mutuelles sont comprises dans le théorème de M. Clausius.

204. La démonstration que M. Clausius a donnée de son théorème est différente de celle que nous venons de faire [1].

MM. Lucas [2] et Lemoyne [3] ont déduit de ces deux théorèmes des propriétés intéressantes, pour lesquelles nous renverrons le lecteur aux travaux originaux. Nous allons cependant exposer quelques autres conséquences que M. Gilbert [4] a tirées du théorème de M. Villarceau.

205. Dans le cas d'un point matériel libre, le théorème de M. Y. Villarceau nous donne, en supposant $m = 1$,

$$v^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \mathrm{P}r\cos(\mathrm{P}, r). \qquad (11)$$

Or, M. Gilbert a mis cette équation sous une forme très utile pour la solution de certains problèmes [5]. En effet, si l'on désigne par α l'angle décrit par le rayon

1. *Comptes rendus*, 20 juin 1870 et 21 octobre 1872.
2. *Comptes rendus*, 13 juillet 1874, p. 103.
3. *Comptes rendus*, 4 février 1878, p. 301.
4. *Comptes rendus*, 31 décembre 1877 et 7 janvier 1878.
5. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 31 décembre 1877, p. 1280.

vecteur r, à partir d'une position donnée, on a :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2,$$

et l'équation (11) devient, après quelques transformations analogues à celles que nous avons faites plus haut (nº **200**) :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \mathrm{P}r\cos(\mathrm{P}, r), \tag{12}$$

ou bien :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \mathrm{P}_r, \tag{13}$$

en désignant par P_r la projection de la force P sur le rayon r.

Cette formule est avantageuse pour la solution des problèmes où α est exprimé en fonction de t.

206. Remarque. — La formule (13) subsiste encore lorsque le point est assujetti à se mouvoir sur une surface dont la réaction N est normale au rayon vecteur r, par exemple, sur une surface conique ayant son sommet au point O, et n'exerçant aucun frottement.

Dans ce cas, en effet, le terme N_r, correspondant à cette réaction, qui devrait être introduit dans P_r, sera nul.

207. Problème. — *Trouver le mouvement d'un point matériel pesant dans un tube rectiligne qui décrit un cône droit autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante* ω [1].

---

1. Voir II, nº **167**.

: Soient θ l'angle constant ZOM du cône (fig. 45), $aOm = \psi$ l'angle du plan mobile ZOM avec le plan fixe ZOx, $AOM = \alpha$ l'angle conique décrit par le rayon OM.

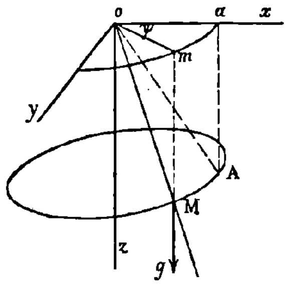


Fig. 45.

On a évidemment :

$$\psi = \omega t.$$

D'ailleurs, il est évident que le secteur aOm est la projection du secteur AOM sur le plan des xy ; par conséquent,

$$aOm = \text{AOM} \sin \theta. \tag{14}$$

Or, on a, en posant $Om = r'$:

$$aOm = \frac{1}{2} r'^2 \psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta . \psi,$$

$$\text{AOM} = \frac{1}{2} r^2 \alpha ;$$

par suite, la formule (14) nous donne :

$$\alpha = \psi \sin\theta = \omega t \sin\theta,$$

d'où :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \sin\theta ;$$

d'autre part,

$$\text{P}_r = g \cos\theta,$$

et, par conséquent, l'équation (13) nous donne :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\omega^2 \sin^2\theta + g \cos\theta.$$

C'est l'équation que nous avons trouvée (II, n° **167**), et qui a pour intégrale :

$$r = \mathrm{A}e^{\omega t \sin\theta} + \mathrm{B}e^{-\omega t \sin\theta} - \frac{g\cos\theta}{\omega^2 \sin^2\theta}.$$

208. On peut encore déduire de l'équation de M. Villarceau plusieurs conséquences remarquables.

Si le point matériel se meut sur une sphère ayant son centre à l'origine, N étant la réaction normale de la surface, prise positive vers l'extérieur, et négative vers l'intérieur, l'équation (11) donne, puisque r est constant :

$$v^2 = -(\mathrm{P}_r + \mathrm{N})r. \qquad (15)$$

Cette expression de la force vive est intéressante en ce qu'elle subsiste même si l'on tient compte du frottement, de la résistance de l'air, etc. En effet, les termes que ces forces introduiraient dans l'équation (11) sont nuls, puisque, pour ces forces on a :

$$\cos(\mathrm{P}, r) = 0.$$

Cette formule (15) nous apprend que la somme $\mathrm{P}_r + \mathrm{N}$ est toujours négative; en particulier, si $\mathrm{P} = 0$, on a :

$$v^2 = -\mathrm{N}r,$$

d'où :

$$\mathrm{N} = -\frac{v^2}{r}.$$

209. Si la *force motrice* P admet une *fonction de force* $\varphi(x, y, z)$ *homogène et du degré* k, nous aurons :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi,$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k\varphi;$$

par suite,

$$P_r r = Pr\cos(P, r) = Xx + Yy + Zz = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k\varphi.$$

L'équation (15) nous donne alors, même en ayant égard au frottement :

$$v^2 = -(Nr + k\varphi).$$

D'ailleurs, si le frottement est négligeable, on a l'intégrale des forces vives :

$$v^2 = 2\varphi + h;$$

d'où, en éliminant v^2 entre les deux dernières équations :

$$N = -\frac{(k+2)\varphi + h}{r}.$$

En particulier, si nous supposons le point matériel soumis à l'action de la pesanteur seulement, l'axe des z étant dirigé dans le sens de la pesanteur, nous aurons pour la fonction de force :

$$\varphi = gz;$$

d'où :

$$k = 1,$$

et, par conséquent, il vient :

$$N = -\frac{3gz + h}{r},$$

formule que nous avons trouvée précédemment (II, n° **111**).

Observons que l'équation (15) aurait encore lieu, lorsque le carré de la distance du point matériel à l'origine varie proportionnellement au temps au lieu d'être constant.

210. M. Gilbert est parvenu également[1] à déduire du théorème de M. Villarceau une formule curieuse, de laquelle on tire plusieurs théorèmes remarquables.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque Q pris sur la *droite polaire* (axe du cercle osculateur) de la trajectoire au point M, et par ρ la distance de ce point Q à l'origine.

Les équations du mouvement d'un point libre nous donnent :

$$\xi \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{d^2y}{dt^2} + \zeta \frac{d^2z}{dt^2} = \xi X + \eta Y + \zeta Z = P\rho \cos(P, \rho).$$

Or, l'une des équations de la droite polaire est :

$$(\xi - x)\, d^2x + (\eta - y)\, d^2y + (\zeta - z)\, d^2z = ds^2;$$

par conséquent, l'équation précédente nous donne :

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{ds^2}{dt^2} = P\rho \cos(P, \rho),$$

ou bien, à cause de la relation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2P\rho\cos(P, \rho). \qquad (16)$$

Cette formule nous conduit, en particulier, à la conséquence suivante :

---

1. *Comptes rendus*, 7 janvier 1878, p. 42.

Propriété. — *Lorsque le carré de la distance d'un point matériel libre à un centre fixe varie proportionnellement au temps, la force motrice est, à chaque instant, normale au plan mené par le centre fixe et la droite polaire de la trajectoire.*

En effet, dans cette hypothèse, on a :

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\cos(\mathrm{P}, \rho) = 0.$$

La force P est donc perpendiculaire au rayon ρ, et comme elle est d'ailleurs dans le plan osculateur au point M, elle est perpendiculaire à la droite polaire; par conséquent, elle est perpendiculaire au plan passant par le point O et par la droite polaire.

Remarque. — La même propriété a lieu lorque le point libre décrit une courbe sphérique, puisqu'alors on a $r =$ const.

211. Le théorème de M. Villarceau permet encore de trouver une formule remarquable due à Jacobi.

En posant $\mathrm{R} = \Sigma m_i r_i^2$, R étant ce que l'on appelle le *moment d'inertie polaire* du système, l'équation de M. Villarceau nous donne :

$$\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} + \sum m_i m_{i'} f_{i,i'} r_{i,i'} - \sum \mathrm{P}_i r_i \cos(\mathrm{P}_i, r_i). (17)$$

Or, en désignant par $\Pi(r, r', \ldots .)$ l'*énergie potentielle* du système (II, n° **206**), c'est-à-dire la fonction dont la différentielle changée de signe est égale à la somme des travaux élémentaires des forces intérieures, on a :

$$\Pi(r, r', \ldots\ldots) = \sum m_i m_{i'} \int f_{i,i'} dr_{i,i'},$$

et l'équation (17) devient alors :

$$\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 R}{dt^2} + \sum r_{i,i'} \frac{\partial \Pi}{\partial r_{i,i'}} - \sum P_i r_i \cos(P_i, r_i).$$

Cela posé, admettons que la fonction Π soit homogène et du degré k en $r, r', \ldots$, et qu'il existe une fonction des forces extérieures ψ, homogène et du degré k' en $x, y, z, x', \ldots$; nous aurons :

$$\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 R}{dt^2} + k\Pi - k'\psi.$$

En combinant cette équation avec l'intégrale des forces vives :

$$\sum m_i v_i^2 = -2\Pi + 2\psi + \text{const.}^1,$$

il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 R}{dt^2} = -(k+2)\Pi + (k'+2)\psi + \text{const.}$$

En particulier, s'il n'y a pas de forces extérieures, et si $k = -2$, c'est-à-dire si les points matériels s'attirent ou se repoussent en raison inverse du cube de la distance, on a la formule de Jacobi [2] :

1. — Π est l'intégrale de la somme des travaux élémentaires des forces intérieures, ψ l'intégrale de la somme des travaux élémentaires des forces extérieures.

2. *Vorlesungen über Dynamik*, Berlin, 1866, p. 27.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2R}{dt^2} = \text{const.} = h';$$

on en tire :

$$R = h't^2 + h''t + h''',$$

formule de laquelle on conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un système de points matériels qui s'attirent ou se repoussent en raison inverse du cube de la distance, le moment d'inertie polaire R du système, par rapport à une origine fixe, est une fonction du second degré du temps.*

212. Les théorèmes que nous venons de démontrer sont compris dans un théorème plus général dû à M. Lipschitz [1].

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées d'un point mobile m_i, et a_i, b_i, c_i les coordonnées d'un point fixe, l'indice i pouvant prendre toutes les valeurs 1, 2, . . . n. Supposons, en outre, que le point m_i soit soumis à l'action d'une force motrice dont les composantes sont X_i, Y_i, Z_i, et que les points du système soient assujettis à des liaisons exprimées par les équations :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots \quad L_m = 0,$$

L_1, L_2, . . . L_m étant des *fonctions homogènes des différences :*

$$x_i - a_i,\ y_i - b_i,\ z_i - c_i.$$

Les équations du mouvement du point m_i sont, en

1. *Journal de Crelle*, t. 66.

désignant par $\lambda_1, \lambda_1, \ldots \lambda_m$, des multiplicateurs indéterminés :

$$
\begin{aligned}
m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial x_i}, \\
m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial y_i}, \qquad (18) \\
m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial L_m}{\partial z_i}.
\end{aligned}
$$

Posons :

$$2G = \sum m_i \left[(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2 + (z_i - c_i)^2 \right],$$

et représentons la force vive totale du système par :

$$2T = \sum m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\}. \qquad (19)$$

Nous aurons :

$$\frac{dG}{dt} = \sum m_i \left[(x_i - a_i) \frac{dx_i}{dt} + (y_i - b_i) \frac{dy_i}{dt} + (z_i - c_i) \frac{dz_i}{dt} \right],$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2G}{dt^2} = \sum m_i &\left[(x_i - a_i) \frac{d^2x_i}{dt^2} + (y_i - b_i) \frac{d^2y_i}{dt^2} + (z_i - c_i) \frac{d^2z_i}{dt^2} \right] \\
&+ \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right],
\end{aligned}
$$

et, par suite, en ayant égard aux équations (18) et (19) :

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \sum [X_i(x_i - a_i) + Y_i(y_i - b_i) + Z_i(z_i - c_i)]$$

$$+ \lambda_1 \sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial L_1}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial L_1}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial L_1}{\partial z_i}\right]$$

$$+ \lambda_2 \sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial L_2}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial L_2}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial L_2}{\partial z_i}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \lambda_m \sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial L_m}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial L_m}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial L_m}{\partial z_i}\right]$$

$$+ 2T.$$

Or, L_1 étant une fonction homogène du degré μ_1, on a :

$$\sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial L_1}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial L_1}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial L_1}{\partial z_i}\right] = \mu_1 L_1 = 0,$$

puisque les coordonnées des différents points du système vérifient identiquement l'équation $L_1 = 0$.

On verrait de même que tous les coefficients des λ sont nuls, et il vient alors :

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \sum \left[(x_i - a_i)X_i + (y_i - b_i)Y_i + (z_i - c_i)Z_i\right], \quad (20)$$

équation qui est indépendante des fonctions L_1, L_2, . . L_m.

213. En particulier, s'il existe une *fonction de force* U, il vient :

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial U}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial U}{\partial z_i} \right]. \quad (21)$$

Cette équation est celle que M. Lipschitz a donnée dans son mémoire.

214. Si tous les points fixes se confondent avec l'origine des coordonnées, on a :

$$a_i = 0, \quad b_i = 0, \quad c_i = 0,$$

et l'équation (20) nous donne la suivante :

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i). \qquad (22)$$

Or, dans ce cas, on a :

$$2G = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i r_i^2;$$

par suite, on peut remplacer l'équation (22) par la suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} - \sum m_i v_i^2 = \sum (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i). \qquad (23)$$

C'est la formule de M. Yvon Villarceau généralisée (n° **194**).

L'équation (20) a lieu même en supposant qu'il y ait des équations de condition, puisqu'elle est indépendante de $L_1, L_2, \ldots L_m$. Il en résulte donc que l'équation (23) a lieu, même dans le cas où les liaisons $L_1, L_2, \ldots L_m$ existent; par conséquent, l'équation (22) qui contient celle de M. Villarceau est plus générale.

215. Si, outre les hypothèses précédentes, on suppose qu'il existe une fonction de force homogène du degré k, il vient :

$$\sum\left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = kU,$$

et l'équation (22) nous donne la suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i r_i^2}{dt^2} - \sum m_i v_i^2 = kU. \qquad (24)$$

Si nous appliquons le principe des forces vives, qui est applicable puisqu'il existe une fonction de force, on a :

$$2T = \Sigma m_i v_i^2 = 2U + h,$$

et, par suite, l'équation (24) nous donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i r_i^2}{dt^2} = (k+2)U + h. \qquad (25)$$

C'est la formule de Jacobi [1].

216. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (20) par dt, et si l'on intègre entre les limites t_0 et t, il vient :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0}^{t} - 2\int_{t_0}^{t} T dt = \sum \int_{t_0}^{t} \Big[(x_i - a_i)X_i + (y_i - b_i)Y_i$$

$$+ (z_i - c_i)Z_i \Big] dt. \qquad (26)$$

1. *Vorlesungen über Dynamik*, p. 22.

Dans le cas où il existe une *fonction de force,* on a :

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

d'ailleurs, l'équation des forces vives nous donne :

$$2T = 2U + h,$$

ou bien :

$$T - T_o = U - U_o. \qquad (27)$$

Si, de plus, la fonction de force U est une fonction homogène du degré k des différences $x_i - a_i$, $y_i - b_i$, $z_i - c_i$, on a :

$$\sum \left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_i} + (y_i - b_i)\frac{\partial U}{\partial y_i} + (z_i - c_i)\frac{\partial U}{\partial z_i} \right] = kU,$$

et l'équation (26) nous donne la suivante :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_o}^{t} - 2\int_{t_o}^{t} T dt = \int_{t_o}^{t} kU dt, \qquad (28)$$

ou bien, en remplaçant U par sa valeur tirée de (27) :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_o}^{t} - 2\int_{t_o}^{t} T dt = k\int_{t_o}^{t} T dt - k\int_{t_o}^{t} (T_o - U_o) dt,$$

ou enfin :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_o}^{t} = (k + 2)\int_{t_o}^{t} T dt - k\,(T_o - U_o)\,(t - t_o). \qquad (29)$$

217. En particulier, si les points fixes coïncident avec l'origine, l'équation (26) nous donne :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0}^{t} - 2\int_{t_0}^{t} \mathrm{T}dt = \int_{t_0}^{t} \sum (\mathrm{X}_i x_i + \mathrm{Y}_i y_i + \mathrm{Z}_i z_i)dt, \quad (30)$$

formule de laquelle on déduit facilement le théorème du viriel de M. Clausius.

218. Enfin, si l'on suppose que la fonction de force homogène soit du degré — 1, la formule (28) nous donne :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0}^{t} - 2\int_{t_0}^{t} \mathrm{T}dt = -\int_{t_0}^{t} \mathrm{U}dt,$$

ou bien :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (2\mathrm{T} - \mathrm{U})dt,$$

et, en ayant égard à l'intégrale des forces vives :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{U} + h)dt.$$

Remarque. — La formule (30) est plus générale que celle de M. Clausius. En effet, il est évident que cette équation a lieu, comme l'équation (23), même lorsqu'il existe des équations de condition.

219. Lorsque le système n'est sollicité que par des forces attractives ou répulsives (action mutuelles) le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme. On a alors (II, n° **179**) :

$$A = ct + c_1, \quad B = c't + c'_1, \quad C = c''t + c''_1.$$

D'ailleurs, l'équation (I, n° **326**) :

$$\sum m_i r_i^2 = M r_1^2 + \frac{\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2}{M},$$

ou bien :

$$\sum m_i r_i^2 = M(A^2 + B^2 + C^2) + \frac{\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2}{M},$$

nous donne dans ce cas :

$$\sum m_i r_i^2 = M\left[(ct + c_1)^2 + (c't + c'_1)^2 + (c''t + c_1'')^2\right] + \frac{\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2}{M}.$$

Par suite, on a :

$$\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} = 2M(c^2 + c'^2 + c''^2) + \frac{d^2 \Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2}{M\, dt^2},$$

et, si l'on pose :

$$h - M(c^2 + c'^2 + c''^2) = h',$$

l'équation (25) devient alors :

$$\frac{d^2 \Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2}{\mathrm{M}\, dt^2} = (2k+4)\mathrm{U} + 2h'.$$

Cette dernière formule qui a été donnée par Jacobi [1] se distingue de la formule (25) en ce qu'elle ne contient que des quantités $r_{i,i'}$ qui ne changent pas avec l'origine.

D'ailleurs, si l'on a égard à la formule (I, n° **327**) :

$$\mathrm{M}\Sigma m_i \rho_i^2 = \Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2,$$

la formule précédente nous donne :

$$\frac{d^2 \Sigma m_i \rho_i^2}{dt^2} = (2k+4)\mathrm{U} + 2h',$$

ρ_i désignant les rayons vecteurs menés du centre de gravité aux différents points du système.

220. Cette formule, appliquée au système solaire, nous conduit à une propriété remarquable. En effet, pour ce système, les actions mutuelles étant en raison inverse du carré de la distance, on a $k = -1$, et en posant, pour abréger :

$$\Sigma m_i \rho_i^2 = \mathrm{R},$$

il vient :

$$\frac{d^2 \mathrm{R}}{dt^2} = 2\,\mathrm{U} + 2h'.$$

Il est d'abord facile de s'assurer que la constante h'

1. *Vorlesungen über Dynamik*, p. 23.

doit être négative, si le système est stable. En effet, en admettant que, dans le système solaire, il n'existe que des forces attractives, il s'ensuit que la fonction de force U est essentiellement positive.

Cela posé, si nous intégrons entre les limites 0 et t, il vient :

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} - \mathrm{R}'_0 = \int_0^t (2\mathrm{U} + 2h')dt,$$

R'_0 étant la valeur de $\frac{d\mathrm{R}}{dt}$ pour $t = 0$.

Désignons par α la plus petite valeur de U entre 0 et t, nous aurons :

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} - \mathrm{R}'_0 \geq (2\alpha + 2h')t;$$

d'où, en intégrant de nouveau entre 0 et t, et désignant par R_0 la valeur de R pour $t = 0$,

$$\mathrm{R} - \mathrm{R}_0 - \mathrm{R}'_0 t > (\alpha + h')t^2,$$

ou bien :

$$\mathrm{R} > \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}'_0 t + (\alpha + h')t^2.$$

Or, si h' était positif, il en serait de même de $\alpha + h'$ (car α est essentiellement positif, puisque la fonction U est positive); par suite, R croîtrait indéfiniment avec t, et comme $\mathrm{R} = \Sigma m_i \rho_i^2$, il devrait y avoir certaines valeurs de ρ_i qui deviendraient infinies : il y aurait donc dans le système, des points qui s'éloigneraient indéfiniment du centre de gravité, et le système ne serait pas stable. Il en résulte donc que h' *doit être négatif*, et même, $\alpha + h'$ *doit être négatif*.

Mais la *valeur numérique* de h' ne peut pas être plus grande que la plus grande valeur de U entre 0 et t; en d'autres termes, l'expression $U + h'$ n'est pas constamment négative.

Soit α' la valeur maximum de U, et h' négatif $= - h''$; nous aurons :

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2(U - h'') < 2(\alpha' - h'');$$

d'où :

$$\frac{dR}{dt} - R'_o < 2(\alpha' - h'')t.$$

Mais, si $h'' > \alpha'$ en valeur absolue, on a :

$$\alpha' - h'' = - \beta = - (h'' - \alpha'),$$

et β sera la plus petite valeur numérique de $U + h'$ entre les limites 0 et t, puisqu'au maximum α' correspond le minimum $h'' - \alpha'$. On a donc :

$$\frac{dR}{dt} - R'_o < - 2\beta t;$$

d'où :

$$R < R_o + R'_o t - \beta t^2.$$

Il résulte de cette formule que, lorsque t augmente indéfiniment, R s'approcherait de l'infini négatif, ce qui est absurde, puisque $R = \Sigma m_i \rho_i^2$ est une somme de quantités positives. Ainsi donc, $\alpha + h'$ doit être négatif; en oufre, $U + h'$ n'est pas constamment négatif. Par conséquent, $U + h'$ est tantôt positif, et tantôt négatif; de plus, h' est négatif. Il résulte de là que $U + h'$ doit osciller continuellement autour de zéro, c'est-à-dire que U doit osciller autour de $-h'$. Il s'ensuit que $2U + h'$ oscille autour de U; d'ailleurs, puisque h' est négatif, $2U + h'$ est plus petit que 2U. Mais, $2U + h'$ est la *force vive relative du système autour du centre de gravité* [1].

Nous aurons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un système libre sollicité par des actions mutuelles suivant la raison inverse du carré de la distance, la force vive du système autour du centre de gravité est tantôt plus grande, tantôt plus petite que la*

---

1. En effet, si dans l'intégrale des forces vives :

$$\sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] = 2U + h,$$

on remplace x_i, y_i, z_i par $\xi_i + A$, $\eta_i + B$, $\zeta_i + C$, il vient :

$$\sum m_i \left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right]$$

$$= 2U + h - M\left[\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right];$$

d'où, en remplaçant $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$, par leurs valeurs c, c', c'', et posant :

$$h - M(c^2 + c'^2 + c''^2) = h',$$

on obtient pour la force vive relative au centre de gravité :

$$\sum m_i \left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right] = 2U + h'.$$

20

fonction de force, mais elle est toujours plus petite que deux fois cette fonction de force.

Il résulte de là que pour que *le système soit stable,* il faut que la force vive initiale autour du centre de gravité, soit plus petite que le double de la fonction de force à l'origine du mouvement.

Théorème des aires.

221. Nous avons vu (II, n° **191**) que, si les forces X, Y, Z sont telles que l'on ait :

$$\sum(Zy - Yz) = 0, \quad \sum(Xz - Zx) = 0, \quad \sum(Yx - Xy) = 0,$$

on a les équations :

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = c'',$$

$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = c',$$

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = c.$$

Ce sont *trois intégrales premières* du problème. On les appelle les *intégrales des aires.*

222. Nous observerons ici que, ou bien les trois intégrales des aires existent, ou bien une seule ; en d'autres termes, la troisième intégrale des aires est une conséquence des deux autres [1].

1. *Intégration des équations de la mécanique*, Liège, Desoer, 1889, p. 201.

223. PROPRIÉTÉ. — *Lorsque les trois intégrales des aires existent, on peut toujours faire en sorte que deux des constantes* c, c', c'' *soient égales à zéro.*

Rappelons d'abord que ces constantes sont, pour chaque problème, déterminées par les équations de condition. Or, on peut toujours prendre les axes coordonnés de telle manière que deux de ces constantes soient nulles. La démonstration de cette propriété repose sur un théorème que nous allons d'abord établir.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du point m par rapport à un nouveau système d'axes coordonnés de même origine O que les premiers. Nous aurons les formules de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}$$

avec les conditions :

$$\begin{array}{lll} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \alpha, & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = \beta, & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \gamma, \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \alpha', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = \beta', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' = \gamma', \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma = \alpha'', & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = \beta'', & \alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma''. \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} = {} & (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)\left(\alpha''\frac{dx}{dt} + \beta''\frac{dy}{dt} + \gamma''\frac{dz}{dt}\right) \\ & - (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)\left(\alpha'\frac{dx}{dt} + \beta'\frac{dy}{dt} + \gamma'\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned}$$

ou bien, en effectuant les calculs, et ayant égard aux conditions précédentes :

$$\begin{aligned} \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} = {} & \alpha\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \beta\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\ & + \gamma\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)=c''\alpha+c'\beta+c\gamma.$$

On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les intégrales des aires ont lieu dans un système de coordonnées, elles auront lieu pour un autre système quelconque de même origine.*

224. REMARQUE. — Il est facile de voir que, si l'on pose :

$$\begin{aligned} c''\alpha+c'\beta+c\gamma &= c_1'',\\ c''\alpha'+c'\beta'+c\gamma' &= c_1',\\ c''\alpha''+c'\beta''+c\gamma'' &= c_1, \end{aligned}$$

il vient :

$$c_1''^2+c_1'^2+c_1^2=c''^2+c'^2+c^2.$$

Par conséquent, on a, en général :

$$\begin{aligned} &\left\{\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\right\}^2+\left\{\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\right\}^2\\ &+\left\{\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right\}^2=\left\{\sum m\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\right\}^2\\ &+\left\{\sum m\left(\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}\right)\right\}^2+\left\{\sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)\right\}^2. \end{aligned}$$

On conclut de là que la fonction :

$$\begin{aligned} &\left\{\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\right\}^2+\left\{\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\right\}^2\\ &\qquad+\left\{\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right\}^2 \end{aligned}$$

a une valeur indépendante de la position des axes coordonnés, pourvu qu'ils soient rectangulaires [1].

225. On peut encore donner une autre forme à la constante $c''\alpha + c'\beta + c\gamma$. En désignant par l, m, n les angles que l'axe $O\xi$ fait avec les axes Ox, Oy, Oz, on a :

$$\alpha = \cos l, \quad \beta = \cos m, \quad \gamma = \cos n.$$

Si l'on pose, en outre,

$$\frac{c''}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}} = \cos\lambda, \quad \frac{c'}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}} = \cos\mu,$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}} = \cos\upsilon,$$

il vient :

$$c''\alpha + c'\beta + c\gamma = \sqrt{c^2+c'^2+c''^2}(\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\upsilon);$$

mais, puisque l'on a :

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\upsilon = 1,$$

il s'ensuit que l'on peut considérer λ, μ, υ comme les angles qu'une droite L fait avec les axes Ox, Oy, Oz. En désignant par V l'angle de cette droite L avec l'axe $O\xi$, on a :

$$\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\upsilon = \cos V;$$

d'où :

$$c''\alpha + c'\beta + c\gamma = \sqrt{c^2+c'^2+c''^2}\cos V.$$

---

1. Lagrange. *Mécanique analytique.*

La constante des aires dans le plan des $\eta\zeta$ est donc égale au produit de $\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$ par le cosinus de l'angle que fait la droite L avec l'axe des ξ. On aura des résultats analogues pour les deux autres plans, en désignant par V' et V'' les angles de la droite L avec les axes des η et des ζ.

Cela posé, si l'on fait coïncider l'axe des ξ avec la droite L, on aura :

$$V = 0, \quad V' = 90^\circ, \quad V'' = 90^\circ;$$

d'où :

$$\cos V = 1, \quad \cos V' = 0, \quad \cos V'' = 0.$$

Par conséquent, les constantes des aires dans les plans $\xi\eta$ et $\zeta\xi$ sont nulles, et la constante du plan des $\eta\zeta$ est $\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la valeur maximum que cette constante des aires peut avoir.

Le plan des $\eta\zeta$ ainsi déterminé a reçu de Laplace le nom *de plan invariable.*

226. Si maintenant nous employons pour les nouvelles coordonnées les notations x, y, z, nous aurons :

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \varepsilon,$$

$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

en posant :

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2},$$

et le plan des yz est *le plan invariable.*

227. *Cas particulier*. — Dans le cas particulier de deux corps, lorsque les théorèmes des aires auront lieu, on peut en donner une interprétation géométrique intéressante.

On a, en effet, les trois équations suivantes :

$$m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)+m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right)=\varepsilon,$$

$$m_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)+m_2\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right)=0,$$

$$m_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)+m_2\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right)=0.$$

Des deux dernières on tire :

$$\frac{z_1\dfrac{dx_1}{dt}-x_1\dfrac{dz_1}{dt}}{x_1\dfrac{dy_1}{dt}-y_1\dfrac{dx_1}{dt}}=\frac{z_2\dfrac{dx_2}{dt}-x_2\dfrac{dz_2}{dt}}{x_2\dfrac{dy_2}{dt}-y_2\dfrac{dx_2}{dt}}. \qquad (1)$$

Or, cette proportion a une signification géométrique très simple.

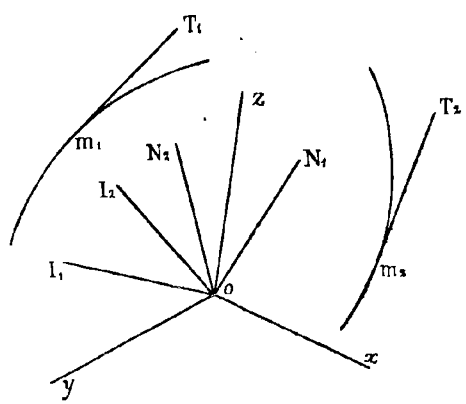


Fig. 46.

Imaginons en m_1 (fig. 46) une tangente T_1 à la courbe décrite par ce point; par cette tangente et l'origine des coordonnées un plan E_1, et menons par l'origine la normale N_1 à ce plan. Soient p_1, q_1, r_1, les cosinus directeurs de N_1; l'équation du plan E_1 étant :

$$p_1x + q_1y + r_1z = 0,$$

il vient, puisque ce plan passe par le point m_1 :

$$p_1x_1 + q_1y_1 + r_1z_1 = 0.$$

D'autre part, la droite N_1 étant perpendiculaire à la tangente au point m_1, on a :

$$p_1dx_1 + q_1dy_1 + r_1dz_1 = 0.$$

De ces deux équations on tire :

$$p_1 : q_1 : r_1 = y_1dz_1 - z_1dy_1 : z_1dx_1 - x_1dz_1 : x_1dy_1 - y_1dx_1.$$

Si nous opérons de la même manière pour le point m_2, et si nous menons la tangente T_2, le plan E_2 et la normale N_2 (p_2, q_2, r_2), nous aurons :

$$p_2 : q_2 : r_2 = y_2dz_2 - z_2dy_2 : z_2dx_2 - x_2dz_2 : x_2dy_2 - y_2dx_2.$$

Il en résulte que l'équation (1) nous donne :

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}. \qquad (2)$$

Or, il est facile de trouver la signification géométrique de cette dernière équation. En effet, les équations de N_1 et N_2 étant :

$$\frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1},$$

$$\frac{x}{p_2} = \frac{y}{q_2} = \frac{z}{r_2},$$

les projections de ces droites sur le plan des yz ont pour équations :

$$\frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}, \qquad \frac{y}{q_2} = \frac{z}{r_2}. \tag{3}$$

Mais, de la relation (2) il résulte que les équations (3) sont identiques, et, par suite, les deux droites N_1 et N_2 ont la même projection sur le plan des yz. Il s'ensuit que ces deux droites N_1 et N_2 sont dans un même plan perpendiculaire au plan des yz. Mais, comme N_1 et N_2 passent par l'origine, le plan de N_1 et N_2 passera par l'axe des x.

Il en résulte encore que *les plans* E_1 *et* E_2 *couperont le plan des yz suivant une seule et même droite*. En effet, soient I_1 et I_2 les deux intersections de ces plans avec le plan des yz.

La droite I_1 étant dans le plan E_1 est perpendiculaire à N_1; étant dans le plan des yz, elle est perpendiculaire à Ox : elle est donc perpendiculaire au plan $N_1 N_2 x$.

De même, la droite I_2 étant dans le plan E_2 et dans le plan des yz, est perpendiculaire à N_2 et à Ox : elle est donc perpendiculaire au plan $N_1 N_2 x$. Par conséquent, ces deux droites coïncident, et nous aurons le théorème suivant, qui est dû à Poinsot :

THÉORÈME. — *Supposons que l'on mène en m_1 et m_2 les tangentes aux trajectoires de ces deux points; puis, par ces tangentes et le centre de gravité du système (origine des coordonnées) on mène des plans. Ces deux plans couperont le plan invariable (plan des yz) suivant une seule et même droite* [1].

---

1. JACOBI. *Vorlesungen über Dynamik*, p. 36.

Ce cas particulier se présentera, par exemple, lorsque les deux corps sont attirés par un centre fixe, et s'attirent mutuellement.

228. Remarque. — On peut encore énoncer ce théorème d'une autre manière. En effet, le plan de l'orbite de l'un des corps, à chaque instant, est le plan E_1 passant par le centre fixe et par la tangente T_1 à la courbe décrite par ce corps.

Le démonstration qui précède nous donne la propriété suivante :

Propriété. — *L'intersection des plans mobiles des deux orbites de ces corps se meut dans le plan invariable*[1].

229. Comme nous l'avons vu, si l'on considère un système de points matériels soumis à leurs actions mutuelles, les trois intégrales des aires existent. Mais, si, aux actions mutuelles, se joignent des *attractions vers des centres fixes,* ces théorèmes cessent d'avoir lieu, excepté quand les centres fixes sont en ligne droite. Dans ce cas, le théorème des aires a lieu pour un plan perpendiculaire à la droite qui contient ces centres fixes.

En effet, si nous supposons que ces centres fixes soient sur l'axe des x, par exemple, la somme des moments des forces correspondantes par rapport à cet axe est nulle, et, par conséquent (II, n° **187**), on a :

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c''.$$

Il en résulte que le théorème des aires a lieu pour un plan perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire à la droite qui contient les centres fixes.

1. Mathieu. *Dynamique analytique*, p. 29.

D'ailleurs, comme dans ce cas, il existe une fonction de force, puisqu'il n'y a que des actions mutuelles et des attractions vers des centres fixes, l'intégrale des forces vives existe (II, nº **201**). Il s'ensuit que nous aurons alors deux intégrales du problème : l'intégrale des forces vives et une intégrale des aires.

S'il y a plusieurs centres fixes, non en ligne droite, il n'y aura plus qu'une intégrale : celle des forces vives.

Enfin, si l'on suppose que les centres ne sont pas fixes, mais qu'ils aient un mouvement propre indépendant des autres points du système, de sorte que ce mouvement soit une fonction donnée du temps, l'intégrale des forces vives cesse également d'avoir lieu (II, nº **201**).

230. Il peut cependant arriver que, dans certains cas, on puisse encore exprimer les forces qui agissent sur les points du système, par les dérivées partielles d'une fonction U ; mais, cette fonction, outre les coordonnées des différents points, renfermera encore explicitement le temps. Dans ce cas, l'expression :

$$\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$$

ne sera plus égale à $\frac{dU}{dt}$.

En effet, on a alors :

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Ceci établi, reprenons l'équation différentielle des forces vives (II, nº **197**) [1] :

---

1. Cette équation n'exige que la condition que les équations des liaisons ne renferment pas explicitement le temps.

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)$$
$$=\sum\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right);$$

cette équation qui est intégrable lorsque U ne renferme pas explicitement le temps, et que, par suite, le second membre est égal à $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$, ne le sera plus dans le cas actuel, puisque le second membre est égal à $\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}$, et nous aurons l'équation non intégrable :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t},$$

laquelle remplacera l'équation différentielle des forces vives.

231. Si nous supposons, en particulier, que la fonction de force puisse être décomposée en une somme de deux fonctions U et V, telles que V renferme explicitement le temps, et que U ne le renferme pas, nous pourrons remplacer :

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} \text{ par } \frac{d\mathrm{U}}{dt}+\frac{d\mathrm{V}}{dt}, \text{ et } \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} \text{ par } \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t},$$

et, par conséquent, il vient :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d\mathrm{U}}{dt}+\frac{d\mathrm{V}}{dt}-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}. \quad (4)$$

Cette équation qui remplace l'équation différentielle des forces vives, ne fournit pas d'intégrale du problème, à cause du terme $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}$. D'autre part, le principe des aires n'a pas lieu non plus, puisque les centres ne sont pas fixes et en ligne droite. Donc, il n'y a aucun principe qui donne séparément une intégrale du problème.

232. Cependant, Jacobi a remarqué [1] qu'il existe un cas où l'on peut trouver une *intégrale combinée des forces vives et des aires*. Cette intégrale remplacera le principe des forces vives et le principe des aires qui ne sont pas applicables séparément. Ce cas se présente lorsque les centres mobiles se meuvent sur des cercles avec une même vitesse angulaire autour d'un seul et même axe, de manière que l'on ait pour les coordonnées (a, b, c) d'un de ces centres :

$$a = \text{const.}, \quad b = \beta \cos nt, \quad c = \beta \sin nt,$$

n ayant la même valeur pour tous les centres, et l'axe des x étant l'axe commun de la rotation.

233. Cherchons ce que devient, dans ce cas, l'équation différentielle du principe des aires.

Supposons donc un système de points matériels, soumis à leurs actions mutuelles, ces points étant attirés vers des centres mobiles, assujettis aux conditions que nous venons d'indiquer.

La fonction de force, qui renferme explicitement le temps, se composera de deux espèces de termes : la première espèce provient des actions mutuelles des différents points, et comprend des termes de la forme [2].

$$\frac{mm'}{\sqrt{(x-x)^2+(y-y')^2+(z-z')^2}};$$

si l'on remplace les coordonnées rectangulaires y, z, dans

1. *Vorlesungen über Dynamik*, p. 40. — *Report of the British association for the advancement of sciences*, 1857, p. 15.

2. En supposant l'attraction suivant la loi de Newton.

le plan des yz, par des coordonnées polaires, en posant :

$$y = r \cos v,$$
$$z = r \sin v,$$

ces termes sont de la forme :

$$\frac{mm'}{\sqrt{(x - x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v - v')}}. \qquad (5)$$

La seconde espèce de termes provient de l'attraction des centres mobiles, et comprend des termes de la forme :

$$\frac{m\mu}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}.$$

et, en remplaçant les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires, et posant :

$$b = \beta \cos nt, \quad c = \beta \sin nt,$$

ces termes sont de la forme :

$$\frac{m\mu}{\sqrt{(x - a)^2 + r^2 + \beta^2 - 2r\beta \cos(v - nt)}}. \qquad (6)$$

Nous désignerons la première espèce de termes par U, et la seconde espèce par V ; alors la fonction de force sera une somme U + V de deux fonctions U et V, telles que V renferme explicitement le temps, et U ne le renferme pas.

L'équation de Lagrange nous donne alors, en remplaçant, dans le cas actuel, U par U + V :

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right)$$
$$= \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right)$$
$$+ \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right).$$

Or, puisque V renferme explicitement le temps, tandis que U ne le renferme pas, on a :

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right),$$

$$\delta U = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right),$$

et l'équation de Lagrange nous donne :

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \delta U + \delta V - \frac{\partial V}{\partial t}\delta t. \quad (7)$$

Cela posé, supposons que l'on fasse varier tous les angles v d'une même quantité δv, et, en même temps, t de la n^e partie de cette même quantité, en posant, pour les variations virtuelles :

$$\delta v = n\delta t.$$

Il résultera de ce choix que les fonctions U et V resteront invariables, et, par suite, on a :

$$\delta U = 0, \quad \delta V = 0.$$

D'ailleurs, on a aussi :

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -r \sin v\delta v = -z\delta v = -nz\delta t,$$

$$\delta z = r \cos v\delta v = y\delta v = ny\delta t,$$

et l'équation (7) devient :

$$n\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial t}. \quad (8)$$

Telle est l'équation qui, dans le cas actuel, remplace l'équation différentielle des aires. V est une somme de termes de la forme (6), où n doit être le même pour tous les termes, les autres quantités pouvant avoir des valeurs différentes d'un terme à l'autre Cette équation (8) n'est pas intégrable, pas plus que l'équation (4).

Or, l'équation (4) nous donne :

$$\frac{1}{2}\sum m\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Si de cette dernière nous retranchons l'équation (8), il vient :

$$\frac{1}{2}\sum m\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

$$-n\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt},$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

$$-n\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=U+V+h''.$$

Cette dernière intégrale exprime un principe résultant de la combinaison des principes des forces vives et des aires. Elle a lieu, comme nous venons de le voir, lorsque les centres mobiles d'attraction se meuvent autour d'un axe de rotation avec une vitesse angulaire constante.

Stabilité de l'équilibre d'un système. Théorème de Dirichlet.

231. On sait que, si un système de points matériels est sollicité par des forces attractives ou répulsives, dont l'intensité varie en fonction de la distance, l'expression $\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ est une différentielle exacte d'une fonction $f(x, y, z, x', y', z', \ldots)$.

Considérons le cas plus général d'un système soumis à des liaisons quelconques, *indépendantes du temps,* et telles que l'expression $\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction $f(x, y, z, x', \ldots)$, en considérant $x, y, z, x', \ldots$, comme des variables indépendantes, c'est-à-dire telles qu'il existe une *fonction de force.*

Nous savons que, dans le cas d'équilibre, on a :

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = 0,$$

et, par conséquent, dans ce cas, la fonction f sera un maximum ou un minimum relativement à toutes les variables indépendantes. Or, si le système est en équilibre, et si on le déplace infiniment peu, en l'abandonnant ensuite à l'action des forces, il peut se présenter deux cas :

1° Les déplacements de chacun des points par rapport à leurs positions d'équilibre restent toujours très petits.

2° Les déplacements peuvent au bout d'un certain temps acquérir des valeurs finies.

Dans le premier cas, l'*équilibre* est *stable*, et, dans le second cas, il est *instable.* Nous allons démontrer que *l'équilibre est stable ou instable suivant que la fonction* $f(x, y, z, x', \ldots)$ *sera maximum ou minimum.*

Supposons donc un système en équilibre sous l'action des forces X, Y, Z, X', . . ., telles que l'expression :

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

soit la différentielle totale d'une fonction f, en considérant les variables x, y, z, x', . . , comme indépendantes. En vertu du principe des travaux virtuels, dans la position d'équilibre, la différentielle de cette fonction f est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Supposons qu'alors la fonction f soit maximum relativement à toutes les valeurs qu'elle prend dans ces divers déplacements. Soient a, b, c, a', b', c', . . , les valeurs de x, y, z, x', y', z', . . , dans la position d'équilibre ; déplaçons infiniment peu les différents points, et communiquons leur des vitesses très petites.

Nous allons démontrer que le dérangement du système sera toujours très petit, et, par conséquent, l'équilibre sera stable.

Posons :

$$x = a + h, \quad y = b + k, \quad z = c + l;$$

nous aurons, en désignant par v_0, v'_0, . . . les vitesses très petites communiquées à ces points :

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = f(a + h,\ b + k,\ c + l,\ \ldots) \\ - f(a + h_0,\ b + k_0,\ c + l_0,\ \ldots),$$

h_0, k_0, l_0, . . , étant les déplacements primitifs.

Cela posé, appliquons la formule de Taylor. Puisque, par hypothèse, la fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est maximum, les termes du premier degré en h, k, l, . . . disparaitront dans le développement. Ceux du second degré, pris en signes contraires, peuvent être mis sous la forme d'une somme de carrés s^2, s'^2, ... ; chacun des termes des quantités s, s', . . . renfermera au premier degré l'une des quantités $h, k, l, \ldots\ldots$, et ces quantités sont en nombre égal à celui des variables indépendantes.

Nous aurons donc, en désignant par R l'ensemble des termes d'un degré supérieur au second :

$$f(a+h, b+k, c+l, \ldots) = f(a, b, c, \ldots)$$
$$-(s^2+s'^2+s''^2+\ldots)+\mathrm{R};$$

de même,

$$f(a+h_0, b+k_0, c+l_0, \ldots) = f(a, b, c, \ldots)$$
$$-(s_0^2+s_0'^2, \ldots)+\mathrm{R}_0.$$

Par suite,

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = -(s^2+s'^2+\ldots)+(s_0^2+s_0'^2+\ldots)$$
$$+\mathrm{R}-\mathrm{R}_0.$$

Si nous représentons par c la quantité très petite :

$$c = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + s_0^2 + s_0'^2 + \ldots - \mathrm{R}_0,$$

nous aurons :

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = c - (s^2+s'^2+\ldots)+\mathrm{R}. \qquad \text{(A)}$$

Or, les quantités $h, k, l, \ldots$ ne sont pas toutes indépendantes. En effet, au moyen des équations de liaison on pourra en éliminer un certain nombre; celles qui resteront entreront au premier degré dans les divers termes des quantités $s, s', s'', \ldots$ dont le nombre est égal à celui des variables $h, k, l, \ldots$, qui sont indépendantes. Il en résulte que, si ces dernières sont très petites, il en sera de même de $s, s', s'', \ldots$, et réciproquement. Il suffit donc de démontrer que $s, s', s'', \ldots$, restent toujours très petits, pour en conclure que les déplacements des points du système restent très petits, et que, par conséquent, l'équilibre est stable.

Or, le premier membre de l'équation (A) étant positif, il en sera de même du second. Il est facile de conclure de là que *chacune des quantités s^2 est toujours inférieure à c.*

En effet, en vertu de la valeur de c, il est évident que chacune des valeurs initiales s_0^2, s'^2_0, . . . , est moindre que c; ces quantités s^2, s'^2, . . . , varient ensuite d'une manière continue. Or, supposons que l'une d'entre elles, par exemple s^2 (que nous supposerons la plus grande de toutes), devienne égale à c; elle sera toujours très petite, et il en sera de même *à fortiori* des autres. Par conséquent, h, k, l, . . . seront très petits, et la quantité R sera moindre que chacune des quantités s^2, s'^2, . . . L'hypothèse $s^2 = c$ nous conduirait donc à cette conséquence que le second membre de (A) serait négatif.

Donc, les quantités s, s' s'', . . . , sont toujours plus petites que $\sqrt{c}$, et, par conséquent, très petites : il en sera de même des déplacements h, k, l, . . . et l'*équilibre* sera *stable*.

On démontre de même que, si la fonction f est minimum, l'*équilibre* est *instable*.

235. Le théorème de Dirichlet nous permet de trouver la signification de la fonction Π, c'est-à-dire de l'énergie potentielle d'un système (II, n° **206**).

En effet, nous avons posé (II, n° **203**) :

$$\Pi = \Sigma mm'\varphi(r),$$

et l'on a :

$$\Sigma \mathfrak{T} F_i = \Pi_0 - \Pi.$$

D'ailleurs, on a :

$$d\Pi = \Sigma mm' d\varphi(r) = \Sigma mm' f(r) dr = -dF,$$

F désignant la fonction des forces intérieures; c'est-à-dire que la différentielle de la fonction Π prise en signe contraire est égale à la somme des travaux élémentaires des forces intérieures.

La fonction des forces intérieures est donc égale à $-\Pi$.

Les fonctions F et Π contiennent évidemment une constante arbitraire. Or, parmi toutes les positions que peuvent prendre les points du système, il en existe nécessairement une pour laquelle la fonction Π ou $-$ F sera un minimum; c'est-à-dire pour laquelle la fonction F ou $-\Pi$ sera un maximum. C'est donc une *position d'équilibre stable*, s'il n'y a pas de forces extérieures. Nous pouvons disposer de la constante arbitraire de manière que la fonction de force F soit nulle quand les points du système occupent leurs positions d'équilibre stable, c'est-à-dire de manière que le maximum de F soit nul. Cette fonction sera donc *négative* pour toute autre position du système; par conséquent, la fonction Π qui est égale et de signe contraire à la fonction de force F sera *positive*.

Cela posé, supposons que le système parte de la position d'équilibre stable correspondant au maximum de la fonction de force, pour arriver à sa position actuelle; le travail des forces intérieures pendant cette transformation sera :

$$F(x, y, z, x', \ldots) - 0 = -\Pi(x, y, z, x', \ldots).$$

Cette quantité qui est négative représente le travail qu'il faut développer pour tirer le corps de sa position d'équilibre stable et l'amener à sa position actuelle.

Réciproquement, si on laisse le corps revenir de sa position actuelle à la position d'équilibre stable, les forces intérieures produiront un travail positif égal et contraire :

$$0 - F(x, y, z, x', \ldots) = \Pi.$$

La fonction Π ou l'*énergie potentielle* représente donc le *travail positif que développeraient les forces intérieures, si le système quittait sa position actuelle pour revenir à sa position d'équilibre stable pour laquelle cette fonction est minimum.*

La fonction Π est donc le maximum de travail que peuvent produire les forces intérieures (actions moléculaires).

Notions sur la théorie de l'élasticité.

DÉFINITIONS.

236. Un corps solide peut être considéré comme un assemblage de molécules ou de points matériels infiniment rapprochés les uns des autres.

Dans l'étude que nous avons faite de l'équilibre et du mouvement des corps solides, nous avons considéré ces corps comme étant d'une rigidité parfaite. Nous avons supposé que les distances entre les points d'application des forces restent invariables, quelles que soient les intensités de ces forces. Mais, cette rigidité parfaite n'existe pas dans la nature.

Lorsque le corps est à l'état de repos relatif, les points matériels qui le composent sont sollicités par des forces nulles, ou par des forces qui se font équilibre.

Quand on exerce un effort, ou une action extérieure sur la surface du corps, celle-ci entre en mouvement, et l'ébranlement se communique aux molécules intérieures du corps qui se déforme, et prend, au bout d'un certain temps, un nouvel état d'équilibre. L'action exercée à la surface se propage dans l'intérieur du corps.

Lorsque l'effort extérieur cesse, les actions intérieures cessent, et le corps revient à l'état primitif, si l'effort n'a pas dépassé une certaine limite.

Cette tendance des corps de reprendre leur forme primitive, lorsque la cause qui a produit la déformation vient à cesser est ce que l'on appelle l'*élasticité*.

237. On dit qu'un corps est *homogène*, lorsqu'il est formé de molécules semblables, qui ont toutes les mêmes propriétés physiques et la même composition chimique. On suppose de plus qu'elles occupent des espaces égaux.

D'après cela, un corps homogène jouit de cette propriété qu'une droite de longueur appréciable L, et d'*une direction déterminée,* traverse le même nombre n de molécules, en quelqu'endroit qu'elle soit placée. Le rapport $\frac{L}{n}$ peut d'ailleurs varier avec la direction de la droite. Si le rapport $\frac{L}{n}$ est indépendant de la direction de L, le corps est *homogène* et d'*élasticité constante*. On dit alors que le corps est *isotrope*.

238. Les déformations du corps sont accompagnées du développement de forces attractives ou répulsives entre les différents points du corps. Dans la *théorie de l'élasticité,* on se propose de rechercher les lois suivant lesquelles ces forces varient.

Si, par suite de l'action extérieure qui vient à agir sur le corps, deux points quelconques, mais infiniment voisins, se *rapprochent* ou s'*éloignent* l'un de l'autre, il en résulte entre ces deux molécules une action ou *force, répulsive* dans le premier cas, et *attractive* dans le second. Cette force est une fonction de la distance primitive ζ des deux molécules, et de l'écartement $\Delta\zeta$, c'est-à-dire de la quantité dont elles se sont rapprochées ou éloignées. Évidemment, cette fonction sera nulle pour un même corps, quel que soit ζ, *si* $\Delta\zeta$ *est nul;* en outre, elle diminue, quel que soit $\Delta\zeta$, *si* ζ *acquiert une valeur sensible,* puisque, si la distance ζ a une valeur appréciable, l'adhésion cesse.

Les mêmes forces extérieures produiront un changement de forme du corps d'autant plus sensible que la fonction varie plus rapidement avec l'écartement. Dans la théorie de l'élasticité, on étudie le cas où les changements de forme résultant des actions extérieures sont très petits, soit que ces actions soient de faible intensité, ou que les corps aient une grande rigidité. Alors, la fonction se réduit au produit de $\Delta\zeta$ par une fonction $F(\zeta)$, qui est insensible du moment où ζ est appréciable.

Cela posé, soient M et M' les positions primitives de deux points matériels (fig. 47), m et m' leurs nouvelles positions après une faible déformation, et $MM' = \zeta$. Menons par le point m une droite $m\mu$ égale et parallèle à MM'; l'écartement $\Delta\zeta$, c'est-à-dire la différence entre mm' et $m\mu$ peut être exprimé par la projection de $\mu m'$ sur μm ou MM', puisque $\mu m'$ est très petit par rapport à MM' ou ζ.

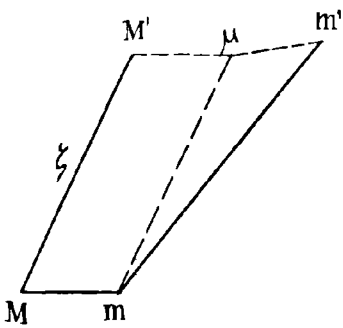


Fig. 47.

L'écartement $\Delta\zeta$ aura le signe $+$ si les molécules se sont éloignées, et le signe $-$ si elles se sont rapprochées.

Remarquons que $\Delta\zeta$ est un infiniment petit par rapport à ζ; si donc ζ est un infiniment petit du premier ordre, $\Delta\zeta$ sera un infiniment petit du second ordre.

239. Considérons donc un système matériel composé de points infiniment rapprochés, et supposons ce système soumis à des forces intérieures. Imaginons dans ce système au point M (fig. 48), un élément plan dont l'aire

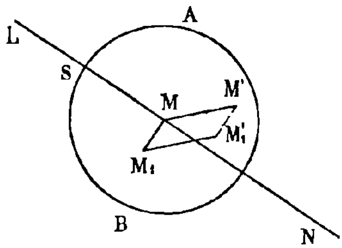


Fig. 48.

soit égale à ω, et une sphère ayant pour centre le point M, et pour rayon la plus grande distance au delà de laquelle $F(\zeta)$ est insensible. Cette distance limite s'appelle le *rayon d'activité* de l'action moléculaire; la sphère a reçu le nom de *sphère d'activité*. Le plan LN de l'élément ω divise la sphère en deux hémisphères SA et SB; les molécules contenues dans l'hémisphère SA exercent des actions sur l'hémisphère SB, et réciproquement. Considérons dans l'hémisphère SB un cylindre droit ayant pour base ω. Les molécules contenues dans SA exercent des actions sur les molécules du cylindre. Ces actions supposées transportées parallèlement à elles-mêmes en un point O de l'élément ω (par exemple, son centre de gravité), se ramènent à une résultante R que l'on appelle *la force élastique* exercée par SA sur l'élément plan ω : cette force R est, en général, oblique à l'élément ω. Si, étant normale à ω, elle est dirigée vers A, elle représente une *traction*; si, étant normale, elle est dirigée vers B, elle représente une *pression*; enfin, si elle est comprise dans le plan de l'élément, on l'appelle *force élastique tangentielle*.

De même, si le cylindre est situé dans SA, les actions exercées sur les molécules de ce cylindre par les molécules de SB se ramènent à une résultante R', qui est la *force élastique* exercée par SB sur l'élément plan ω.

Si le corps est en équilibre d'élasticité, ces deux forces R et R' doivent être égales et de sens contraires. Elles seront l'une et l'autre ou des tractions, ou des pressions, ou des forces tangentielles.

240. On peut définir la force élastique d'une autre manière : il est évident que, si l'on imagine les deux parties A et B dans lesquelles le système est divisé par le plan LN de l'élément ω, et si l'on supprime la partie A, l'équilibre de B sera troublé. Mais, il est évident aussi que cet équilibre ne serait pas détruit, si l'on appliquait à chaque élément ω une force d'intensité et de direction convenables. Cette force sera la *force élastique* exercée par A sur B, rapportée à l'élément ω.

On voit que cette nouvelle définition est analogue à celles que nous avons données de la tension d'un fil en équilibre (I, n° **342**), de la réaction d'une surface, etc. (I, n° **225**).

241 Si l'on divise R par ω, le quotient tend vers une certaine limite, lorsque ω tend vers zéro : cette limite p est la force élastique par unité de surface, ou la *force élastique spécifique* au point M où se trouve l'élément, et l'on aura $R = p\omega$.

La force élastique élémentaire est donc égale à la force élastique par unité de surface multipliée par la surface de l'élément.

La force élastique p qui sollicite un élément plan étant, en général, oblique par rapport à cet élément (n° **239**), on peut la décomposer en deux autres forces, l'une p_1 dirigée suivant la normale ON au plan de l'élément, l'autre p_t située dans ce plan. La première est la *force élastique normale*, qui s'appelle *traction*, si elle tend à produire l'extension du solide, *pression* dans le cas contraire. On lui donne le signe + ou le signe —, suivant qu'il s'agit d'une traction ou d'une pression. La seconde composante est la *force élastique tangentielle* ou *de glissement*.

Si les molécules de A et de B sont groupées symétriquement autour de la normale ON, on dit que le système matériel est *isotrope* par rapport à cette droite; dans ce cas, $p_t = 0$, et la force élastique est normale au plan de l'élément ω. Si, quelle que soit l'orientation de ON, on a la même symétrie, le corps est *isotrope* autour du point O; la *force élastique est constante*, quelle que soit l'orientation de l'élément ω, et elle est normale à cet élément.

242. La force élastique p varie d'un point à un autre, en grandeur et en direction; au point M, elle varie avec l'orientation de l'élément ω, c'est-à-dire avec les angles que fait avec les axes la normale à l'élément ω [1]. Elle est donc une fonction de x, y, z, et des deux angles qui déterminent la normale. Les deux angles qui déterminent la direction d'une droite avec les axes sont ceux qui déterminent la parallèle à cette droite menée par l'origine, savoir : l'angle ψ que fait

1. Ces angles se réduisent, comme on sait, à deux, en vertu de la relation entre les cosinus directeurs.

avec le plan des zx, le plan mené par cette parallèle et l'axe des z : il varie de 0 à 2π ; et l'angle φ que fait la parallèle avec sa projection sur le plan des xy : il varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

243. S'il y a mouvement intérieur, la force élastique varie pour un même point et pour une même direction de ω, avec le temps t. Dans ce cas, la force élastique est donc une fonction des cinq variables précédentes et de t.

244. Nous allons démontrer que les composantes de la force élastique, lesquelles sont des fonctions des six variables que nous venons d'indiquer (x, y, z, t et les deux angles), dépendent de six nouvelles fonctions de quatre variables x, y, z, t, et ces fonctions sont liées entre elles par trois équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Pour obtenir ces relations, nous aurons à écrire qu'une portion du système, est en équilibre sous l'action des forces élastiques exercées sur sa surface et des forces qui sollicitent sa masse.

Équations de l'équilibre intérieur d'un corps solide.

245. Rapportons le système à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace, et imaginons le corps décomposé en parallélipipèdes élémentaires par trois séries de plans parallèles aux plans coordonnés.

Considérons un de ces parallélipipèdes au point M, et soient x, y, z, les coordonnées du sommet M le plus voisin de l'origine, dx, dy, dz, les arêtes du parallélipipède, ρ la densité au point M, et X, Y, Z les composantes de la force accélératrice en ce point.

Si le corps est en équilibre d'élasticité, les forces X, Y, Z se réduisent à la pesanteur, ou, en général, à des actions émanant de points extérieurs.

Si le système est en mouvement, soit qu'il se déforme ou qu'il vibre, nous devrons comprendre dans X, Y, Z, en vertu du principe de d'Alembert, les composantes de la force d'inertie $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$.

Désignons encore par :

$$a = dydz,\ b = dzdx,\ c = dxdy,$$

les faces du parallélipipède respectivement perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz, et adjacentes au point M. L'élément est en équilibre sous l'action des forces élastiques exercées sur les six faces du parallélipipède, et des forces motrices qui le sollicitent. Nous aurons à écrire les six équations d'équilibre entre ces forces, c'est-à-dire que les sommes des projections de ces forces sur les axes sont nulles, et que les sommes de leurs moments par rapport à ces axes sont aussi nulles.

Nous désignerons par p_x la force élastique rapportée à l'unité de surface, exercée sur un élément plan perpendiculaire à l'axe des x; de même, p_y et p_z seront les forces élastiques par unité de surface, exercées sur les éléments plans respectivement perpendiculaires à Oy et Oz. Nous emploierons, pour désigner les composantes parallèles aux axes, la même notation suivie de la lettre qui désigne l'axe sur lequel on projette. Ainsi, $p_{x,x}$ sera la projection de p_x sur l'axe des x; de même, $p_{x,y}$ et $p_{x,z}$ seront les composantes de p_x suivant les axes Oy et Oz, etc. Ces neuf quantités $p_{x,x}$, $p_{x,y}$, $p_{x,z}$, . . , sont des fonctions des quatre variables x, y, z, t seulement.

Cela posé, les composantes suivant l'axe des x des forces élastiques exercées sur la face a et sur son opposée, sont respectivement :

$$ap_{x,x}, \text{ et } -a\left(p_{x,x} + \frac{\partial p_{x,x}}{\partial x}dx\right),$$

dont la résultante parallèle à Ox est :

$$-a\frac{\partial p_{x,x}}{\partial x}dx, \text{ ou bien } -\frac{\partial p_{x,x}}{\partial x}dx\,dy\,dz;$$

de même, les composantes suivant l'axe des x des forces élastiques pour les faces b et c et leurs opposées nous donnent les deux forces :

$$-\frac{\partial p_{y,x}}{\partial y}dx\,dy\,dz, \text{ et } -\frac{\partial p_{z,x}}{dz}dx\,dy\,dz;$$

enfin, la composante suivant Oz de la force motrice appliquée au point M est :

$$\rho\, X\, dx\, dy\, dz.$$

Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{\partial p_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial p_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial p_{z,x}}{\partial z} = \rho X;$$

de même,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{x,x}}{\partial x} + \frac{\partial p_{y,x}}{\partial y} + \frac{\partial p_{z,x}}{\partial z} &= \rho X;\\ \frac{\partial p_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial p_{y,y}}{\partial y} + \frac{\partial p_{z,y}}{\partial z} &= \rho Y,\\ \frac{\partial p_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial p_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial p_{z,z}}{\partial z} &= \rho Z.\end{aligned}\right\} (1)$$

246. Cherchons maintenant les équations des moments : à cet effet, menons par le centre de gravité du parallélipipède trois axes parallèles aux axes coordonnés, et prenons la somme des moments des forces par rapport à chacun de ces trois axes. Remarquons d'abord que la force motrice étant appliquée au centre de gravité, les moments des forces X, Y, Z par rapport à chacun de ces axes sont nuls.

Considérons d'abord l'axe parallèle à l'axe des x : les forces élastiques exercées sur les deux faces opposées a ont leurs résultantes appliquées aux milieux de ces faces; donc, leurs moments par rapport à l'axe qui passe par les milieux de ces faces, sont nuls (I, n° **233**). Nous n'avons donc à considérer que les forces élastiques exercées sur les deux faces b et c et leurs opposées.

Or, la force élastique bp_y exercée sur la face b a pour composantes $bp_{y,x}$, $bp_{y,y}$, $bp_{y,z}$: le moment par rapport à l'axe de la force $bp_{y,x}$, parallèle à cet axe, est nul (I, n° **233**); le moment de $bp_{y,y}$ qui passe par le centre de gravité de l'élément est aussi nul; enfin, le moment de $bp_{y,z}$ par rapport à l'axe est $bp_{y,z}\dfrac{dy}{2}$ (I, n° **233**); de même, si nous prenons les moments des trois forces correspondantes relatives à la face opposée à b, nous trouvons que ces moments sont nuls, excepté celui de la force $b\left(p_{y,z}+\dfrac{\partial p_{y,z}}{\partial y}dy\right)$, qui a pour valeur :

$$b\left(p_{y,z}+\frac{\partial p_{y,z}}{\partial y}dy\right)\frac{dy}{2}.$$

Enfin, les composantes de la force élastique cp_z exercée sur la face c sont : $cp_{z,x}$, $cp_{z,y}$, $cp_{z,z}$: le moment de $cp_{z,x}$ qui est parallèle à l'axe est nul; le moment de $cp_{z,z}$

qui passe par le centre de gravité de l'élément est aussi nul; enfin, le moment de $cp_{z,y}$ par rapport à l'axe parallèle à Ox est $-cp_{z,y}\frac{dz}{2}$; de même, si nous prenons les moments des trois forces correspondantes relatives à la face opposée à c, nous trouvons que ces moments sont nuls, excepté celui de la force $c\left(p_{z,y}+\frac{\partial p_{z,y}}{\partial z}dz\right)$, qui a pour valeur :

$$-c\left(p_{z,y}+\frac{\partial p_{z,y}}{\partial z}dz\right)\frac{dz}{2}.$$

Nous aurons donc, en écrivant que la somme des moments par rapport à l'axe est nulle,

$$bp_{y,z}\frac{dy}{2}+b\left(p_{y,z}+\frac{\partial p_{y,z}}{\partial y}dy\right)\frac{dy}{2}-cp_{z,y}\frac{dz}{2}$$
$$-c\left(p_{z,y}+\frac{\partial p_{z,y}}{\partial z}dz\right)\frac{dz}{2}=0;$$

d'où, en remplaçant b et c par leurs valeurs, divisant par $\frac{1}{2}dx\,dy\,dz$, et ne conservant que les quantités finies :

de même,
$$\left.\begin{aligned} p_{y,z}&=p_{z,y};\\ p_{z,x}&=p_{x,z},\\ p_{x,y}&=p_{y,x}. \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

247. Ces équations (2) réduisent à six fonctions distinctes, les neuf fonctions $p_{x,x}$, ... Si nous posons, suivant la notation de Lamé :

$$p_{x,x} = N_1, \qquad p_{y,y} = N_2, \qquad p_{z,z} = N_3,$$
$$p_{y,z} = p_{z,y} = T_1 ; \; p_{z,x} = p_{x,z} = T_2, \; p_{x,y} = p_{y,x} = T_3,$$

les équations (1) deviennent les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

lesquelles peuvent être considérées comme le résultat de l'élimination de trois des neuf composantes entre les six équations d'équilibre (1) et (2). Ces équations (3) expriment donc l'équilibre du parallélipipède élémentaire.

Il résulte de ce qui précède que les six fonctions N_i, T_i de quatre variables qui entrent dans les équations (3) donnent les composantes, rapportées à l'unité de surface, de la force élastique exercée sur un élément plan ω perpendiculaire à l'un quelconque des axes. En les écrivant de la manière suivante :

$$\begin{matrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3, \end{matrix}$$

la première ligne *horizontale* ou *verticale* donne les composantes lorsque l'élément est perpendiculaire à l'axe des x, la deuxième lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe des y, la troisième lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe des z.

218. Remarque. — Si les composantes tangentielles sont nulles, et si la pression est la même dans toutes les directions autour du point considéré, les équations (1) nous donnent, en supprimant les indices qui sont alors inutiles :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$

Ce sont les équations d'équilibre d'une molécule fluide (n° **8**).

249. Les équations (3) qui expriment l'équilibre du parallélipipède élémentaire, sont applicables à une portion quelconque d'un corps qui serait décomposable en prismes rectangles, ou dont la surface ne comprendrait que des facettes parallèles aux plans coordonnés. Mais, en général, la décomposition du corps en éléments parallélipipédiques laissera dans le voisinage de la surface des résidus qui seront des tétraèdres rectangulaires élémentaires dont l'équilibre, non établi par les équations (3), exige de nouvelles équations.

250. Imaginons donc un tétraèdre élémentaire ayant son sommet au point M, et dont les arètes dx, dy, dz sont parallèles aux axes; soient ω' la face inclinée, α, β, γ les angles que fait avec les axes Ox, Oy, Oz la normale à cette face, et a, b, c les trois faces du tétraèdre, respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Oz. Nous aurons :

$$a = \omega' \cos \alpha, \; b = \omega' \cos \beta, \; c = \omega' \cos \gamma.$$

Soient encore p'_x, p'_y, p'_z les composantes de la force élastique p' relative à la face ω'. Le tétraèdre étant en équilibre sous l'action des forces élastiques exercées sur les quatre faces et des forces motrices qui sollicitent sa masse, il s'ensuit que les sommes des composantes de ces forces suivant les axes sont nulles.

Or, les forces élastiques exercées sur les faces, ap_x, bp_y, cp_z et $p'\omega'$ sont du second ordre, tandis que la résultante des forces motrices qui sollicitent la masse est de l'ordre du volume du tétraèdre, c'est-à-dire du troisième ordre. Cette dernière force disparaîtra donc par rapport aux autres, et nous aurons l'équation :

$$ap_{x,x} + bp_{y,x} + cp_{z,x} - \omega' p'_x = 0,$$

ou bien, en remplaçant a, b, c, et divisant par ω' :

$$p'_x = p_{x,x} \cos\alpha + p_{y,x} \cos\beta + p_{z,x} \cos\gamma;$$

de même,

$$\left.\begin{aligned} p'_y &= p_{x,y} \cos\alpha + p_{y,y} \cos\beta + p_{z,y} \cos\gamma, \\ p'_z &= p_{x,z} \cos\alpha + p_{y,z} \cos\beta + p_{z,z} \cos\gamma. \end{aligned}\right\} (4)$$

Ces équations (4) peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta + T_2 \cos\gamma, \\ p'_y &= T_3 \cos\alpha + N_2 \cos\beta + T_1 \cos\gamma, \\ p'_z &= T_2 \cos\alpha + T_1 \cos\beta + N_3 \cos\gamma. \end{aligned}\right\} (4^{bis})$$

Il résulte de ces équations que les composantes p'_x, p'_y, p'_z de la force élastique ne dépendent que des six fonctions N_i, T_i des quatre variables x, y, z, t, lesquelles doivent vérifier les trois équations (3) qui sont des équations aux dérivées partielles linéaires et du premier ordre.

251. Remarque. — Si l'on observe que l'on a :

$$\cos\alpha = \cos\varphi \cos\psi, \quad \cos\beta = \cos\varphi \sin\psi, \quad \cos\gamma = \sin\varphi,$$

les équations (4 *bis*) deviennent :

$$\begin{aligned} p'_x &= N_1 \cos\varphi \cos\psi + T_3 \cos\varphi \sin\psi + T_2 \sin\varphi, \\ p'_y &= T_3 \cos\varphi \cos\psi + N_2 \cos\varphi \sin\psi + T_1 \sin\varphi, \\ p'_z &= T_2 \cos\varphi \cos\psi + T_1 \cos\varphi \sin\psi + N_3 \sin\varphi. \end{aligned}$$

252. PROPRIÉTÉ. — La première des formules (4) nous apprend que *la composante suivant* Ox *de la force élastique exercée sur* ω' *est égale à la force élastique exercée sur la face a, estimée suivant la normale à* ω'.

En effet, le second membre n'est autre que la somme des projections de p_x sur les axes projetées sur la normale à ω'.

D'ailleurs, l'axe des x étant quelconque, on en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* p' *et* p'' *sont les forces élastiques relatives à deux éléments* ω' *et* ω'' *passant par un même point, et ayant pour normales* N' *et* N'', *la projection de* p' *sur* N'' *est égale à la projection de* p'' *sur* N'.

On a donc :

$$p' \cos (p', \mathrm{N}'') = p'' \cos (p'', \mathrm{N}').$$

Cette propriété s'appelle l'*égalité des composantes normales réciproques.*

253. Proposons-nous maintenant de trouver la composante de la force élastique suivant une direction quelconque. Soient MN la normale à un plan passant par le point M, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes, et MS (α', β', γ') une direction quelconque. Soient p_n la force élastique relative à l'élément plan perpendiculaire à MN, et $p_{n,s}$ la projection de cette force sur la direction MS.

Nous appliquerons le théorème des projections, et nous aurons :

$$p_{n,s} = p_{n,x} \cos \alpha' + p_{n,y} \cos \beta' + p_{n,z} \cos \gamma'.$$

Or, $p_{n,x}$, $p_{n,y}$ et $p_{n,z}$ qui sont les projections de p_n sur les axes, ne sont autres que p_x', p_y', p'_z (n° **250**), et, par suite, on a :

$$p_{n,x} = p_{x,x}\cos\alpha + p_{y,x}\cos\beta + p_{z,x}\cos\gamma,$$

$$p_{n,y} = p_{x,y}\cos\alpha + p_{y,y}\cos\beta + p_{z,y}\cos\gamma,$$

$$p_{n,z} = p_{x,z}\cos\alpha + p_{y,z}\cos\beta + p_{z,z}\cos\gamma.$$

Par conséquent, en substituant, il vient :

$$\begin{aligned} p_{n,s} &= p_{x,x}\cos\alpha\cos\alpha' + p_{y,y}\cos\beta\cos\beta' + p_{z,z}\cos\gamma\cos\gamma \\ &+ p_{y,z}(\cos\beta\cos\gamma' + \cos\gamma\cos\beta') + p_{z,x}(\cos\gamma\cos\alpha' \\ &+ \cos\alpha\cos\gamma') + p_{x,y}(\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha'). \qquad (5) \end{aligned}$$

Remarque. — Comme cette expression ne change pas quand on y change α, β, γ en α', β', γ' et réciproquement, on en conclut que l'on a la formule :

$$p_{n,s} = p_{s,n},$$

dont les équations (2) ne sont que des cas particuliers.

254. Cherchons maintenant la composante de la force élastique suivant la normale MN au plan sur lequel elle s'exerce. Il suffira, pour cela, de faire coïncider MS avec MN; par conséquent de faire :

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma;$$

nous aurons donc pour la composante de la force élastique suivant la normale :

$$\begin{aligned} p_{n,n} &= p_{x,x}\cos^2\alpha + p_{y,y}\cos^2\beta + p_{z,z}\cos^2\gamma \qquad (5') \\ &+ 2p_{x,y}\cos\alpha\cos\beta + 2p_{y,z}\cos\beta\cos\gamma + 2p_{z,x}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned}$$

Cette composante sera une *pression* ou une *traction*, suivant qu'elle sera positive ou négative.

255. Si maintenant nous portons sur la normale, à partir du point M, une longueur MN $= \rho$, telle que l'on ait :

$$\rho^2 = \frac{1}{p_{n,n}},$$

et si, prenant le point M pour origine de trois axes rectangulaires, nous désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du point N, nous aurons :

$$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\pm p_{n,n}}},$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, suivant que $p_{n,n}$ sera positif ou négatif.

L'équation (5') nous donne alors :

$$p_{x,x}\xi^2+p_{y,y}\eta^2+p_{z,z}\zeta^2+2p_{x,y}\xi\eta+2p_{y,z}\eta\zeta+2p_{z,x}\zeta\xi=\pm 1,$$

ou bien :

$$N_1\xi_2+N_2\eta^2+N_3\zeta^2+2T_1\eta\zeta+2T_2\zeta\xi+2T_3\xi\eta=\pm 1.$$

Le lieu du point N est donc une surface du second degré à centre.

Ellipsoïde d'élasticité.

256. Si nous imaginons par le point M, trois axes rectangulaires parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et par ce point M une droite MK $= p'$, qui représente en grandeur et en direction, la force élastique p' exercée sur un élément plan ω, dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes, les coordonnées rectangulaires de ce point K sont évidemment p'_x, p'_y, p'_z : ce sont les projections de p' sur les axes. D'autre part, imaginons aussi trois axes *obliques* Mx', My', Mz' respectivement parallèles à p_x, p_y, p_z, c'est-à-dire aux forces élastiques qui s'exercent sur les éléments plans perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz, et soient x', y', z' les coordonnées du point K, par rapport aux axes obliques. Nous aurons, en vertu du théorème des projections [1].

$$p'_x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x).$$

Or, on a :

$$\cos(x', x) = \frac{p_{x,x}}{p_x}, \cos(y', x) = \frac{p_{y,x}}{p_y}, \cos(z', x) = \frac{p_{z,x}}{p_z}; \quad (6)$$

par suite,

de même,

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= x' \frac{p_{x,x}}{p_x} + y' \frac{p_{y,x}}{p_y} + z' \frac{p_{z,x}}{p_z}; \\ p'_y &= x' \frac{p_{x,y}}{p_x} + y' \frac{p_{y,y}}{p_y} + z' \frac{p_{z,y}}{p_z}, \\ p'_z &= x' \frac{p_{x,z}}{p_x} + y' \frac{p_{y,z}}{p_y} + z' \frac{p_{z,z}}{p_z}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

En comparant ces formules avec les formules (4), on a :

$$\cos \alpha = \frac{x'}{p_x}, \cos \beta = \frac{y'}{p_y}, \cos \gamma = \frac{z'}{p_z},$$

et, en substituant dans la relation :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

on trouve pour l'équation du lieu du point K :

$$\left(\frac{x'}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{z'}{p_z}\right)^2 = 1. \quad (8)$$

---

1. p' est la résultante d'un contour polygonal dont les côtés sont x', y', z', et la projection de p' sur une direction est égale à la somme des projections des côtés de ce contour sur cette direction.

C'est un *ellipsoïde* rapporté à trois diamètres conjugués ; p_x, p_y, p_z sont les demi diamètres conjugués. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le lieu géométrique des extrémités des droites qui représentent en grandeur et en direction les forces élastiques s'exerçant sur tous les éléments plans menés par un même point du milieu est un ellipsoïde. Les forces élastiques p_x, p_y, p_z qui correspondent à trois éléments plans rectangulaires forment un système de trois diamètres conjugués de cette surface,* que l'on appelle *ellipsoïde d'élasticité.*

257. PROPRIÉTÉ. — *La force élastique exercée sur un élément plan au point M, coïncidant avec l'un ou l'autre des trois plans principaux de l'ellipsoïde, est normale à cet élément.*

En effet, on a d'abord respectivement pour ces trois éléments :

$$\left.\begin{aligned} p_x^2 &= p_{x,x}^2 + p_{x,y}^2 + p_{x,z}^2, \\ p_y^2 &= p_{y,x}^2 + p_{y,y}^2 + p_{y,z}^2, \\ p_z^2 &= p_{z,x}^2 + p_{z,y}^2 + p_{z,z}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Supposons que les axes Ox, Oy, Oz soient tels que les axes Mx', My', Mz', coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde, et désignons par P, P$'$, P$''$ les valeurs de p_x, p_y, p_z dans ce cas. Les formules (9) nous donnent alors :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{p_{x,x}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{x,y}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{x,z}}{P}\right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{p_{y,x}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{y,y}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{y,z}}{P'}\right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{p_{z,x}}{P''}\right)^2 + \left(\frac{p_{z,y}}{P''}\right)^2 + \left(\frac{p_{z,z}}{P''}\right)^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

D'ailleurs, puisque les axes x', y', z' sont actuellement rectangulaires, on a :

$$\cos^2(x',x) + \cos^2(y',x) + \cos^2(z',x) = 1,$$
$$\cos^2(x',y) + \cos^2(y',y) + \cos^2(z',y) = 1,$$
$$\cos^2(x',z) + \cos^2(y',z) + \cos^2(z',z) = 1;$$

par conséquent, les formules (6) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{p_{x,x}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{y,x}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{z,x}}{P''}\right)^2 = 1,\\ \left(\frac{p_{x,y}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{y,y}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{z,y}}{P''}\right)^2 = 1,\\ \left(\frac{p_{x,z}}{P}\right)^2 + \left(\frac{p_{y,z}}{P'}\right)^2 + \left(\frac{p_{z,z}}{P''}\right)^2 = 1.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

En éliminant $p_{x,x}$, $p_{y,y}$ et $p_{z,z}$ entre les équations (10) et (11), il vient :

$$\left.\begin{aligned}p_{x,y}^2\left(\frac{1}{P'^2}-\frac{1}{P^2}\right) + p_{x,z}^2\left(\frac{1}{P''^2}-\frac{1}{P^2}\right) = 0,\\ p_{x,y}^2\left(\frac{1}{P^2}-\frac{1}{P'^2}\right) + p_{y,z}^2\left(\frac{1}{P''^2}-\frac{1}{P'^2}\right) = 0,\\ p_{x,z}^2\left(\frac{1}{P^2}-\frac{1}{P''^2}\right) + p_{y,z}^2\left(\frac{1}{P'^2}-\frac{1}{P''^2}\right) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Dans ces formules P, P′, P″ sont les axes de l'ellipsoïde : nous supposerons $P > P' > P''$, et alors la première des formules (12) nous donne :

$$p_{x,y} = 0,\ p_{x,z} = 0,$$

et des deux autres on conclut :

$$p_{y,z} = 0.$$

Les équations (11) nous donnent alors :

$$p_{x,x} = \mathrm{P}, \quad p_{y,y} = \mathrm{P}', \quad p_{z,z} = \mathrm{P}'',$$

et les équations (7) se réduisent aux suivantes :

$$p'_x = x', \quad p'_y = y', \quad p'_z = z',$$

et les équations (6) nous donnent :

$$\begin{array}{lll} \cos(x',x) = 1, & \cos(y',x) = 0, & \cos(z',x) = 0, \\ \cos(x',y) = 0, & \cos(y',y) = 1, & \cos(z',y) = 0, \\ \cos(x',z) = 0, & \cos(y',z) = 0, & \cos(z',z) = 1. \end{array}$$

Par conséquent, les axes x', y', z' doivent coïncider avec les axes x, y, z, c'est-à-dire que les axes x, y, z coïncideront avec les axes de l'ellipsoïde.

Ainsi donc, si l'on choisit les axes x, y, z de manière que les axes x', y', z' coïncident avec les axes de l'ellipsoïde, on voit que les axes x, y, z et x', y', z' doivent coïncider. Mais x', y', z' sont les axes qui représentent les forces élastiques exercées sur les éléments plans perpendiculaires à Ox, Oy, Oz, et lorsque Ox, Oy, Oz coïncident avec les axes x', y', z', il en résulte que x', y', z', sont les axes qui représentent les forces élastiques exercées sur les éléments plans perpendiculaires à ces axes x', y', z' eux-mêmes.

Par conséquent, les axes de l'ellipsoïde coïncideront avec les normales aux éléments plans, sur lesquels s'exercent les forces élastiques représentées par ces axes eux-mêmes.

Donc, en chaque point du milieu il existe trois éléments plans rectangulaires entre eux, qui sont sollicités par des forces élastiques normales. Ces plans sont les *plans principaux de l'ellipsoïde d'élasticité*, et les trois forces élastiques normales à ces plans, que nous appellerons *forces élastiques principales,* sont représentées en grandeur et en direction par les axes de cet ellipsoïde.

258. Proposons-nous maintenant de déterminer *les axes principaux de l'ellipsoïde en chaque point du milieu,* c'est-à-dire de déterminer *les grandeurs des forces élastiques principales* et les *positions des éléments plans* sur lesquels elles s'exercent.

Soient donc P la grandeur d'une force élastique normale s'exerçant en M, et α, β, γ les angles que sa direction fait avec les axes Ox, Oy, Oz. Nous aurons :

$$p'_x = \mathrm{P}\cos\alpha, \quad p'_y = \mathrm{P}\cos\beta, \quad p'_z = \mathrm{P}\cos\gamma;$$

les formules (4) nous donnent, en remplaçant p'_x, p'_y, p'_z par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}
(p_{x,x} - \mathrm{P})\cos\alpha + p_{y,x}\cos\beta + p_{z,x}\cos\gamma &= 0,\\
p_{y,x}\cos\alpha + (p_{y,y} - \mathrm{P})\cos\beta + p_{z,y}\cos\gamma &= 0, \quad (13)\\
p_{z,x}\cos\alpha + p_{z,y}\cos\beta + (p_{z,z} - \mathrm{P})\cos\gamma &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, l'équation du troisième degré :

$$\begin{vmatrix} p_{x,x} - \mathrm{P} & p_{y,x} & p_{z,x} \\ p_{y,x} & p_{y,y} - \mathrm{P} & p_{z,y} \\ p_{z,x} & p_{z,y} & p_{z,z} - \mathrm{P} \end{vmatrix} = 0, \qquad (14)$$

dont les racines sont P, P', P''. Ce sont les valeurs des *forces élastiques principales.*

Ces racines obtenues, on substituera successivement leurs valeurs dans les équations (13), auxquelles on joindra la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

et l'on obtiendra pour chaque valeur de P, les angles α, β, γ correspondants. Nous aurons ainsi les directions des trois axes principaux de l'ellipsoïde.

259. Observons que l'équation (14) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} N_1 - P & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - P & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - P \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire :

$$(N_1 - P)(N_2 - P)(N_3 - P) + 2T_1T_2T_3 - (N_1 - P)T_1^2$$
$$- (N_2 - P)T_2^2 - (N_3 - P)T_3^2 = 0,$$

ou bien :

$$P^3 - (N_1 + N_2 + N_3)P^2 + (N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2)P$$
$$- (N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2) = 0.$$

Cette équation détermine non seulement *les grandeurs,* mais aussi *les signes* des trois forces élastiques principales : le signe + correspondra à une traction, le signe — à une pression (n° **241**).

En désignant par P, P′, P″ les trois racines de cette équation, nous aurons les relations :

$$P + P' + P'' = N_1 + N_2 + N_3,$$
$$PP' + PP'' + P'P'' = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2,$$
$$PP'P'' = N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2.$$

260. Remarque. — Évidemment les axes de l'ellipsoïde d'élasticité seraient les mêmes, si, au lieu des axes x, y, z, l'on avait pris trois autres axes rectangulaires x', y', z' de même origine.

Par conséquent, si nous désignons par N'_i, T'_i les valeurs des N_i, T_i, relatives à ces nouveaux axes, nous aurons les relations suivantes :

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = N_1 + N_2 + N_3,$$
$$N'_2N'_3 + N'_3N'_1 + N'_1N'_2 - T'^2_1 - T'^2_2 - T'^2_3$$
$$= N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2,$$
$$N'_1N'_2N'_3 + 2T'_1T'_2T'_3 - N'_1T'^2_1 - N'_2T'^2_2 - N'_3T'^2_3$$
$$= N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2.$$

Nous verrons plus loin que l'on retrouve ces mêmes relations par une autre méthode.

261. PROBLÈME. — *Trouver l'équation du plan correspondant à une des racines P de l'équation du troisième degré, c'est-à-dire à une des forces élastiques principales.*

L'équation d'un plan perpendiculaire à la direction α, β, γ, étant :

$$(x' - x) \cos\alpha + (y' - y) \cos\beta + (z' - z) \cos\gamma = 0,$$

il suffira de remplacer $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (13). Or, ces équations nous donnent :

$$p_{x,x} \cos\alpha + p_{y,x} \cos\beta + p_{z,x} \cos\gamma = \mathrm{P} \cos\alpha,$$
$$p_{y,x} \cos\alpha + p_{y,y} \cos\beta + p_{z,y} \cos\gamma = \mathrm{P} \cos\beta,$$
$$p_{z,x} \cos\alpha + p_{z,y} \cos\beta + p_{z,z} \cos\gamma = \mathrm{P} \cos\gamma.$$

On en tire :

$$p_{y,x}\, p_{z,y} \cos\beta + p_{z,x}\, p_{z,y} \cos\gamma = (\mathrm{P}p_{z,y} - p_{x,x}\, p_{z,y}) \cos\alpha,$$
$$p_{y,x}\, p_{z,x} \cos\alpha + p_{z,y}\, p_{z,x} \cos\gamma = (\mathrm{P}p_{z,x} - p_{y,y}\, p_{z,x}) \cos\beta,$$
$$p_{z,x}\, p_{y,x} \cos\alpha + p_{z,y}\, p_{y,x} \cos\beta = (\mathrm{P}p_{y,x} - p_{z,z}\, p_{y,x}) \cos\gamma,$$

ou bien :

$$p_{y,x}\,p_{z,x}\cos\alpha + p_{y,x}\,p_{z,y}\cos\beta + p_{z,x}\,p_{z,y}\cos\gamma = (\mathrm{P}p_{z,y} + p_{y,x}\,p_{z,x} - p_{x,x}\,p_{z,y})\cos\alpha$$

$$p_{y,x}\,p_{z,x}\cos\alpha + p_{y,x}\,p_{z,y}\cos\beta + p_{z,x}\,p_{z,y}\cos\gamma = (\mathrm{P}p_{z,x} + p_{y,x}\,p_{z,y} - p_{y,y}\,p_{z,x})\cos\beta,$$

$$p_{y,x}\,p_{z,x}\cos\alpha + p_{y,x}\,p_{z,y}\cos\beta + p_{z,x}\,p_{z,y}\cos\gamma = (\mathrm{P}p_{y,x} + p_{z,x}\,p_{z,y} - p_{z,z}\,p_{y,x})\cos\gamma.$$

Par conséquent, l'équation du plan est :

$$\frac{x'-x}{\mathrm{P}p_{z,y} + p_{y,x}p_{z,x} - p_{x,x}p_{z,y}} = \frac{y'-y}{\mathrm{P}p_{z,x} + p_{y,x}p_{z,y} - p_{y,y}p_{z,x}} = \frac{z'-z}{\mathrm{P}p_{y,x} + p_{z,x}p_{z,y} - p_{z,z}\,p_{y,x}}.$$

Dans cette équation x', y', z' sont les coordonnées courantes d'un point quelconque du plan, et x, y, z les coordonnées du point M.

262. Problème. — *Trouver l'équation du plan de l'élément* ω' *soumis à une force élastique donnée.* Les grandeurs, les signes et les directions des forces élastiques principales au point M étant supposées connues, nous pouvons prendre le point M pour origine, et pour axes les axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité. L'équation de cette surface est alors :

$$\frac{x^2}{\mathrm{P}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{P}'^2} + \frac{z^2}{\mathrm{P}''^2} = 1. \qquad (15)$$

Dans ce cas, les forces élastiques exercées sur les plans coordonnés sont normales à ces plans, et elles ont pour valeurs P, P', P''.

On a donc actuellement :

$$p_{x,x} = \mathrm{P}, \;\; p_{y,y} = \mathrm{P}', \;\; p_{z,z} = \mathrm{P}'',$$
$$p_{x,y} = p_{x,z} = p_{y,z} = 0.$$

Cela posé, soit p' la force élastique donnée, et soient p'_x, p'_y, p'_z ses composantes; les formules (4) nous donnent :

$$p'_x = \mathrm{P}\cos\alpha, \quad p'_y = \mathrm{P}'\cos\beta, \quad p'_z = \mathrm{P}''\cos\gamma,$$

α, β, γ étant ici les angles que la normale au plan ω' fait avec les axes principaux de l'ellipsoïde.

On en tire :

$$\cos\alpha = \frac{p'_x}{\mathrm{P}}, \quad \cos\beta = \frac{p'_y}{\mathrm{P}'}, \quad \cos\gamma = \frac{p'_z}{\mathrm{P}''}. \qquad (16)$$

Or, l'équation d'un plan perpendiculaire à la direction α, β, γ étant :

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$

on a pour l'équation du plan de l'élément ω', rapporté aux axes principaux de l'ellipsoïde :

$$x\,\frac{p'_x}{\mathrm{P}} + y\,\frac{p'_y}{\mathrm{P}'} + z\,\frac{p'_z}{\mathrm{P}''} = 0. \qquad (17)$$

Par conséquent, *le plan de l'élément ω' est parallèle au plan tangent à la surface du second degré :*

$$\frac{x^2}{\mathrm{P}} + \frac{y^2}{\mathrm{P}'} + \frac{z^2}{\mathrm{P}''} = \pm \mathrm{K}^2, \qquad (18)$$

au point qui a pour coordonnées p'_x, p'_y, p'_z, c'est-à-dire au point où le rayon vecteur :

$$r = p' = \sqrt{p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z},$$

dirigé suivant p', rencontre cette surface, K^2 *étant une quantité positive quelconque.*

263. REMARQUE. — La formule (5'), appliquée au cas actuel, nous donne, en désignant par p'_n la composante de p' suivant la normale à l'élément :

$$p'_n = P\cos^2\alpha + P'\cos^2\beta + P''\cos^2\gamma. \qquad (19)$$

Si nous désignons par x, y, z les coordonnées du point où la droite qui représente p' rencontre l'ellipsoïde d'élasticité, la formule (19) nous donne, en ayant égard aux formules (16), et en observant que p'_x, p'_y, p'_z ne sont autres que les coordonnées x, y, z de l'extrémité de la direction p' :

$$p'_n = \frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} + \frac{z^2}{P''}. \qquad (20)$$

264. *Discussion.* — Si les trois racines de l'équation du troisième degré (14) sont de mêmes signes, c'est-à-dire si elles représentent trois pressions ou trois tractions, l'équation (18) représente un ellipsoïde concentrique à l'ellipsoïde d'élasticité. Les axes de ces deux ellipsoïdes ont la même direction, mais les axes de l'ellipsoïde (18) sont proportionnels aux racines carrées des forces élastiques principales.

Tout demi diamètre de cet ellipsoïde représente une force élastique de même espèce que les forces élastiques principales, c'est-à-dire une pression ou une traction oblique.

Si les forces élastiques principales sont égales, les deux ellipsoïdes (15) et (18) deviennent des sphères : toutes les forces élastiques sont égales et elles sont normales aux éléments correspondants. Si l'une des forces élastiques principales est de signe contraire aux deux autres, l'équation (18) représente deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes. Si la direction de p' rencontre le premier hyperboloïde, cette force élastique est de même nature que les deux forces élastiques principales de même signe; le contraire a lieu si la direction de p' rencontre l'hyperboloïde à deux nappes.

Ces deux surfaces ont le même cône asymptote :

$$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} + \frac{z^2}{P''} = 0;$$

le passage de l'une à l'autre des deux espèces de forces élastiques a lieu sur ce cône asymptote.

Il résulte de la formule (20) que, pour tout diamètre qui coïncide avec une génératrice du cône, la composante normale de la force élastique p' est nulle : cette force élastique est donc dirigée suivant la génératrice du cône qui passe par l'élément qui lui correspond. Ainsi donc, la génératrice du cône représente une force élastique s'exerçant suivant le plan tangent correspondant : c'est pour cette raison que ce cône a reçu le nom de *cône de glissement*.

265. *Cas particuliers.* — 1° Supposons que l'une des forces élastiques principales soit nulle, par exemple $P'' = 0$, c'est-à-dire que l'une des racines de l'équation du troisième degré soit nulle. Il existe alors au point M un élément plan qui n'est soumis à aucune force élastique : cet élément ω est perpendiculaire à Mz. Or, la propriété de l'égalité des composantes normales réciproques nous apprend que ce plan doit contenir toutes les forces élastiques relatives à tous les éléments superficiels passant par M. En effet, la force élastique pour ce plan étant nulle, sa projection sur la normale à un autre plan quelconque Ω passant par M sera nulle; mais, en vertu de la propriété de l'égalité des composantes normales réciproques, la projection de la force élastique relative au plan Ω sur la normale au plan de l'élément ω est égale à la projection sur la normale à Ω de la force élastique relative à ω, et cette dernière projection étant nulle, il en sera de même de la première.

Donc, la force élastique relative à Ω est dans le plan de l'élément ω.

Prenons ce plan pour plan des xy, et pour axes des x et des y les directions des deux forces élastiques principales P et P'; soient γ l'angle d'un élément plan ω, avec le plan des xy, et x_1, y_1 et $z_1 = 0$ les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur représentatif de la force élastique relative à cet élément. Nous aurons :

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{P}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{P'},$$

et la formule :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

nous donne :

$$\frac{x_1^2}{P^2} + \frac{y_1^2}{P'^2} = \sin^2\gamma. \qquad (21)$$

Donc, les forces élastiques exercées sur les éléments plans de même inclinaison γ sont les demi diamètres d'une ellipse dont les demi axes sont P sin γ et P' sin γ.

Le plan de l'élément ω_1 a pour équation :

$$\frac{xx_1}{P} + \frac{yy_1}{P'} + z\cos\gamma = 0,$$

et sa trace sur le plan des xy est parallèle à la tangente à la conique dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} = \pm K^2, \qquad (22)$$

au point où cette courbe est rencontrée par le demi diamètre qui représente la force élastique sur l'élément ω_1.

L'équation (22) représente une ellipse si P et P' sont de même signe; si P et P' sont de signes contraires, elle représente deux hyperboles conjuguées dont les asymptotes sont données par l'équation :

$$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{P'} = 0.$$

Ces asymptotes remplacent dans le cas actuel le cône de glissement (n° **264**).

2° Supposons deux forces élastiques principales nulles, par exemple $P' = 0$, $P'' = 0$. D'après la propriété de l'égalité des composantes normales réciproques, on en conclut que toutes les forces élastiques sont dirigées suivant une même droite qui est la force élastique principale P.

La force élastique p' pour un élément plan quelconque dont la normale est N' est donnée en grandeur par la formule :

$$p' = P\cos(P, N'),$$

et elle est dirigée suivant P.

266. Remarque. — Si deux des racines P de l'équation (14) sont égales, les deux surfaces (15) et (18) sont de révolution; tous les demi diamètres situés dans l'équateur de l'ellipsoïde (15) représentent des forces élastiques normales.

Si les trois racines de l'équation (14) sont égales, les surfaces (15) et (18) sont des sphères; toutes les forces élastiques sont normales, et elles ont la même valeur.

Expression de l'écartement.

267. Nous avons vu que les équations (3) (n° **247**) et (4) (n° **250**) renferment six fonctions N_i, T_i, dont dépendent les forces élastiques intérieures. Ces six fonctions vérifient trois équations différentielles partielles (n° **247**), et doivent rendre identiques les équations (4) aux différents points de la surface du corps. Or, trois équations différentielles partielles ne permettent de déterminer que trois fonctions, et les équations de condition (4) entre ces fonctions servent à déterminer les constantes d'intégration.

Il ne doit donc y avoir que trois fonctions dont dépendent les N_i et les T_i : c'est ce que nous allons reconnaître en cherchant les relations entre les forces élastiques et les déplacements moléculaires.

268. Imaginons un système de points matériels infiniment rapprochés, et rapporté à trois axes rectangulaires. Ce système n'étant soumis à aucune force extérieure, soient x, y, z les coordonnées primitives d'un point M qui fait partie de ce système.

Lorsque les efforts extérieurs ont déformé ce corps, le point M occupe une nouvelle position m. Soient $x + u$, $y + v$, $z + w$ les nouvelles coordonnées de ce point; u, v, w sont les projections du déplacement Mm sur les axes. Ces projections varient au même instant d'un point à un autre, et pour un même point elles varient avec le temps, si le corps se déforme ou vibre. Ce sont donc des fonctions continues des quatre variables x, y, z, et t.

Si le corps est légèrement déformé, u, v, w ont de petites valeurs dans toute l'étendue du milieu.

Soit M' un point du milieu voisin de M (fig. 49), et soient :

$$x' = x + h, \quad y' = y + k, \quad z' = z + l,$$

ses coordonnées primitives ; soit m' la position de M' après la déformation. Les coordonnées de ce point m' sont :

$$x' + u', \ y' + v', \ z' + w';$$

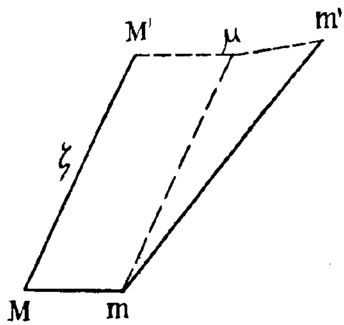


Fig. 49.

h, k, l sont évidemment les projections de $MM' = \zeta$ sur les axes : ce sont des quantités très petites comme ζ ; les cosinus directeurs de MM' sont $\frac{h}{\zeta}$, $\frac{k}{\zeta}$, $\frac{l}{\zeta}$; u', v', w' sont les projections du déplacement $M'm'$ sur les axes : ce sont évidemment les valeurs de u, v, w, quand on remplace x par $x + h$, y par $y + k$, et z par $z + l$. Nous aurons donc, par la formule de Taylor,

$$
\begin{aligned}
u' &= u + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}, \\
v' &= v + h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad (23) \\
w' &= w + h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Nous supposerons h, k, l assez petits pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la première : c'est ce qui arrivera dans le cas actuel, puisque l'action mutuelle des points M et M', venus en m et m', n'existe que si ζ est très petit.

269. Cherchons maintenant l'expression de l'écartement.

Menons par le point m une droite $m\mu$ égale et parallèle à MM' (fig. 49); l'écartement $\Delta\zeta$ sera égal à mm' — MM', ou bien $mm' - m\mu$. Cet écartement peut être exprimé par la projection de $\mu m'$ sur μm, ou sur MM'. Cherchons donc la projection de $\mu m'$ sur MM', en appliquant le théorème des projections. Les projections de $\mu m'$ sur les axes sont : $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$; en effet, les coordonnées de μ sont :

$$x + h + u, \quad y + k + v, \quad z + l + w.$$

et celles de m' sont :

$$x' + u' = x + h + u', \quad y' + v' = y + k + v', \quad z' + w' = z + l + w';$$

par suite,

$$\Delta\zeta = (u' - u)\frac{h}{\zeta} + (v' - v)\frac{k}{\zeta} + (w' - w)\frac{l}{\zeta}, \quad (24)$$

ou bien, en remplaçant $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$ par leurs valeurs,

$$\Delta\zeta = \frac{1}{\zeta}\left[\begin{array}{l} h^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + k^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + l^2\dfrac{\partial w}{\partial z} + kl\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ + lh\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + hk\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{array}\right].$$

Or, en désignant par φ et ψ les angles qui déterminent la direction de ζ (nos **242** et **251**), on a :

$$h = \zeta\cos\varphi\cos\psi, \quad k = \zeta\cos\varphi\sin\psi, \quad l = \zeta\sin\varphi,$$

et, par conséquent,

$$\Delta\zeta = \zeta \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos^2\varphi\sin^2\psi + \dfrac{\partial w}{\partial z}\sin^2\varphi \\ + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi \\ + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi \\ + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Mais, $\Delta\zeta$ étant très petit par rapport à ζ, il s'ensuit que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots$ sont très petites.

Le rapport $\frac{\Delta\zeta}{\zeta}$ est la *dilatation linéaire* au point M dans la direction ζ déterminée par les angles φ et ψ.

270. *Cas particuliers.* — 1° Si ζ ou MM′ est parallèle à l'axe des x, on a $\varphi = 0$, $\psi = 0$, et alors :

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (26)$$

2° Si ζ ou MM′ est parallèle à l'axe des y, on a $\varphi = 0$, $\psi = 90°$, et il vient :

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (27)$$

3° Si $\zeta =$ MM′ est parallèle à l'axe des z, on a $\varphi = 90°$, et il vient :

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (28)$$

271. D'après cela donc, la ligne primitive dx, devient, après la déformation :

$$dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

de même, les lignes dy et dz deviennent respectivement :

$$dy\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \text{et } dz\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Il en résulte que l'élément primitif :

$$\varpi = dx\,dy\,dz,$$

devient, après la déformation :

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

ou bien :

$$\varpi\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

en négligeant les produits des dilatations linéaires; il en résulte que la *dilatation cubique* au point M est :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (29)$$

PROPRIÉTÉ. — *La dilatation cubique en un point du milieu est égale à la somme des dilatations linéaires prises dans trois directions rectangulaires.*

Si $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ sont négatifs, ils représentent des *contractions;* si θ est négatif, il donne la *contraction cubique*.

272. Si, le point M restant le même, M′ se déplace dans l'hémisphère SA, $\Delta\zeta$ change avec ζ, φ et ψ; mais, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots$ restent constantes, et égales aux valeurs qui se rapportent au point M.

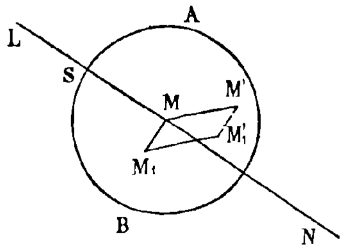


Fig. 50.

Supposons maintenant M_1 (fig. 50) un point sur la normale à l'élément plan ω et à une profondeur égale f en dessous de M [1] et soient m, n, p les cosinus directeurs de la normale. Par le point M' menons $M'M'_1$ égal et parallèle à MM_1 et joignons $M_1M'_1$.

Soient u_1, v_1, w_1 les valeurs de u, v, w en M_1, et u'_1, v'_1, w'_1 ces valeurs en M'_1; évidemment $\zeta_1 = M_1M'_1$ est égal et parallèle à $\zeta = MM'$, et, par suite, $\zeta_1 = \zeta$.

Nous allons démontrer que $\Delta\zeta_1 = \Delta\zeta$: en effet, les coordonnées primitives de M_1 sont :

$$x - mf, \quad y - nf, \quad z - pf;$$

et les coordonnées primitives de M'_1 sont :

$$x + h - mf \quad y + k - nf, \quad z + l - pf.$$

Il en résulte que u_1 qui est la valeur de u au point M_1 $(x - mf, y - nf, z - pf)$ sera donnée par la formule de Taylor :

$$u_1 = u - mf\frac{\partial u}{\partial x} - nf\frac{\partial u}{\partial y} - pf\frac{\partial u}{\partial z};$$

de même, u'_1 qui est la valeur de u au point M'_1

1. Le point M_1 est donc à l'intérieur du cylindre de base ω.

$(x+h-mf,\ y+k-nf,\ z+l-pf)$ est donnée par la formule :

$$u'_1 = u + (h-mf)\frac{\partial u}{\partial x} + (k-nf)\frac{\partial u}{\partial y} + (l-pf)\frac{\partial u}{\partial z};$$

d'où :

$$u'_1 - u_1 = h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} = u' - u.$$

De même,

$$v'_1 - v_1 = v' - v, \quad w'_1 - w_1 = w' - w.$$

Les cosinus directeurs de $M_1M'_1$ sont $\frac{h}{\zeta}, \frac{k}{\zeta}, \frac{l}{\zeta}$, puisque $M_1M'_1$ est égal est parallèle à MM'; par conséquent, on a :

$$\Delta\zeta_1 = (u'_1 - u_1)\frac{h}{\zeta} + (v'_1 - v_1)\frac{k}{\zeta} + (w'_1 - w_1)\frac{l}{\zeta}$$

$$= (u' - u)\frac{h}{\zeta} + (v' - v)\frac{k}{\zeta} + (w' - w)\frac{l}{\zeta},$$

et, par suite,

$$\Delta\zeta_1 = \Delta\zeta.$$

Il résulte de là la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. — *Que la distance $\zeta(\varphi, \psi)$ ait ou non une de ses extrémités en* M, *pourvu qu'elle parte de l'intérieur du cylindre de base ω, et aboutisse dans l'hémisphère* SA, *son accroissement $\Delta\zeta$ sera donné par la formule :*

$$\Delta\zeta = \zeta \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos^2\varphi\sin^2\psi + \dfrac{\partial w}{\partial z}\sin^2\varphi \\ + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi \\ + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi \\ + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi \end{array}\right];$$

en d'autres termes, $\Delta\zeta$ se composera de six termes variables avec ζ, φ, ψ, et ayant respectivement pour coefficients :

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ces coefficients sont constants et ont les valeurs relatives au point M où se trouve l'élément ω. Lamé désigne ces coefficients par G_i.

Expressions générales des N_i et des T_i.

273. Pour déterminer les trois composantes de la force élastique exercée sur l'élément ω, nous observerons que chaque couple de deux points M_1, M'_1 de masses μ_1, μ'_1, donne lieu à une action mutuelle $\mu_1\mu'_1\,F(\zeta)\,\Delta\zeta$. Cette action se décompose en trois composantes respectivement égales à cette force multipliée par les cosinus des angles que sa direction ζ fait avec les axes, c'est-à-dire par $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$ et $\sin\varphi$. Nous aurons donc les trois composantes :

$$\mu_1 \mu'_1 \, F(\zeta) \, \Delta\zeta \cos\varphi \cos\psi, \quad \mu_1 \mu'_1 \, F(\zeta) \, \Delta\zeta \cos\varphi \sin\psi,$$
$$\mu_1 \mu'_1 \, F(\zeta) \, \Delta\zeta \sin\varphi \, ;$$

nous obtiendrons un résultat analogue pour chaque couple de deux points $M_1 M'_1$, situés l'un dans le cylindre de base ω, l'autre dans l'hémisphère SA.

Nous aurons donc *pour chacun de ces couples de points trois composantes analogues aux trois précédentes*. En faisant la somme des composantes suivant chacun des axes pour chaque couple de deux points $M_1 M'_1$, nous aurons les trois composantes suivant les axes de la force élastique exercée sur l'élément ω. Ainsi, la composante suivant l'axe des x sera :

$$\Sigma \mu_1 \mu'_1 \, F(\zeta) \, \Delta\zeta \cos\varphi \cos\psi \, ;$$

de même, pour les axes des y et des z, nous aurons les deux composantes :

$$\Sigma \mu_1 \mu'_1 \, F(\zeta) \, \Delta\zeta \cos\varphi \sin\psi \text{ et } \Sigma \mu_1 \mu'_1 \, E(\zeta) \, \Delta\zeta \sin\varphi.$$

Cela posé, si dans la première somme nous remplaçons les $\Delta\zeta$ par leurs valeurs, nous obtiendrons six espèces de termes qui auront pour coefficients les G_i, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial z}, \ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

nous aurons des résultats analogues pour les deux autres axes.

Il résulte de là que la force élastique exercée sur l'élément plan ω en M nous donne trois composantes comprenant chacune six termes ayant respectivement les G_i pour coefficients. Par conséquent, la force élastique exercée en M sur l'élément parallélipipédique nous donnera neuf composantes (trois pour chacune des faces en M) ; donc, les N_i, T_i comprennent chacun six termes ayant les G_i pour coefficients, et nous pourrons poser :

$$N_i = A_i \frac{\partial u}{\partial x} + B_i \frac{\partial v}{\partial y} + C_i \frac{\partial w}{\partial z} + D_i \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+ E_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (30)$$

$$T_i = a_i \frac{\partial u}{\partial x} + b_i \frac{\partial v}{\partial y} + c_i \frac{\partial w}{\partial z} + d_i \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+ e_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

pour $i = 1, 2, 3$; les coefficients A_i, a_i, . . . sont au nombre de $12 \times 3 = 36$.

274. Les résultats auxquels nous venons d'arriver sont évidemment indépendants du nombre des couples de molécules, et, par conséquent, du nombre des termes multipliés par le même G_i. Ces termes peuvent différer par les valeurs de ζ, φ, ψ, ainsi que par les valeurs de $F(\zeta)$ et de μ_1 et μ'_1 ; ils peuvent être plus nombreux pour certaines directions que pour d'autres. En d'autres termes, que le corps soit homogène ou non, qu'il soit composé d'une seule espèce de molécules ou de plusieurs espèces, que les lois des actions moléculaires soient les mêmes fonctions de la distance, ou des fonctions différentes, on arriverait aux mêmes conclusions. Si le corps n'est pas homogène, les coefficients A_i, a_i . . . varieraient d'un point M à un autre. Lorsque le corps est homogène (n° **237**) ces coefficients sont constants, c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes valeurs en tous les points du milieu.

275. Remarque. — Tous les phénomènes relatifs à l'élasticité des corps solides homogènes se déduisent des formules (3), (4), (29) et (30) que nous avons établies (nos **247, 250, 271** et **273**), sauf les différences provenant de ce que les développements (23) (n° **268**) ne sont qu'approchés.

276. Les expressions précédentes des N_i, T_i, se simplifient lorsqu'il s'agit de corps homogènes et d'élasticité constante dans toutes les directions, c'est-à-dire de corps isotropes (n° **241**). A cet effet, nous allons étudier deux cas particuliers.

Cas d'une traction.

277. Considérons *un corps solide homogène et d'élasticité constante*, la loi du déplacement moléculaire étant exprimée par les valeurs :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = cz,$$

c étant une constante.

D'après cette loi, les molécules se déplacent parallèlement à l'axe des z, de quantités proportionnelles à leurs distances au plan des xy : c'est donc une *traction* parallèle à l'axe des z.

Cherchons la force élastique exercée sur un élément plan ω perpendiculaire à Ox, dont le plan PQ sépare le milieu en deux parties, savoir : B du côté de l'origine, et du cylindre qui a pour base ω, et A du côté opposé (fig. 51). Soient μ une molécule du cylindre, et m une molécule de A ; par $m\mu$ et la normale μN faisons passer un plan. Prenons dans ce plan une droite $\mu m'$ faisant avec μN un angle égal à $m\mu$N, et soit $\mu m' = \mu m$.

Cela posé, donnons au corps une translation *descendante* qui ramène μ à sa position, ce qui ne modifie pas les forces élastiques. Le déplacement ascendant de m qui est proportionnel à l'ordonnée z, surpassant autant

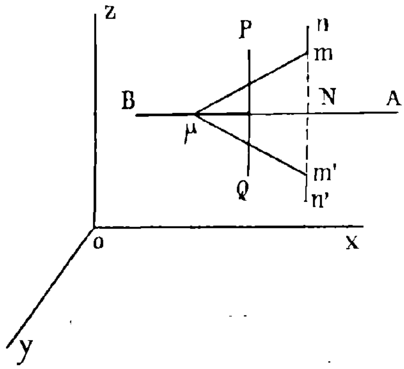


Fig. 51.

celui de μ, que le déplacement de μ surpasse celui de m' (puisque m et m' sont symétriques par rapport à μN), la translation descendante, qui est la même pour tous les points du corps, laissera le point m déplacé de mn, et déplacera le point m' de $m'n' = mn$, mais de sens contraire. En effet, le déplacement primitif est proportionnel à l'ordonnée z : donc, il est plus grand pour m que pour μ, et plus grand pour μ que pour m'. Si donc on ramène μ à sa position première, m restera déplacé en n plus haut que m, tandis que m' viendra en n' plus bas. Après le déplacement primitif, la coordonnée z de μ devient $z + cz$; la coordonnée $z + h$ de m devient $z + h + cz + ch$, et la coordonnée $z — h$ de m' devient $z — h + cz — ch$. Si l'on ramène μ à sa position primitive par une translation descendante cz, les coordonnées de ces points diminueront de cz; par conséquent, le point m restera déplacé en n, tel que $mn = ch$, et le point m' sera déplacé en n', tel que $m'n' = ch$, de sens contraire. D'ailleurs, les distances μm et $\mu m'$ sont égales, et les projections $\Delta\zeta$ de mn et $m'n'$ sur ces deux droites μm et $\mu m'$ sont aussi égales; donc, les déplacements relatifs à μ des deux points de même masse m et m' produiront sur μ deux attractions égales dirigées suivant μm et $\mu m'$, et dont la résultante sera dirigée suivant la bissectric μN, c'est-à-dire suivant la normale. Il en sera de même pour tous les couples de points m et m'. Par conséquent, la résultante totale, c'est-à-dire la force élastique cherchée sera normale à l'élément plan ω.

Ainsi donc, lorsque la loi du déplacement est donnée par les formules :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = cz,$$

et que le *solide est homogène* et d'*élasticité constante,* des trois composantes N_1, T_2, T_3 de la force élastique pour un élément plan perpendiculaire à Ox, la première seule N_1 existe, les deux autres T_2 et T_3 sont nulles.

Cas d'une torsion.

278. Supposons maintenant que la loi du déplacement moléculaire soit exprimée par les formules :

$$u = -\omega yz, \quad v = \omega xz, \quad w = 0,$$

ω étant une constante. Chaque molécule se déplace parallèlement au plan des xy, et décrit autour de l'axe des z un arc de cercle proportionnel à sa distance à l'axe et à sa hauteur au-dessus du plan des xy : c'est donc une *torsion* autour de l'axe des z.

Cherchons la force élastique pour un élément plan ω perpendiculaire à l'axe des x en un point du plan méridien des zx. Soient μ une molécule du cylindre (fig. 52), m et m' deux points symétriques par rapport à la normale $B\mu A$, et situés dans le plan méridien. Ces points sont : m la projection des deux points M et M_1 symétriquement placés M en avant, et M_1 en arrière du plan méridien; m' la projection des deux points M' et M'_1 symétriques de M et M_1 par rapport à l'horizon de μ.

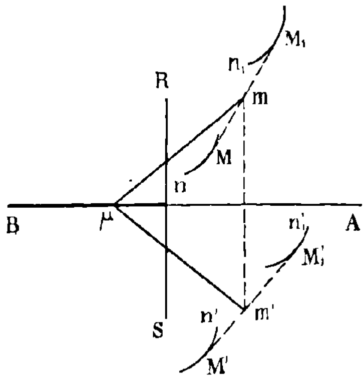


Fig. 52.

Cela posé, donnons à tout le corps un *mouvement de rotation* autour de Oz, qui ramène μ à sa position primitive, ce qui n'altère pas les forces élastiques. Les déplacements relatifs à μ de M, M_1, M', M'_1 sont des arcs de cercle égaux. Mais, les points M et M_1 étant plus éloignés du plan des xy que le point μ, ces deux points, après la rotation en question, viendront *en dehors du méridien* aux points n et n_1; en d'autres termes, les déplacements de ces points, qui ne reviennent pas à leur position primitive, iront de l'arrière vers l'avant du méridien. Au contraire, les points M' et M'_1 étant moins éloignés du plan des xy que le point μ viendront après la rotation aux points n' et n'_1; en d'autres termes, les déplacements de ces deux points iront de l'avant vers l'arrière du méridien. Il est d'ailleurs facile de se rendre compte de l'exactitude de ce que nous venons de dire. En effet, le déplacement moléculaire étant proportionnel à z, c'est-à-dire à la hauteur, est différent pour M et M_1 de ce qu'il est pour μ, le z de M et M_1 étant plus grand que celui de μ. D'ailleurs, il est différent pour μ de ce qu'il est pour M' et M'_1, le z de μ étant plus grand que

24

celui de M' et M'_1. Il résulte de là que, par la rotation qui ramène μ à sa position primitive, M et M_1 resteront en n et n_1 en arrière des positions M et M_1, tandis que M' et M'_1 dépasseront en n' et n'_1 les positions M' et M'_1. En d'autres termes, on peut dire que les déplacements relatifs à μ des points M et M_1 vont de l'arrière vers l'avant du méridien, tandis que ceux de M' et M'_1 vont de l'avant vers l'arrière. Il résulte de là que le point M venu en n, et le point M'_1, venu en n'_1, se sont éloignés de μ ou du méridien, tandis que M_1 et M', venus respectivement en n_1 et n' se sont rapprochés de μ. Mais, les distances μM, μM_1, $\mu M'$, $\mu M'_1$ sont égales; les projections des déplacements de ces points sur ces droites sont aussi égales. Donc, les actions exercées sur μ par ces quatre points sont égales, mais deux sont attractives (n° **238**), savoir celles suivant μM et $\mu M'_1$, puisque les points se sont éloignés de μ : elles se composent en une résultante dirigée suivant la bissectrice μA, c'est-à-dire suivant la normale. Les deux autres actions sont répulsives, dirigées suivant $M_1\mu$ et $M'\mu$, et se composent aussi en une résultante dirigée suivant la bissectrice, c'est-à-dire suivant la normale μB. Ces deux résultantes qui sont égales et de sens contraires se détruisent. Il en sera de même pour tous les groupes que l'on peut considérer. Donc, la résultante totale, c'est-à-dire la force élastique cherchée est nulle.

Ainsi donc, lorsque la loi du déplacement moléculaire est donnée par les formules :

$$u = -\omega yz, \quad v = \omega xz, \quad w = 0,$$

et que le *corps est homogène* et d'*élasticité constante*, les trois composantes N_1, T_3, T_2 de la force élastique exercée en un point du méridien des zx sur un élément plan perpendiculaire à l'axe des x, sont nulles.

279. Cherchons maintenant la force élastique exercée au même point sur un élément plan horizontal perpendiculaire à l'axe Oz. Nous verrons que cette force élastique est parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire tangentielle ; en d'autres termes, des trois composantes T_2, T_1, N_3 de cette force élastique, T_1 seule existe, et les deux autres sont nulles. En effet, soit μ un point appartenant au cylindre de base ω (fig. 53), m un point projection des deux points M et M_1 symétriques.

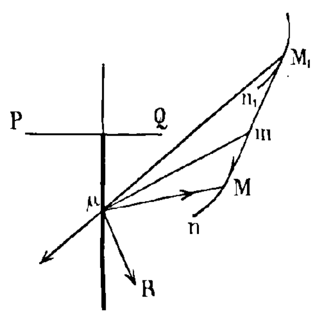


Fig. 53.

Les actions de M et M_1 sur μ sont égales et dirigées suivant μM et $M_1\mu$, la première attractive, la seconde répulsive.

Leur résultante R est dirigée suivant la perpendiculaire à la bissectrice μm : elle est horizontale et perpendiculaire au méridien. Il en est de même pour tous les groupes analogues. La résultante totale ou la force élastique cherchée est donc perpendiculaire au méridien, c'est-à-dire que $T_2 = 0$, ainsi que N_3.

280. Nous avons étudié le phénomène de la traction et celui de la torsion, lorsque le milieu présente par rapport à la ligne de traction et par rapport à deux plans, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à cette ligne les dispositions moléculaires symétriques que nous avons supposées. Il nous reste à vérifier si ces mêmes lois ont encore lieu lorsque le corps satisfaisant aux mêmes conditions de symétrie est tiré dans une autre direction ou tordu autour d'un autre axe.

A cet effet, nous aurons à faire usage des formules de transformation des coordonnées.

Formules de transformation des forces élastiques.

281. Soient donc x', y', z' les coordonnées du point M rapporté à trois nouveaux axes rectangulaires de même origine, m, n, p les cosinus directeurs des nouveaux axes, u', v', w' les projections du déplacement du point M sur les nouveaux axes.

Nous aurons les formules :

$$\begin{aligned} x &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z &= p_1 x' + p_2 y' + p_3 z', \end{aligned} \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} u' &= m_1 u + n_1 v + p_1 w, \\ v' &= m_2 u + n_2 v + p_2 w, \\ w' &= m_3 u + n_3 v + p_3 w, \end{aligned} \qquad (32)$$

et l'on a les relations :

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 &= 1, \\ m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 &= 1, \\ m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 &= 1, \\ m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 &= 0, \\ m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 &= 0, \\ m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1, \\ n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 &= 0, \\ p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 &= 0, \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Pour obtenir les nouvelles dérivées $\frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial u'}{\partial y'} \dots \frac{\partial v'}{\partial x'} \dots$ en fonction des anciennes $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ il faut différentier les équations (32), en y considérant u, v, w, comme des fonctions de x, y, z, lesquelles sont des fonctions de x', y', z', en vertu des équations (31).

Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial x'} &= m_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + p_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_1 p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\quad + p_1 m_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_1 n_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial v'}{\partial y'} &= m_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} + p_2^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_2 p_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\quad + p_2 m_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_2 n_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (35) \\
\frac{\partial w'}{\partial z'} &= m_3^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_3^2 \frac{\partial v}{\partial y} + p_3^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_3 p_3 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\quad + p_3 m_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_3 n_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} &= 2 m_2 m_3 \frac{\partial u}{\partial x} + (n_2 p_3 + n_3 p_2) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\quad + 2 n_2 n_3 \frac{\partial v}{\partial y} + (p_2 m_3 + p_3 m_2)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&\quad + 2 p_2 p_3 \frac{\partial w}{\partial z} + (m_2 n_3 + m_3 n_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} &= 2 m_3 m_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (n_3 p_1 + n_1 p_3) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\quad + 2 n_3 n_1 \frac{\partial v}{\partial y} + (p_3 m_1 + p_1 m_3)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&\quad + 2 p_3 p_1 \frac{\partial w}{\partial z} + (m_3 n_1 + m_1 n_3)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial x'}=2m_1m_2\frac{\partial u}{\partial x}+(n_1p_2+n_2p_1)\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+2n_1n_2\frac{\partial v}{\partial y}+(p_1m_2+p_2m_1)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$+2p_1p_2\frac{\partial w}{\partial z}+(m_1n_2+m_2n_1)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

282. Nous avons désigné (n° **247**) par :

$$\begin{matrix} N_1, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3, \end{matrix}$$

les composantes des forces élastiques exercées au point M sur des plans perpendiculaires aux anciens axes x, y, z.

Représentons de même par :

$$\begin{matrix} N'_1, & T'_3, & T'_2, \\ T'_3, & N'_2, & T'_1, \\ T'_2, & T'_1, & N'_3, \end{matrix}$$

les composantes, suivant les nouveaux axes, des forces élastiques exercées en ce même point M, sur des plans perpendiculaires aux nouveaux axes x', y', z', et proposons nous de déterminer les N'_i, T'_i en fonction des N_i, T_i.

Désignons par X'_i, Y'_i, Z'_i les composantes de ces trois dernières forces élastiques suivant les anciens axes. Nous aurons, en vertu du théorème des projections, puisque N'_1, T'_3, T'_2 sont les composantes suivant les axes x', y', z' de la force élastique exercée sur un élément plan perpendiculaire à Ox', et X'_1 la composante de cette même force élastique suivant Ox ;

$$X'_1 = m_1N'_1 + m_2T'_3 + m_3T'_2.$$

D'autre part, d'après les formules (4) (n° **250**), on a aussi :

$$X'_1 = m_1 N_1 + n_1 T_3 + p_1 T_2,$$

et, par suite,

$$X'_1 = m_1 N'_1 + m_2 T'_3 + m_3 T'_2 = m_1 N_1 + n_1 T_3 + p_1 T_2;$$

de même,

$$\begin{aligned}
Y'_1 &= n_1 N'_1 + n_2 T'_3 + n_3 T'_2 = m_1 T_3 + n_1 N_2 + p_1 T_1,\\
Z'_1 &= p_1 N'_1 + p_2 T'_3 + p_3 T'_2 = m_1 T_2 + n_1 T_1 + p_1 N_3;\\
X'_2 &= m_1 T'_3 + m_2 N'_2 + m_3 T'_1 = m_2 N_1 + n_2 T_3 + p_2 T_2,\\
Y'_2 &= n_1 T'_3 + n_2 N'_2 + n_3 T'_1 = m_2 T_3 + n_2 N_2 + p_2 T_1,\\
Z'_2 &= p_1 T'_3 + p_2 N'_2 + p_3 T'_1 = m_2 T_2 + n_2 T_1 + p_2 N_3;\\
X'_3 &= m_1 T'_2 + m_2 T'_1 + m_3 N'_3 = m_3 N_1 + n_3 T_3 + p_3 T_2,\\
Y'_3 &= n_1 T'_2 + n_2 T'_1 + n_3 N'_3 = m_3 T_3 + n_3 N_2 + p_3 T_1,\\
Z'_3 &= p_1 T'_2 + p_2 T'_1 + p_3 N'_3 = m_3 T_2 + n_3 T_1 + p_3 N_3.
\end{aligned} \tag{36}$$

Ces dernières formules nous permettent de déterminer les N'_i, T'_i en fonction des N_i, T_i, en ayant égard aux formules (33) et (34). On en tire facilement :

$$\begin{aligned}
N'_1 &= m_1^2 N_1 + n_1^2 N_2 + p_1^2 N_3 + 2n_1 p_1 T_1 + 2p_1 m_1 T_2 + 2m_1 n_1 T_3,\\
N'_2 &= m_2^2 N_1 + n_2^2 N_2 + p_2^2 N_3 + 2n_2 p_2 T_1 + 2p_2 m_2 T_2 + 2m_2 n_2 T_3,\\
N'_3 &= m_3^2 N_1 + n_3^2 N_2 + p_3^2 N_3 + 2n_3 p_3 T_1 + 2p_3 m_3 T_2 + 2m_3 n_3 T_3,\\
T'_1 &= m_2 m_3 N_1 + n_2 n_3 N_2 + p_2 p_3 N_3 + (n_2 p_3 + n_3 p_2) T_1\\
&\qquad + (p_2 m_3 + p_3 m_2) T_2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2) T_3,\\
T'_2 &= m_3 m_1 N_1 + n_3 n_1 N_2 + p_3 p_1 N_3 + (n_3 p_1 + n_1 p_3) T_1\\
&\qquad + (p_3 m_1 + p_1 m_3) T_2 + (m_3 n_1 + m_1 n_3) T_3,\\
T'_3 &= m_1 m_2 N_1 + n_1 n_2 N_2 + p_1 p_2 N_3 + (n_1 p_2 + n_2 p_1) T_1\\
&\qquad + (p_1 m_2 + p_2 m_1) T_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) T_3.
\end{aligned} \tag{37}$$

Ajoutant les trois premières équations (35) et ayant égard aux formules (34), on trouve :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad (38)$$

par conséquent, la dilatation cubique (n° **271**) peut être exprimée par la somme des trois dilatations linéaires prises parallèlement aux nouveaux axes. Cela était d'ailleurs évident, puisque le choix des anciens axes était arbitraire.

De même, les trois premières équations (37) nous donnent en les ajoutant :

$$N'_1+N'_2+N'_3=N_1+N_2+N_3. \qquad (39)$$

283. Remarquons d'ailleurs que si, entre les douze équations (37) et (34) on élimine les neuf cosinus m_i, n_i, p_i, on obtiendra trois relations symétriques entre les N'_i, T'_i et les N_i, T_i; l'équation (39) est une de ces relations. Pour trouver les deux autres on devrait faire un calcul assez long; nous les avons déjà obtenues précédemment (n° **260**) par une autre méthode.

Expressions des N_i, T_i, pour un corps homogène et d'élasticité constante.

284. Proposons-nous maintenant de déterminer les valeurs des N_i, T_i dans le cas d'un corps homogène et d'élasticité constante. A cet effet, reprenons les formules que nous avons obtenues (n° **273**), et voyons comment elles se simplifient dans le cas actuel.

D'abord $N_1=p_{x,x}$ est la composante suivant l'axe des

x de la force élastique exercée sur l'élément plan ω perpendiculaire à l'axe des x : c'est donc la composante normale de cette force élastique; d'autre part, la projection u est perpendiculaire à ω, tandis que les projections v et w sont parallèles à ω, c'est-à-dire tangentielles.

Il en résulte que dans l'expression de N_1, u joue un rôle différent de v et w, qui jouent des rôles identiques; par conséquent, $\frac{\partial u}{\partial x}$ aura un coefficient distinct A, tandis que $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$ auront des coefficients B identiques, puisque rien ne doit changer quand on change y en z, et v en w, et réciproquement. Il est évident aussi que le binôme $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ aura un certain coefficient D, et que les binômes $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ auront le même coefficient E, puisque rien ne doit changer quand on change y en z, et v en w; ce coefficient E sera évidemment différent de D.

Nous aurons pour N_2 et N_3 les mêmes coefficients, en observant cependant que pour N_2, u devient v, perpendiculaire à l'élément, et pour N_3, u devient w.

En ce qui concerne T_1, qui est la composante de la force élastique exercée sur l'élément perpendiculaire à l'axe des y, et aussi la composante de la force élastique exercée sur l'élément perpendiculaire à l'axe des z, il est évident que v et w jouent le même rôle, et u un rôle distinct. D'où il résulte aussi que les coefficients des T_i se réduisent aussi à quatre : a, b, d, e.

Nous avons ainsi en tout huit coefficients, qui se distribuent comme l'indique le tableau suivant :

	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$	$\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$	$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$
N_1	A	B	B	D	E	E
N_2	B	A	B	E	D	E
N_3	B	B	A	E	E	D
T_1	a	b	b	d	e	e
T_2	b	a	b	e	d	e
T_3	b	b	a	e	e	d

285. Dans le cas particulier où l'on a :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = cz,$$

nous avons vu que l'on doit avoir (n° **277**) :

$$T_3 = 0, \quad T_2 = 0.$$

Or, le tableau précédent nous donnerait :

$$T_3 = ac, \quad T_2 = bc;$$

il faut donc que : $a = 0, \quad b = 0$.

Dans le cas particulier où l'on a :

$$u = -\omega yz, \quad v = \omega xz, \quad w = 0,$$

nous avons vu que l'on doit avoir (n^{os} **278** et **279**) :

$$N_1 = 0, \quad T_3 = 0, \quad T_2 = 0, \quad N_3 = 0.$$

Or, le tableau précédent nous donnerait :

$$N_1 = D\omega x, \quad T_3 = T_2 = e\omega x, \quad N_3 = E\omega x;$$

il faut donc que : $D = 0, \quad E = 0, \quad e = 0.$

Ainsi donc, dans le cas actuel, c'est-à-dire pour un corps homogène et d'élasticité constante, les N_i, T_i ne contiennent que trois coefficients. Si nous posons :

$$B = \lambda, \quad A = \lambda + 2\mu,$$

et si nous remplaçons $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ par θ, nous aurons les valeurs suivantes :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N_3 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_1 = d\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), T_2 = d\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), T_3 = d\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right). \quad (40)$$

286. Cela posé, si le corps est homogène et d'élasticité constante, il faut que, si l'on change d'axes coordonnés, l'on obtienne les mêmes formes et les mêmes coefficients pour les N'_i, T'_i. On doit donc avoir :

$$N'_1 = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'}. \quad (41)$$

Or, si l'on calcule N'_1 par la première formule (37), dans laquelle on remplacera les N_i, T_i par les valeurs (40), on trouve :

$$N'_1 = \lambda\theta + 2\mu \left(m_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + p_1^2 \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$+ 2d \left\{ n_1 p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + p_1 m_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_1 n_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\}$$

Or, en vertu de la première des équations (35), le coefficient de 2μ est égal à $\frac{\partial u'}{\partial x'}$, diminué du coefficient de $2d$; on a donc :

$$N'_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial x'} + 2(\mu - d)\left\{n_1p_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+p_1m_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+m_1n_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},$$

et, pour que cette expression soit identique à (41), on doit avoir $d = \mu$. On arriverait au même résultat si l'on considérait les autres N'_i, T'_i.

287. Il résulte donc de là que, dans le cas d'un corps homogène et d'élasticité constante, on a :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{42}$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad T_2 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad T_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

et, comme on le voit, ces expressions ne contiennent que deux coefficients λ et μ.

Cela posé, les lois que nous avons trouvées pour la traction et la torsion, lorsque le corps satisfait par rapport aux anciens axes aux conditions que nous avons supposées (n[os] **277, 278** et **279**) nous donnent pour les N_i et les T_i la forme (40). Si $d = \mu$, les N_i, T_i ont la forme (42), et il en est de même des N'_i, T'_i, relatifs à d'autres axes quelconques. Par conséquent, ces N'_i, T'_i reproduiront pour la traction et la torsion exactement les mêmes lois que les N_i, T_i, et il en résulte qu'il est indifférent de tirer le corps parallèlement à l'axe des z ou parallèlement à l'axe des z' ; il est indifférent aussi de tordre le corps autour de l'axe des z, ou autour de l'axe des z'.

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT INTÉRIEUR DES CORPS HOMOGÈNES ET D'ÉLASTICITÉ CONSTANTE.

288. Nous avons vu (nº **287**) que les valeurs des N_i, T_i sont données en fonction des déplacements u, v, w, par les formules :

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad T_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (1)$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad T_3 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes, et θ est donnée par la formule :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2)$$

D'ailleurs, ces six fonctions N_i, T_i doivent vérifier les trois équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X = 0,$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \rho Y = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho Z = 0,$$

ρ étant la densité du milieu, X, Y, Z les composantes rapportées à l'unité de masse des forces extérieures qui sollicitent le point M; si le corps se déforme ou vibre, les forces X, Y, Z comprendront en outre (n° **245**), en vertu du principe de d'Alembert, les forces d'inertie lesquelles ont pour valeurs $-\frac{d^2x}{dt^2}, -\frac{d^2y}{dt^2}, -\frac{d^2z}{dt^2}$. Or, si nous observons que les coordonnées du point M déplacé et venu en m, sont $x+u$, $y+v$, $z+w$, les forces d'inertie se réduisent à $-\frac{d^2u}{dt^2}, -\frac{d^2v}{dt^2}, -\frac{d^2w}{dt^2}$.

Si l'on met en évidence les forces d'inertie, et si l'on désigne encore par X, Y, Z les composantes des forces extérieures qui agissent sur la masse du point M, les équations (3) précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}+\rho X=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\
&\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}+\rho Y=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\qquad (4)\\
&\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}+\rho Z=\rho\frac{d^2w}{dt^2}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans ces équations N_i, T_i par leurs valeurs ci-dessus, et en ayant égard à l'expression (2) de θ, on a :

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+\rho X=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)+\rho Y=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\qquad (5)\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\right)+\rho Z=\rho\frac{d^2w}{dt^2},
\end{aligned}$$

ou bien, en employant la notation que nous avons adoptée précédemment (I, n° **401**) :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X = \rho \frac{d^2 u}{dt^2},$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho Y = \rho \frac{d^2 v}{dt^2}, \qquad (6)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z = \rho \frac{d^2 w}{dt^2}.$$

Ces équations aux dérivées partielles du second ordre entre les fonctions u, v, w expriment les lois du déplacement moléculaire. Elles sont applicables à tous les points du système.

Équations à la surface.

289. En général, des efforts extérieurs sont exercés sur la surface du système considéré. Il en résulte des équations qui doivent être satisfaites aux limites du corps, c'est-à-dire sur la surface du corps seulement, et que l'on appelle pour cette raison *équations à la surface*.

On les obtient en écrivant que, *pour un point quelconque de la surface limite, l'effort extérieur s'exerçant sur un élément plan de cette surface est de même grandeur et de même direction que la force élastique correspondante*.

Soient donc en un point quelconque (x, y, z) de la surface, F l'effort extérieur par unité de surface, l, m, n les angles de F avec les axes, α, β, γ les angles que fait avec les axes la normale en ce point, dirigée vers l'extérieur du corps, p'_x, p'_y, p'_z les composantes de la force élastique en ce point. Les équations à la surface seront :

$$p'_x = \mathrm{F}\cos l, \quad p'_y = \mathrm{F}\cos m, \quad p'_z = \mathrm{F}\cos n;$$

en remplaçant p'_x, p'_y, p'_z par ces valeurs dans les équations (4^{bis}) (n° **250**), il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\cos l &= \mathrm{N}_1\cos\alpha + \mathrm{T}_3\cos\beta + \mathrm{T}_2\cos\gamma, \\ \mathrm{F}\cos m &= \mathrm{T}_3\cos\alpha + \mathrm{N}_2\cos\beta + \mathrm{T}_1\cos\gamma, \qquad \text{(A)} \\ \mathrm{F}\cos n &= \mathrm{T}_2\cos\alpha + \mathrm{T}_1\cos\beta + \mathrm{N}_3\cos\gamma. \end{aligned}$$

Les premiers membres de ces équations, ainsi que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ seront des fonctions données de x, y, z. En remplaçant les N_i, T_i par leurs valeurs en fonction de u, v, w (n° **273**), on a trois équations auxquelles doivent satisfaire sur la surface limite les déplacements u, v, w, fonctions de x, y, z, t.

Ces mêmes fonctions doivent d'ailleurs satisfaire dans toute l'étendue du corps aux équations (6) (n° **288**).

En particulier, dans le cas d'un corps homogène et d'élasticité constante, on devra remplacer les N_i, T_i par les valeurs (42) (n° **287**).

290. Remarque I. — Si dans les formules (5) nous avons égard à la valeur (2) de θ, nous pourrons les mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] + \rho\mathrm{X} &= \rho\frac{d^2u}{dt^2}, \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\right] + \rho\mathrm{Y} &= \rho\frac{d^2v}{dt^2}, \qquad (7) \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}\right] + \rho\mathrm{Z} &= \rho\frac{d^2w}{dt^2}. \end{aligned}$$

291. Nous avons supposé jusqu'ici X, Y, Z quelconques. Le plus souvent ces forces X, Y, Z se réduisent aux composantes de la pesanteur, ou d'une force constante en grandeur et en direction, ou à des forces attractives ou répulsives émanant de centres extérieurs fixes, et inversement proportionnelles au carré de la distance. Nous supposerons, en général, qu'il existe une *fonction de force,* c'est-à-dire que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une même fonction U :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On a évidemment la relation :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

ou bien :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{8 bis}$$

292. Si l'on ajoute les équations (5) ou (7), après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z, il vient :

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) + \rho\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{9}$$

Or, dans le cas où il existe une fonction de force (n° **291**), le second terme est nul ; par conséquent, les forces extérieures disparaissent du résultat, et il vient :

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) = \rho\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou bien :

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\theta = \rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{10}$$

Telle est l'*équation à laquelle satisfait la fonction* θ, c'est-à-dire la *dilatation cubique* pour un solide homogène d'élasticité constante.

293. *Équilibre d'élasticité.* — Dans le cas de l'équilibre d'élasticité, les fonctions u, v, w, et par conséquent θ, sont indépendantes du temps. Les équations (6) se réduisent alors aux suivantes :

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho X = 0,\\
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho Y = 0,\\
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \rho Z = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

et l'équation (10) nous donne :

$$\Delta\theta = 0.$$

294. *Cas particuliers.* — 1° Si les seules forces extérieures sont celles qui s'exercent sur la surface du milieu, on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et les équations (11) deviennent :

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u = 0,\\
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v = 0,\\
(\lambda + \mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Nous avons donc trois équations aux dérivées partielles auxquels satisfont les déplacements u, v, w, fonctions de x, y, z, et il s'agit de trouver des solutions de ces équations, telles que les équations à la surface (A) (n° **289**) soient également vérifiées.

2° Si les déplacements u, v, w sont les dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z, on a :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

par conséquent,

$$\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi.$$

D'ailleurs on a :

$$\Delta u = \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

de même,

$$\Delta v = \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Les équations (12) se réduisent alors aux suivantes :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Si nous supposons $\lambda + 2\mu$ différent de zéro, ces équations nous donnent :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Or, pour que ces dernières équations soient vérifiées, *il faut et il suffit que la dilatation cubique θ soit constante dans toute l'étendue du système déformé.*

Propriété.

295. Reprenons les équations d'équilibre (n° **293**) dans le cas où il existe une fonction de force U ; nous aurons :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} &= 0, \qquad (13) \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

les fonctions U et θ vérifient les équations :

$$\Delta \mathrm{U} = 0, \quad \Delta \theta = 0. \qquad (14)$$

On en tire :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \Delta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta \Delta u + \rho \Delta \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \Delta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta \Delta v + \rho \Delta \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} &= 0, \qquad (15) \\ (\lambda + \mu) \Delta \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta \Delta w + \rho \Delta \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Or, on a, en vertu des équation (14) :

$$\Delta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial \Delta \mathrm{U}}{\partial x} = 0,$$

et, par conséquent, les équations (15) nous donnent :

$$\Delta\Delta u = 0, \quad \Delta\Delta v = 0, \quad \Delta\Delta w = 0.$$

D'ailleurs, nous avons vu (n° **274**) que les N_i, T_i sont des fonctions linéaires à coefficients constants de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ Il s'ensuit que $\Delta \mathrm{N}_i$, $\Delta \mathrm{T}_i$, contiendront des termes de la forme $\frac{\partial \Delta u}{\partial x}, \frac{\partial \Delta u}{\partial y}, \ldots$; par conséquent, les $\Delta\Delta \mathrm{N}_i$, $\Delta\Delta \mathrm{T}_i$ contiendront des termes $\Delta\Delta u$, $\Delta\Delta v$, $\Delta\Delta w$, et par suite, on a :

$$\Delta\Delta \mathrm{N}_i = 0, \quad \Delta\Delta \mathrm{T}_i = 0.$$

Donc, les N_i, T_i satisfont à l'équation :

$$\Delta\Delta \varphi = 0.$$

Ainsi donc, les projections u, v, w du déplacement moléculaire, et les composantes des forces élastiques N_i, T_i, dans l'intérieur d'un corps solide homogène et d'élasticité constante, en équilibre d'élasticité, satisfont à l'équation aux différences partielles :

$$\Delta\Delta \varphi = 0,$$

ou bien, en employant les notations ordinaires :

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial y^2}$$

$$+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial z^2}=0,$$

ou encore, en développant :

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^2\partial x^2}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0.$$

MOUVEMENTS INTÉRIEURS DES SYSTÈMES HOMOGÈNES ET D'ÉLASTICITÉ CONSTANTE.

296. Considérons un système homogène d'élasticité constante, et supposons que ce système indéfini dans tous les sens soit *soustrait à l'action de toute force extérieure*. Supposons que les points de ce système ayant été déplacés soient abandonnés avec des vitesses initiales à l'action des forces intérieures. Le système se mettra en mouvement, et si nous désignons par u, v, w les projections du déplacement d'un point (x, y, z), ces projections seront des fonctions de x, y, z, t.

Ces fonctions devront satisfaire aux équations (6) (n° **288**) dans lesquelles on aura fait $X = Y = Z = 0$, c'est-à-dire aux équations :

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u&=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v&=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\qquad(16)\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w&=\rho\frac{d^2w}{dt^2}.\end{aligned}$$

Ce sont ces équations que l'on appelle *équations des petits mouvements*. On peut d'ailleurs les remplacer par les équations équivalentes (nº **290**) :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}\right]=\rho\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\right]=\rho\frac{d^2v}{dt^2},$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]=\rho\frac{d^2w}{dt^2}.$$

Le problème général des mouvements vibratoires consiste à trouver des fonctions u, v, w satisfaisant à ces trois équations (16), et telles que leurs valeurs initiales, et leurs dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, . . . soient des fonctions données de x, y, z.

Équations d'équilibre en coordonnées cylindriques.

297. Imaginons que l'on divise le corps en éléments par trois séries de surfaces orthogonales, savoir : 1° des cylindres circulaires ayant pour axe l'axe des z; 2° des plans perpendiculaires à cet axe; 3° des plans passant par ce même axe.

Soient CMM_1 un plan de la deuxième série (fig. 54), z la distance OC de ce plan au plan des xy, MCO un plan de la troisième série, θ l'angle que ce plan fait avec un plan fixe de cette série, le plan zx par exemple, $r = \mathrm{CM}$ le rayon d'un cylindre de révolution autour de OZ.

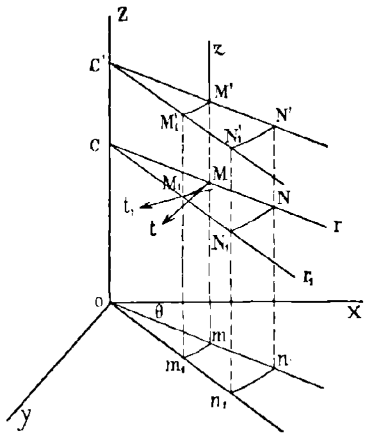


Fig. 54.

Les trois quantités r, θ, z déterminent évidemment la position du point M : ce sont les *coordonnées cylindriques* de ce point.

Soient $\mathrm{C'M'M'_1}$ un plan de la deuxième série infiniment voisin du premier, $\mathrm{CC'} = dz$ sa distance à ce plan; $\mathrm{OCM_1}$ un plan de la troisième série faisant un angle $\mathrm{MCM_1} = d\theta$ avec le plan OCM, et enfin $r + dr$ le rayon d'un second cylindre, infiniment voisin du premier; nous aurons donc $\mathrm{MN} = \mathrm{M_1N_1} = dr$.

L'élément de volume étant $\mathrm{MM_1NN_1M'M'_1N'N'_1} = rd\theta drdz$, la masse de cet élément sera $\rho rd\theta drdz$.

Cela posé, soient :

Mr le prolongement de CM; Mt la perpendiculaire à Mr au point M dans le plan $\mathrm{CMM_1}$; $\mathrm{M_1}r_1$ et $\mathrm{M_1}t_1$ les positions de Mr et Mt après la rotation $d\theta$ autour de l'axe OZ; enfin Mz une parallèle à OZ menée par le point M.

Désignons par R, T, Z les composantes suivant les axes Mr, Mt, Mz de la résultante des forces extérieures qui agissent sur la masse $\rho rd\theta dr dz$.

Conformément aux notations que nous avons adoptées précédemment (nº **245**), $p_{t,r}$, $p_{t,t}$, $p_{t,z}$ seront les composantes suivant les axes Mr, Mt, Mz de la force élastique p_t exercée sur la face $\mathrm{MM'NN'} = drdz$ perpendiculaire à Mt; de même, $p_{r,r}$, $p_{r,t}$, $p_{r,z}$ seront les composantes suivant ces mêmes axes de la force élastique p_r exercée sur la face $MM_1M'M'_1 = rd\theta dz$ perpendiculaire à Mr, et $p_{z,r}$, $p_{z,t}$, $p_{z,z}$ les composantes suivant ces mêmes axes de la force élastique p_z exercée sur la face $MM_1NN_1 = rd\theta dr$ perpendiculaire à Mz.

Remarquons encore que, si une force F est dirigée suivant M_1t_1 ses projections sur Mr et Mt sont respectivement, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier :

suivant Mr : $\quad F\cos(90^\circ + d\theta) = -F\sin d\theta = -F d\theta$,
suivant Mt : $\quad F\cos d\theta = F$;

la composante de cette force suivant Mz est évidemment nulle.

De même, si la force F est dirigée suivant M_1r_1, ses composantes suivant Mr et Mt sont respectivement :

suivant Mr : $\quad F\cos d\theta = F$,
suivant Mt : $\quad F\cos(90^\circ - d\theta) = F\sin d\theta = F d\theta$;

la composante suivant Mz est aussi nulle.

298. Cela posé, cherchons les forces élastiques qui s'exercent sur les faces opposées $MM'NN'$ et $M_1M'_1N_1N'_1$. Nous aurons :

1° Pour la face $MM'NN'$ les composantes :

suivant Mr : $\quad dr\,dz\,p_{t,r}$,
suivant Mt : $\quad dr\,dz\,p_{t,t}$,
suivant Mz : $\quad dr\,dz\,p_{t,z}$;

2° Pour la face opposée $M_1M'_1N_1N'_1$:

suivant M_1r_1 : $\quad -dr\,dz\left(p_{t,r} + \frac{\partial p_{t,r}}{\partial \theta} d\theta\right)$,

suivant M_1t_1 : $\quad -dr\,dz\left(p_{t,t} + \frac{\partial p_{t,t}}{\partial \theta} d\theta\right)$,

suivant M_1z_1 ou M_1z : $-dr\,dz\left(p_{t,z} + \frac{\partial p_{t,z}}{\partial \theta} d\theta\right)$.

Cherchons maintenant les composantes de ces trois dernières forces suivant les trois directions Mr, Mt, Mz; nous aurons :

1° Pour la première, dirigée suivant M_1r_1 :

$$\text{suivant M}r : \quad -dr\,dz\left(p_{t,r} + \frac{\partial p_{t,r}}{\partial\theta}\,d\theta\right),$$

$$\text{suivant M}t : \quad -dr\,dz\left(p_{t,r} + \frac{\partial p_{t,r}}{\partial\theta}\,d\theta\right)d\theta;$$

ou bien, en faisant abstraction des termes d'un ordre supérieur :

$$\text{suivant M}r : \quad -dr\,dz\left(p_{t,r} + \frac{\partial p_{t,r}}{\partial\theta}\,\partial\theta\right),$$

$$\text{suivant M}t : \quad -dr\,dz\,d\theta\,p_{t,r};$$

la composante suivant Mz est nulle.

2° Pour la deuxième, dirigée suivant M_1t_1 :

$$\text{suivant M}r : \quad +dr\,dz\left(p_{t,t} + \frac{\partial p_{t,t}}{\partial\theta}\,d\theta\right)d\theta,$$

$$\text{suivant M}t : \quad -dr\,dz\left(p_{t,t} + \frac{\partial p_{t,t}}{\partial\theta}\,d\theta\right);$$

ou bien :

$$\text{suivant M}r : \quad +dr\,dz\,d\theta\,p_{t,t},$$

$$\text{suivant M}t : \quad -dr\,dz\left(p_{t,t} + \frac{\partial p_{t,t}}{\partial\theta}\,\partial\theta\right);$$

la composante suivant Mz est nulle.

3° Pour la troisième, dirigée suivant M_1z_1, parallèle à Mz :

$$\text{suivant M}z : \quad -dr\,dz\left(p_{t,z} + \frac{\partial p_{t,z}}{\partial\theta}\,d\theta\right);$$

les composantes suivant Mr et Mt sont évidemment nulles.

Donc, les forces élastiques exercées sur les deux faces considérées nous donnent :

$$\text{suivant M}r : \qquad dr\,dz\,d\theta\, p_{t,t} - dr\,dz\,d\theta \frac{\partial p_{t,r}}{\partial \theta},$$

$$\text{suivant M}t : \quad -dr\,dz\,d\theta \frac{\partial p_{t,t}}{\partial \theta} - dr\,dz\,d\theta\, p_{t,r},$$

$$\text{suivant M}z : \quad -dr\,dz\,d\theta \frac{\partial p_{t,z}}{\partial \theta}.$$

Les deux autres couples de faces sont parallèles, savoir MM$_1$M'M'$_1$ et NN$_1$N'N'$_1$ d'une part; MM$_1$NN$_1$ et M'M'$_1$N'N'$_1$ d'autre part. Par conséquent, les forces élastiques exercées sur chaque couple de faces sont parallèles. Si nous les décomposons suivant les directions Mr, Mt et Mz, nous aurons :

1° Pour la face MM$_1$M'M'$_1$ les trois composantes :

$$\text{suivant M}r : \quad r\,d\theta\,dz\,p_{r,r},$$
$$\text{suivant M}t : \quad r\,d\theta\,dz\,p_{r,t},$$
$$\text{suivant M}z : \quad r\,d\theta\,dz\,p_{r,z};$$

2° Pour la face opposée MM$_1$N'N'$_1$ les trois composantes :

$$\text{suivant M}r : \quad -d\theta\,dz\left(rp_{r,r} + \frac{\partial rp_{r,r}}{\partial r}dr\right),$$

$$\text{suivant M}t : \quad -d\theta\,dz\left(rp_{r,t} + \frac{\partial rp_{r,t}}{\partial r}dr\right),$$

$$\text{suivant M}z : \quad -d\theta\,dz\left(rp_{r,z} + \frac{\partial rp_{r,z}}{\partial r}dr\right).$$

Ces forces se réduisent donc aux trois suivantes :

$$\text{suivant M}r: -d\theta\, dz \frac{\partial r p_{r,r}}{\partial r} dr = -d\theta\, dz \left(p_{r,r} + r\frac{\partial p_{r,r}}{\partial r}\right) dr,$$

$$\text{suivant M}t: -d\theta\, dz \frac{\partial r p_{r,t}}{\partial r} dr = -d\theta\, dz \left(p_{r,t} + r\frac{\partial p_{r,t}}{\partial r}\right) dr,$$

$$\text{suivant M}z: -d\theta\, dz \frac{\partial r p_{r,z}}{\partial r} dr = -d\theta\, dz \left(p_{r,z} + r\frac{\partial p_{r,z}}{\partial r}\right) dr.$$

De même, nous aurons :

1° Pour la face MM_1NN_1 les trois composantes :

$$\text{suivant M}r: \quad r\, d\theta\, dr\, p_{z,r},$$
$$\text{suivant M}t: \quad r\, d\theta\, dr\, p_{z,t},$$
$$\text{suivant M}z: \quad r\, d\theta\, dr\, p_{z,z};$$

2° Pour la face opposée $M'M'_1N'N'_1$ les trois composantes :

$$\text{suivant M}r: \quad -r\, d\theta\, dr \left(p_{z,r} + \frac{\partial p_{z,r}}{\partial z} dz\right),$$

$$\text{suivant M}t: \quad -r\, d\theta\, dr \left(p_{z,t} + \frac{\partial p_{z,t}}{\partial z} dz\right),$$

$$\text{suivant M}z: \quad -r\, d\theta\, dr \left(p_{z,z} + \frac{\partial p_{z,z}}{\partial z} dz\right).$$

Ces forces se réduisent donc aux trois suivantes :

$$\text{suivant M}r: \quad -r\, d\theta\, dr \frac{\partial p_{z,r}}{\partial z} dz,$$

$$\text{suivant M}t: \quad -r\, d\theta\, dr \frac{\partial p_{z,t}}{\partial z} dz,$$

$$\text{suivant M}z: \quad -r\, d\theta\, dr \frac{\partial p_{z,z}}{\partial z} dz.$$

299. Si maintenant nous égalons à zéro la somme des composantes des forces élastiques et de la résultante des forces extérieures suivant chacune des trois directions considérées, en supprimant le facteur $dr\,d\theta\,dz$, et en observant que l'on a (nº **246**) :

$$p_{r,t} = p_{t,r}, \quad p_{r,z} = p_{z,r}, \quad p_{t,z} = p_{z,t},$$

nous aurons pour les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial p_{r,r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{r,t}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{r,z}}{\partial z} + \frac{p_{r,r} - p_{t,t}}{r} = \rho R,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_{t,t}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{r,t}}{\partial r} + \frac{\partial p_{z,t}}{\partial z} + \frac{2}{r}\, p_{r,t} = \rho T,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_{z,t}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{z,r}}{\partial r} + \frac{\partial p_{z,z}}{\partial z} + \frac{1}{r}\, p_{z,r} = \rho Z.$$

300. *Cas particulier.* — Dans le cas d'un fluide, la pression est normale à l'élément (nº **5**), et elle est la même dans tous les sens, quelle que soit l'orientation de l'élément (nº **6**) ; par suite, les composantes tangentielles sont nulles, et les composantes normales sont égales. Il vient alors, en supprimant les indices devenus inutiles :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho R,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho T,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$

Ce sont les équations d'équilibre d'une molécule fluide en coordonnées cylindriques.

301. Remarque. — Si l'on suppose que ρ soit une fonction de p, et si l'on pose :

$$P = \int \frac{dp}{\rho},$$

on a :

$$\frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right),$$

et alors les équations d'équilibre peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = R,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = T,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = Z.$$

Équations du mouvement d'un fluide en coordonnées cylindriques.

302. Désignons par R′, T′, Z′ les composantes de l'accélération totale de la molécule (r, θ, z) du fluide, respectivement suivant le rayon vecteur r, la perpendiculaire à ce rayon dans le plan normal à l'axe OZ, et la parallèle à cet axe. Soient, en outre :

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad v = \omega r = r\frac{d\theta}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

les composantes suivant ces mêmes directions de la vitesse de cette molécule.

Les équations du mouvement sont alors, en appliquant le principe de d'Alembert, et introduisant les composantes de la force d'inertie dans les équations d'équilibre (n° **301**) :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho(R - R'),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho(T - T'),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(Z - Z').$$

303. Si nous supposons que ρ soit une fonction de p seulement, et si nous posons :

$$P = \int \frac{dp}{\rho},$$

ces équations nous donnent les suivantes :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = R - R',$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = T - T',$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = Z - Z'.$$

En décomposant l'accélération totale suivant le rayon vecteur Mr, la perpendiculaire à ce rayon vecteur dans le plan MCM_1 (I, n° **83**) et la parallèle à l'axe OZ, on a :

$$R' = \frac{du}{dt} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{du}{dt} - \omega^2 r,$$

$$T' = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega u,$$

$$Z' = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

304. Remarque. — On peut obtenir les expressions de R', T', Z' de la manière suivante :

Le mouvement absolu du point M est la résultante du mouvement relatif du point M dans le plan passant par l'axe OZ, et par le point M, et du mouvement d'entraînement de ce plan.

L'accélération absolue sera donc la résultante :

1° De l'accélération relative qui a pour composantes :

$$\frac{du}{dt} \text{ suivant } Mr,$$

$$\frac{dw}{dt} \text{ suivant } Mz;$$

2° De l'accélération d'entraînement qui a pour composantes :

$$-\ \omega^2 r \text{ suivant } Mr,$$

$$\frac{d\omega r}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \text{ suivant } Mt;$$

3° De l'accélération complémentaire $2\omega u$ suivant la perpendiculaire au plan passant par la vitesse relative et l'axe de rotation et dans le sens de la rotation (I, n° **162**), c'est-à-dire suivant Mt. (L'angle α est droit, puisque la vitesse relative et l'axe de rotation sont perpendiculaires).

Nous aurons donc comme précédemment :

$$R' = \frac{du}{dt} - \omega^2 r,$$

$$T' = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega u,$$

$$Z' = \frac{dw}{dt}.$$

305. Or, on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial u}{\partial z};$$

de même,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u\,\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial \omega}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les équations du mouvement peuvent donc être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} - \omega^2 r + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} = \mathrm{R},$$

$$r\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\,\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) + 2\omega u + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} = \mathrm{T},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial r} + \omega\,\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} = \mathrm{Z}.$$

306. D'ailleurs, si l'on exprime que la masse $\rho dr.rd\theta dz$ n'a pas varié pendant le temps dt, on a l'*équation de continuité :*

$$\rho' dr'.r'd\theta' dz' = \rho dr.rd\theta dz.$$

Or, au bout du temps dt, on a :

$$\rho' = \rho + d\rho = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r}\,u + \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\,\omega + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,w\right)dt,$$

$$r' = r + udt, \quad \theta' = \theta + \omega dt, \quad z' = z + wdt;$$

d'où :

$$dr' = dr + \frac{\partial u}{\partial r} drdt, \ d\theta' = d\theta + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} d\theta dt, \ dz' = dz + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt.$$

On a donc, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au quatrième :

$$dr'.r'd\theta'dz' = (r + udt)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} dt\right) dr \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} dt\right) d\theta$$

$$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \partial t\right) dz = \left\{ r + udt + r\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt \right\} drd\theta dz;$$

par suite,

$$\rho'.dr'.r'd\theta'dz' = \rho \left\{ r + udt + r\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{d\omega}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt \right\} drd\theta dz$$

$$+ rdrd\theta dz \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} u + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial \rho}{\partial z} w\right) dt$$

$$= \rho rdrd\theta dz + \left\{ \rho u + r\left(\frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \right\} drd\theta dzdt.$$

L'équation de continuité est donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\rho u}{r} = 0.$$

307. Supposons maintenant qu'il existe une fonction de vitesse φ, et une fonction de force U ; nous aurons, puisque les composantes de la vitesse sont u, ωr, w, et que les projections du déplacement élémentaire sur les axes sont dr, $rd\theta$, dz :

$$d\varphi = udr + \omega r^2 d\theta + wdz,$$

ou bien :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = u, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \omega r^2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = w;$$

d'autre part, les composantes de la force étant R, T, Z, on a :

$$d\mathrm{U} = \mathrm{R}dr + \mathrm{T}.rd\theta + \mathrm{Z}dz,$$

ou bien :

$$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r} = \mathrm{R}, \quad \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\theta} = \mathrm{T}r, \quad \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z} = \mathrm{Z}.$$

Par suite, l'équation (12) (n° **66**), nous donne :

$$d\mathrm{P} = d\mathrm{U} - d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

et l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z} + \frac{\rho}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0.$$

Mouvements tourbillonnants.

308. Appliquons les formules que nous venons de trouver au *mouvement d'un fluide*, pour lequel *tout est symétrique autour d'un axe*, que nous prendrons pour axe des z.

Dans ce cas, u, ω, w, P et ρ sont indépendants de θ (n° **297**); il doit en être de même des valeurs initiales de ces fonctions, ainsi que de R, T, Z. Il est d'ailleurs évident, puisque tout est symétrique autour de l'axe, que le fluide doit être limité par une surface de révolution autour de l'axe de symétrie.

Nous supposerons T = 0, ce qui aura lieu lorsque les molécules du fluide sont attirées vers un point fixe ou mobile situé sur l'axe de symétrie OZ.

Les équations du mouvement d'une molécule (n^os **305** et **306**) sont alors les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\omega^2 r=\mathrm{R},\\
&\frac{\partial \omega}{dt}+u\frac{\partial \omega}{\partial r}+w\frac{\partial \omega}{\partial z}+\frac{2\omega u}{r}=0,\\
&\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{dr}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\mathrm{Z},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial r}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}+\frac{\rho u}{r}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Or, on a :

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial r}+w\frac{\partial \omega}{\partial z};$$

par conséquent, la deuxième équation (1) nous donne :

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{2\omega}{r}\frac{dr}{dt}=0,$$

ou bien :

$$r^2\frac{d\omega}{dt}+2\omega r\frac{dr}{dt}=0;$$

d'où, en intégrant :

$$\omega r^2 = a,$$

a étant une constante pour une même molécule fluide. Cette constante varie, en général, d'une molécule à l'autre.

On en conclut que *la vitesse angulaire d'une molécule autour de l'axe de symétrie, aux divers points de sa trajectoire, varie en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.*

309. *Cas particulier.* — Examinons le cas où la constante a a la même valeur pour toutes les molécules fluides, et supposons que les forces extérieures admettent une *fonction de force,* c'est-à-dire que l'on ait :

$$\mathrm{R}dr + \mathrm{Z}dz = d\mathrm{U}.$$

Nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \omega^2 r &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}, \\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ou bien, à cause de la formule $\omega r^2 = a$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{U} - \frac{a^2}{2r^2}\right), \\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{U} - \frac{a^2}{2r^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Différentions ces deux équations respectivement par rapport à z et r, et retranchons, en posant :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = \eta,$$

il viendra :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial r} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \eta = 0,$$

ou bien :

$$\frac{d \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \eta = 0. \qquad (4)$$

Or, l'équation de continuité (n° **306**) nous donne, en observant que $\frac{\partial \rho \omega}{\partial \theta} = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\rho u}{r} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\rho u}{r} = 0.$$

D'ailleurs, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{d \rho}{dt};$$

par suite, en remplaçant u par $\frac{dr}{dt}$, il vient :

$$\frac{d \rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\rho}{r} \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{dt} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}.$$

Par conséquent, si l'on remplace $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ par sa valeur tirée de l'équation (4), il vient :

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{rd\rho + \rho dr}{\rho r dt};$$

d'où :

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\rho dr + rd\rho}{\rho r}.$$

En intégrant, on a :

$$l.\eta = l.\rho r + l.b;$$

d'où :

$$\eta = b\rho r.$$

Par suite,

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = b\rho r.$$

La constante b est indépendante de la position de la molécule (u, w, r, ρ, z) ; mais, elle peut varier d'une molécule à l'autre.

Si $b = 0$ pour toutes les molécules à un instant donné, il sera nul pendant toute la durée du mouvement, et l'on aura, pendant toute la durée du mouvement,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r},$$

formule qui exprime que $udr + wdz$ est une différentielle exacte, ce qui nous donne une vérification du théorème de Lagrange (n° **65**).

310. Les équations (3) nous donnent alors, en les multipliant respectivement par dr et dz, et ajoutant, et en opérant comme nous l'avons fait (nº **66**) :

$$dP = -d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\, d\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - d\left(U - \frac{a^2}{2r^2}\right);$$

d'où, en intégrant, et comprenant dans ρ la fonction arbitraire du temps introduite par l'intégration :

$$P = U - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - \frac{a^2}{2r^2}.$$

D'ailleurs, la dernière des équations (1) devient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\rho}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\rho\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z} = 0.$$

FIN