

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE **UND** **C. RUNGE**
IN STUTTGART IN GÖTTINGEN.

61. BAND.

MIT EINER TAFEL UND 165 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913.

ALLE RECHTE, EINSCHLESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt.

	Seite
Cisotti, Umberto. Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso	76
Field, Peter. On Coulomb's laws of friction	68
Fillunger, Paul. Ein Beitrag zur Theorie der Festigkeit von Zughaken	92
Francke, Adolf. Der Parabelträger $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$	1
Gans, R. und Hertz, P. Die Theorie des Ewingschen Modells eines ferromagnetischen Körpers	13
Gebbia, Michele. Studio sulla spinta delle terre	102
— Errata-corrige	444
Goldziher, Karl. Methode zur graphischen Lösung von Systemen linearer Gleichungen	9
Happel, Hans. Über einige Probleme aus dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten	43
Hertz, P. s. Gans, R.	
Mayer, Rudolf. Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens	246
Mineo, Corradino. Su una nuova deduzione della legge di frequenza degli errori	403
Nies, H. Über eine Gesetzmäßigkeit der Planetenrotation	426
Pröll, A. Zur Dynamik des Kurbelgetriebes	416
Rottsieper, W. Ein Instrument zum Zeichnen von Hyperbeln mit Benutzung der Asymptoten	74
Sanden, H. von. Über den Auftrieb im natürlichen Winde	225
— Ein Instrument zur graphischen harmonischen Analyse	430
Schäfer, Otto. Eine mechanische Vorrichtung zur Lösung einiger Differentialgleichungen	61
Schatte, J. Ein Satz über Wurfbahnen im leeren Raume	56
Schrutka, Lothar von. Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine	320
Sergelius, Max. Untersuchung kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume	367
Wellstein, Julius. Zur Theorie der Reibung starrer Körper	337
Willers, Fr. A. Ein Rechenstab für Ballonführer	84

Kleinere Mitteilungen.

Einfache Konstruktion der Trägheitsmomente ebener Flächen (aus drei bekannten Trägheitsmomenten ohne Hilfe von Trägheitskreisen und Trägheitsellipsen). Von Fr. Gräfe	202
Aufruf, betr. eine Gesellschaft für positivistische Philosophie	203
Ein neuer Rechenapparat für Maschinenbau und Elektrotechnik. Von P. Werkmeister	326

a*

	Seite
Einladung zur Subskription auf Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen	328
Über das Elastizitätsproblem einer dünnen Schale von Kugel-, Kegel- oder Ringflächenform. Von E. Meißner	434

Bücherschau.

J. Bauschinger und J. Peters. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Von P. Werkmeister	204
J. Peters. Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus zur genauen Berechnung von zwanzigstelligen Werten sämtlicher trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Arguments sowie ihrer Logarithmen. Von P. Werkmeister	205
J. Peters. Siebenstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen für jede Bogensekunde des Quadranten. Von P. Werkmeister	206
L. Schrutka, Edler von Rechtenstamm. Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Von P. Werkmeister	207
S. Wellisch. Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. Von P. Werkmeister	207
S. Arrhenius. Das Schicksal der Planeten. Von C. W. Wirtz	208
C. V. L. Charlier. Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems. — Die Lagrangesche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem. Von C. W. Wirtz	208
C. V. L. Charlier. Über die Bewegung der Bahnebenen der Satelliten in unserem Planetensystem. Von C. W. Wirtz	209
A. von Flotow. Einleitung in die Astronomie. Von C. W. Wirtz	210
S. Günther. Vergleichende Mond- und Erdkunde. Von C. W. Wirtz	211
H. Martus. Entstehungsweise der Monde der Planeten. Von C. W. Wirtz	211
F. Nölke. Neue Erklärung des Ursprungs der Kometen. Von C. W. Wirtz	212
Berichtigung dazu	444
S. Oppenheim. Probleme der modernen Astronomie. Von C. W. Wirtz	213
C. Schoy. Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Von C. W. Wirtz	213
P. Schwahn. Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. Von C. W. Wirtz	214
K. Schwarzschild. Über das System der Fixsterne. Von C. W. Wirtz	215
K. Schwarzschild und O. Birck. Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung im Luftballon bei Nacht. Von C. W. Wirtz	215
E. Anding. Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. Von C. W. Wirtz	216
G. H. Darwin. Scientific papers. Von C. W. Wirtz	329
C. V. L. Charlier. Studies in stellar statistics. I. Von C. W. Wirtz	437
A. Jeremias. Das Alter der babylonischen Astronomie. Von C. W. Wirtz	438
<hr style="width: 20%; margin: 0 auto;"/>	
Neue Bücher	218, 330, 439
Eingelaufene Schriften	222, 334, 442
Berichtigungen	444

Der Parabelträger $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

VON ADOLF FRANCKE, Baurat in Alfeld a. d. Leine.

Der Schub H der gemeinen Parabel der Gleichung $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^2$ pflegt für eine lotrechte im Punkte x stehende Last P nach der einfachen Formel $\frac{H}{P} = \frac{3(a^2 - x^2)}{8ah} = \frac{3(1 - \xi^2)}{8} \cdot \frac{a}{h}$; $\xi = \frac{x}{a}$ bemessen zu werden, welche aus der genaueren Gleichung: $\frac{hH}{aP} = \frac{25 - 30\xi^2 + 5\xi^4}{64}$ durch Unterdrückung des rechnungsmäßig nicht belangreichen Zählerwertes $(1 - \xi^2)(1 - 5\xi^2)$ hergeleitet wurde.

Zum Vergleich der je nach dem bestimmten Wert n unterscheidbaren parabolischen Bogenformen $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$ in bezug auf ihre verschiedene natürliche Schubfähigkeit ist eine gemeinsame Formel für sämtliche Bogenformen zweckdienlich.

Wir betrachten hier den Bogen mit drehbaren, unverrückbaren Kämpfern und ermitteln ganz allgemein den natürlichen, der Stützlinieneigenschaft entsprechenden Schub des Bogenträgers der Gleichung

$$y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$$

für n als Zahl $> + 1$.

Wir denken uns $2a$ als unveränderliche Spannweite. Den Pfeil h nehmen wir zwar für unser tatsächliches Tragegebilde als beliebige endliche Länge an, aber wir sehen im Ähnlichkeitsbilde aller Einzelbogen mit gleichem natürlichen Schub und gleicher Stützlast diesen Pfeil h verschwinden für den Grenzfall beliebig flacher Wölbung.

Diesen Grenzfall schauen wir an, um das aus ihm einfach ableitbare Ergebnis der natürlichen Kräftezerlegung auf den ähnlichen Bogen mit endlichem h zu übertragen.

Wir lassen also $\frac{h}{a}$ verschwinden auf eine konstante bestimmte Nullzahl. Dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega = \frac{nhx^{n-1}}{a^n} = \omega$$

Der Parabelträger $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

und der Schlußwinkelwert β des Bogens $\beta = \text{tg } \beta = \frac{nh}{a}$ bedeutet ebenfalls eine andere verschwindend kleine bestimmte Zahl.

Durch Differentiation folgt:

$$d\omega = \frac{n(n-1)hx^{n-2}dx}{a^n}.$$

Der Bogen liegt ∞ flach und daher ist:

$$ds = dx.$$

1. Der Zustand des Bogenschubes $H = \pm 1$.

Für den Zustand $H = \pm 1$ des Bogens der Fig. 1 gilt für verschwindend kleines h die Biegungsgleichung:

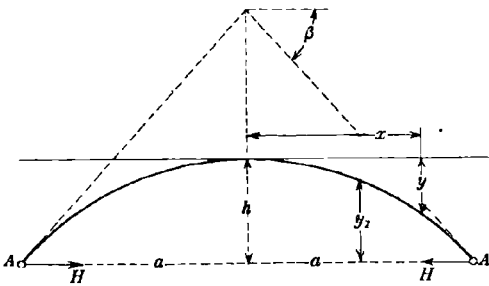
$$\frac{EJ}{hH} \frac{dz^2}{dx^2} = \frac{a^n - x^n}{a^n}$$

mit den Integralen:

$$\frac{EJ}{hH} \frac{dz}{dx} = \frac{(n+1)a^n x - x^{n+1}}{(n+1)a^n},$$

$$\frac{EJ}{hH} z = \frac{(n+1)(n+2)a^n x^2 - 2x^{n+2} - n(n+3)a^{n+2}}{2(n+1)(n+2)a^n}.$$

Fig. 1.



Durch Vervielfältigung mit

$$d\omega = \frac{n(n-1)hx^{n-2}dx}{a^n}$$

und Integration wird aus $\int z d\omega = w$ als Wirkung des Bogenschubes H die Bogenlängenänderung gefunden:

$$\text{I. } \frac{EJ}{H} w = \frac{-2n^2 ah^2}{(n+1)(2n+1)}$$

2. Die Wirkung einer Scheitellast

wird entsprechend gefunden:

$$\text{II. } \frac{EJ}{P_0} w = \frac{n(n+3)a^2 h}{4(n+1)(n+2)}.$$

Daher erzeugt diese Scheitellast P_0 den Schub:

$$(1) \quad \frac{hH}{aP_0} = \frac{(2n+1)(n+3)}{8n(n+2)} = \alpha.$$

3. Die Wirkung einer lotrechten Last

im beliebigen Punkte x wird gefunden:

$$\frac{EJ}{hP} w = \frac{n(n+3)a^{n+2} - (n+1)(n+2)a^n x^2 + 2x^{n+2}}{4(n+1)(n+2)a^n}.$$

Daher erzeugt P den Schub:

$$(2) \quad \frac{hH}{aP} = \frac{(2n+1)\{n(n+3)a^{n+2} - (n+1)(n+2)a^n x^2 + 2x^{n+2}\}}{8n^2(n+2)a^{n+2}},$$

oder für $\frac{x}{a} = \xi$:

$$(2a) \quad \frac{hH}{aP} = \frac{(2n+1)\{n(n+3) - (n+1)(n+2)\xi^2 + 2\xi^{n+2}\}}{8n^2(n+2)},$$

oder die Werte ξ^2 anders geordnet:

$$(2b) \quad \frac{hH}{aP} = \frac{(2n+1)\{n(n+3)(1-\xi^2) - 2\xi^2(1-\xi^n)\}}{8n^2(n+2)}.$$

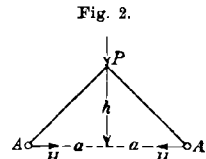
Für Zahlen $n > 2$ fällt das letzte Zählerglied $2\xi^2(1-\xi^n)$ nicht eben schwer ins Gewicht. Man kann es für diesen Fall, nach Art der für die einfache Parabel geschaffenen einfachen überschläglichen Formeln fortlassen und daher für diesen Fall annähernd überschläglich die einfache Formel anwenden:

$$(2c) \quad \frac{hH}{aP} = \frac{(2n+1)(n+3)}{8n(n+2)}(1-\xi^2) = \alpha(1-\xi^2).$$

Für höhere Parabeln, $n > 2$, bleibt mithin, ebenso wie für die gemeine Parabel, die Einflußlinie für bewegte Last rechnermäßig annähernd die gemeine Parabel. Für niedere Parabeln, $n < 2$, wird eine solche Annahme rechnermäßig ungenauer.

Für $n > 2$ erhalten wir im Scheitel flachgewölbte Bogenformen mit vergleichsweise schwacher Schubfähigkeit, für $n < 2$ erhalten wir Bogenformen mit starkem Schube und starker Scheitelwölbung.

Vergleich des durch eine Scheitellast P_0 erzeugten Bogenschubes.



Für den Grenzwert $n = \lim_{\geq} 1$, also für den in Fig. 2 dargestellten Dreiecksbogen, wird $\alpha = \frac{1}{2}$, und α nimmt stetig ab mit wachsendem n , wobei sich die Werte entsprechen:

- $n = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}$
- $n = \frac{7}{6}, \quad \alpha = \frac{125}{266}$
- $n = \frac{5}{4}, \quad \alpha = \frac{119}{260}$
- $n = \frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{8}{7}$ semikubische Parabel
- $n = 2, \quad \alpha = \frac{25}{64}$ gemeine Parabel, wo α gemeinhin mit $\frac{8}{3}$ vertauscht wird
- $n = 3, \quad \alpha = \frac{7}{20}$ für die kubische Parabel
- $n = 4, \quad \alpha = \frac{21}{64}$ für die biquadratische Parabel
- $n = 10, \quad \alpha = \frac{91}{320}$;
- $n = \infty, \quad \alpha = \frac{1}{4}$ für den scheinrechten Bogen.

Der Parabelträger $y = h \left(\frac{x}{a} \right)^n$.

Das unter der Einzellast P erzeugte Moment ist gegeben durch:

$$\frac{2M}{aP} = 1 - \xi^2 - \frac{(2n+1)\{n(n+3)(1-\xi^2) - 2\xi^2(1-\xi^n)\}(1-\xi^n)}{4n^2(n+2)}.$$

Insbesondere erzeugt P_0 das Scheitelmoment:

$$\frac{M}{aP} = \frac{1-2\kappa}{2} = \frac{(n-1)(2n+3)}{8n(n+2)} = \mu;$$

Es wird:

$\mu = 0$ für den Dreiecksbogen

$\mu = \frac{4}{133}$ für $n = \frac{7}{6}$

$\mu = \frac{11}{260}$ für $n = \frac{5}{4}$

$\mu = \frac{1}{14}$ für $n = \frac{3}{2}$, also für die semikubische Parabel

$\mu = \frac{7}{64}$ für die gemeine Parabel $\equiv \frac{1}{8}$ als Annäherung

$\mu = \frac{3}{20}$ für die kubische Parabel

$\mu = \frac{11}{64}$ für die biquadratische Parabel

$\mu = \frac{69}{330}$ für $n = 10$;

$\mu = \frac{1}{4}$ für den idealen scheidrechten Bogen.

Die in $x, \frac{x}{a} = \xi$ hängende Last P erzeugt im Punkte $x = -v, \frac{v}{a} = \nu$ der Gegenseite das Biegemoment:

$$\frac{M}{aP} = \frac{(1-\xi)(1-\nu)}{2} - \frac{(2n+1)\{n(n+3)(1-\xi^2) - 2\xi^2(1-\xi^n)\}(1-\nu^n)}{8n^2(n+2)}.$$

Dasselbe wird bei gegebenem festen Lastangriff ξ ein größter Wert an der Stelle:

$$\nu^{1-n} = \frac{(2n+1)\left\{n(n+3)(1+\xi) - 2\xi^2\left(\frac{1-\xi^n}{1-\xi}\right)\right\}}{4n(n+2)}.$$

Bei Mittellaststellung in $\nu^{n-1} = \frac{4(n+2)}{(2n+1)(n+3)}$.

Abgesehen von $\xi = 1, \nu = 1$, wird das Moment = 0 für:

$$\frac{1-\nu}{1-\nu^n} = \frac{(2n+1)\left\{n(n+3)(1+\xi) - 2\xi^2\left(\frac{1-\xi^n}{1-\xi}\right)\right\}}{4n^2(n+2)}.$$

Für Stellung der Last nahe am Kämpfer, $\xi = 1; \frac{1-\xi^n}{1-\xi} = \frac{0}{0} = n$ erhalten wir daraus die Kenntnis der Lage: $\frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{2n}{2n+1}$; z. B. für die Parabel $\nu = -\frac{1}{5}$, wo also eine Last nahe am Kämpfer das Moment = 0 erzeugt. Man schließt daraus, daß das größte Kopfmoment für eine Streckenlast nahe am Kämpfer bei frei (unbelastet) bleibender Strecke

stattfindet, nicht also etwa am Kopfe einer am Kämpfer entspringenden Laststrecke.

Wichtig ist die Kenntnis derjenigen beiden indifferenten Stellen $x = \pm b$, wo eine Einzellast P das Scheitelmoment 0 erzeugt.

Die Scheitelstrecke $2b$ der positiven Scheitelmomente ist der geometrische Ort, wo Lasten, gekuppelte Räder oder andere zufällige oder ständige Belastung wirken muß, wenn das größte positive Moment im Scheitel — oder auch sehr nahe dem Scheitel — erzeugt werden soll.

Die Strecke $\pm b$ oder das Verhältnis $\frac{a}{b} = \eta$ ist bestimmt durch die Gleichung: $P(a - b) = 2H_b \cdot h$ oder

$$(1 - \eta) - \frac{(2n + 1)(n + 3)}{4n(n + 2)} (1 - \eta^2) + \frac{\eta^2(1 - \eta^n)(2n + 1)}{2n^2(n + 2)} = 0.$$

Teilt man durch $(1 - \eta) \frac{(2n + 1)(n + 3)}{4n(n + 2)}$, so erhält man:

$$\eta = \frac{(n - 1)(2n + 3)}{(2n + 1)(n + 3)} + \frac{2\eta^2 \left\{ \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta} \right\}}{n(n + 3)}.$$

Stets ist η ein Bruch, und zwar ist $\eta = 0$ für $n = 1$; $\eta = 1$ für $n = \infty$.

Für den Mittelwert $n = 2$ der gemeinen Parabel ist:

$$\eta = 0,304.$$

Stets kann $\eta = \eta_1 = \frac{(n + 1)(2n + 3)}{(2n + 1)(n + 3)}$ als der erste, meist bereits ziemlich genaue Annäherungswert betrachtet werden. Man erhält für semikubische, gemeine, kubische Parabel die runden Vergleichszahlen: $\eta = \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{16}{35}$. — Die beiden ergänzenden Kämpferstrecken $a - b, 1 - \eta$ bilden den geometrischen Ort der das größte negative Scheitelmoment erzeugenden Lasten.

4. Stützlast.

Der Bogen $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$ hat die Stützlastfunktion x^{n-2} lotrechter Last.

Bei Belastung zweier Scheitelstrecken x mit $p = x^{n-2} dx$ entsteht der lotrechte Auflagerdruck $A = \frac{x^{n-1}}{n-1}$, sowie der Schub

$$H = \frac{(2n + 1) \left\{ \frac{n(n + 3)}{n - 1} a^{n+2} \cdot x^{n-1} - (n + 2) a^n x^{n+1} + \frac{2x^{2n+1}}{2n + 1} \right\}}{4n^2(n + 2)a^{n+1} \cdot h}.$$

Bei Vollbelastung entsteht der Schub:

$$H = \frac{a^n}{n(n - 1)h}.$$

Der Parabelträger $y = h \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

Das entsprechende statische Moment \mathfrak{M} des einfachen Balkens auf zwei Stützen beträgt: $\mathfrak{M} = \frac{a^n - x^n}{n(n-1)}$. Mithin ist an jeder Stelle x des Bogens das innere Gesamtmoment:

$$M = \mathfrak{M} - H \cdot y_1$$

stets identisch = 0, entsprechend der *natürlichen* Schubwirkung jedes Einzelelementes p , gültig nicht nur für kleine, sondern beliebige Höhe h .

Bei Belastung einer Bogenhälfte mit:

$$p = C \frac{x^{n-2} dx}{a^{n-2}},$$

wo C die Stützlaststärke am Kämpfer darstellt, entsteht das Moment $\pm \frac{Ca^2(\xi - \xi^n)}{2n(n-1)}$ mit dem Höchstwerte $\pm \frac{Ca^2}{2n^{\frac{n-1}{2}}}$ im Punkte $\xi = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

5. Unveränderliche Streckenlast.

Bei Belastung einer Scheitelstrecke von $x = 0$ bis $x = c$, $\frac{c}{a} = \theta$, mit unveränderlicher Streckenlast p entsteht der Schub:

$$\frac{hH}{apc} = \frac{(2n+1)\{3n(n+3)^2 - (n+1)(n+2)(n+3)\theta^2 + 6\theta^{n+2}\}}{24n^2(n+2)(n+3)}.$$

Für $\theta = 1$, also bei **Belastung einer Bogenhälfte**, entsteht der Schub

$$\frac{hH}{pa^2} = \frac{(2n+1)(n+4)}{12n(n+3)}.$$

Hierbei entsteht auf der unbelasteten Seite ein größtes negatives Moment im Punkte $\xi^{n-1} = \frac{3(n+3)}{(2n+1)(n+4)}$ mit dem Werte:

$$\frac{M_1}{pa^2} = \frac{n^2 - 4}{12n(n+3)} - \frac{(n-1)}{4n} \cdot \xi.$$

Für die belastete Bogenseite gilt die Momentengleichung:

$$\frac{M}{pa^2} = \frac{1+\xi}{4} - \frac{\xi^2}{2} - \frac{(2n+1)(n+4)}{12n(n+3)}(1-\xi^n)$$

mit der Bedingung des Höchstwertes:

$$0 = \frac{1}{4} - \xi + \frac{(2n+1)(n+4)}{12(n+3)}\xi^{n-1}.$$

Ist diese erfüllt, so gilt:

$$0 = \frac{\xi}{4n} - \frac{\xi^2}{n} + \frac{(2n+1)(n+4)}{12n(n+3)} \cdot \xi^n,$$

und wir erhalten durch Abziehen:

$$\frac{M_2}{pa^2} = \frac{n^2 - 4}{12n(n+3)} + \frac{\xi(n-1)}{4n} + \frac{\xi^2(2-n)}{2n}.$$

Wir erhalten $\xi = \frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{36}{49}$ und $\frac{M_2}{pa^2} = \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}$ für semikubische, gemeine und kubische Parabel.

Vollbelastung des ganzen Bogens erzeugt an der Stelle $x, \frac{x}{a} = \xi$ das Moment:

$$\frac{M}{pa^2} = \frac{n^2 - 4}{6n(n+3)} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{(2n+1)(n+4)}{6n(n+3)} \xi^n.$$

Dasselbe wird identisch = 0 für die gemeine Parabel. Bei den übrigen parabolischen Bögen wird dasselbe 0 für $\xi = 1$ und für:

$$\frac{3n(n+3)}{(2n+1)(n+4)} = \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi^2}.$$

Die Vollbelastung erzeugt ein größtes Moment im Scheitel mit dem Werte:

$$\frac{M_0}{pa^2} = \frac{n^2 - 4}{6n(n+3)},$$

positiv für $n > 2$, negativ für $n < 2$.

Ausgezeichneter Wert findet außerdem statt für $\xi^{n-2} = \frac{6(n+3)}{(2n+1)(n+4)}$, also z. B. für die kubische Parabel im Punkte $\xi = \frac{36}{49}$, sowie für die semikubische Parabel im Punkte $\sqrt{\xi} = \frac{22}{27}$.

Eine Belastung der symmetrischen Scheitelstrecke 2b des größten Scheitelmomentes erzeugt das Scheitelmoment:

$$\frac{M_0}{a(2pb)} = \frac{(n-1)(2n+3)}{8n(n+2)} - \frac{\eta}{4} + \frac{(2n+1)(n+1)}{24n^2} \eta^2 - \frac{(2n+1)\eta^{n+2}}{4n^2(n+2)(n+3)}.$$

Für $\frac{b}{a} = \eta = 0, 2pb = P$, schauen wir hier wieder die Wirkung konzentriert gedachter Belastung. Schreiben wir allgemein:

$$\frac{M_0}{pa^2} = \frac{(n-1)(2n+3)}{4n(n+2)} \eta - \frac{\eta^2}{2} + \frac{(2n+1)(n+1)}{12n^2} \eta^3 - \frac{(2n+1)\eta^{n+3}}{2n^2(n+2)(n+3)}$$

und suchen den Höchstwert M_0 auf Grund der Gleichung $\frac{dM_0}{d\eta} = 0$, so erhalten wir die bereits oben behandelten Gleichungen mit dem ersten Annäherungswerte:

$$\eta = \frac{(n-1)(2n+3)}{(2n+1)(n+3)}.$$

Bei annähernden, rund vergleichenden Zahlenrechnungen kann das letzte mit η^{n+3} behaftete Glied als bedeutungslos fortbleiben.

Setzen wir den annähernd gültigen Wert

$$(n-1)(2n+3) = \eta(2n+1)(n+3)$$

ein in das erste Glied, so erhalten wir zu überschläglicher Vergleichsrechnung die Formel:

$$\frac{M}{pa^2} = \eta^2 \left\{ \frac{n+1}{4n} \right\} \left\{ \frac{3}{n+2} + \frac{2n+1}{3n} \eta \right\}.$$

Wir erhalten rund:

$$\frac{M}{pa^2} = \frac{1}{46}, \frac{1}{26}, \frac{1}{17}$$

für semikubische, gemeine, kubische Parabel.

Bei Belastung der *beiden* ergänzenden Kämpferstrecken $a - b$ erhalten wir die negativen Scheitelmomente $\frac{M}{pa^2} = -\frac{7}{36} - \frac{1}{46} = -0,22$ für die semikubische Parabel, $-\frac{1}{26}$ für die gemeine, $\left(\frac{5}{108} - \frac{1}{17}\right)$ für die kubische Parabel.

6. Belastung des Bogens mit eigener Bogenhöhe y .

Bei Belastung einer Scheitelstrecke x mit

$$p = C \frac{x^n}{a^n} dx$$

entsteht der Schub:

$$H = \frac{(2n+1) \left\{ \frac{n(n+3)}{n+1} a^{n+2} x^{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{n+3} a^n x^{n+3} + \frac{2x^{2n+3}}{2n+3} \right\}}{C \frac{8n^2(n+2)a^{2n+1} \cdot h}{}}$$

Bei Vollbelastung beider Bogenhälften entsteht daher der Schub:

$$\frac{hH}{Ca^2} = \frac{(2n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+3)(2n+3)},$$

oder wenn wir denselben im Gewicht z. B. der Hintermauerung einer Bogenhälfte $g = \gamma \frac{ah}{n+1} = \frac{Ca}{n+1}$ ausdrücken:

$$\frac{hH}{ag} = \frac{(2n+1)(n+2)}{n(n+3)(2n+3)}.$$

Das Scheitelmoment hat hierbei den Wert:

$$\frac{M_0}{ga} = \frac{-(3n+4)}{n(n+2)(n+3)(2n+3)},$$

und wir erhalten daher die Zahlen:

$$\frac{-M_0}{ga} = \frac{34}{567}, \frac{1}{28}, \frac{13}{810}$$

für semikubische, gemeine, kubische Parabel.

Methode zur graphischen Lösung von Systemen linearer Gleichungen.

VON KARL GOLDZIHNER in Budapest.

Die graphische Lösung linearer Gleichungssysteme ist in der Literatur der angewandten Mathematik mit Bezug auf ihre vielseitige Verwertung für technische Probleme des öfteren behandelt worden.¹⁾ Die bekannten Lösungsmethoden unterscheiden sich nach mehreren Gesichtspunkten: Neben den direkt an graphostatische Elemente anknüpfenden Verfahren von Klingatsch²⁾ und Verhoeckx³⁾ sind besonders jene Lösungen zu nennen, welche die graphische Übertragung eines algebraischen Eliminationsprozesses verwirklichen. Die einzelnen Methoden können weiterhin nach der Einfachheit des zugrundeliegenden algebraischen Gedankens oder nach der Art der graphischen Ausführung beurteilt werden. Die durch Mehmke vervollständigte Lösung von van den Berg⁴⁾ führt z. B. den Bézoutschen Eliminationsgedanken graphisch aus, die Methode von Maitland⁵⁾ vereinfacht diesen Prozeß durch den Gebrauch von fluchtrechten Skalen. Die „méthode de fausse position“ von Massau⁶⁾ legt einen verwickelteren algebraischen Reduktionsgedanken zugrunde; das Verfahren von Vaes⁷⁾ geht von dem Gleichsetzen der Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten aus; Muirhead⁸⁾ verfolgt das Prinzip der Komparation. Boulad⁹⁾ ersetzt den Gebrauch der

1) Zusammenfassende Darstellungen: a) Enzyklopädieartikel von Mehmke (Bd. I, S. 1014—1018); b) d'Ocagne: Calcul graphique et Nomographie (Encyclopédie scientifique, Paris. Doin. 1908) Chap. I. c) Herzog und Feldmann: Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen (Leipzig. Sammlung Göschen Nr. 456 1910) § 72—74.

2) Monatshefte für Math. und Phys. III. 1892 und Zeitschr. des Österr. Ingen. und Archit. Ver. 1893; Herzog: Elektrotechn. Zeitung 1893; Csillag: Matematikai és Fizikai Lapok VII. 1898.

3) Zweiter Teil der Arbeit in der Zeitschr. für Elektrotechnik XXII. 1904.

4) Schriften der Amsterdamer Akademie 1887—1889. Mehmke: Moskauer Math. Samml. XVI. 1892; 1) a; 1) b; Boulad in Nouv. Ann. de Mathématiques 4^e sér. XVII. 1907: zweite Arbeit; Goldziher: Magy. Mérnök- és Építész-Egylet Közl. 1911, 17.

5) De Ingenieur 1909; 1) c; den Ansatz gibt schon Boulad.

6) Annales de l'Assoc. des Ingén. sortis des Écoles spéciales de Gand XI. 1889; 1) a; 1) b (dasselbst die allgemeine algebraische Grundlegung).

7) Engineering LXVI. 1898. Nouv. Ann. de Mathématiques 3^e sér. XVIII, 1899 und Nieuw Archief voor Wiskunde 1899.

8) Proceed. of the Edinburgh Math. Soc. XXVI. 1907/8.

9) Nouv. Ann. de Mathématiques 4^e sér. XVII: erste Arbeit.

Punktreihen durch Strahlensysteme. Es wären endlich noch die Methoden zu nennen, welche bei Systemen von drei Gleichungen die Hilfsmittel der darstellenden Geometrie und bei höheren Systemen die Begriffe der mehrdimensionalen Geometrie¹⁾ verwerten.

Die Genauigkeit und die Einfachheit der Konstruktion hängt in erster Reihe von denjenigen graphischen Momenten ab, die durch den zum Ausgangspunkt dienenden algebraischen Eliminationsgedanken wesentlich bedingt sind. Die Methode von Vaes ist z. B. weniger empfindlich, als das Verfahren von van den Berg, da die Elimination bei Vaes auf Streckenadditionen bzw. Streckensubtraktionen, bei van den Berg hingegen auf Konstruktion neuer Achsen, die durch Strahlenkreuzungen geführt werden, gegründet wird. Wenn aber auch die Lösung von Vaes bereits weniger empfindlich ist, so leidet sie an der Verwickeltheit ihres konstruktiven Aufbaues. Man findet den Grund dieser Bemerkung in dem Umstand, daß Vaes den algebraischen Prozeß nicht durch das graphisch einfachste Kompositionsschema verwirklicht. Im folgenden wird nun eine Methode angegeben²⁾, die gerade an diesem Punkte festhaltend das Vaessche Verfahren graphisch vereinfacht und indem sie alle Vorteile der Vaesschen und der Van den Bergschen Konstruktionen zu erhalten sucht, dasselbe auch vervollständigt. Wir legen nämlich ein solches Kompositionsschema zugrunde, dessen graphische Übertragung direkt das Achsenbild der Eliminationsgleichung liefert und zwar ursprünglich ohne Einführung von neuen Achsen. Das Verfahren ist eigentlich das graphische Bild jener praktischen Methode, die zur Lösung des linearen Gleichungssystems der Determinantenrechnung durch zweckmäßige numerische Umformungen auszuweichen sucht.³⁾

Indem wir aus dem System der n Gleichungen zwei beliebige Gleichungen herausgreifen, können wir die zur Elimination von x_k dienenden beiden Kompositionsschemata in folgender Weise einander gegenüberstellen:

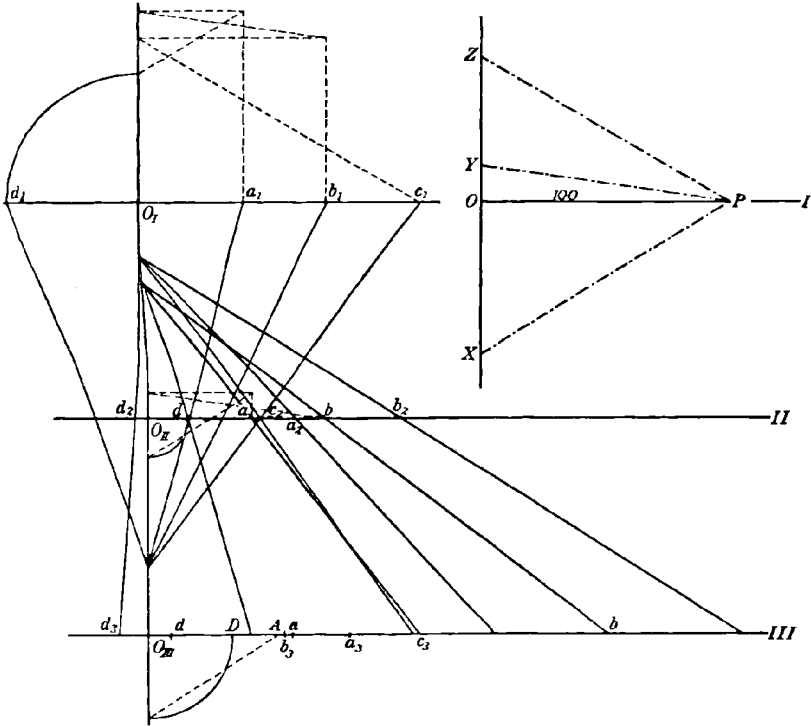
	Verfahren von Vaes	Neues Verfahren
\vdots $\dots + a_{ik}x_k + \dots = k_i$	$-\frac{1}{a_{ik}}$	-1
\vdots $\dots + b_{jk}x_k + \dots = k_j$	$\frac{1}{b_{jk}}$	$\frac{a_{ik}}{b_{jk}}$
\vdots		

1) Griend: Nieuw Archief voor Wiskunde 1899 und Schoute: Mehrdimensionale Geometrie (Leipzig. Göschen. Sammlung Schubert 1905) Bd. I. § 6, 90.

2) S. die Arbeit des Verfassers in Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye (Mitteil. des Ung. Ing.- und Archit.-Ver.) 1911, 19.

3) S. Runge: Praxis der Gleichungen (Leipzig. Göschen. Sammlung Schubert 1900) Kap. I und Herzog-Feldmann: § 53—56.

Die einzelnen Gleichungen werden — wie üblich — durch parallel-
laufende Achsenbilder dargestellt, indem man von einem beliebigen
Anfangspunkt (O) ausgehend die Koeffizienten der Gleichung auf einer
Achse abträgt (die Vorzeichen werden als Richtungen berücksichtigt).
Ein großer Vorteil dieser Darstellungsweise ist, daß man mittels Pro-
jektion von einem beliebigen Zentrum aus auf neuen, mit der ursprüng-
lichen parallel gewählten Achsen die nicht zweckmäßig gelegenen Achsen-



bilder beliebig verbessern kann.¹⁾ Unsere Figur liefert die Lösung des
folgenden numerischen Systemes von 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 43 x + 76 y + 113.5 z = 53 \\ \text{(II)} \quad & 61 x + 105 y + 46.5 z = 4.9 \\ \text{(III)} \quad & 83 x + 55.5 y + 108 z = 20. \end{aligned}$$

Wir haben also drei parallele Achsenbilder, die Anfangspunkte (O_I, O_{II}, O_{III})
werden zweckmäßig in einer zu den Achsen normalen Geraden ausge-
steckt. Beim Auftragen der Koeffizienten ist die Einheit 0.5 mm.

1) Diesen Vorteil hat auch die andere Art des Auftragens, die sukzessive
Streckenabtragung, die aber für die Eliminationskonstruktionen in unserm Fall
weniger geeignet ist.

Der Gang der Konstruktion ist folgender: Die Elimination kann in sehr mannigfacher Kombination geschehen, man wählt die den gegebenen Verhältnissen entsprechendste Reihenfolge. Bei unserm Beispiel haben wir aus der ersten und zweiten, dann aus der zweiten und dritten Gleichung das z eliminiert, indem wir aus dem Schnittpunkt der vertikalen Achse und der Verbindungen der mit c_1 und c_2 , bzw. mit c_2 und c_3 bezeichneten Streckenendpunkte das eine Achsenbild auf das andere projizierten (I auf II, bzw. II und III). Bei dieser Projektion wählt man auch die entsprechendste Reihenfolge; ähnliche Dreiecke in der Figur zeigen sofort, daß diese Konstruktion den Eliminationsprozeß graphisch verwirklicht. Die Eliminationsgleichungen erhalten wir nun so, daß wir auf den einzelnen Achsen die projizierten Koeffizientenstrecken aus den entsprechenden ursprünglichen Koeffizientenstrecken subtrahieren (als Subtrahent wird wieder die bessere Reihenfolge gewählt). In dieser Weise entstehen auf II, bzw. III die neuen Achsenbilder: (a, b, c) ; die projizierten Endpunkte haben wir der Übersicht wegen nicht benannt. Aus diesen beiden neuen Achsenbildern wird nun das y eliminiert: die Verbindung der mit b benannten Punkte liefert auf der vertikalen Axe das Projektionszentrum, die Projektion und die Streckensubtraktion ist auf der Achse III vollführt. Resultat dieser Operationen sind die Punkte A und D auf der Achse III; diese stellen das Achsenbild einer linearen Gleichung dar, die nur das x enthält. Die graphische Berechnung von x wird nun — wie in der Figur ersichtlich — in üblicher Weise ausgeführt, indem man die Ablesung auf einem besonders gezeichneten Kräfteck (Kräftepolygon) vornimmt. (In unserm Beispiel ist x negativ, da das Vorzeichen der beiden letzten Koeffizientenstrecken übereinstimmt.)

Zur Berechnung von y können die bereits konstruierten beiden ersten Eliminationsbilder unabhängig von x verwendet werden; die unabhängige Berechnung von z erfordert aber schon, daß man von vorne anfängt. Für die praktische Berechnung ist es ausreichend, daß man y und z nicht unabhängig, sondern sukzessive mit der Methode der geschlossenen Polygonzüge¹⁾ bestimmt; diese Methode gestaltet sich etwas verwickelter, als bei der sukzessiven Koeffizientenabtragung. In der Figur ist die Berechnung von y und z in dieser Weise angegeben. ($x = -0.66$, $y = 0.16$, $z = 0.61$).

Die Genauigkeit der Methode hängt wesentlich davon ab, daß — wie bei Vaes — die Streckenaddition bzw. Subtraktion das wichtigste graphische Moment der Elimination bildet. Die große Freiheit in der Wahl der Schritte und die mögliche Heranziehung von zentralprojizierten Hilfsachsenbildern erhöhen die Leichtigkeit der Durchführung.

1) Die hier benutzten wohlbekannteren graphischen Elemente sind für die sukzessive Abtragsart bei d'Ocagne Kap. I. systematisch dargestellt.

Die Theorie des Ewingschen Modells eines ferromagnetischen Körpers.

Von R. GANS in Straßburg i. E. (jetzt La Plata) und P. HERTZ
in Heidelberg (jetzt Göttingen).¹⁾

Inhalt.

§ 1.	Einleitung	13
§ 2.	Die Grundgleichungen	15
§ 3.	Diskussion der erhaltenen Gleichungen	22
§ 4.	Numerische Berechnungen	30
§ 5.	Stabilität; die Magnetisierungskurve	32
§ 6.	Die Magnetisierungskurve eines zweidimensionalen Ewingschen Modells	33
§ 7.	Vergleich mit der Erfahrung:	37
§ 8.	Schluß	41

§ 1. **Einleitung.** Die Tatsache, daß eine ferromagnetische Substanz unter der Einwirkung großer Feldstärken magnetisch gesättigt wird, hat Wilhelm Weber²⁾ zu der Hypothese geführt, ein Ferromagnetikum sei aus Elementarmagneten aufgebaut. Damit aber die Theorie nicht schon bei den kleinsten Feldstärken Sättigung ergäbe, mußte er annehmen, daß jeder Elementarmagnet unter der Einwirkung einer Direktionskraft steht, die die Tendenz hat, ihm eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage zu geben. Über das Wesen dieser Direktionskraft machte Weber keine Angaben, so daß es nicht recht ersichtlich ist, ob er sie sich als eine magnetische oder als irgendeine anders geartete Kraft vorstellte.

Erst Ewing³⁾ hat konsequent auch die Direktionskraft als magnetischen Ursprungs erklärt, hervorgerufen durch die Wirkung der umliegenden Elementarmagnete, und er hat — wenigstens qualitativ — aus seiner Hypothese die Folgerungen über das Verhalten von Eisen und Stahl im Magnetfelde gezogen.

Durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir⁴⁾ dann die Ewingschen Gedankengänge quantitativ verfolgt und sind zu

1) § 6—7 sind von Gans allein, die übrigen Paragraphen von Gans und Hertz zusammen im Sommer 1907 verfaßt.

2) Wilhelm Weber, Werke 3 Berlin 1893 S. 547 = Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1852.

3) J. A. Ewing, Magnetische Induktion in Eisen und verwandten Metallen. Berlin und München 1892; deutsch v. Holborn und Lindeck S. 272.

4) R. Gans, Gött. Nachr. 1910. S. 197 (Diese Arbeit ist auch zum Teil von Gans und Hertz).

dem Resultat gekommen, daß ein Medium, welches isotrop aus frei drehbaren Magnetonen aufgebaut ist, eine Magnetisierungskurve besitzt, die je nach der Stärke der Einwirkung der Nachbarmagnete vom paramagnetischen Typus der Figur 1 oder vom ferromagnetischen Typus der in Figur 2 dargestellten Hysteresisschleife ist.

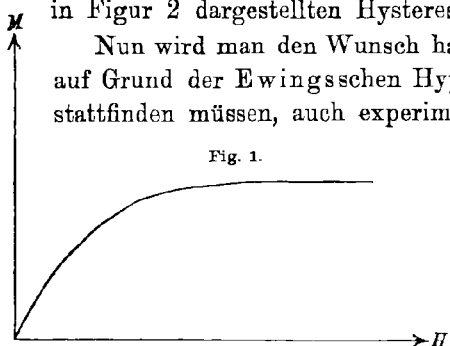


Fig. 1.

Nun wird man den Wunsch haben, die molekularen Vorgänge, die auf Grund der Ewingsschen Hypothese in einem Ferromagnetikum stattfinden müssen, auch experimentell anschaulich zu machen, und in der Tat hat man schon mehrfach¹⁾ einen ferromagnetischen Körper makroskopisch nachgebildet, indem man ein Modell aus lauter kleinen Kompaßmagneten aufgebaut hat.

Steckt man ein solches künstliches Stück Eisen in die Magnetisierungsspule, durch die man einen elektrischen Strom schiekt, so kann man die für das Wesen des Ferromagnetismus charakteristischen Eigenschaften unmittelbar durch den Augenschein studieren, so z. B. das Vorkommen mehrerer Gleichgewichtslagen bei derselben Feldstärke, das den

Anlaß zur Hysteresis gibt.

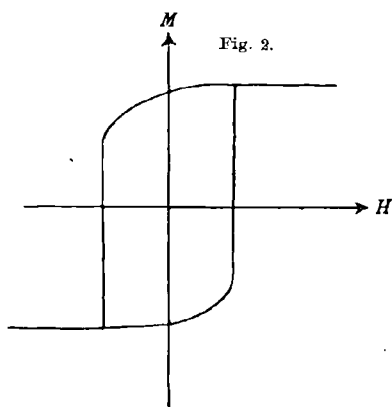


Fig. 2.

Bei den erwähnten makroskopischen Modellen hat man aber aus technischen Gründen den Magneten immer nur die Möglichkeit der Drehung um feste einander parallele Achsen gegeben, und nicht für freie Drehbarkeit im Raume gesorgt, was den tatsächlichen Verhältnissen besser entspräche. Ferner hat man die Magnete stets in einer gewissen Regelmäßigkeit, nämlich in den Punkten eines kubischen Raungitters

angeordnet, während wohl ein vollständig ungeordneter Zustand ein besseres Bild der Wirklichkeit wäre. Ewing begründet freilich die kubische Anordnung mit der Kristallstruktur des Eisens, doch scheint es, daß diese in der Konfiguration größerer Komplexe von Elementarmagneten zum Ausdruck kommt und nicht in der Anordnung der Elementarmagnete selbst.

1) A. Hoopes, The Electrician, Mai 1891; Glazebrook, vgl. Ewing l. c. S. 272.

Während sich nun eine Gruppierung der Magnete nach den Gesetzen des Zufalls leicht ausführen läßt, wird man nur schwer die Bedingung der freien Drehbarkeit im Raume — etwa durch Cardanische Aufhängungen — realisieren können. Wir wollen deshalb die Frage stellen, welche magnetischen Erscheinungen ein System regellos verteilter Magnete zeigen muß, die nur um vertikale Achsen drehbar sind (Kompaßanordnung), und wollen dann sehen, in wie weit ein solches Ewingsches Modell eine Nachbildung der Wirklichkeit ist, welche typischen Züge des Ferromagnetismus es aufweist und worin sein Verhalten von dem eines in der Natur tatsächlich vorkommenden Mechanismus abweicht. Schließlich sollen die Rechenresultate auch mit den Beobachtungen an einem solchen Modell verglichen werden.

§ 2. Die Grundgleichungen.

Bringt man ein solches Medium in ein Magnetfeld H , durch das in der Richtung von H , die wir die Vorzugsrichtung nennen wollen, eine Magnetisierung M hervorgerufen wird, so herrscht am Orte eines beliebig herausgegriffenen Magneten eine Kraft, die sich additiv aus zwei Bestandteilen zusammensetzt.¹⁾

Der erste rührt von dem äußeren Felde und den entfernteren Magneten her; er ist eine Kraft, die in die Vorzugsrichtung fällt und die Größe hat:

$$(1) \quad K = H + \frac{4\pi}{3} M.$$

Über den zweiten Bestandteil, der von den Nachbarmagneten herührt, kann man in Strenge nichts aussagen. Wir konnten plausibel machen, daß für dieses molekulare Feld jede Richtung gleich wahrscheinlich ist, und wir haben in Ermangelung eines besseren Wissens angenommen, daß dieser Kraftanteil eine konstante Größe A hat.

Das entspricht nun sicher nicht den Tatsachen, sondern es werden molekulare Felder der verschiedensten Größe in verschiedener Häufigkeit vorkommen. Die Voraussetzung eines molekularen Feldes von konstanter Größe bedeutet also die Einführung eines Mittelwertes. Diese Vereinfachung ist übrigens ganz im Einklang mit Wilhelm Webers Annahme über die von ihm eingeführte Direktionskraft.

Das molekulare Feld und das Feld K setzen sich nun zu einer Resultante zusammen, deren Horizontalkomponente parallel sich jeder Magnet einstellen wird.

Es kommt also für unsere Überlegungen wegen der alleinigen Drehbarkeit um eine vertikale Achse nur die Horizontalkomponente

1) Vgl. R. Gans, Gött. Nachr. 1910 S. 197.

von H in Betracht — eine etwa vorhandene vertikale Komponente ist ganz bedeutungslos —, die Magnetisierung M kann überhaupt nur eine horizontale Richtung annehmen, und von dem molekularen Felde brauchen wir auch nur die Verteilung der horizontalen Komponente zu kennen.

Da nun für das molekulare Feld selbst jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so muß das auch für seine Horizontalkomponente bezüglich jeder Richtung der horizontalen Ebene gelten, und da der Annahme, daß das molekulare Feld eine konstante Größe hat, schon eine Mittelwertbildung zu Grunde liegt, so dürfen wir mit demselben Rechte annehmen, daß die Horizontalkomponente des molekularen Feldes immer ein und dieselbe konstante Größe A hat.

Diese Voraussetzungen gestatten nun die Berechnung der zur Lösung unseres Problems notwendigen Verteilungsfunktionen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Horizontalkomponente des molekularen Feldes h_m mit der Vorzugsrichtung einen Winkel zwischen ϑ' und $\vartheta' + d\vartheta'$ bildet, setzen wir $\Psi(\vartheta')d\vartheta'$. Es ist also

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \Psi(\vartheta') d\vartheta' = 1.$$

Da aber unserer Annahme zufolge Ψ von ϑ' unabhängig ist, so folgt

$$(3) \quad \Psi(\vartheta') = \frac{1}{2\pi}.$$

Wollen wir jetzt die Gesamtkraft h erhalten, so müssen wir h_m mit der in die Vorzugsrichtung fallenden Kraft K (Gleichung (1)) vektoriell zusammensetzen. Der Winkel, den die so resultierende Kraft, und daher auch die Magnetachse, mit der Vorzugsrichtung bilden, soll ϑ heißen, und $\Phi(\vartheta)d\vartheta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ enthalten ist. Es ist also ϑ eine Funktion von ϑ' , d. h. jedesmal, wenn h_m mit der Vorzugsrichtung den Winkel ϑ' bildet, schließt h mit ihr einen ϑ' zugehörigen Winkel ϑ ein. Daraus folgt aber

$$\Phi(\vartheta) |d\vartheta| = \Psi(\vartheta') |d\vartheta'|$$

oder nach (3)

$$(4) \quad \Phi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \right|,$$

wo die Striche den Absolutwert bedeuten. Indessen ist dabei vorausgesetzt, daß jedem Winkel ϑ nur ein ϑ' entspricht; entsprechen ihm mehrere, so hat man an Stelle von (4)

$$(5) \quad \Phi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum \left| \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \right|$$

zu setzen.

Um den Zusammenhang zwischen ϑ' und ϑ aufzufinden, bedienen wir uns elementarer trigonometrischer Sätze. Fig. 3 läßt sofort ablesen:

$$(6) \quad \frac{\sin(\vartheta' - \vartheta)}{\sin \vartheta} = \frac{K}{A}$$

oder

$$\cos(\vartheta' - \vartheta) \cdot (d\vartheta' - d\vartheta) = \frac{K}{A} \cos \vartheta d\vartheta;$$

daher ist

$$(7) \quad \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} = 1 + \frac{\frac{K}{A} \cos \vartheta}{\cos(\vartheta' - \vartheta)}$$

oder wegen (6)

$$(8) \quad \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} = 1 \pm \frac{\frac{K}{A} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}}$$

Die Bestimmung des Vorzeichens erfordert eine besondere Betrachtung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

Erster Fall: (Fig. 3) $\frac{K}{A} < 1$.

Wir lassen ϑ' von 0 bis π wachsen, d. h. lassen den Schenkel A , seine Länge festhaltend, eine halbe Kreisdrehung um den Punkt S ausführen. Wie man sieht, beschreibt dann der Schenkel η eine halbe Kreisdrehung um R , so daß auch ϑ von 0 bis π wächst. Wir erkennen sofort, daß bei diesem Drehungsvorgang zu jedem

Winkel ϑ nur ein ϑ' gehört, und daß $\vartheta' - \vartheta$ stets $< \frac{\pi}{2}$ ist. Es ist also $\cos(\vartheta' - \vartheta)$ nie negativ, d. h. die rechte Seite von (7) stets positiv und (8) in der Form

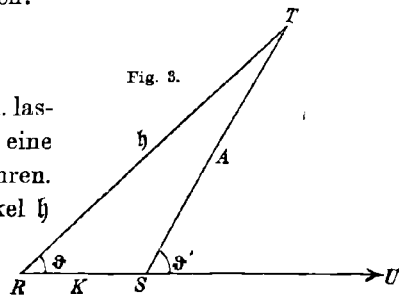
$$(9) \quad \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} = 1 + \frac{\frac{K}{A} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}}$$

zu schreiben.

Ist m das Moment eines Magneten, von denen sich in der Volumeneinheit n befinden mögen, so ist die Magnetisierung

$$(10) \quad M = nm \int_0^{2\pi} \Phi(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = 2nm \int_0^{\pi} \Phi(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

da $\Phi(2\pi - \vartheta) = \Phi(\vartheta)$ ist.



Also wird nach (4) und (9)

$$M = \frac{nm}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{K}{A} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}} \right) \cos \vartheta d\vartheta$$

oder

$$(11) \quad M = \frac{2nmK}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

In dieser Gleichung hat man sich K überall nach der Gleichung

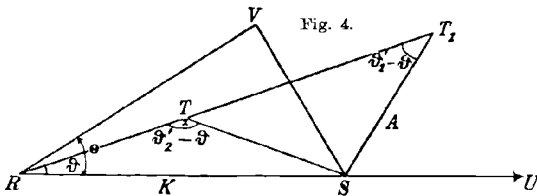
$$(1) \quad K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

durch H und M ausgedrückt zu denken; sie stellt also die Abhängigkeit der Funktion M von H in Form einer impliziten Funktion dar. Da die Größe K selbständiges Interesse beansprucht, bilden wir auch die für sie geltende Gleichung und erhalten aus (11) und (1)

$$(12) \quad K = H + \frac{8nm}{3} \frac{K}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}}$$

Zweiter Fall: $\frac{K}{A} > 1$ (Fig. 4.)

Wieder drehen wir den Schenkel ST von der festen Länge A um S , d. h. lassen ϑ' von 0 bis π wachsen. Wir sehen, daß dann zunächst



ϑ von Null bis auf einen Maximalwert Θ wächst, der durch die Gleichung

$$(13) \quad \sin \Theta = \frac{K}{A}$$

gegeben ist (vgl. die Lage SV von A), und daß

bis dahin $\vartheta_1' - \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist (z. B. der Winkel RT_1S). Beim Weiterdrehen nimmt aber ϑ wieder von Θ bis 0 ab, und $\vartheta' - \vartheta$ bleibt beständig $> \frac{\pi}{2}$.

Zu einem und demselben ϑ erhalten wir somit zwei Werte ϑ' (z. B. zu T_1T_2RSU sowohl T_1SU als auch T_2SU) und haben, wenn der zuerst erreichte ϑ_1' , der später erreichte ϑ_2' genannt wird,

$$\frac{d\vartheta_1'}{d\vartheta} > 0; \quad \frac{d\vartheta_2'}{d\vartheta} < 0.$$

Daher ist nach (5)

$$(14) \quad \Phi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\vartheta'_1}{d\vartheta} - \frac{d\vartheta'_2}{d\vartheta} \right).$$

Berücksichtigt man nun das eben über $\vartheta' - \vartheta$ Gesagte, so erhält man aus (7) und (8)

$$\frac{d\vartheta'_1}{d\vartheta} = 1 + \frac{\frac{K}{A} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}}; \quad \frac{d\vartheta'_2}{d\vartheta} = 1 - \frac{\frac{K}{A} \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}},$$

also nach (14)

$$(15) \quad \Phi(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \frac{K}{A} \frac{\cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}}$$

und nach (10)

$$(16) \quad M = \frac{2nm}{\pi} \frac{K}{A} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

Diese Gleichung stellt wieder zusammen mit (1) M als implizite Funktion von H dar. Für K ergibt sich aus ihr und (1)

$$(17) \quad K = H + \frac{8}{3} \frac{K}{A} nm \int_0^{\vartheta} \frac{\cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{K^2}{A^2} \sin^2 \vartheta}} d\vartheta.$$

Wie wir sehen, sind wir zu elliptischen Integralen gelangt; wir wollen also auch die in der Theorie dieser Funktionen üblichen Bezeichnungen einführen.

Setzen wir im *ersten Falle* abkürzend

$$(18) \quad \frac{K}{A} = k_1,$$

so daß also

$$(19) \quad k_1 < 1$$

ist, so schreibt sich (12)

$$(20) \quad Ak_1 = H + \frac{8nm}{3} k_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Indem wir nach Legendre setzen

$$(21) \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \Delta$$

(vollständiges Integral zweiter Gattung),

$$(22) \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\Delta}$$

(vollständiges Integral erster Gattung),

$$(23) \quad \Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta},$$

haben wir

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{\Delta} = \frac{\Delta}{k^2} - \frac{1 - k^2}{k^2 \Delta},$$

also wird (20)

$$(24) \quad Ak_1 = H + \frac{8nm}{3} \frac{1}{k_1} \{E(k_1) - (1 - k_1^2)F(k_1)\}.$$

Um (17) umzuformen, setzen wir

$$(25) \quad \frac{A}{K} = k_2;$$

es ist also

$$(26) \quad k_2 < 1,$$

und (13) schreibt sich

$$(27) \quad \sin \vartheta = k_2.$$

Die Gleichung (17) lautet jetzt

$$\frac{A}{k_2} = H + \frac{8nm}{3} \frac{1}{k_2} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{k_2^2}}}.$$

Setzt man im Integral

$$\sin \vartheta = k_2 \sin \omega,$$

so erhält man

$$(28) \quad \frac{A}{k_2} = H + \frac{8}{3} nm E(k_2).$$

Aus den beiden Gleichungen (24) und (28) wollen wir nun die Größen n und m herausschaffen. Zu dem Zweck leiten wir aus (1), (25) und (28) die Beziehung

$$(29) \quad M = \frac{2}{\pi} nm E(k_2)$$

ab. Nehmen wir jetzt den Fall an, daß H über alle Grenzen wächst. Da $E(k_2)$ stets endlich bleibt, so muß nach (28) für diesen Fall $k_2 = 0$ werden, d. h. das zugehörige, mit M_∞ zu bezeichnende M sich nach (21) und (29) aus

$$(30) \quad M_\infty = nm$$

bestimmen. Diese Beziehung ist natürlich auch unmittelbar einleuchtend; war doch die Beobachtung, daß die Magnetisierung für große H

asymptotisch konstant wird — daß die sogenannte Sättigung eintritt — gerade der Anlaß zur Aufstellung der Drehungstheorie.

Wenn wir nun M_∞ einführen und abkürzend

$$(31) \quad \frac{A}{M_\infty} = C$$

setzen, erhalten wir

$$(32) \quad \frac{H}{M_\infty} = k_1 C - \frac{8}{3} \frac{1}{k_1} \{ E(k_1) - (1 - k_1^2) F(k_1) \},$$

$$(33) \quad \frac{H}{M_\infty} = \frac{C}{k_1} - \frac{8}{3} F(k_2).$$

Diese Gleichungen gestatten die Berechnung von k_1 oder k_2 aus H ; aus den k kann aber K , und damit M gefunden werden. Indessen ist es zweckmäßiger, auch M als Funktion von k zu geben und so die Abhängigkeit der Größe M von H in Parameterform darzustellen, wo k_1 resp. k_2 der Parameter ist.

Nach (1) und (24) ist aber im ersten Stadium

$$(34) \quad M = \frac{2}{\pi} M_\infty \frac{1}{k_1} \{ E - (1 - k_1^2) F \},$$

und ganz analog gilt im zweiten Stadium (vgl. (29))

$$(35) \quad M = \frac{2}{\pi} M_\infty E(k_2).$$

Somit lauten unsere Gleichungen, wenn wir zur Abkürzung

$$(36) \quad \frac{H}{M_\infty} = \xi,$$

$$(37) \quad \frac{M}{M_\infty} = \eta$$

setzen,

$$(38) \quad \text{I} \left\{ \begin{array}{l} \xi = k_1 C - \frac{8}{3} \frac{1}{k_1} \{ E - (1 - k_1^2) F \}, \\ \eta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k_1} \{ E - (1 - k_1^2) F \}, \end{array} \right.$$

$$(39) \quad \text{I} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{C}{k_1} - \frac{8}{3} E, \\ \eta = \frac{2}{\pi} E. \end{array} \right.$$

$$(40) \quad \text{II} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{C}{k_2} - \frac{8}{3} E, \\ \eta = \frac{2}{\pi} E. \end{array} \right.$$

$$(41) \quad \text{II} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{C}{k_2} - \frac{8}{3} E, \\ \eta = \frac{2}{\pi} E. \end{array} \right.$$

Dieses Gleichungssystem gibt die Magnetisierungskurve, d. h. die Abhängigkeit der Größe η von ξ in Parameterform.

In ihm kommen die Materialkonstanten C und M_∞ vor. Um C physikalisch zu deuten, stellen wir die für kleine k_1 geltenden Formeln auf.

Für kleine k_1 erhält man aus (21) bis (23) durch Reihenentwicklung:

$$(42) \quad E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k_1^2 \right),$$

$$(43) \quad F = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k_1^2 \right),$$

also für das erste Stadium ($K < A$) nach (38) und (39)

$$(38') \quad \xi = \left(C - \frac{2\pi}{3} \right) k_1,$$

$$(39') \quad \eta = \frac{k_1}{2}.$$

Setzt man

$$(44) \quad \lim_{H=0} \frac{M}{H} = \kappa_0,$$

so ergibt sich für die sogenannte „Anfangsuszeptibilität“ κ_0 der Ausdruck

$$(45) \quad \kappa_0 = \frac{1}{2 \left(C - \frac{2\pi}{3} \right)},$$

woraus

$$(46) \quad C = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2\kappa_0}$$

folgt. *Wir können also sagen, daß unsere Gleichungen als Materialkonstanten die Anfangsuszeptibilität und die Sättigungsmagnetisierung enthalten.*

§ 3. Diskussion der erhaltenen Gleichungen.

Um die erhaltenen Gleichungen zu diskutieren, müssen wir vor allem die Werte von ξ und η für $k = 0$ und $k = 1$ kennen und Formeln für die Differentialquotienten dieser Funktionen aufstellen. Es sollen also die entsprechenden Angaben für die elliptischen Integrale vorausgeschickt werden.

1. Aus (21) und (22) oder (42) und (43) folgt zunächst

$$(47) \quad E(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$(48) \quad F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner ist nach (21)

$$(49) \quad E(1) = 1.$$

Wie man leicht nachweisen kann, ist

$$(50) \quad \lim_{k=1} F(k) = \infty,$$

aber¹⁾

$$(51) \quad \lim_{k=1} (1 - k^2) F(k) = 0$$

$$\lim_{k=1} (1 - k^2) F^n(k) = 0.$$

wo n einen Exponenten bedeutet.

Endlich erwähnen wir noch die sofort aus (21) und (22) folgende Beziehung

$$(52) \quad F(k) - E(k) = k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta} d\vartheta.$$

2. Zweitens brauchen wir einige auf die Differentialquotienten der elliptischen Integrale bezügliche Formeln.

Es ist²⁾

$$(53) \quad \frac{dF}{dk} = -\frac{F}{k} + \frac{E}{k(1-k^2)}$$

und

$$(54) \quad \frac{dE}{dk} = -\frac{F}{k} + \frac{E}{k}.$$

Ehe wir diese Formeln anwenden, bemerken wir noch, daß (1) sich unter Benutzung von (36) und (37) in der Form

$$(55a) \quad \frac{4\pi}{3} \eta = k_1 C - \xi \quad \text{resp.} \quad (55b) \quad \frac{4\pi}{3} \eta = \frac{C}{k_2} - \xi$$

schreiben läßt, woraus durch Differentiation folgt:

$$(56a) \quad \frac{4\pi}{3} \frac{d\eta}{dk_1} = C - \frac{d\xi}{dk_1} \quad \text{resp.} \quad (56b) \quad \frac{4\pi}{3} \frac{d\eta}{dk_2} = -\frac{C}{k_2^2} - \frac{d\xi}{dk_2},$$

sodaß sich das Verhalten von η und $\frac{d\eta}{dk_1}$ resp. $\frac{d\eta}{dk_2}$ sofort ergibt, wenn man dasjenige von ξ , $\frac{d\xi}{dk_1}$ resp. $\frac{d\xi}{dk_2}$ kennt.

Untersuchen wir jetzt

I. den Verlauf der Magnetisierungskurve im ersten Stadium.

Für die Ableitung von ξ nach k_1 geben (38), (53) und (54)

$$(57) \quad \frac{d\xi}{dk_1} = C + \frac{8}{3} \frac{1}{k_1^2} [E(k_1) - F(k_1)]$$

oder mit Benutzung von (52)

$$(57') \quad \frac{d\xi}{dk_1} = C - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}},$$

1) Vgl. O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. 2. Braunschweig 1866, S. 316 Formel (42).

2) O. Schlömilch, a. a. O. S. 295 u. 296.

(56a) ergibt somit

$$(58) \quad \frac{d\eta}{dk_1} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k_1^2} [E(k_1) - F(k_1)]$$

oder

$$(58') \quad \frac{d\eta}{dk_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}}$$

Wir untersuchen jetzt nacheinander a) ξ als Funktion von k_1 , b) η als Funktion von k_1 , c) η als Funktion von ξ .

a) ξ als Funktion von k_1 .

Nach Formel (38') gilt für kleine k_1

$$(38'') \quad \xi = \left(C - \frac{2\pi}{3}\right) k_1.$$

Daraus folgt: für $k_1 = 0$ ist $\xi = 0$.

(38'') geht nach (46) in

$$(59) \quad \xi = \frac{k_1}{2\kappa_0}$$

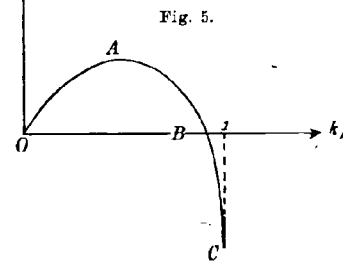
über. Bei ferromagnetischen Körpern ist aber $\kappa_0 > 0$, also ist $\frac{d\xi}{dk_1}$ an der Stelle $k_1 = 0$ positiv.

Aus (57') ersieht man, daß mit wachsendem k_1 der Differentialquotient $\frac{d\xi}{dk_1}$ beständig kleiner wird, und aus (57) in Verbindung mit (49) und (50), daß $\frac{d\xi}{dk_1}$ an der Stelle $k_1 = 1$ gleich $-\infty$ wird. ξ selbst wird an dieser Stelle nach (38), (49) und (51)

$$(60) \quad \xi_1 = C - \frac{8}{3}$$

oder nach (46)

$$(60') \quad \xi_1 = \frac{2\pi - 8}{3} + \frac{1}{2\kappa_0}.$$



Sofern nun $2\kappa_0 > 8 - \frac{3}{2\pi}$ d. h. $\kappa_0 > 0,87$, was wir annehmen wollen, ist dieser Wert negativ.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich für ξ als Funktion von k_1 folgende Kurve (Fig. 5): Sie beginnt bei $k_1 = 0$ mit $\xi = 0$, erhebt sich über die Abszissenachse, besitzt ein Maximum oberhalb der Abszissenachse (A), schneidet die Abszissenachse (B), sinkt unter die Abszissenachse und endet bei $k_1 = 1$ mit einem negativen Werte ξ_1 und senkrechter Tangente (C).

b) η als Funktion von k_1 .

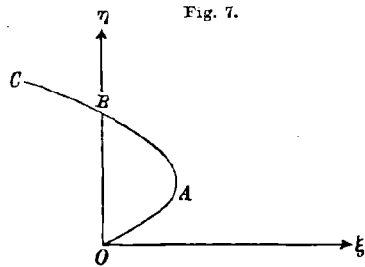
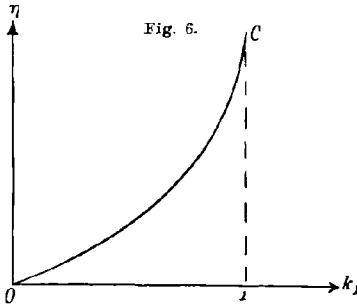
Für kleine η hat man nach (39')

$$(61) \quad \eta = \frac{k_1}{2},$$

also eine positive Größe. Aus (58') folgt, daß $\frac{d\eta}{dk_1}$ mit wachsendem k_1 stets zunimmt. An der Stelle $k_1 = 1$ ist $\frac{d\eta}{dk_1}$ nach (58), (49) und (50) $= +\infty$. η selbst wird an dieser Stelle nach (39), (49) und (51)

$$\eta_1 = \frac{2}{\pi}.$$

Hiernach ergibt sich für die Kurve η als Funktion von k_1 folgendes (Fig. 6): Sie beginnt bei $k_1 = 0$ mit $\eta = 0$, wächst andauernd,



wird immer steiler und endigt bei $k_1 = 1$ mit einem positiven Wert und senkrechter Tangente (C).

c) Aus den Ergebnissen unter a) und b) gewinnt man nun leicht η als Funktion von ξ im ersten Stadium (Fig. 7):

Die Kurve beginnt bei $\xi = 0$ und $\eta = 0$ (O in Fig. 5—7) und führt zunächst zu größeren ξ und η . Von einer bestimmten Stelle (A in Fig. 5 und 7) ab wird ξ kleiner, während η weiter wächst. Später schneidet die Kurve die Ordinatenachse (B in Fig. 5 und 7) und endigt mit negativem ξ und positivem η (C in Fig. 5, 6 und 7) bei geneigter Tangente.

Die zuletzt behauptete Tatsache bedarf noch des Beweises. Aus (57) und (58) folgt für k_1 nahe = 1

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{+\frac{2}{\pi} F(k_1)}{-\frac{8}{3} F'(k_1)} = -\frac{3}{4\pi},$$

$\frac{d\eta}{d\xi}$ ist also in C endlich.

Schließlich soll noch gezeigt werden, daß die Kurve ξ, η zwischen O und C überall ihre konkave Seite der η -Achse zuwendet, daß also

zwischen diesen beiden Punkten kein Wendepunkt der Kurve liegt. Zu dem Zweck braucht man nur nachzuweisen, daß $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$ zwischen den fraglichen Punkten < 0 ist.

Aus Gleichung (55) folgt durch Differentiation nach η

$$\frac{d\xi}{d\eta} = C \frac{dk_1}{d\eta} - \frac{4\pi}{3}.$$

Nochmalige Differentiation nach η ergibt

$$(62) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = - \frac{C}{\left(\frac{d\eta}{dk_1}\right)^2} \frac{d^2\eta}{dk_1^2} \frac{dk_1}{d\eta} = - \frac{C}{\left(\frac{d\eta}{dk_1}\right)^3} \frac{d^2\eta}{dk_1^2}.$$

Da aber aus Figur 6 folgt, daß zwischen O und C dauernd

$$\frac{d\eta}{dk_1} > 0; \quad \frac{d^2\eta}{dk_1^2} > 0$$

ist, so ist die Behauptung nach (62) tatsächlich erwiesen.

In der Nähe von $k_1 = 1$ ist

$$(63) \quad \frac{d\eta}{dk_1} = \frac{2}{\pi} F'(k_1).$$

Ferner folgt aus (58) mit Benutzung von (53) und (54)

$$(64) \quad \frac{d^2\eta}{dk_1^2} = \frac{4}{\pi k_1^3} (E - F) + \frac{2E}{k_1(1 - k_1^2)}.$$

In der Nähe von $k_1 = 1$ wird also nach (62) unter Berücksichtigung von (49), (50) und (51)

$$(65) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = - \frac{C\pi}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3} \cdot \frac{1}{(1 - k_1^2) F'^3(k_1)} = - \infty$$

sein. Die Krümmung der Kurve ξ, η wird also im Punkte C unendlich groß.

II. Verlauf der Magnetisierungskurve im zweiten Stadium.

Aus (40) und (54) folgt die Gleichung

$$(66) \quad \frac{d\xi}{dk_2} = - \frac{C}{k_2^2} - \frac{8}{3k_2} (E - F),$$

die sich wegen (52) auch

$$(66') \quad \frac{d\xi}{dk_2} = - \frac{C}{k_2^2} + \frac{8}{3} k_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta} d\vartheta$$

schreiben läßt. (56b), (71) und (54) ergeben für $\frac{d\eta}{dk_2}$

$$(67) \quad \frac{d\eta}{dk_2} = \frac{2(E - F)}{\pi k_2}$$

resp. mit Berücksichtigung von (52)

$$(67') \quad \frac{d\eta}{dk_2} = -\frac{2k_2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta} d\vartheta.$$

Wir betrachten jetzt

d) ξ als Funktion von k_2 .

Für $k_2 = 0$ wird nach (40) und (47) $\xi = +\infty$ und nach (66') $\frac{d\xi}{dk_2} = -\infty$. Mit wachsendem k_2 wächst nach (66') $\frac{d\xi}{dk_2}$ beständig.

Für $k_2 = 1$ wird $\frac{d\xi}{dk_2}$ nach (66) und (50) $= +\infty$. An dieser Stelle besitzt ξ selbst nach (40) und (49) den Wert $C - \frac{8}{3}$, d. h. den durch (60) gegebenen und als negativ erkannten Wert.

ξ als Funktion von k_2 besitzt also folgenden Verlauf (Fig. 8): Bei $k_2 = 0$ kommt die Kurve aus dem positiv Unendlichen mit senkrechter Tangente (F), trifft die Abszissenachse (E) und sinkt unter sie, besitzt in der unteren Halbebene der Koordinatenebene ein Minimum (D), und erhebt sich wieder zu einem negativen Wert, wo sie mit senkrechter Tangente endet.

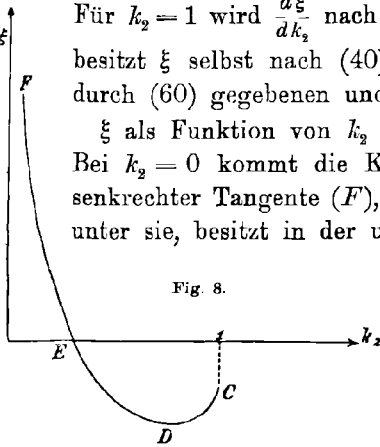


Fig. 8.

e) η als Funktion von k_2 .

Für $k_2 = 0$ wird nach (41) $\eta = 1$ und nach (67') $\frac{d\eta}{dk_2} = 0$. Außerdem

folgt aus (41) und (21), daß η mit wachsendem k_2 beständig abnimmt.

Für $k_2 = 1$ wird η nach (41) und (49) gleich $\frac{2}{\pi}$, also gleich dem positiven Werte, der auf S. 25 mit η_I bezeichnet wurde, während $\frac{d\eta}{dk_2}$

für $k_2 = 1$ nach (67) und (50) gleich $-\infty$ wird, und zwar nimmt

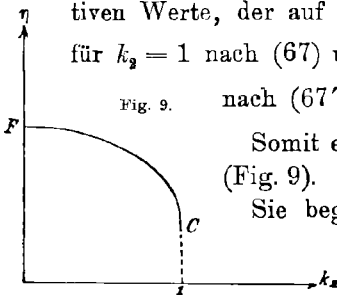


Fig. 9.

nach (67') $\frac{d\eta}{dk_2}$ dauernd ab.

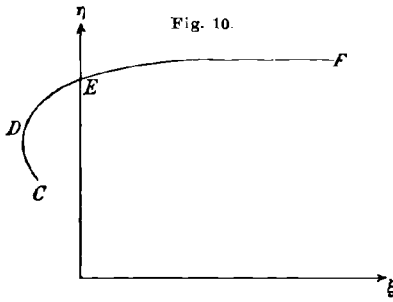
Somit ergibt sich folgende Gestalt für die Kurve k_2, η (Fig. 9).

Sie beginnt bei $k_2 = 0$ mit dem Werte $\eta = 1$ und horizontaler Tangente (F). Die Ordinaten nehmen mit wachsendem k_2 beständig ab, und zwar so, daß die Kurve immer steiler wird, um bei C mit senkrechter Tangente und positiver Ordinate zu enden.

f) η als Funktion von ξ .

Aus den Betrachtungen unter d) und e) ergibt sich nun auch die Gestalt der Kurve, die η als Funktion von ξ darstellt (Fig. 10). Wir

beschreiben die Kurve, indem wir sie in der Richtung der abnehmenden k durchlaufen. Die Kurve beginnt links von der η -Achse im Punkte C , besitzt an einer bestimmten Stelle (D) eine senkrechte Tangente (vgl. D in Fig. 8), schneidet bei E (Fig. 8 und 10) die Achse $\xi = 0$ und verläuft von da an dauernd im Quadranten der positiven ξ, η , wobei sie asymptotisch dem Wert $\eta = 1$ (F) zustrebt.



Daß an der Stelle C der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ wirklich endlich ist, wie in der Figur 10 angenommen, folgt aus den Gleichungen (66) und (67), die

$\lim_{k_2=1} \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{4\pi}{3}$ ergeben. Ebenso folgt aus diesen Gleichungen für $k_2 = 0$, d. h. für F die Beziehung $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$. Die Kurve endet also mit einem horizontalen Ast.

Es sollen noch die Krümmungsverhältnisse von CF untersucht werden. Aus (55b) folgt durch Differentiation nach ξ

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{C}{k_2^2} \frac{dk_2}{d\xi} - 1 = -\frac{C}{k_2^2} \frac{d\xi}{dk_2} - 1.$$

Nochmalige Differentiation nach ξ ergibt

$$(68) \quad \frac{4\pi}{3} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{C}{k_2^4 \left(\frac{d\xi}{dk_2}\right)^2} \left[2k_2 \frac{d\xi}{dk_2} + k_2^2 \frac{d^2\xi}{dk_2^2} \right] \frac{dk_2}{d\xi} = \frac{C}{k_2^3 \left(\frac{d\xi}{dk_2}\right)^3} \left(2 \frac{d\xi}{dk_2} + k_2 \frac{d^2\xi}{dk_2^2} \right).$$

Nun ist nach (66)

$$\frac{d\xi}{dk_2} = -\frac{C}{k_2^2} - \frac{8}{3k_2} (E - F),$$

also mit Berücksichtigung von (53) und (54)

$$\frac{d^2\xi}{dk_2^2} = \frac{2C}{k_2^3} + \frac{8}{3k_2^2} (E - F) + \frac{8E}{3(1-k_2^2)}.$$

Somit ist der in (68) auftretende Klammerausdruck

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi}{dk_2} + k_2 \frac{d^2\xi}{dk_2^2} &= \frac{8}{3k_2(1-k_2^2)} [(F - E)(1 - k_2^2) + Ek_2^2] \\ &= \frac{8k_2}{3(1-k_2^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\Delta} \{ (1 - k_2^2) \sin^2 \vartheta + \Delta^2 \} \end{aligned}$$

nach (52) und (21).

Dieser Ausdruck ist aber immer > 0 , da der Integrand wesentlich positiv ist; also ist nach (68) das Vorzeichen von $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ gleich dem von

$\frac{d\xi}{dk_2}$. Fig. 8 ergibt demnach, daß $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} > 0$ zwischen C und D , zwischen D und F aber < 0 ist, d. h. daß die ξ, η -Kurve (Fig. 10) von C bis D konvex, von D bis F konkav gegen die ξ -Achse ist.

In der Nähe von $k_2 = 1$ ist $\frac{d\xi}{dk_2} = \frac{8}{3} F(k_2)$ (vgl. (66)). Aus derselben Gleichung folgt allgemein

$$(69) \quad \frac{d^2\xi}{dk_2^2} = 2\frac{C}{k_2^2} + \frac{8}{3k_2^2}(E - F) + \frac{8E}{3(1-k_2^2)}$$

und in der Nähe von $k_2 = 1$

$$\frac{d^2\xi}{dk_2^2} = \frac{8}{3(1-k_2^2)}$$

und somit nach (68)

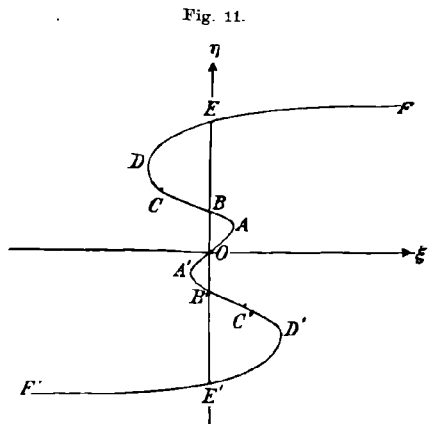
$$(70) \quad \lim_{k_2=1} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{C}{\left(\frac{8}{3}\right)^2 F^2(k_2)(1-k_2^2)} = +\infty.$$

Der Punkt C ist also nach (65) und (70) ein Wendepunkt, der einzige auf dem Zuge $OABCD$, und zwar wechselt $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ dort sein Vorzeichen, indem es von $-\infty$ in $+\infty$ übergeht. Die Kurve besitzt in C eine bestimmte Richtung der Tangente, aber eine unendlich große Krümmung.

Wir können nun die für das erste (Fig. 8) und zweite Stadium (Fig. 10) gefundenen Stücke zusammensetzen. Denn es zeigte sich, daß in beiden zu $k_1 = 1$ und $k_2 = 1$ dieselben Werte η und ξ gehören, und daß auch die $\frac{d\eta}{d\xi}$ an dieser Stelle den gleichen Wert besitzen, so daß dort die zusammengesetzte Kurve weder einen Sprung noch einen Knick aufweist. Endlich findet man auch die Fortsetzung in das Gebiet der negativen ξ . Denn aus Symmetriegründen folgt

$$(71) \quad \eta(-\xi) = -\eta(+\xi).$$

Somit erhält man eine Kurve, wie in Fig. 11 gezeichnet. Wir bemerken noch, daß die Abszisse des Punktes D dem absoluten Wert nach größer ist, als die des Punktes A , wie unter anderem aus folgenden numerischen Rechnungen hervorgeht.



§ 4. Numerische Rechnungen.

Für die weiteren Betrachtungen ist es von Interesse, den numerischen Wert der Ordinate OE (Fig. 11), ferner die Abszissen der Punkte A und D zu kennen. Nun lassen sich diese nicht allgemein angeben, weil die Formeln noch die unbekannte Größe C enthalten, die sich nach Gleichung (46) durch die Anfangssuszeptibilität κ_0 ausdrückt. Da aber erfahrungsgemäß κ_0 eine gegen 1 ziemlich große Zahl ist, so erhält man eine erste Annäherung, wenn man $\kappa_0 = \infty$ setzt. Diese lautet

$$(72) \quad C_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Berücksichtigt man noch die erste Potenz von $\frac{1}{\kappa_0}$, so erhält man in zweiter Annäherung

$$(73) \quad C_1 = C_0 + \Delta C = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2\kappa_0}, \quad \text{d. h.}$$

$$(73') \quad \Delta C = \frac{1}{2\kappa_0}.$$

1. Es möge nun zuerst die Ordinate OE berechnet werden. Zu dem Zweck muß man in den für das zweite Stadium gültigen Formeln (40) und (41) für ξ und η die Größe ξ gleich Null setzen; aus der so erhaltenen transzendenten Gleichung berechnet man k_2 und setzt diesen Wert in (41) ein, wodurch η , d. h. OE in Fig. 11 bestimmt ist. Besser noch benutzt man, wenn man k_2 aus $\xi = 0$ berechnet hat, die Gleichung (55b), die für $\xi = 0$

$$(74) \quad \eta_E = \frac{3C}{4\pi k_2}$$

lautet.

In erster Näherung berechnet sich k_2 aus der Gleichung (40), welche die Form annimmt

$$(75) \quad \frac{\pi}{4} - k_2 W(k_2) = 0.$$

Ihre linke Seite wollen wir zur Abkürzung $G(k_2)$ nennen. Setzen wir mit Legendre

$$k_2 = \sin \vartheta,$$

so finden wir in den Legendreschen Tafeln für

$$\begin{aligned} \vartheta = 32^\circ, 8 & \quad G(k_2) = + 0,000831 \\ \vartheta = 32^\circ, 9 & \quad G(k_2) = - 0,000885. \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich der genaue Wert für ϑ

$$\vartheta = 32^\circ 50' 53'',$$

also

$$k_2 = 0,54241,$$

und aus (74)

$$(76) \quad \eta_E = 0,9210.$$

In zweiter Näherung kommt zu k_2 noch die Korrektion Δk_2 hinzu, die sich aus der differenzierten Gleichung (40) ergibt.

$$(77) \quad \Delta C - \frac{8}{3} E(k_2) \Delta k_2 - \frac{8}{3} k_2 E'(k_2) \Delta k_2 = 0$$

oder mit Benutzung von (54) und (73')

$$(78) \quad \Delta k_2 = \frac{3}{16 x_0} \frac{1}{2E - F}.$$

Aus (41) folgt

$$\Delta \eta_E = \frac{8(E - F)}{k_2} \Delta k_2 = \frac{3}{2k_2} \frac{E - F}{2E - F} \frac{1}{x_0} = - \frac{0,6124}{x_0},$$

so daß man in zweiter Näherung

$$(79) \quad \eta_E = 0,9210 - \frac{0,6124}{x_0}$$

erhält.

2. Jetzt soll die Abszisse des Punktes D (Fig. 11) berechnet werden. Diese Stelle ist dadurch charakterisiert, daß dort $\frac{d\xi}{dk_2} = 0$ ist (Fig. 5), daher muß nach (66) die Gleichung gelten:

$$(80) \quad C + \frac{8k_2}{3} (E - F) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (40) folgt

$$(81) \quad \xi_D = \frac{8}{3} (F - 2E).$$

In erster Näherung lautet (80)

$$J(k_2) = \pi + 4k_2(E - F) = 0.$$

Für $\vartheta = 59^\circ, 1$ ist $J(k_2) = + 0,00809$

$\vartheta = 59^\circ, 2$ $J(k_2) = - 0,00734.$

Interpolation ergibt $\vartheta = 59^\circ 9' 12''$,

d. h. $k_2 = 0,85854$

und $\xi_D = - 0,81142.$

Um die zweite Näherung zu erhalten, bedenken wir, daß ξ eine Funktion von k_2 und C ist, so daß

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial k_2} \Delta k_2 + \frac{\partial \xi}{\partial C} \Delta C$$

ist. Im fraglichen Punkte ist aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial k_2} = 0,$$

also $\Delta \xi_D = \frac{\partial \xi}{\partial C} \Delta C.$

Nach (40) ist nun $\frac{\partial \xi}{\partial C} = \frac{1}{k_2}$, so daß mit Benutzung von (73')

$$(82) \quad \Delta \xi_D = \frac{1}{2k_2 \kappa_0}$$

Das Endergebnis lautet also:

$$(83) \quad \xi_D = -0,81142 + \frac{0,5820}{\kappa_0}$$

3. Schließlich soll noch ξ_A bestimmt werden. Für sehr kleine k_1 ist der Anfang der Reihenentwicklung von ξ nach Potenzen von k_1 (vgl. (38)):

$$(84) \quad \xi = \left(C - \frac{2\pi}{3}\right)k_1 - \frac{\pi}{12}k_1^3, \text{ also}$$

$$(85) \quad \frac{d\xi}{dk_1} = C - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}k_1^2.$$

Im Punkte A ist aber $\frac{d\xi}{dk_1} = 0$ (Fig. 3), und da in erster Näherung $C = \frac{2\pi}{3}$ ist, so ergibt (85) in erster Näherung

$$k_1 = 0,$$

also ist in erster Näherung $\xi_A = 0$.

In zweiter Annäherung lautet (85)

$$0 = \frac{1}{2\kappa_0} - \frac{\pi}{4}k_1^2,$$

also
$$k_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_0}},$$

so daß die Substitution in (84)

$$(86) \quad \xi_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_0^3}}$$

ergibt.

Die Abszisse des Punktes A ist also wesentlich kleiner, als der absolute Wert der Abszisse von D .

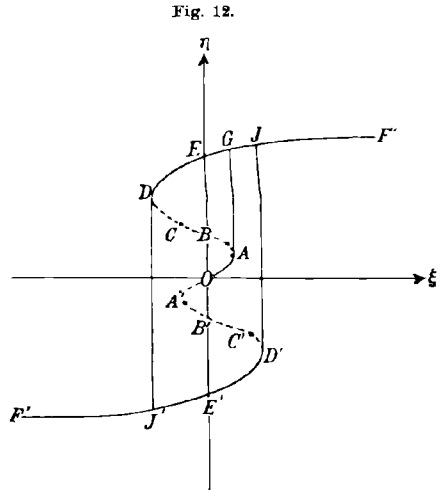
§ 5. Stabilität; die Magnetisierungskurve.

Früher angestellte Betrachtungen¹⁾ über die Stabilität bzw. Labilität der Gleichgewichtszustände hatten nun ergeben, daß diejenigen Teile der ξ, η -Kurve, auf denen $\frac{d\eta}{d\xi} > 0$ war, stabilem, diejenigen aber, auf denen $\frac{d\eta}{d\xi} < 0$ war, labilem Gleichgewicht entsprechen.

Es sind also die Kurventeile $ABCD$ und $A'B'C'D'$ der Fig. 11 auszuschalten.

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910, S. 252 und ebenda 1911, S. 25.

Des weiteren ergibt sich aus jener Untersuchung (§ 8) folgendes Verhalten (vgl. Fig. 12): Wenn man vom unmagnetischen Zustande, also vom Punkte $O(\xi = 0, \eta = 0)$ ausgehend, die Feldstärke wachsen läßt, ist der magnetische Zustand durch das Kurvenstück OA repräsentiert. Wächst ξ auch nur das Geringste über die Abszisse von A hinaus, so durchläuft der den Zustand repräsentierende Punkt plötzlich die Vertikale AG und bewegt sich bei weiter wachsendem ξ auf GF . Nimmt dann ξ wieder ab, so rückt der Punkt von F über G und E bis nach D , wo er plötzlich nach J' herunterfällt und sich bei weiter abnehmendem ξ auf $J'F'$ bewegt. Wieder wachsende ξ entsprechen dann einer Bewegung auf dem Linienzug $F'J'E'D'JF$.



Man erkennt in der Linie $OAGJF$ die jungfräuliche Kurve, in $FJGEDJ'F'$ den absteigenden, in $F'J'E'D'JF$ den aufsteigenden Hysteresisast der Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials wieder.

§ 6. Die Magnetisierungskurve eines zweidimensionalen Ewingschen Modells.

Um die Beobachtungen an einem von mir konstruierten Modell mit den Ergebnissen der Rechnung vergleichen zu können, soll im folgenden noch die Theorie einer zweidimensionalen Anordnung der Magnete behandelt werden, d. h. es soll angenommen werden, daß nicht nur, wie früher, die Drehachsen der Kompaßmagnete sämtlich untereinander parallel sind, sondern daß diese selbst alle in einer Ebene liegen und dort nach den Gesetzen des Zufalls verteilt sind.

Zu dem Zweck müssen wir zunächst die Gleichung (1) analoge Beziehung ableiten.

Die Größe K der Gleichung (1) konnte man im Falle der dreidimensionalen Anordnung finden, indem man sich aus dem magnetischen Material eine Kugel vom Radius s herausgeschnitten dachte — unter s die kleinste Entfernung verstanden, auf die sich die Mittelpunkte zweier Magnete nähern können — und K als die Feldstärke im Zentrum dieser Kugel definierte.

Man mußte also von der tatsächlich vorhandenen Feldstärke H die-

jenige Feldstärke abziehen, die im Innern einer zur Magnetisierung M gleichmäßig magnetisierten Kugel herrscht.

Diese war aber — unabhängig vom Radius der Kugel — gegeben durch

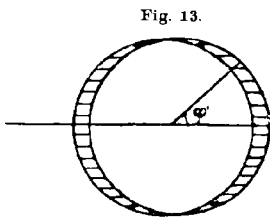
$$H' = -\frac{4\pi}{3} M, \text{ soda\ss} \quad K = H - H' \text{ oder}$$

$$(87) \quad K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

wurde. In analoger Weise findet man jetzt die Größe K für eine zwei-dimensionale Anordnung:

Es seien also n Magnete, jeder vom Moment m , auf der Flächeneinheit einer Ebene ungeordnet verteilt. Dann ergibt sich K , indem man von dem wirklich vorhandenen Feld dasjenige Feld H' abzieht, das im Mittelpunkt einer Kreisscheibe vom Radius s herrscht, wenn diese Kreisscheibe gleichmäßig zur Magnetisierung M magnetisiert ist. Unter s ist hier wieder der kleinste Abstand verstanden, der zwischen den Mittelpunkten zweier Magnete bestehen kann, und unter M wollen wir die Flächenmagnetisierung, d. h. das magnetische Moment der Flächeneinheit verstehen.

Um H' zu berechnen, bilden wir zunächst das Potential einer mit der konstanten Flächendichte ρ belegten Kreisscheibe vom Radius s in



einem Punkte der Ebene des Kreises und addieren dazu das Potential einer Kreisscheibe von gleichem Radius und einer Belegung von der Dichte $-\rho$, wobei wir aber annehmen, daß diese Kreisscheibe gegen die erstere um die sehr kleine Strecke h nach der Seite des negativen x hin verschoben ist. (Fig. 13.)

Dann heben sich die Beiträge der im Innern der Kreise gelegenen Dichten auf, und es bleibt nur eine Linienbelegung am Rande von der Stärke $\rho h \cos \varphi'$, wenn φ' den Winkel bedeutet, den der Radiusvektor vom Zentrum zu einem Randelement mit der x -Achse einschließt.

Das Potential dieser Randbelegung ist in einem Punkte der x -Achse

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho h s \cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{(s \cos \varphi' - x)^2 + (s \sin \varphi')^2}},$$

und dieser Ausdruck ist für einen Punkt in der Nähe des Mittelpunkts, also für kleine Werte von x zu ersetzen durch

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \rho h \cos \varphi' d\varphi' \left[1 + \frac{x}{s} \cos \varphi' \right].$$

Die Integration ergibt

$$(90) \quad \Phi = \varrho h \frac{x}{s} \pi,$$

und daraus folgt

$$(91) \quad H' = - \frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = - \varrho h \frac{\pi}{s}.$$

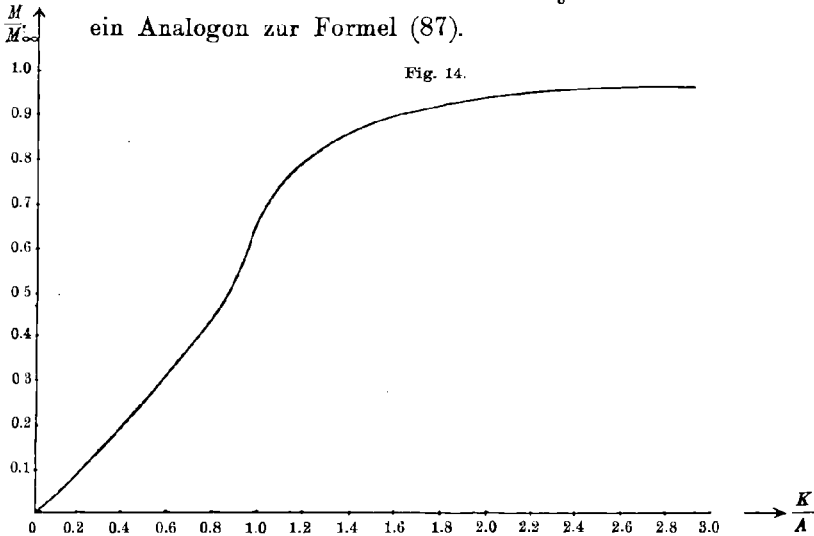
Hier ist nun ϱh das Moment der Flächeneinheit, also $= M$, und wir erhalten

$$(92) \quad H' = - M \frac{\pi}{s}$$

und

$$(93) \quad K = H - H' = H + \frac{\pi}{s} M,$$

ein Analogon zur Formel (87).



Während also K bei räumlicher Verteilung der Magnete ganz unabhängig von dem Minimalabstand s zweier Magnete ist, gilt das keineswegs bei flächenhafter Anordnung.

Die Formeln (39) und (41), welche $\frac{M}{M_\infty}$ als Funktion von $\frac{K}{A}$ gaben, bleiben unverändert. Sie lauten für $K < A$:

$$(94) \quad \frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k_1} \{ E(k_1) - (1 - k_1^2) F(k_1) \},$$

für $K > A$:

$$(95) \quad \frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{\pi} E(k_2),$$

wobei $k_1 = \frac{K}{A}$ und $k_2 = \frac{A}{K}$ ist.

Die Punkte der Kurve $\frac{M}{M_\infty}$ als Funktion von $\frac{K}{A}$ können wir also mit Hilfe von Tafeln für die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung berechnen.

Das ist ausgeführt worden; die Resultate sind in der folgenden Tabelle niedergelegt, und die Kurve ist in Figur 14 graphisch dargestellt.

$\frac{K}{A}$	$\frac{M}{M_\infty}$	$\frac{K}{A}$	$\frac{M}{M_\infty}$
0.0000	0.0000	1.015	0.6620
0.1736	0.0769	1.064	0.7117
0.342	0.1730	1.154	0.7709
0.500	0.2584	1.305	0.8307
0.643	0.3397	1.556	0.8870
0.766	0.4201	2.000	0.9340
0.866	0.4942	2.923	0.9701
0.940	0.5593	5.252	0.9924
0.985	0.6109	∞	1.0000
1.000	0.6367		

Aus dieser Kurve kann man die Kurve $\frac{H}{A}, \frac{M}{M_\infty}$ in einfacher Weise durch eine graphische Konstruktion erhalten:

Nach (93) ist

$$(94) \quad \frac{H}{A} = \frac{K}{A} - \frac{\pi M_\infty}{sA} \cdot \frac{M}{M_\infty},$$

oder

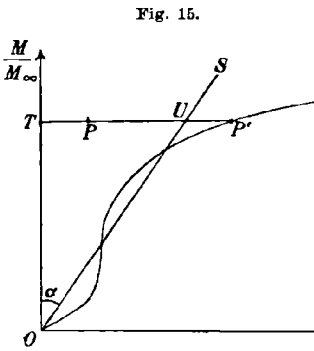
$$(95) \quad \frac{K}{A} = \frac{H}{A} + N \frac{M}{M_\infty},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(96) \quad \frac{\pi M_\infty}{sA} = N$$

setzen.

Gleichung (95) zeigt, daß die Kurve $\frac{H}{A}, \frac{M}{M_\infty}$ sich aus der Kurve



$\frac{K}{A}, \frac{M}{M_\infty}$ durch eine Scherung ableitet:

Sei OS (Fig. 15) eine durch den Nullpunkt gehende Gerade (Scherungslinie), die mit der Ordinatenachse einen Winkel α einschließt, wo α durch die Gleichung

$$(97) \quad \text{tg } \alpha = N$$

gegeben ist. Man ziehe durch einen Punkt P' der Kurve $\frac{K}{A}, \frac{M}{M_\infty}$ eine Parallele zur Abszissenachse, die die Ordinatenachse in T und die Scherungslinie in U schneidet, und trage die Strecke TU von P' aus

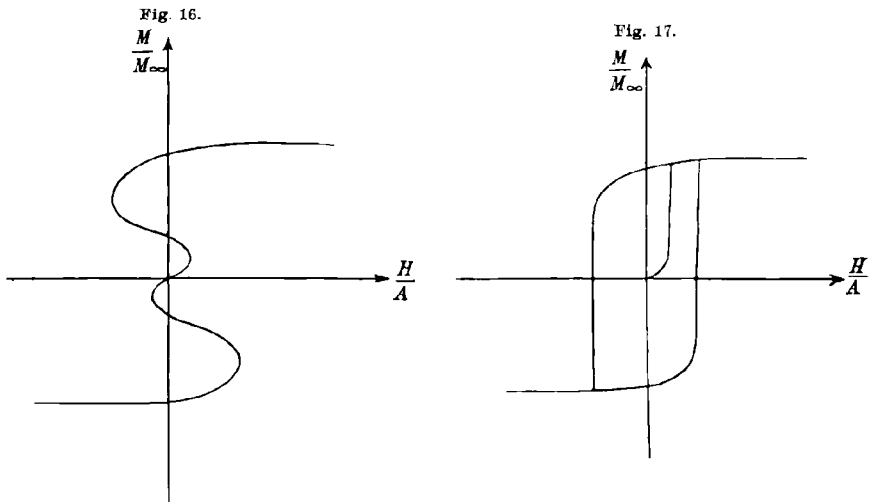
nach links ab bis P , so daß $PP' = TU$ wird. Dann ist P ein Punkt der Kurve $\frac{H}{A}, \frac{M}{M_\infty}$, denn es ist $PP' = TU = TO$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{M_\infty} N$, also

$$TP = TP' - PP' = \frac{K}{A} - N \frac{M}{M_\infty},$$

und das ist nach (95) gerade $\frac{H}{A}$.

Je nachdem die Scherungslinie die Kurve $\frac{K}{A}, \frac{M}{M_\infty}$ schneidet oder nicht, wird man ganz verschiedene Typen von Magnetisierungskurven erhalten.

Wir passen uns den Beobachtungen an unserem Modell am besten an, indem wir eine Scherungslinie wählen, die die Kurve im ersten



Quadranten zweimal schneidet. Dann werden wir nämlich eine Magnetisierungskurve erhalten, die die positive Ordinatenachse zweimal schneidet und in Fig. 16 dargestellt ist, wo auch der symmetrische Teil gleich hinzugefügt ist.

Wieder sind die Teile der Kurve, auf denen $\frac{d \frac{M}{M_\infty}}{d \frac{H}{A}} < 0$ ist, labil,

so daß wir, ganz analog wie früher eine Magnetisierungskurve vom Typus der Fig. 17 mit jungfräulicher Kurve und mit Hysterisisästen erhalten.

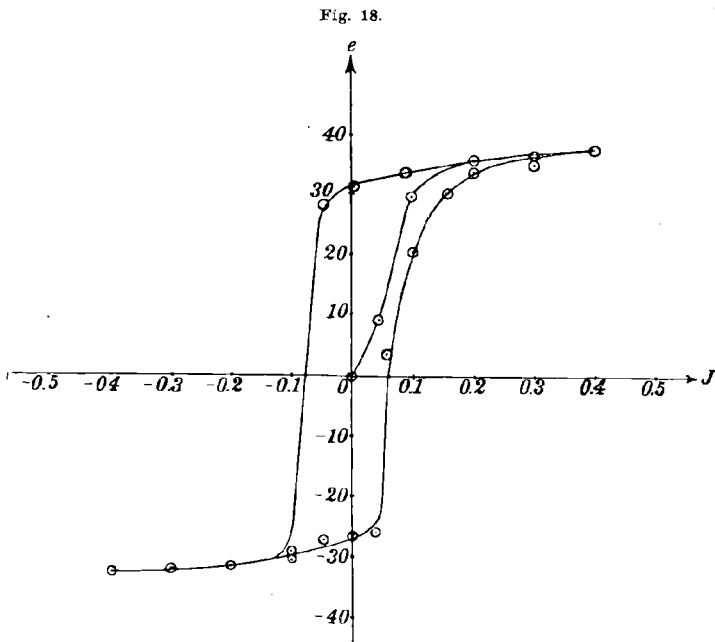
§ 7. Vergleich mit der Erfahrung.

Vergleichen wir zunächst die Magnetisierungskurven Fig. 12 und Fig. 17 einerseits mit der Kurve Fig. 2 andererseits.

Jene sind unter der Annahme der Drehbarkeit der Magnete um zueinander parallele Achsen (Kompaßhypothese), diese unter der Vor-

aussetzung freier Drehbarkeit im Raume berechnet worden. Die Kurve 2 besteht nur aus den Hysteresisästen, ihr fehlt die jungfräuliche Kurve, sodaß von diesem Gesichtspunkte aus die Kompaßhypothese den Vorzug zu verdienen schiene. Trotzdem werden die wirklichen Elementarmagnete wohl frei drehbar sein, und es wird für die primitivsten Strukturelemente die Kurve der Fig. 2 gelten. Die jungfräuliche Kurve dagegen wird wohl erst dadurch entstehen, daß das beobachtete Medium pseudoisotrop aus Elementarkomplexen zusammengesetzt ist.

Während uns also die Ewingschen Modelle in diesem Punkte eine Übereinstimmung mit der Erfahrung nur *vortäuschen*, haben sie doch



den Vorzug, alle typischen Eigenschaften des Ferromagnetismus, unabhängig vom speziellen Mechanismus, erkennen zu lassen. Sie zeigen die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Feldstärke, die Sättigung, die Hysteresis infolge der mehrfachen Gleichgewichtslagen, und endlich auch den Energieverlust beim plötzlichen Umklappen an den Labilitätsstellen. Dieser entsteht freilich beim Modelle durch die Entwicklung von Reibungswärme in den Kompaßachsen, beim natürlichen Ferromagnetikum aber wohl zum Teil daher, daß bei den Schwingungen um die Gleichgewichtslage Strahlung ausgesendet wird, die dann wieder absorbiert und in Wärme verwandelt wird.

Ich habe versucht, die Magnetisierungskurve eines dreidimensionalen Ewingschen Modells magnetometrisch aufzunehmen, indem ich 150 kleine Kompaßmagnete mit vertikaler Drehachse nach den Gesetzen des Zufalls in der Mitte einer Magnetisierungsspule angeordnet habe. Dieser Versuch scheiterte aber daran, daß die Magnete schlecht magnetisiert und auch gar nicht ordentlich magnetisierbar waren — wahrscheinlich wegen schlechter Härtung des verwendeten Stahls. Dabei hatten sie eine verhältnismäßig große Permeabilität, so daß durch den Strom der Magnetisierungsspule in ihnen ein magnetisches Moment influenziert wurde, das von der Feldstärke abhängig war. So war die Voraussetzung der Theorie, daß das magnetische Moment der Elementarmagnete unveränderlich sein soll, nicht annähernd innegehalten, und infolgedessen zeigte sich die Sättigungserscheinung bei dem so konstruierten Modell nur höchst mangelhaft.

Ich hatte nicht mehr viel Zeit zu verlieren, da ich mich kurz vor meinem Umzug von Tübingen nach Straßburg befand, und so wiederholte ich mit besseren Magneten, die mir noch zur Verfügung standen, das Experiment, und zwar mit Erfolg.

Da ich aber nur 40 Magnete hatte, so ordnete ich sie in einer Ebene an. Sie hatten eine Länge von 2 cm und wurden auf einem Brett von $9 \times 24,5$ cm², um vertikale Achsen drehbar, ungeordnet verteilt.¹⁾ Dieses „Ferromagnetikum“ wurde in eine Magnetisierungsspule gesteckt, deren Mitte 45,5 cm vom Magnetometer entfernt war. Auf der anderen Seite des Magnetometers stand in üblicher Anordnung eine Kompensationsspule, die mit in den Kreis des magnetisierenden Stroms eingeschaltet war, und die die Fernwirkung des Stroms der Magnetisierungsspule auf das Magnetometer aufheben sollte, so daß die beobachteten Ausschläge e direkt ein Maß für die Magnetisierung wurden, während die Stromstärken J den Feldern proportional waren.

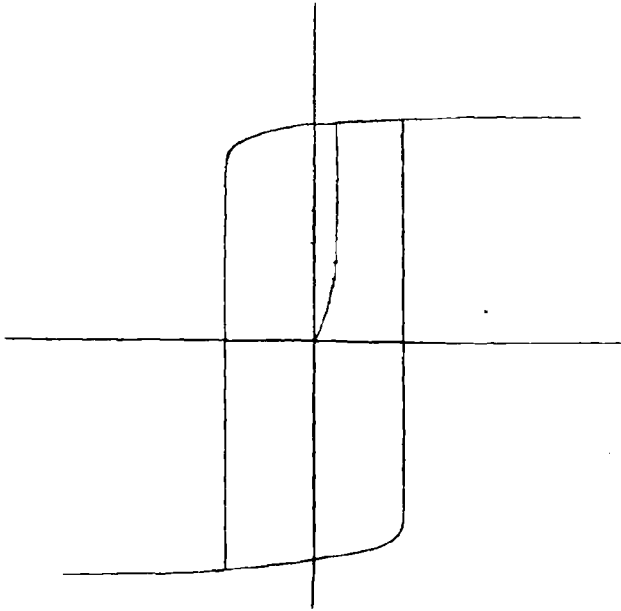
Die weiter unten (S. 41) folgende Tabelle enthält die Beobachtungen einer vollständigen Magnetisierungskurve, die an diesem makroskopischen Modell eines Eisenstückes aufgenommen worden ist.

Die entsprechende Kurve ist in Fig. 18 dargestellt.

Zum Schlusse seien noch drei Magnetisierungskurven nebeneinander gestellt. Fig. 19 ist die nach § 6 berechnete Kurve eines Ewingschen

1) Es ist zu beachten, daß eine bei der Berechnung gemachte Voraussetzung hier nicht erfüllt ist. Es war nämlich angenommen, daß die Magnete so klein im Vergleich zu ihrem Abstand sind, daß jeder Magnet sich in einem gleichförmigen Felde befindet. Diese Bedingung ist bei praktischen Modellen nicht zu verwirklichen, da dann die magnetischen Momente so schwach würden, daß die Anordnung überhaupt kein Ferromagnetikum repräsentieren würde.

Fig. 19.

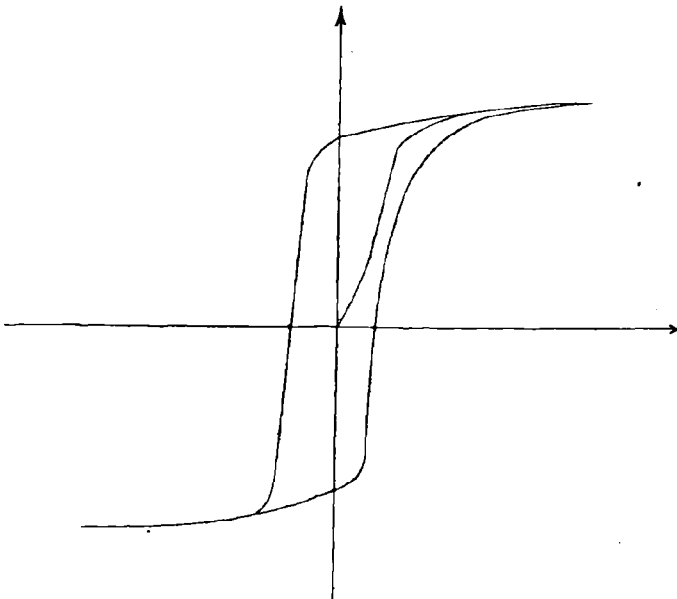


Modells, Fig. 20 ist die beobachtete Kurve eines Ewingschen Modells, Fig. 21 die beobachtete Kurve eines ungehärteten Magnetstahls.

Es zeigt sich ein auffallender Unterschied zwischen der theoretischen Kurve und der am Modell beobachteten. Während in jener ein ganz plötzlicher Abfall bzw. Anstieg der Magnetisierung an der Stelle der Ko-

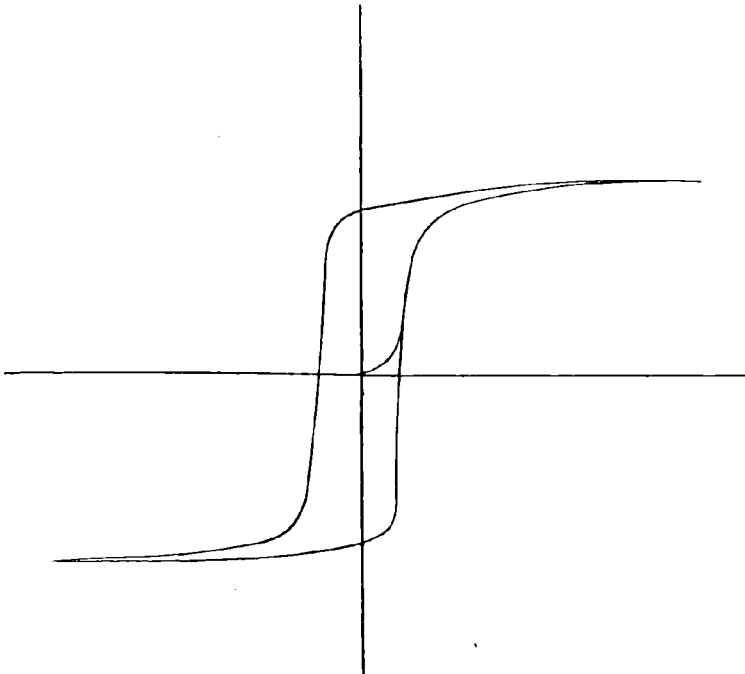
erzitivfelder vorhanden ist, beobachten wir an den entsprechenden Punkten bei dieser eine allmähliche Änderung der Magnetisierung.

Fig. 20.



Das erklärt sich aber zwanglos daraus, daß eine gewisse Gruppenbildung beim praktisch ausgeführten Modell wohl nicht zu vermeiden ist, und daß das Magnetfeld nicht an allen Stellen unseres makroskopischen Ferromagnetikums denselben Wert hatte, so daß in den einzelnen Teilen des Modells die Labilität zu etwas verschiedenen Zeiten eintrat.

Fig. 21.



J	e	J	e	J	e
0.00	0.	- 0.03	29.5	+ 0.040	- 26.0
0.05	9.0	- 0.101	- 30.0	0.060	+ 4.0
0.10	30.0	- 0.20	- 31.0	0.100	+ 21.1
0.20	35.5	- 0.305	- 32.0	0.159	30.0
0.304	36.1	- 0.401	- 32.5	0.200	34.0
0.40	37.0	- 0.295	- 32.0	0.302	34.8
0.30	36.0	- 0.20	- 31.3	0.400	37.0
0.20	35.0	- 0.092	- 28.5		
0.091	33.9	- 0.046	- 27.1		
0.0	31.0	0.0	- 26.3		

§ 8. Schluß.

Abgesehen von dieser Aweichung zwischen der Theorie und der Beobachtung finden wir aber in den drei Kurven eine bemerkenswerte

Übereinstimmung. Trotzdem fragt es sich noch, ob die theoretische Betrachtung eines von der Wirklichkeit wesentlich abweichenden Mechanismus neue Einsichten über die Natur erschließen kann, wo es doch schon gelungen ist, die Folgerungen aus Voraussetzungen zu ziehen, die den tatsächlichen Verhältnissen besser angepaßt sind.

Das reale Ewingsche Modell hat den Vorteil, dem Physiker anschaulich vorzuführen, was er vielleicht schwerer in abstrakter Zeichensprache begreift. Aber wer durchaus mit leiblichen Augen sehen will, braucht auch keine Theorie für das, was er erblickt; und wer die Theorie zu würdigen imstande ist, hat wiederum nicht nötig, ein fehlerhaftes Modell der Rechnung zu unterwerfen und wird sich hierzu lieber das früher von uns behandelte richtigere Gedankenmodell aussuchen.

Vielleicht läßt sich aber doch die eingehende theoretische Betrachtung des Ewingschen Modelles rechtfertigen. Die Hypothese der frei im Raume drehbaren Magnetonen führt zu keiner jungfräulichen Kurve. Wenn nun experimentell gezeigt ist, daß im Gegensatz hierzu das Ewingsche Modell eine solche liefert, so liegt doch zunächst wenigstens der Verdacht nahe, es sei bei der Behandlung der frei drehbaren Magnetonen ein Fehler begangen oder ein Umstand übersehen, dem die jungfräuliche Kurve des natürlichen wie des künstlichen (Kompaß-) Ferromagnetikums zu verdanken sei, und nach dessen Berücksichtigung die korrekte Theorie in Übereinstimmung mit der Erfahrung gebracht werden könnte. Dieser Verdacht wird geschwächt, wenn man feststellt, daß dieselbe theoretische Behandlungsweise, durch die wir im einen Falle auf eine bloße Hysteresisschleife geführt wurden, im anderen Falle qualitativ die richtige Magnetisierungskurve ergibt.

Das Ewingsche Experiment kann also vielleicht doch nicht als ein Argument gegen unsere theoretische Behandlung der frei drehbaren Magnetonen geltend gemacht werden, und die Hoffnung wird ferner gerückt, die Erscheinung *durch Vervollkommnung der Behandlung* statt durch Einführung einer *neuen Annahme* zu erklären.

Wollen wir dieses negative Ergebnis positiv wenden, so können wir sagen: unsere Vermutung gewinnt an Wahrscheinlichkeit, daß in den ferromagnetischen Körpern die Magnetonen nicht völlig ungeordnet verteilt sind, sondern sich in Komplexen zusammenschließen.¹⁾

Straßburg und Heidelberg, 21. November 1911.

1) Möglich wäre es allerdings auch, daß man bei Ersetzung der angenäherten Annahme eines konstanten molekularen Feldes A durch eine andere richtigere Bestimmung von selbst eine jungfräuliche Kurve erhielte.

Über einige Probleme aus dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.

Von HANS HAPPEL in Tübingen.

§ 1. Wir denken uns n Kreisscheiben, die alle gleichen Radius haben sollen, regellos auf ein begrenztes einfach zusammenhängendes Gebiet der Ebene vom Inhalt J gelegt, wobei J sehr groß sein soll gegenüber dem Inhalt einer Kreisscheibe, und außerdem sollen die Dimensionen von J von gleicher Größenordnung sein. (Der Fall, wo J beispielsweise aus einem Streifen besteht, dessen Dicke sehr klein ist im Vergleich zu seiner Länge, soll also ausgeschlossen sein.) Auch den Fall lassen wir außer Acht, wo J am Rande viele Aus- und Einbuchtungen hat; dieser Fall ist sicher dann ausgeschlossen, wenn die Begrenzungskurve von J von außen betrachtet überall konvex ist. Ferner wird n als sehr groß vorausgesetzt, sodaß die Summe der Inhalte aller Kreisscheiben von derselben Ordnung wie J ist. Da man beim Hineinlegen einer beliebigen Scheibe sich nicht um die Lage der bereits in J befindlichen Scheiben kümmert, so werden Gebiete der Ebene gleichzeitig von zwei oder noch mehr Scheiben überdeckt werden. Wir fragen, wie groß ist das Verhältnis W des überdeckten Teils von J zu J , wobei natürlich die mehrfach überdeckten Gebiete nur einmal zu zählen sind.

Wegen der gemachten Voraussetzungen kommt es bei der Lösung unseres Problems auf die verhältnismäßig geringe Zahl der Scheiben, die nahe am Rande sind, nicht weiter an; das Verhältnis des überdeckten Teils von J zu J ist also unabhängig davon, wie J begrenzt ist.

Um das gesuchte Verhältnis W , das natürlich eine Wahrscheinlichkeit darstellt, zu ermitteln, denken wir unsere n Scheiben nicht einmal, sondern k mal auf das Gebiet J gelegt, wobei k eine sehr große Zahl sein soll. Wir berechnen dann, welcher Teil von J in einem dieser k Fälle im Durchschnitt bedeckt wird. Dividieren wir den hierfür erhaltenen Wert durch J , so erhalten wir W .

Innerhalb J greifen wir jetzt ein beliebiges unendlich kleines Gebiet vom Inhalt do heraus, do ist natürlich verschwindend klein im Vergleich zum Inhalt einer Kreisscheibe zu denken. Zählen wir do so oft als es in den k Fällen bedeckt ist (wobei natürlich do in einem solchen Falle, wo es mehrfach überdeckt ist, nur einmal zu berücksichtigen ist), und dividieren wir die so erhaltene Zahl durch kdo , so

erhalten wir den Teil von do , der im Durchschnitt in einem der k Fälle bedeckt ist, dividiert durch do . Da nun irgend ein Teil innerhalb J sich so verhält wie jeder andere, so verhält sich in einem der k Fälle im Durchschnitt der bedeckte Teil von J zu J wie der durchschnittlich bedeckte Teil von do zu do . Wir drücken dies kurz so aus:

$$(1) \quad W = \frac{\text{Bedeckter Teil von } J}{J} = \frac{\text{Bedeckter Teil von } do}{do}$$

Der bedeckte Teil von do läßt sich leicht ermitteln, wie wir jetzt zeigen wollen. Ist r der Radius einer Kreischeibe, und schlagen wir mit r als Radius um do als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Inhalt $i = r^2\pi$ ist, so wird do von einer Scheibe überdeckt, wenn sich diese mit ihrem Mittelpunkt innerhalb i befindet, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{i}{J}$. Denken wir uns nun die Scheiben numeriert von 1 bis n , so wird in allen k Fällen zusammen es im ganzen $k \cdot \frac{i}{J}$ mal vorkommen, daß eine bestimmte, etwa die erste, Scheibe do umschließt. Da nun n Scheiben vorhanden sind, so könnte man vielleicht meinen, daß in allen k Fällen zusammen der bedeckte Teil von do gleich

$$(2) \quad kn \frac{i}{J} do$$

sei und daß demgemäß der in (1) vorkommende Teil von do , der in einem der k -Fälle durchschnittlich bedeckt ist, durch $n \frac{i}{J} do$ dargestellt würde.

Diese Überlegung ist jedoch deshalb nicht richtig, weil unter den k Fällen es welche gibt, in denen zwei oder noch mehr Scheiben do gleichzeitig umschließen. Betrachten wir zunächst einen solchen Fall, wo gleichzeitig zwei Scheiben mit ihren Mittelpunkten in i liegen, hierbei ist in (2) do nicht einmal gezählt, sondern zweimal. Wir haben aber in einem solchen Fall do nur einmal zu zählen, denn auch bei der Ermittlung des bedeckten Teils von J ist ein solches Gebiet, das gleichzeitig von zwei Scheiben bedeckt wird, nur einmal zu zählen.

Um demgemäß in allen k Fällen den bedeckten Teil von do zu erhalten, haben wir von $kn \frac{i}{J} do$ zu subtrahieren die mit do multiplizierte Zahl derjenigen von den k Fällen, wo gleichzeitig zwei Scheiben do umschließen. In einem der k Fälle ist die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig zwei bestimmte Scheiben etwa die ersten und zweiten mit ihren Mittelpunkten in i liegen $\left(\frac{i}{J}\right)^2$. Da die n Scheiben auf $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Weisen zu Paaren kombiniert werden können, so ist $\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2$ die durchschnittliche Zahl der Scheibenpaare, die in einem

der k Fälle so liegen, daß beide Scheiben des Paares do umschließen. Für den bedeckten Teil von do in allen k Fällen erhalten wir demgemäß den strengeren Ausdruck:

$$(3) \quad k \left[\frac{ni}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2 \right] do.$$

Völlig exakt ist aber auch der Ausdruck (3) nicht. Denn unter den k Fällen gibt es auch solche, in denen gleichzeitig drei Scheiben do umschließen. In einem jeden von diesen Fällen ist do im Gliede $k \frac{ni}{J} do$ dreimal gezählt. Ferner müssen wir uns überlegen, in welcher Weise die Fälle, in denen gleichzeitig drei Scheiben mit ihren Mittelpunkten in i liegen, im Ausdruck $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2 do$ berücksichtigt sind. Offenbar ist $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2$ gleich k mal der Wahrscheinlichkeit, daß die erste und zweite Scheibe gleichzeitig do umschließen, plus k mal der Wahrscheinlichkeit, daß die erste und dritte Scheibe gleichzeitig do umschließen, plus k mal der Wahrscheinlichkeit, daß die zweite und dritte Scheibe gleichzeitig do umschließen, plus usw. Um nun den Wert von k mal der Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig die Scheiben 1 und 2 do umschließen, zu finden, haben wir unter allen k Fällen diejenigen zu zählen, wo gleichzeitig die Scheiben 1 und 2 mit ihren Mittelpunkten innerhalb i liegen. Ganz analog sind die übrigen Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, die für die Bildung von $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2$ in Betracht kommen. Wenn nun gleichzeitig drei Scheiben, etwa die Scheiben 1, 2 und 3, do umschließen, so können sie auf drei verschiedene Weisen zu Paaren von zweien kombiniert werden. Im Ausdruck $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2$ ist jedes dieser drei Paare mitgezählt und in (3) ist im Gliede $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2 do$, in den Fällen, wo gleichzeitig drei Scheiben do umschließen, do dreimal gezählt. Da, wie schon bemerkt, in einem solchen Fall im Glied $kn \frac{i}{J}$ die Größe do ebenfalls dreimal mitgezählt ist, so ist im Ausdruck (3) do in den Fällen, wo gleichzeitig drei Scheiben mit ihren Mittelpunkten in i liegen, garnicht mitgezählt. Um daher den bedeckten Teil von do zu erhalten, haben wir zum Ausdruck (3) noch die Zahl derjenigen Fälle zu addieren, in denen gleichzeitig drei Scheiben do umschließen, die Zahl dieser Fälle ist dann noch mit do zu multiplizieren.

Da die Wahrscheinlichkeit, daß in einem der k Fälle gleichzeitig drei bestimmte Scheiben do umschließen durch $\left(\frac{i}{J} \right)^3$ dargestellt wird

und die n Scheiben sich auf $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ verschiedene Weisen zu Gruppen von je dreien kombinieren lassen, so erhält man für den bedeckten Teil von $d\sigma$ in allen k Fällen zusammen:

$$(4) \quad k \left\{ \frac{n^i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{i}{J}\right)^3 \right\} d\sigma;$$

hierin sind jedoch die Glieder mit $\left(\frac{i}{J}\right)^4$ usw. vernachlässigt.

Es bietet aber keine Schwierigkeit, den bedeckten Teil von $d\sigma$ vollkommen exakt zu berechnen. Man hat nur in der angegebenen Weise fortzufahren, man erhält dann eine Reihe, die nach Potenzen von $\left(\frac{i}{J}\right)$ fortschreitet. Wir wollen jetzt das Glied mit $\left(\frac{i}{J}\right)^q$ dieser Reihe berechnen, wobei q eine beliebige positive ganze Zahl ist. Dabei nehmen wir an, man habe die Reihe bis zum Gliede mit $\left(\frac{i}{J}\right)^{q-1}$ einschließlich ermittelt und als Resultat erhalten:

$$(5) \quad k \left\{ \frac{n^i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{i}{J}\right)^3 - + \dots (-1)^q \frac{n(n-1) \dots (n - \{q-2\})}{2 \cdot 3 \dots \{q-1\}} \left(\frac{i}{J}\right)^{q-1} \right\} d\sigma$$

Um das folgende Glied, also dasjenige mit $\left(\frac{i}{J}\right)^q$ zu berechnen, hat man zu beachten, daß bei hinreichend großem k unter den k Fällen es auch solche gibt, in denen gleichzeitig q Scheiben $d\sigma$ umschließen. In einem solchen Falle ist $d\sigma$ im Glied $k n \frac{i}{J} d\sigma$ q mal gezählt; im Glied $k \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2 d\sigma$ ist es $\frac{q(q-1)}{2}$ mal gezählt, weil q verschiedene Scheiben sich auf $\frac{q(q-1)}{2}$ Weisen in Gruppen zu zweien ordnen lassen, im Glied $k \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^3 d\sigma$ ist $d\sigma$ $\frac{q(q-1)q-2}{2 \cdot 3}$ mal gezählt und endlich im Glied mit $\left(\frac{i}{J}\right)^{q-1} \frac{q(q-1) \dots (q - \{q-2\})}{2 \cdot 3 \dots \{q-1\}} = q$ mal. In (5) ist mithin in einem solchen Falle, wo q Scheiben $d\sigma$ gleichzeitig umschließen, $d\sigma$ im ganzen

$$q - \frac{q(q-1)}{2} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3} - + \dots (-1)^q q = 1 - (1-1)^2 - (-1)^{q+1}$$

mal berücksichtigt, d. h. bei geradem q ist es zweimal und bei ungeradem q keinmal mitgezählt. Da wir aber $d\sigma$ einmal zu zählen haben, so müssen wir in einem jedem Fall, wo q Scheiben mit ihren Mittelpunkten in i liegen, $d\sigma$ einmal subtrahieren oder addieren, je nachdem q gerade oder ungerade ist. Da in einem der k Fälle es

$\frac{n(n-1)\dots(n-\{q-1\})}{2\cdot 3\dots q} \binom{i}{J}^q$ mal vorkommt, daß q von den n Scheiben do umschließen, so haben wir also zu (5) das Glied:

$$(6) \quad (-1)^{q+1} \frac{n(n-1)\dots(n-\{q-1\})}{2\cdot 3\dots q} \binom{i}{J}^q k do$$

zuzufügen.

Addieren wir (6) zu (5) und beachten wir, daß in dem allgemeinen Glied mit $\binom{i}{J}^q$ dem q alle möglichen Werte bis $q = n$ einschließlich zu erteilen sind, so erhalten wir:

$$(7) \quad k \left\{ n \frac{i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2 \right.$$

$$+ \dots (-1)^{q+1} \frac{n(n-1)\dots(n-\{q-1\})}{2\cdot 3\dots q} \binom{i}{J}^q \dots (-1)^n n \left(\frac{i}{J} \right)^{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{i}{J}^n \left. \right\} do.$$

Dies ist der exakte Wert für den bedeckten Teil von do in allen k Fällen zusammen.

Dividieren wir (7) durch k , so erhalten wir den Teil von do , der im Durchschnitt bedeckt ist, dies ist genau die in (1) auftretende Größe, die dort als bedeckter Teil von do bezeichnet ist. *Mithin ergibt sich nach (1) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit W , also für das Verhältnis des bedeckten Teils von J zu J :*

$$(8) \quad W = n \frac{i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} \left(\frac{i}{J} \right)^3 - \dots (-1)^{n+1} \left(\frac{i}{J} \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{i}{J} \right)^n.$$

Die Formel (8) läßt sich übrigens noch etwas anders schreiben.

Da nämlich wegen der Kleinheit von $\frac{i}{J}$ sehr genähert $\left(1 - \frac{i}{J} \right)^{-i} = e$ ist, so folgt

$$(9) \quad W = 1 - e^{-\frac{i}{J} n}$$

Dieser Ausdruck stellt ebenfalls das Verhältnis des bedeckten Teils von J zu J dar. W ist nach (9) nur abhängig von $\frac{in}{J}$.

In der folgenden Tabelle ist W für verschiedene Werte von $\frac{i}{J} n$ nach (9) berechnet.

$\frac{i}{J} n$	W
$\frac{1}{2}$	0,393
1	0,632
2	0,865

Wie Herr Prof. Mehmke mir gütigst mitteilte, besteht zwischen einem von Chr. Wiener¹⁾ behandelten Problem und den hier erwähnten Untersuchungen ein interessanter Zusammenhang. Wiener ermittelt, wie

1) Chr. Wiener, Lehrb. d. darstellenden Geometrie, 1. Bd., 1884, S. 410.

die Helligkeit einer Fläche abnimmt, wenn sie nach und nach mit verschiedenen Tuschlagen überdeckt wird, dabei denkt er sich, daß die Tuschfarbe aus Wasser mit festen Kohleteilchen bestehe. Die Helligkeit der Fläche vor dem Auftragen der Tusche wird gleich 1 gesetzt, die Helligkeit, nachdem n Tuschlagen aufgetragen sind, setzt er gleich h und zwar ist, nach gewissen Annahmen über die Helligkeit, h identisch mit dem Verhältnis des von Kohleteilen freien Teils der Fläche dividiert durch die ganze Fläche. Zur Lösung der Aufgabe, also zur Bestimmung von h muß Wiener weitere Annahmen machen, für die er keinen Beweis gibt, er findet als Resultat für h den Ausdruck

$$h = (1 - m)^n,$$

dabei ist m der Teil der Flächeneinheit, der durch eine Tuschlage durchschnittlich überdeckt wird. Nehmen wir an, daß jede Tuschlage so beschaffen ist, daß dabei im Mittel auf die Fläche J ein Kohleteilchen, dessen Inhalt $= i$ sei, fällt, so ist $m = \frac{i}{J}$; sind also die Kohleteilchen kreisförmig¹⁾, so haben i , J und n genau dieselbe Bedeutung wie die bei dem von uns behandelten Problem mit denselben Buchstaben bezeichneten Größen.

Für h , also das Verhältnis des freien Teils von J zu J , ergibt sich nun nach Wiener

$$(10) \quad h = \left(1 - \frac{i}{J}\right)^n.$$

Für dasselbe Verhältnis ergibt sich auch aus unseren Betrachtungen genau der gleiche Wert, wie man sofort aus (8) erkennt, falls man bedenkt, daß die Summe der Verhältnisse bedeckter Teil von J dividiert durch J und freier Teil von J dividiert durch J gleich Eins sein muß.

Die Annahmen, die Wiener macht, sind, soweit sie zur Bestimmung vom Verhältnis des freien Teils von J zu J nötig sind, auch bei unserm Problem zutreffend; aber in unserm Fall dürfen wir sie nicht ohne weiteres hinnehmen, sondern wir müssen sie, wie dies im Vorangehenden auch geschah, beweisen, zum Teil folgen übrigens die Annahmen bei unserer Aufgabe sofort aus der Problemstellung.

§ 2. Wir wollen jetzt ermitteln, wie groß bei der Aufgabe des vorigen Paragraphen der Teil von J ist, der im Durchschnitt ein-, zwei-, ... q mal überdeckt ist.

Das Verhältnis W_1 des durchschnittlich einfach überdeckten Teils von J zu J ist gleich dem durchschnittlich einfach überdeckten Teil von do zu do . Den durchschnittlich einfach überdeckten Teil von do

1) Es sei hier erwähnt, daß wir in § 3 zeigen werden, daß die vorangehenden Betrachtungen auch dann noch gelten, wenn die Teilchen nicht kreisförmig sind.

findet man, indem man do so oft zählt, wie es in den k Fällen einfach überdeckt ist und dann durch k dividiert.

Um den Teil von do zu finden, der einfach überdeckt ist, bilden wir zunächst $n \frac{i}{J} do$. Hiervon ist zunächst abzuziehen der mit 2 multiplizierte Teil von do , der durchschnittlich von den beiden Scheiben aller Scheibenpaare gleichzeitig überdeckt wird. Als Resultat erhalten wir

$$(11) \quad \left\{ n \binom{i}{J} - 2 \frac{n(n-1)}{2} \binom{i}{J}^2 \right\} do.$$

Indem wir in dieser Weise fortfahren, ergibt sich schließlich für das Verhältnis W_1 des einfach überdeckten Teils von J zu J der exakte Ausdruck:

$$(12) \quad W_1 = n \frac{i}{J} - 2 \frac{n(n-1)}{2} \binom{i}{J}^2 + 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \binom{i}{J}^3 - + \dots (-1)^{n+1} n \binom{i}{J}^n \\ = \binom{i}{J} \frac{dW}{d \binom{i}{J}} = \frac{i}{J} n \left(1 - \frac{i}{J} \right)^{n-1}.$$

Das allgemeine Glied in (12) läßt sich in analoger Weise ableiten wie dasjenige in W (§ 1), es wird nicht nötig sein, dies näher auszuführen.

Da n groß und $\frac{i}{J}$ klein ist, so läßt sich (12) genähert in der Form schreiben:

$$(13) \quad W_1 = \frac{i}{J} \left(1 - \frac{i}{J} \right)^n = \frac{i}{J} e^{-\frac{in}{J}}.$$

Wir gehen jetzt über zur Berechnung des Teils von J , der q fach überdeckt ist; er verhält sich zu J wie der q fach überdeckte Teil von do zu do . Für den q fach überdeckten Teil von do ergibt sich bei Vernachlässigung von Gliedern mit $\binom{i}{J}^{q+1}$

$$(14) \quad \frac{n(n-1) \dots (n - \{q-1\})}{2 \cdot 3 \dots q} \binom{i}{J}^q do.$$

Da es vorkommt, daß gleichzeitig $q+1$ Scheiben do umschließen und in einem solchen Falle do in (14) $q+1$ fach gezählt ist, während es jetzt gar nicht berücksichtigt werden darf, so ist von (14) zu subtrahieren $q+1$ mal der durchschnittlich von $q+1$ Scheiben überdeckte Teil von do . Wir erhalten so statt (14) den exakteren Ausdruck:

$$(15) \quad \left\{ \frac{n(n-1) \dots (n - \{q-1\})}{2 \cdot 3 \dots q} \binom{i}{J}^q - (q+1) \frac{n(n-1) \dots (n-q)}{2 \cdot 3 \dots (q+1)} \binom{i}{J}^{q+1} \right\} do.$$

Da es auch vorkommt, daß gleichzeitig $q+2$ Scheiben do überdecken und in einem solchen Falle do im ersten Glied von

bis einschließlich $n - q$, so ergibt sich für das Verhältnis W_q des q fach überdeckten Teiles von J zu J der streng gültige Ausdruck:

$$(19) W_q = \frac{n(n-1)\cdots(n-\{q-1\})}{2 \cdot 3 \cdots q} \left(\frac{i}{J}\right)^q - \frac{(q+1)! n(n-1)\cdots(n-q)}{q! 1! 2 \cdot 3 \cdots (q+1)} \left(\frac{i}{J}\right)^{q+1} \dots$$

$$(-1)^{q+2} \frac{(q+\mathcal{A})! n(n-1)\cdots(n-\{q+\mathcal{A}-1\})}{q! \mathcal{A}! 2 \cdot 3 \cdots (q+\mathcal{A})} \left(\frac{i}{J}\right)^{q+\mathcal{A}} \dots (-1)^{n-q+2} \frac{n!}{q!} \left(\frac{i}{J}\right)^n$$

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \left(\frac{i}{J}\right)^q \frac{d^q W}{d \left(\frac{i}{J}\right)^q} = \left(\frac{i}{J}\right)^q \frac{n(n-1)\cdots(n-\{q-1\})}{q!} \left(1 - \frac{i}{J}\right)^{n-q}.$$

Da $\frac{i}{J}$ sehr klein, n sehr groß und $\frac{in}{J}$ endlich ist, so läßt sich (19) für solche Werte von q , die klein gegen n sind, auch genähert in der Form schreiben:

$$(20) W_q = \frac{1}{q!} \left(\frac{in}{J}\right)^q \left(1 - \frac{i}{J}\right)^n = \frac{1}{q!} \left(\frac{in}{J}\right)^q e^{-\frac{in}{J}}.$$

Addiert man den 1fach, 2fach, 3fach usw. überdeckten Teil von J , so muß die Summe gleich dem in § 1 ermittelten überdeckten Teil von J sein. Dies ist auch in der Tat der Fall. Denn addiert man in W_1, W_2, W_q die Glieder mit $\left(\frac{i}{J}\right)^q$, so ist die Summe ebenso groß wie das Glied mit $\left(\frac{i}{J}\right)^q$ in dem in § 1 ermittelten überdeckten Teil von J .

In der folgenden Tabelle sind für die in der Tabelle von § 1 angegebenen Werte von $\frac{in}{J}$ jedesmal die nach (13) bzw. (20) berechneten Werte von W_1, W_2, W_3 ermittelt.

§ 3. Wir wollen jetzt das in § 1 behandelte Problem verallgemeinern. Statt der n Kreisscheiben denken wir uns n identische Scheiben, die von einer beliebigen Kurve begrenzt sind, die jedoch als überall konvex vorausgesetzt wird und außerdem sollen die Dimensionen einer Scheibe von gleicher Ordnung sein. Die Scheiben werden wieder regellos auf das Gebiet J gelegt¹⁾, und wir fragen wieder, wie groß ist das Verhältnis W des überdeckten Teils von J zu J .

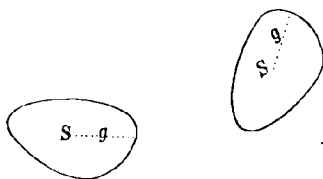
$\frac{in}{J}$	W_1	W_2	W_3
$\frac{1}{2}$	0,303	0,076	0,013
1	0,368	0,184	0,061
2	0,271	0,271	0,181

Der Inhalt einer Scheibe sei wieder i , wobei i sehr klein gegen J

1) Es soll jedoch bei allen Scheiben dieselbe Begrenzungsfläche mit dem Gebiet J zur Berührung kommen. Es würde dann möglich sein, zwei beliebige Scheiben, ohne die Operation des Umklappens vorzunehmen, lediglich durch Verschiebung im Gebiet J zur Deckung zu bringen.

sein soll, während ni von gleicher Ordnung wie J ist. Da wieder für J die gleichen Voraussetzungen wie früher gelten, so hat die Begrenzungskurve keinen Einfluß auf den Wert von W , und auch jetzt noch ist W gleich dem durchschnittlich überdeckten Teil eines gegen i unendlich kleinen Gebiets do dividiert durch do .

Vom Schwerpunkt S einer jeden unserer n gleichförmig mit Masse belegten Scheiben ziehen wir eine beliebige Gerade g , die aber bei allen n Scheiben jedesmal relativ zur Scheibe genau die gleiche Lage haben soll. (S. die Fig.) In der Ebene von J nehmen wir beliebig ein rechtwinkliges Koordinatensystem an. Wir charakterisieren die Lage einer jeden unserer Scheiben durch die Koordinaten xy des Schwerpunktes und durch den Winkel φ , den g mit der x -Achse bildet.



Eine beliebige Scheibe wird do umschließen, wenn der Schwerpunkt S der Scheibe in einem gewissen do umschließenden Gebiete liegt, dessen Inhalt $= i$ ist. Denn denken wir uns die Scheibe, deren $\varphi = \varphi_1$ sei, in einer Lage, in der sie do umschließt, dabei möge der Schwerpunkt S der Scheibe die Entfernung y_k von der Abszissenachse haben. Um alle Lagen zu erhalten, in der unsere Scheibe, deren φ stets den angegebenen Wert φ_1 beibehält, do umschließt und wobei außerdem y_k stets ungeändert bleibt, muß S ein geradliniges Stück beschreiben, dessen Länge $= l_k$ sei. Nun möge die Ordinate von S sich um dy_k vergrößern. Um jetzt wieder alle Lagen zu erhalten, in der unsere Scheibe, deren φ stets ungeändert, also stets gleich φ_1 bleibt, do umschließt und wobei außerdem die Ordinate von S stets den Wert $y_k + dy_k = y_{k'}$ hat, muß S wiederum ein geradliniges Stück beschreiben, dessen Länge $l_k + dl_k = l_{k'}$ sein möge. Offenbar existieren nun auf unserer Scheibe im Abstand dy_k voneinander zwei parallele Linienstücke, deren Endpunkte durch den Umfang der Scheibe gebildet werden und deren Längen bzw. l_k und $l_{k'}$ sind. Diese zwei Linienstücke werden auf der Scheibe markiert durch die Berührung, die die Scheibe bei der angegebenen Bewegung durch do erfährt. Man erkennt nun sofort, daß wenn S in der angegebenen Weise nacheinander alle überhaupt möglichen Linienstücke beschreibt, bei denen unsere Scheibe do umschließt, dann alle diese Linienstücke zusammen ein Gebiet überdecken, dessen Inhalt gleich dem Inhalt i unserer Scheibe ist. Für zwei Scheiben, deren φ verschieden ist, hat das Gebiet, innerhalb dessen der Schwerpunkt liegen muß, damit die Scheibe do überdeckt, eine verschiedene Lage, aber die Größe dieses Gebietes ist stets gleich i .

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige Scheibe, etwa die k te d_o umschließt, ist also $\frac{i}{J}$. Von unseren n Scheiben werden also

$$(21) \quad n \frac{i}{J}$$

d_o überdecken. Um nun W zu erhalten, haben wir von (21) zunächst abzuziehen die Zahl der Scheibenpaare, bei denen beide Scheiben eines Paares d_o gleichzeitig umschließen. Wir erhalten so für den überdeckten Teil von J dividiert durch J statt (21) den exakteren Wert:

$$n \frac{i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich in unserem Falle, wo die n identischen Scheiben von einer beliebigen Kurve begrenzt sind und die übrigen angegebenen Voraussetzungen zutreffen, für W der exakte Ausdruck:

$$(22) \quad W = n \frac{i}{J} - \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{i}{J}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{i}{J}\right)^3 \dots (-1)^{q+1} \frac{n(n-1) \dots (n-(q-1))}{2 \cdot 3 \dots q} \left(\frac{i}{J}\right)^q \dots$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{i}{J}\right)^n = 1 - e^{-\frac{in}{J}}.$$

Die Richtigkeit des allgemeinen Gliedes in (22) ergibt sich wieder in analoger Weise wie früher. Für den überdeckten Teil von J dividiert durch J ergibt sich also jetzt der gleiche Wert wie früher bei dem Problem in § 1.

Auch die Ermittlung des 1-, 2-, q fach überdeckten Teils von J bietet jetzt, wo die Scheiben beliebig sind, keine Schwierigkeiten; wir wollen darauf nicht weiter eingehen.

§ 4. In diesem Paragraphen soll eine Erweiterung eines Satzes von Tchebycheff¹⁾ mitgeteilt werden; das Resultat wenden wir dann an auf ein Problem der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.

Wir denken uns mit Tchebycheff eine Reihe von Größen x, y, z, \dots , deren Anzahl endlich sei. Während nun Tchebycheff annimmt, daß jede dieser Größen x, y, z, \dots nur eine endliche Anzahl von Werten annehmen kann, denken wir uns jetzt, daß die Anzahl der Werte x_1, x_2, x_3, \dots , die das x annehmen kann, unendlich groß ist, aber jeder dieser Werte soll endlich sein. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert x eintritt oder ein davon nur unendlich wenig abweichender, sei dp . Dann stellt

$$(23) \quad \int x dp = a$$

1) Vgl. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung I, 2. Aufl., 1908, S. 212 oder die Originalabh. von P. L. de Tchebycheff, Liouville Journal de mathém., II. Série, XII, 1867, p. 177.

(worin die Integration über alle dp zu erstrecken ist, denen ein Wert von x zugeordnet ist) den Mittelwert aller x dar. Die Größe x wird als stetige Funktion vorausgesetzt und außerdem soll, wie schon bemerkt, jedes x endlich sein. Das Gebiet, das die Summe aller dp darstellt, also $\int dp$, soll, so setzen wir voraus, von einer stetigen Kurve begrenzt sein. Offenbar muß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, d. h.

$$(24) \quad \int dp = 1$$

sein; hierbei sind die Integrationsgrenzen für p die gleichen wie in (23).

Auch die Zahl der Werte, die jede der übrigen Größen y, z, \dots annehmen kann, möge unendlich groß sein, dq sei die Wahrscheinlichkeit für einen beliebig herausgegriffenen Wert y , dr diejenige für Wert z usw. In den Mittelworten:

$$(25) \quad \int y dq = b \quad \int z dr = c$$

soll wieder jede der Größen y, z, \dots stetig und endlich sein, und außerdem sollen die Begrenzungskurven von $\int dq, \int dr$ stetig sein. Offenbar müssen wieder die zu (24) analogen Beziehungen

$$(26) \quad \int dq = 1 \quad \int dr = 1$$

bestehen.

In dem in Wirklichkeit eintreffenden Fall soll jede der Größen x, y, z, \dots unter den unendlich vielen für sie möglichen Werten nur einen einzigen annehmen, etwa x den Wert x_λ, y den Wert y_λ, z den Wert z_λ, \dots . Für das Folgende kommen nun noch die Mittelwerte der Quadrate aller x , ferner die Mittelwerte der Quadrate aller y usw. in Betracht, d. h. die Integrale

$$(27) \quad \int x^2 dp = a_1 \quad \int y^2 dq = b_1 \quad \int z^2 dr = c_1.$$

Geht man nun den Beweis, den Tchebycheff für seinen Satz gegeben hat, durch, so erkennt man, daß sich der Satz und sein Beweis auf unseren Fall übertragen läßt. Man kommt so zu dem folgenden Resultat: *Die Wahrscheinlichkeit P , daß die Summe:*

$$(28) \quad x_\lambda + y_\lambda + z_\lambda + \dots$$

zwischen den Grenzen

$$(29) \quad a + b + c + \dots \mp \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}$$

liegt, ist größer als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$. Dabei ist α eine beliebige Zahl, die größer als 1 ist und a, b, c, a_1, b_1, c_1 usw. sind in unserem Falle durch (23), (25), (27) definiert.

Wir wollen nun die angegebene Modifikation des Tchebycheffschen Satzes anwenden auf das folgende Beispiel¹⁾: Auf einen gegebenen festen Kreis vom Radius r wird ein anderer vom gleichen Radius n mal willkürlich geworfen, aber so, daß die Entfernung seines Mittelpunktes vom Mittelpunkt des festen Kreises stets kleiner oder höchstens gleich $2r$ ist. Unter x verstehen wir irgendeinen Teil des festen Kreises, der beim ersten Wurf möglicherweise überdeckt werden kann, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit dp , während x_x der beim ersten Wurf tatsächlich überdeckte Teil des festen Kreises ist. Die Größen y, y_λ, dq sollen die analoge Bedeutung für den zweiten Wurf, z, z_μ, dr für den dritten Wurf haben usw. Beim ersten Wurf sei $\varrho \leq 2r$ eine mögliche Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise, wobei das Stück x vom festen Kreis überdeckt wird und wobei zu dem überdeckten Teil des Umfangs des ersten Kreises der Zentriwinkel β gehört. Offenbar ist dann in dem Mittelwert $a = \int x dp$

$$(30) \quad \begin{aligned} dp &= \frac{2\pi\varrho d\varrho}{4r^2\pi} \\ x &= 2 \left\{ \frac{\beta r^2 \pi}{2\pi} - r^2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Integrale

$$(31) \quad \begin{aligned} a &= \int x dp = \int_{\varrho=0}^{\varrho=2r} \left(\frac{\beta}{2} r^2 - r^2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \frac{\varrho d\varrho}{r^2} \\ a_1 &= \int x^2 dp = \int_{\varrho=0}^{\varrho=2r} \left(\frac{\beta r^2}{2} - r^2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)^2 \frac{2\varrho d\varrho}{r^2} \end{aligned}$$

führt man β statt ϱ ein, mittels der Beziehung $\varrho = 2r \cos \frac{\beta}{2}$. Man erhält:

$$(32) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\pi r^2}{4} \\ a_1 &= \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right) r^4 \\ a &= b = c \dots \\ a_1 &= b_1 = c_1 \dots \end{aligned}$$

Nach der angegebenen Modifikation des Tchebycheffschen Satzes ist nun, da die Zahl der Größen $x, y_\lambda, z_\mu, \dots$ gleich n ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

$$(33) \quad x_x + y_\lambda + z_\mu + \dots$$

1) Vgl. hierzu E. Czuber, Geometrische Wahrsch. u. Mittelwerte 1884, S. 242; hier wird der Mittelwert aller x , also die Größe a berechnet.

zwischen den Grenzen

$$(34) \quad \frac{n\pi r^2}{4} \mp \alpha \sqrt{n \left(\frac{3}{16} \pi^2 - \frac{4}{3} \right) r^4} = \frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \alpha \frac{\sqrt{\frac{3}{16} \pi^2 - \frac{4}{3}}}{\pi \sqrt{n}} \right\} = \frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \alpha \frac{0,915}{\sqrt{n}} \right\}$$

liegt, größer als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

In der folgenden Tabelle ist für verschiedene α die untere Grenze für P sowie die zugehörigen Grenzen für $x_\nu + y_\lambda + z_\mu + \dots$ angegeben.

α	$1 - \frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \alpha \frac{0,915}{\sqrt{n}} \right\}$
$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154$	$\frac{1}{4}$	$\frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \frac{1,06}{\sqrt{n}} \right\}$
$\sqrt{2} = 1,414$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \frac{1,29}{\sqrt{n}} \right\}$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp \frac{1,83}{\sqrt{n}} \right\}$

Damit mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer ist als $\frac{1}{2}$,

$$x_\nu + y_\lambda + z_\mu + \dots$$

zwischen den Grenzen

$$\frac{n\pi r^2}{4} \left\{ 1 \mp 0,2 \right\}$$

liegt, muß $n \geq 42$ sein.

In dem Fall, wo n sehr groß ist, läßt sich die Wahrscheinlichkeit P , daß (33) zwischen den Grenzen (34) liegt, auch genau ermitteln, und zwar auf Grund eines Satzes von Poisson.¹⁾ Hiernach ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt.$$

Mit den im Vorangehenden benützten Werten für α findet man $P = 0,74$; $= 0,84$; $= 0,95$.

Tübingen, Oktober 1911.

Ein Satz über Wurfbahnen im leeren Raume.

Von J. SCHATTE,

Hauptmann im 3. Lothr. Feldartillerie-Regiment Nr. 69.

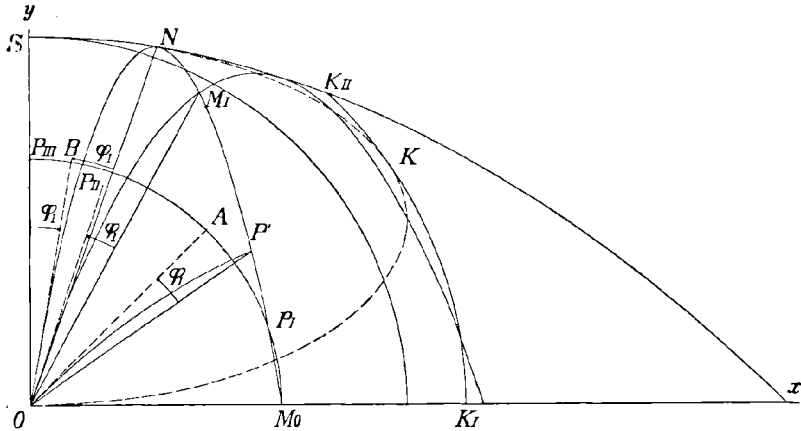
Bekanntlich kann sowohl im leeren, als auch im luftgefüllten Raume bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit (v_0) des Geschosses jeder Punkt der vertikalen Schußebene innerhalb des Wirkungsbereichs der Waffe mit zwei verschiedenen Abgangswinkeln ε_1 und ε_2 getroffen werden. Dabei sei der Abgangswinkel oder die Erhöhung derjenige Winkel, den die Abgangsrichtung oder die Seelenachse der Waffe mit dem Horizont bildet, während der Richtungsunterschied zwischen der nach dem Ziel- oder Treffpunkt gerichteten Visierlinie und der Seelenachse Visierwinkel (φ) und die Neigung der Visierlinie zum Horizont Zielwinkel (α) genannt werden möge. Es ist also die Erhöhung $\varepsilon = \varphi + \alpha$.

1) Siehe A. Meyer, Vorlesgn. üb. Wahrscheinlichkeitsr., 1879, S. 120, sowie S. D. Poisson, Recherches sur la probabilité, 1837, p. 254.

Jeder Punkt der Schußebene [z. B. M_1 in beifolgender Figur] kann also auch mit zwei verschiedenen Visierwinkeln φ_1 und φ_2 getroffen werden. Für den leeren Raum gilt dann bekanntlich die Beziehung

$$(1) \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ - \alpha,$$

dabei möge φ_2 der größere der beiden Winkel sein. Mit φ_2 als Visierwinkel erreicht das Geschöß den Treffpunkt M_1 indirekt. Die so entstehende indirekte Bahn berührt die einhüllende Parabel [in N], bevor sie durch den Treffpunkt hindurchgeht. Solche Bahnen haben keine



praktische Bedeutung; denn Ballons, Luftschiffe usw. wird man stets durch den direkten Schuß zu treffen suchen. Auch hier soll nur von direkten Bahnen und im besondern von den Beziehungen zwischen Visierwinkel, Zielentfernung und Zielwinkel die Rede sein.

Zu der allgemeinen Beziehung zwischen diesen drei Größen gelangt man, wenn in der Flugbahngleichung

$$(2) \quad y = x \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{x^2}{4 h \cos^2 \varepsilon}$$

$\varepsilon = \varphi + \alpha$, $x = r \cos \alpha$ und $y = r \sin \alpha$ gesetzt wird. Hierin sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten und r und α die Polarkoordinaten eines beliebigen Treffpunkts in bezug auf den Abgangspunkt des Geschößes O als Koordinatenanfang und $h = \frac{v_0^2}{2g} = OS$.

Man erhält auf diese Weise nach einigen Umformungen

$$(3) \quad \frac{r}{2h} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos \alpha} - 2 \sin^2 \varphi \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(4) \quad r = 2 h \sin 2\varphi \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2 \left(\frac{r}{4h} \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \right)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{r}{h} \cos \alpha \left(\frac{r}{4h} \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \right)} \right]$$

[Gl. 5 gibt, gemäß dem doppelten Vorzeichen vor der Wurzel, zwei Werte, φ_1 und φ_2 , für jeden innerhalb des Wirkungsbereichs gelegenen Punkt, der durch ein r und ein α bestimmt ist. Für die Punkte der y -Achse von O bis S , für die $\alpha = 90^\circ$ ist, wird $\varphi = 0$ — senkrechter Schuß, für die der x -Achse führt sie mit $\alpha = 0$ auf $r = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$, und den Punkten der Einhüllenden ist nur je ein Visierwinkel zugeordnet; denn, setzt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Parabel $y = h - \frac{x^2}{4h}$.]

Mit $r = \text{const.}$ erhält man die Visierwinkel für alle auf einem Kreise liegenden Treffpunkte, der um O mit r geschlagen ist. Auf solchen Kreisen soll nun diese Funktion hinsichtlich ihrer Extremwerte untersucht werden. Zuerst möge $r = OM_0$ sein, wofür man $\varphi = \varphi_1$ aus $\frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi = r$ erhalte.

Zunächst erinnern wir uns des in Gl. 1 ausgesprochenen Satzes, der besagt, daß jeder Punkt (z. B. P' oder M_1) der durch M_0 hindurchgehenden indirekten oder Steilbahn ONM_0 mit demselben Visierwinkel wie M_0 , also mit φ_1 , getroffen wird. Dieser Satz gilt jedoch im Hinblick darauf, daß wir hier bloß direkte Flugbahnen gelten lassen wollen, nur mit folgender Einschränkung: Wenn N der Berührungspunkt zwischen der Steilbahn und der Einhüllenden ist, so liegen nur auf dem Flugbahnast NM_0 Zielpunkte die mit φ_1 direkt getroffen werden können, während durch die Punkte von ON nur indirekte Bahnen mit φ_1 als Visierwinkel hindurchgehen. Der Ast NM_0 teilt also den über dem Horizont liegenden Wirkungsbereich der Waffe in zwei Gebiete: allen in dem Gebiet diessits dieser Kurve liegenden Punkten ist ein Visierwinkel zugeordnet, der $< \varphi_1$ ist, allen jenseits der Kurve liegenden ein solcher, der $> \varphi_1$ ist.

Verfolgen wir nun einen Zielpunkt P auf dem genannten Kreise. Von M_0 an gelangt P zunächst in das Gebiet der Visierstellungen, die $> \varphi_1$ sind. Der Visierwinkel wächst also, nimmt aber, wenn P nach P_I kommt, wieder die Größe von φ_1 an, um dann allmählich bis Null zu fallen, welchen Wert φ in P_{III} erreicht. Es muß also in diesem Falle zwischen M_0 und P_I ein Maximum vorhanden sein.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß das Wachsen und Abnehmen von φ nicht immer so einfach ist, wie in diesem Beispiel. Mit wachsendem Radius des Kreises ändern sich die Verhältnisse. Wird $r > h$, so fällt φ nicht mehr bis Null, sondern nimmt zuletzt den Wert an, der dem Schnittpunkt des Kreises und der Einhüllenden zugeordnet ist. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß außer dem Maximum noch andere Extremwerte vorkommen.

Wir wollen den geometrischen Ort dieser Extremwerte bestimmen.

Es sei noch erwähnt, daß P_{II} derjenige Punkt ist, der mit φ_1 als Visierwinkel *indirekt* getroffen wird. Um ihn *direkt* zu treffen, möge ein Visierwinkel φ_3 erforderlich sein. Wir wissen, daß dann

$$\varphi_3 = 90^\circ - (\alpha + \varphi_1) \text{ ist.}$$

Zur Bestimmung des geometrischen Orts der Maxima und Minima haben wir zunächst den ersten Differentialquotienten der Gl. 5 gleich Null zu setzen.

Wir wählen dazu die unentwickelte Funktion Gl. 3, die die allgemeine Form

$$F(\varphi, \alpha) = \text{const. hat.}$$

Wir setzen also

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Man erhält zunächst

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{\sin 2\varphi \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin^2 \varphi \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{2 \cos 2\varphi - 2 \sin 2\varphi \operatorname{tg} \alpha},$$

welcher Ausdruck also gleich Null zu setzen wäre. Das führt auf

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

Um nun den gesuchten geometrischen Ort zu bestimmen, ist mit Hilfe dieser Beziehung φ aus Gl. 4 zu eliminieren. Man erhält

$$(7) \quad r = 4h \frac{\sin \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha}.$$

Der geometrische Ort ist also eine Ellipse, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten lautet:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left\{\frac{y - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}^2 = 1.$$

Aus dieser Form erkennt man sofort, daß der Mittelpunkt der Ellipse $\frac{h}{2}$ über O liegt, daß ihre senkrechte Achse gleich h und ihre wagerechte Achse gleich $2h$ ist. Das ist aber nichts anderes als die wohlbekannte Ellipse, die auch der geometrische Ort der Scheitel aller Flugbahnen ist.

Wir haben also den

Satz: Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte der Schußebene, von denen jeder unter den auf demselben Kreise (um O) liegenden Treffpunkten ein Maximum oder Minimum an Visierstellung (Visierwinkel) erfordert, ist die Scheitel-ellipse.

Wie man sieht, hängt es nur von der Größe von r ab, ob ein oder zwei oder gar kein Extremwert von φ vorkommt. Ist $r < h$, so haben wir nur ein Maximum. [Von dem Werte $\operatorname{tg} \varphi = 0$ für $\alpha = 90^\circ$ sehen wir ab.] Wird $r > h$, so schneidet der Kreis die Ellipse in zwei Punkten. Wir haben dann ein Maximum und ein Minimum. Wenn r so groß wird, daß der Kreis die Ellipse nicht mehr schneidet, so gibt es überhaupt keine Extremwerte mehr. Auf einem solchen Kreise wächst φ dauernd bei zunehmendem α .

Nun soll noch dem Grenzfall näher getreten werden, d. h. dem Fall, wo der Kreis $[K_I K_{II}]$ die Ellipse berührt.

In der Funktion Gl. 5 ist die diesem Punkte entsprechende Stelle ein Wendepunkt.

In diesem Falle wird offenbar r in Gl. 7 ein Maximum werden. Für diesen Punkt wird aber auch φ hinsichtlich der Punkte der Ellipse ein Maximum. Wir können daher auch Gl. 6 zur Bestimmung der Lage des Berührungspunkts K , d. h. der seines Richtungs- oder Zielwinkels α benutzen.

Man setzt $\frac{d \operatorname{tg} \varphi}{d \alpha} = 0$ und erhält

$$2(1 + \sin^2 \alpha)(1 - 2 \sin^2 \alpha) = 4 \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\alpha = 35^\circ 15' 50''.$$

Damit wird $r = 2h \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3}$. Liegt der Zielpunkt in dieser Entfernung auf der x -Achse, so findet man das zugehörige φ_1 aus

$$r = 2h \sin 2\varphi.$$

Man erhält auch

$$\sin 2\varphi_1 = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\varphi_1 = 17^\circ 37' 55''.$$

Dagegen ergibt sich φ_K , das dem Berührungspunkt K zugeordnet ist, aus Gl. 6:

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

$$\text{oder } \sin \varphi_K = \frac{1}{3} \sqrt{2}$$

$$\varphi_K = 19^\circ 28' 16'',$$

Wir haben also folgendes Resultat: Wenn sich ein Zielpunkt auf einem Kreise mit dem Radius $r = 2h \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3}$ bewegt, so ist ihm im Mündungshorizont, also wenn $\alpha = 0$ ist, der Visierwinkel $\varphi_1 = 17^\circ 37' 55''$ zugeordnet, für den $\sin 2\varphi_1 = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ ist. Ist $\alpha = 2\varphi_1 = 35^\circ 15' 50''$, so ist $\varphi = \varphi_K = 19^\circ 28' 16''$, $\sin \varphi_K = \frac{1}{3} \sqrt{2}$. Bei weiterem Wachsen von α nimmt auch φ weiter zu und zwar in stärkerem Maße, bis er seinen Grenzwert auf der Einhüllenden bei $\alpha = 47^\circ 3' 40''$ erreicht. Hier ist $\varphi = 21^\circ 28' 10''$.

Eine mechanische Vorrichtung zur Lösung einiger Differentialgleichungen.

Von Dr.-Ing. OTTO SCHAEFER in Hamburg.

Die nachstehend beschriebene Vorrichtung ermöglicht es, eine Reihe von Differentialgleichungen in der Weise zu lösen, daß man eine Anzahl von Punkten findet, die auf der Kurve liegen, welche die gesuchte Funktion darstellt. Da man mit Hilfe eines Teiles dieser Vorrichtung imstande ist, die Wurzeln von Gleichungen höheren Grades zu bestimmen, dieser Teil also eine gewisse selbständige Bedeutung besitzt, so ist seine Beschreibung vorangestellt worden.

Die gegebene Gleichung

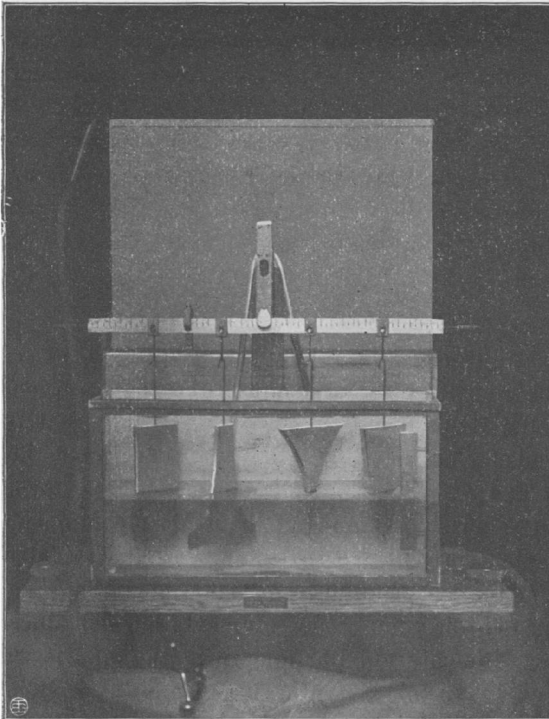
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

möge zunächst in der Weise geordnet werden, daß sämtlichen negativen Glieder auf die rechte Seite der Gleichung gebracht werden. Sollten keine negativen Glieder vorhanden sein, so wird $x = -y$ gesetzt; dann verändern die ungeraden Potenzen ihr Vorzeichen, während die geraden es beibehalten, so daß die Funktion auf die gewünschte Form gebracht werden kann. Jeder einzelne Summand kann als ein Moment aufgefaßt werden, dessen Hebelarm dem Koeffizienten, dessen Kraft der Potenz der Unbekannten entspricht. Nun liegt es nahe, eine Wage zu benutzen, um nachzuweisen, daß die Summe der Momente auf der einen Seite gleich der Summe der Momente auf der andern Seite ist. Diesen Gedanken hat schon G. Meslin verfolgt: Journ. de phys. 1900, p. 339. Er ist jedoch zu einer praktisch kaum verwendbaren Form der Wage gelangt. Während es ohne weiteres möglich ist, den Hebelarmen die erforderliche, durch den Koeffizienten bestimmte Länge zu geben, ist eine besondere Einrichtung nötig, um eine Kraft zu erzeugen, welche der betreffenden Potenz entspricht. Hierfür wurde der Auftrieb von Tauchkörpern verschiedener Form in einer Flüssigkeit nutzbar gemacht: ein prismatischer Körper liefert einen Auftrieb, welcher proportional der Eintauchungstiefe ist, ein keilförmiger einen dem Quadrat der Eintauchungstiefe proportionalen usw. Bei voller Eintauchung liefern sämtliche Körper den Auftrieb 1 — für die vorliegende Ausführung 20 gr — man kann also nur solche Auftriebe erzeugen, welche einem zwischen 0 und 1 liegenden Wert von x entsprechen.

Wird zunächst a_0 außer Betracht gelassen, so muß Gleichgewicht herrschen, wenn die Körper gar nicht eintauchen, da diese Gleichung

durch $x = 0$ befriedigt werden muß. Dieses Gleichgewicht wird durch Aufsetzen von ein oder mehreren Gewichten auf den Wagebalken herbeigeführt und dann erst a_0 berücksichtigt. Sinngemäß wäre es, einen Körper, welcher den Auftrieb 1 (20 gr) liefert, am Hebelarm a_0 anzubringen und so tief zu hängen, daß er bereits voll eintaucht, ehe die

Fig. 1.



andern Körper das Wasser berühren. Einfacher ist es, und daher hier vorgezogen, an die andere Seite des Wagebalkens, also an den Hebelarm $-a_0$, ein Gewicht 1, sozusagen einen Auftrieb -1 anzuhängen. Dann herrscht kein Gleichgewicht, und dieses kann erst wieder eintreten, wenn die Tauchkörper die nötigen Momente liefern, wenn also der Wasserspiegel genügend gestiegen ist. Sobald dieses erreicht ist, gibt die Eintauchtiefe der Körper einen Wert von x an, welcher die gegebene Gleichung befriedigt. Die Ablesung des Wasserstandes ge-

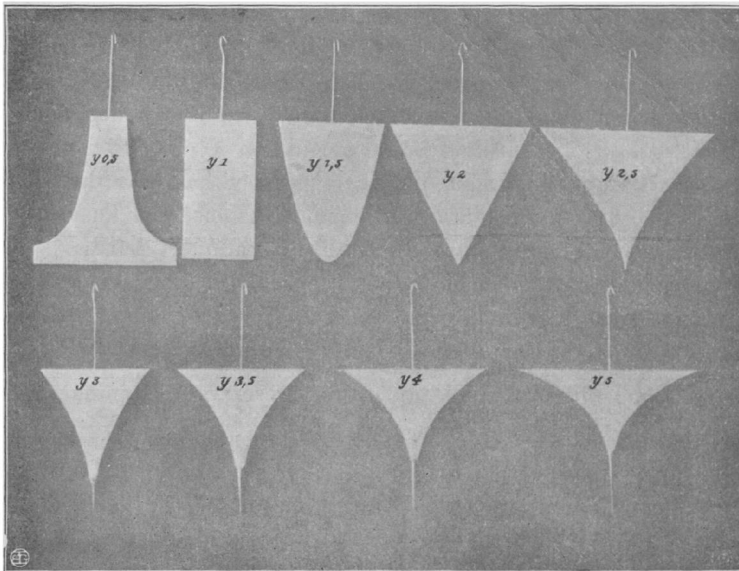
schieht nicht an einer auf den Tauchkörpern angebrachten Skala, sondern an einem besonderen im Gefäß befestigten in Millimeter geteilten Maßstab, wobei $1 \text{ mm} = 0,01$ ist.

Im allgemeinen werden die Koeffizienten a_n, a_{n-1} usw. nicht solche Werte besitzen, daß man sie gleich auf dem Wagebalken einstellen kann, jedoch wird eine Multiplikation oder Division mit Potenzen von 10 und vielleicht außerdem mit 2 stets bewirken, daß die Hebelarme eine brauchbare Länge erhalten. Sollten zufällig mehrere Koeffizienten einander so nahe gleich sein, daß die Tauchkörper sich nicht mehr nebeneinander hängen lassen, so kann man z. B. $x = 1,1y$ setzen. Dadurch wird a_0 nicht verändert, an Stelle von a_1 tritt $1,1 a_1$, an Stelle von a_2 tritt $1,1^2 a_2$ usf., so daß die Koeffizienten verschieden genug

werden. Um ein solches Vorkommnis nur selten eintreten zu lassen, wurde den Körpern ein flacher rechteckiger Querschnitt gegeben.

Besitzt die Gleichung zwischen 0 und 1 keine Wurzel, so tritt kein Gleichgewicht ein, man muß dann $x = 10y$ einführen und erhält eine Gleichung für y , welche vielleicht eine Wurzel zwischen 0 und 1 besitzt, wenn nämlich ein Wurzelwert von x zwischen 1 und 10 liegt. Unter Umständen muß man $x = 100z$ einführen, den Bereich zwischen 10 und 100 absuchen und in derselben Weise fortfahren, bis man die gesuchte Wurzel gefunden hat. Wenn die ursprüngliche Gleichung keine

Fig. 2.



positiven Wurzeln besitzt, so setze man $x = -u$ und verfare sonst in derselben Weise. Häufig wird man den Koeffizienten gleich ansehen können, ob positive oder negative Wurzeln vorhanden sind und in welchem Bereich sie etwa liegen müssen.

Die Tauchkörper erhalten für höhere Potenzen von x eine für die Herstellung außerordentlich unbequeme Form, die fernerhin den großen Nachteil hat, daß der benetzte Umfang bei der Annäherung an 1 sehr groß wird. Das untere Ende muß der Herstellbarkeit halber als Rotationskörper ausgebildet werden und auf die genaue Form der äußersten Spitze mußte überhaupt verzichtet werden, ein praktisch jedoch ganz belangloser Fehler. Hier ist folgender Kunstgriff von großem Nutzen: man setzt $\pm \sqrt{y}$ für x ein und erhält eine Gleichung, deren höchste Potenz halb so hoch ist wie früher. Freilich kommt nun $y^{0,5}$, $y^{1,5}$ usw.

in der Gleichung vor, was bei den üblichen Rechenhilfsmitteln nur von Nachteil ist. Für die Wage ist es aber gleichgültig, da sich Tauchkörper für $y^{0,5}$, $y^{1,5}$ usw. ebenso gut herstellen lassen, wie für die ganzen Potenzen. Wie man aus der Abbildung Fig. 2 sieht, ist y^4 jedenfalls noch von recht brauchbarer Form, so daß man also Gleichungen vom achten Grade noch lösen kann. Bei anderer Wahl der Dimensionen, als sie hier getroffen wurde, wird man noch weiter gehen können. Für die Untersuchung zerfällt die neue Gleichung in zwei getrennte Gleichungen, in deren einer die gebrochenen Potenzen von y mit positivem Vorzeichen auftreten, während in der andern Gleichung die negativen stehen. Die aus der ersten Gleichung gefundenen Werte von y ergeben dann positive Werte von x , bei den aus der zweiten gefundenen hat man beim Wurzelziehen nur das negative Zeichen zu berücksichtigen. Die Zahl der erforderlichen Wägungen hat sich nicht erhöht, da man auch ohne diese Substitution die positiven und negativen Werte von x aus verschiedenen Gleichungen finden mußte, hingegen hat sich die Genauigkeit der Ergebnisse vergrößert, weil beim Ausziehen der Quadratwurzel ein Fehler prozentual auf etwa die Hälfte vermindert wird.

Die Gleichungen, welche zum Ausprobieren der Wage benutzt wurden, sind nach einem bestimmten Schema aufgebaut. Ein Wurzelwert x_1 soll entweder 0,1 oder 0,3 oder 0,5 oder 0,7 oder 0,9 betragen und dabei der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an dieser Stelle einmal $\frac{1}{16}$, einmal 1,0 und einmal 16 sein. Auf diese Weise entstehen 15 Gleichungen, die vom fünften Grade sein sollten, also noch weitere vier Wurzeln besitzen müssen. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß diese vier Wurzeln in jeder Gleichung unter sich gleich sind und mit x_2 bezeichnet werden, also $y = (x - x_1)(x - x_2)^4$, so ist

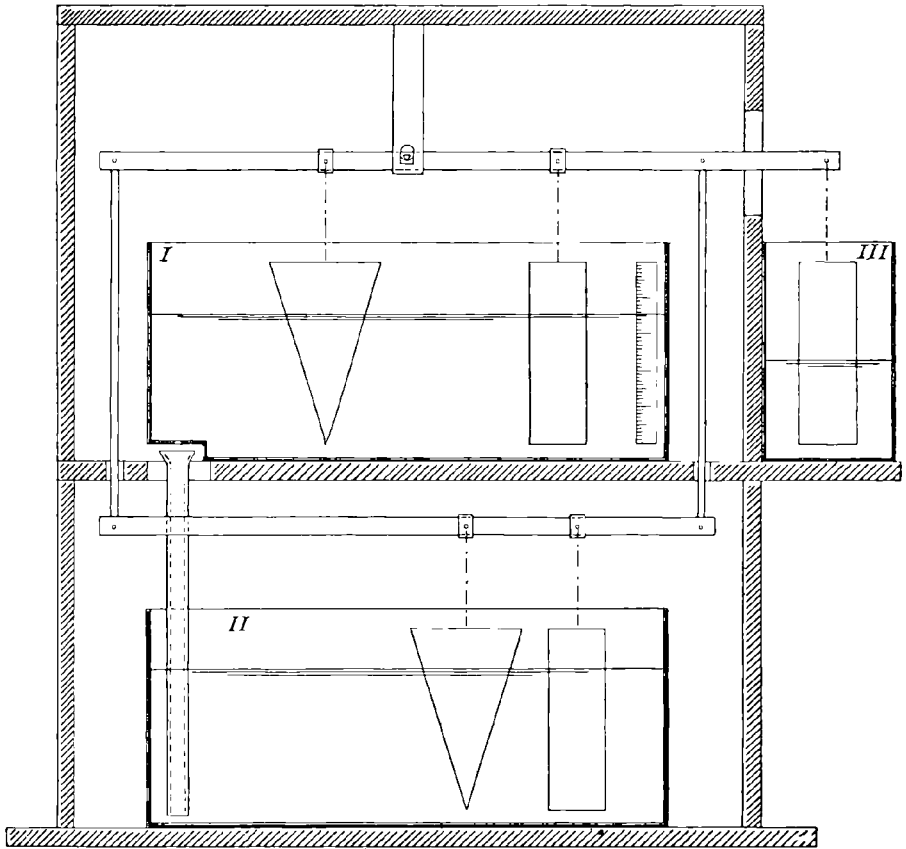
$$x_2 = x_1 - \sqrt[4]{\frac{dy}{dx}}$$

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden:

	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}$		$\frac{dy}{dx} = 1$		$\frac{dy}{dx} = 16$	
0,1	0,110*	10,0%	0,101*	1,0%	0,100*	0
0,3	0,300*	0	0,316	5,3%	0,300	0
0,5	0,520	4,0%	0,520	4,0%	0,510	2,0%
0,7	—	—	0,707	1,0%	0,703	0,4%
0,9	—	—	0,922	2,4%	0,897	-0,3%

Die Zeit für das Aufhängen der Tauchkörper und die Füllung mit Wasser betrug etwa 8 Minuten, die Zeit für das Umformen der Gleichung ist sehr verschieden groß und hier nicht berücksichtigt. Bei den mit einem Stern gekennzeichneten Lösungen war das Resultat zuerst sehr unsicher, daher wurde eine geeignete Substitution vorgenommen,

Fig. 3.



und man hat erstens die Zeit für die Umrechnung und zweitens die Zeit für das abermalige Aufhängen und Füllen in Ansatz zu bringen. Bei den beiden nicht gelösten Gleichungen würde man x_2 zuerst gefunden haben, sie kommen daher für einen Vergleich nicht in Betracht.

Um diese Wage zu einer Integrationsvorrichtung auszubauen, mußten noch einige Teile hinzutreten. In der Höhe der Nulllinie ist eine Öffnung in dem Gefäß angebracht und das ausfließende Wasser wird in einem darunter aufgestellten zweiten Gefäß aufgefangen. Die Ausfließgeschwindigkeit ist in jedem Augenblick proportional zu \sqrt{x} ,

wenn x die Wasserstandshöhe im ersten Gefäß bezeichnet, daher ist die ganze ausgeflossene Menge $c\int\sqrt{x}dt$. In das zweite Gefäß hängt man wieder Tauchkörper, die an einem Wagebalken befestigt sind, der seinerseits wiederum, wie Fig. 3 zeigt, mittels zweier Gelenkstangen mit dem oberen Wagebalken in Verbindung steht. Jetzt läßt man in den oberen Wasserkasten Wasser einfließen und reguliert den Zustrom dabei so, daß stets Gleichgewicht vorhanden ist und liest in geeigneten Zeitintervallen den Wasserstand ab. Man hat dann eine Reihe von Punkten gefunden, in denen zwischen einer Funktion von x und einer Funktion von $c\int\sqrt{x}dt$ Gleichgewicht bestand. Ein einfaches Beispiel mag das Verfahren erläutern: an dem oberen Wagebalken hänge der prismatische Körper, am unteren der keilförmige, beide am gleichen Hebelarm, dann heißt die entsprechende Gleichung

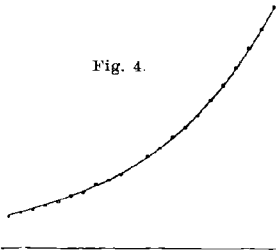
$$(c\int\sqrt{x}dt)^2 = x$$

oder, wenn man die Wurzel zieht, differenziert und vereinfacht

$$\frac{dx}{dt} = 2cx.$$

Durch einen solchen Versuch wurden die in Fig. 4 durch Kreise gekennzeichneten Punkte gefunden, während die Kurve $x = e^{2ct}$, welche sich der durch andere Versuche bestimmten Konstanten c des Apparates entsprechend ergeben müßte, voll ausgezogen ist.

Fig. 4.



Die auf solche Weise integrierbaren Gleichungen müßten die Form besitzen

$$f(c\int\sqrt{x}dt) = \varphi(x)$$

oder sich aus dieser Form ergeben.

Das Anwendungsgebiet läßt sich jedoch leicht erweitern, indem ein drittes Gefäß hinzugefügt wird, das in Fig. 3 an der Seite angebracht ist. In dieses Gefäß wird ein Wasserstrom von gleichbleibender Stärke geleitet, so daß der Wasserspiegel proportional der Zeit ansteigt. Mit Hilfe von verschiedenen Tauchkörpern kann man dann Auftriebswirkungen erhalten, welche beliebige Funktionen der Zeit darstellen. Dadurch sind Gleichungen integrierbar geworden, welche die Form besitzen

$$f(c\int\sqrt{x}dt) = \varphi(x) + g(t).$$

Als Beispiel diene die Gleichung

$$(c\int\sqrt{x}dt)^2 = at - x,$$

welche sich in folgende Differentialgleichung umwandeln läßt

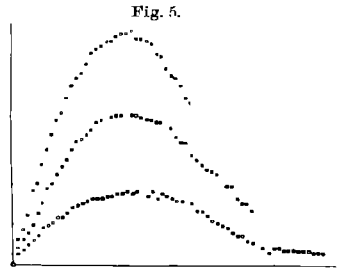
$$\frac{dx}{dt} = a - 2c\sqrt{atx - x^2}.$$

Die Integration ist für verschiedene Faktoren von t , die sich verhalten wie 1:2:3 durchgeführt und hat die in Fig. 5 gezeichneten Punktreihen ergeben.

Gelegentlich kann die Anschaulichkeit, mit der man die gegebene Abhängigkeit vor sich sieht, für die Erkennung von Eigenschaften der gesuchten Funktion von Wert sein. Es sei

$$c\int\sqrt{x}dt = \varphi(x) + a \cdot t.$$

Dann hängt im Gefäß zwei und im Gefäß drei ein prismatischer Körper, Gefäß drei bekommt konstanten Zufluß, folglich muß bei einem konstanten Zufluß zu Gefäß zwei, dessen Stärke man aber noch nicht kennt, Gleichgewicht dauernd erhalten bleiben. Man wird allmählich einen konstanten Wasserspiegel in Gefäß eins herbeiführen, mit anderen Worten, die Kurve hat eine Asymptote parallel zur Zeitachse bei dem verschiedenartigsten Aufbau der Funktion $\varphi(x)$.



Da die bisher geschilderten Anordnungen sich als brauchbar erwiesen haben, sogar trotz der sehr primitiven Mittel, mit denen sie verwirklicht wurden, so mag es erlaubt sein, von noch unerprobten weiteren Ausbauten zu sprechen. Zunächst ist es lästig, daß der Wasserspiegel in Gefäß zwei proportional zu $\int\sqrt{x}dt$ statt proportional zu $\int xdt$ ist. Eine schlitzartige Öffnung in Gefäß eins, die von Null anfangend bis obenhin reicht und eine bestimmte Form besitzt, würde hier Abhilfe schaffen, so daß die vorgelegten Gleichungen dann die Form haben dürften

$$f\left(c_1 \int xdt\right) = \varphi(x) + g(t).$$

Man kann Gefäß zwei wiederum mit einer Ausflußöffnung versehen und das Wasser in einem neu hinzugefügten Gefäß auffangen, und würde so ein Doppelintegral erhalten, oder nach Umgestaltung der Gleichung eine Differentialgleichung von zweiter Ordnung. Einer Anbringung von noch mehr solchen Gefäßen und somit einem Vordringen zu Differentialgleichungen höherer Ordnung stehen ebenfalls keine prinzipiellen Bedenken entgegen.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß es genügt, wenn die Funktionen $f\left(c_1 \int xdt\right)$, $\varphi(x)$ und $g(t)$ in Form von gezeich-

neten Kurven vorliegen, da man nach diesen geeignete Tauchkörper anfertigen kann.

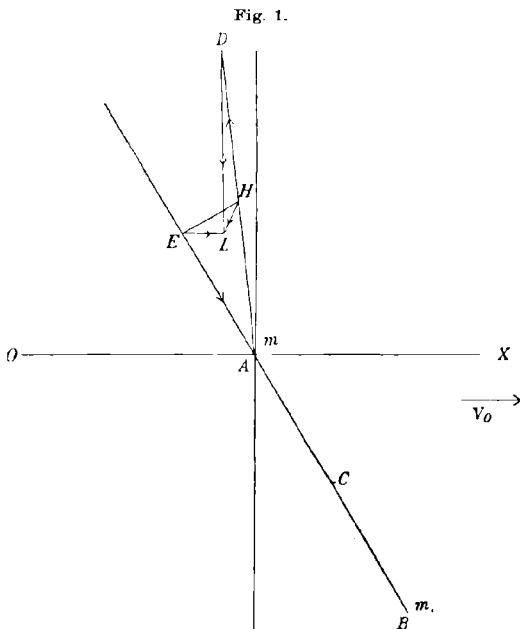
Über die Genauigkeit, welche bei der vorhandenen Ausführung der Wage erreicht wurde, geben die Figuren am besten Auskunft. Erreichbar ist jedenfalls eine größere. Die bei weitem größte Fehlerquelle ist die Unregelmäßigkeit der Adhäsion des Wassers an den Tauchkörpern, und auch dieser Fehler läßt sich vermindern, indem man die Tauchkörper länger ausführt, ohne die Querschnitte zu ändern, weil auf diese Weise die Auftriebskräfte vergrößert werden, während der benetzte Umfang derselbe bleibt.

On Coulomb's Laws of Friction.

By PETER FIELD.

Coulomb's laws of friction¹⁾ state that when one body slides over another the frictional force is

- 1) proportional to the normal pressure,
- 2) independent of the magnitude of the areas which are in contact,
- 3) independent of the relative velocities of the two bodies.



In his *Leçons sur Le Frottement*, published in 1895, Painlevé discussed a number of interesting friction problems under the assumption that the frictional force obeys these laws. The particularly interesting thing brought out in Painlevé's discussion is the fact, that while the normal reaction is independent of the coefficient of friction in some problems, in general this is not the case. The discussion

1) Coulomb, *Théorie des machines simples, mémoires des Savants étrangers*, tome X, 1781.

of the last class of problems brings to light a difficulty the nature of which is most easily understood by considering the following problem, first treated by Painlevé in his *Leçons*¹⁾, and later by others.²⁾

Given two particles m, m_1 (Fig. 1) each of unit mass which are connected by a weightless rod AB : m is constrained to move along a rough horizontal tube OX and the particles are to remain in the given vertical plane. Determine the initial values of the acceleration of m and of the centroid C for different values of the coefficient of friction, μ .

For a small value of μ the problem presents no difficulties, but if μ is sufficiently large the equations of motion either can not be satisfied at all or they permit two different solutions. In the one case it is not possible to satisfy the equations of motion no matter whether the normal component of the reaction of the tube is chosen upward or downward, while in the second case it may be chosen either way. The

Fig. 2.

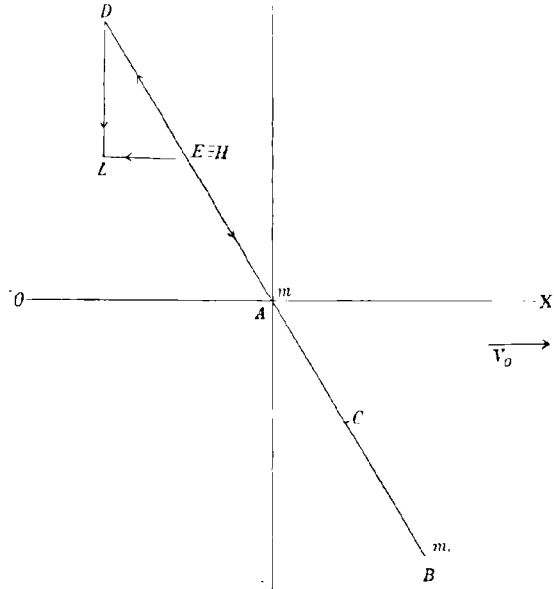
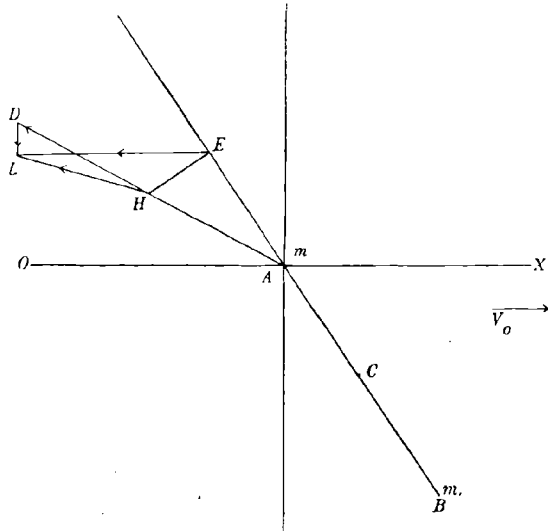


Fig. 3.



1) Also in *Comptes rendus*, t. CXXI, 1895, p. 112.
 2) Appell, *Mécanique* Vol. II, p. 133, 3^d edition).

Fig. 4.

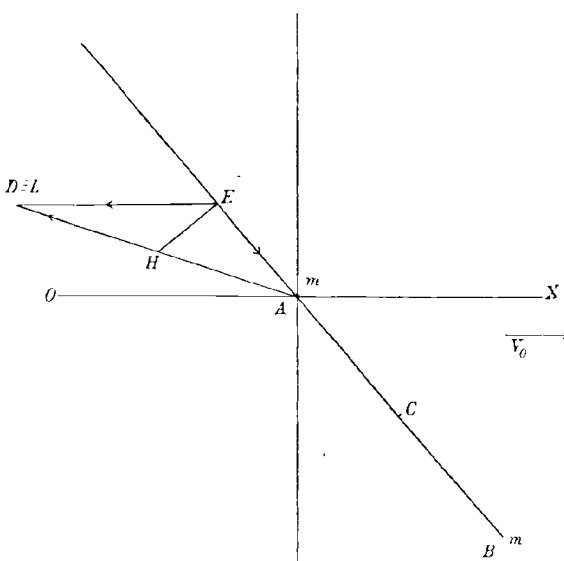
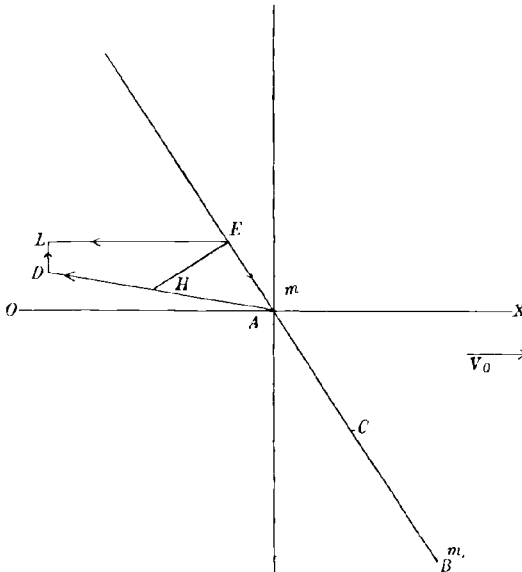


Fig. 5.



question of how to interpret these cases has given rise to considerable discussion.¹⁾

In making an effort to obtain a clear idea of the precise meaning of the difficulties, it occurred to me that the matter might be more clearly comprehended if instead of using analysis, as has been done in the papers referred to, we resort to graphical methods; on trial this is found to be the case. I proceed to show this by giving a graphical solution of the problem which has already been stated.

Although the graphical construction can be carried out for any initial conditions, in order to show the method to the best advantage, the two beads and their connecting rod will be supposed to have initially simply a velocity of translation V_0 . The reaction of the tube will be called R and the reaction of the rod on the particle at A will be called T .

Inasmuch as the particles are rigidly connected

1) A. Mayer, *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1901, *Chauvat*, *Comptes rendus*, t. CXXXVI, 1903, p. 1634; *Lecornu*, t. CXL, 1905, p. 635 and p. 847; *De Sparre*, t. CXLI, 1905, p. 310; *Klein*, *Mises*, *Hamel*, *Prandtl* and *Pfeiffer* in the *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58. Band, 1910.

and the motion is a translation at the given moment, the projection of the accelerations of m , C , m_1 , along the line AB have a common value j_r . From the motion of the centroid it follows that the sum of the projections of R and $2mg$ along AB is equal to $2mj_r$ or the sum of the projections of $\frac{1}{2}R$ and mg is equal to mj_r .

The forces which act on the particle at A are mg , R and T . Now we know that the sum of their projections along AB is mj_r and we also know that the sum of the projections of mg and $\frac{1}{2}R$ along the rod is mj_r : therefore the sum of the projections of $\frac{1}{2}R$ and T along the rod is zero. Figure 1 can therefore be constructed by assuming an arbitrary length AD for R (and for the present the normal component of the reaction of the tube will be assumed upward): the projection of $\frac{1}{2}R$ in the direction of AB gives the stress in the rod. As the particle at A has no acceleration along the vertical, the sum of the vertical projections of R , T , and mg is zero; this enables us to construct $mg = DL$. Calling the accelerations of the particle at A and of the centroid j_a and j_c respectively, it follows that the sum of the horizontal components of R and T is $mj_a = EL$ and the sum of $\frac{1}{2}R$ and mg is $mj_c = HL$. Figure 1 exhibits

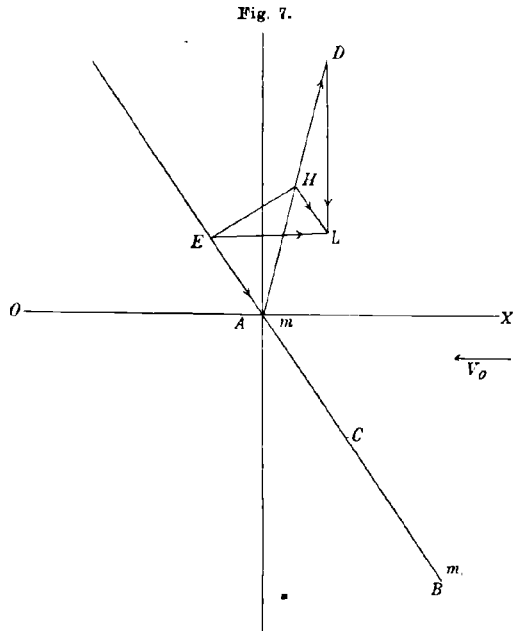
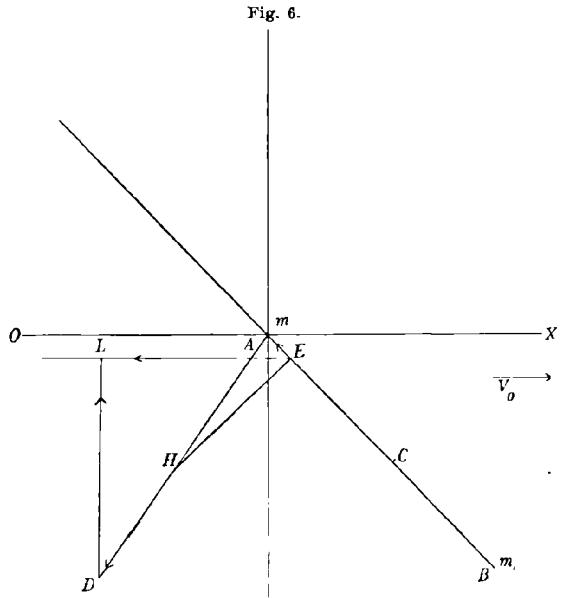


Fig. 8.

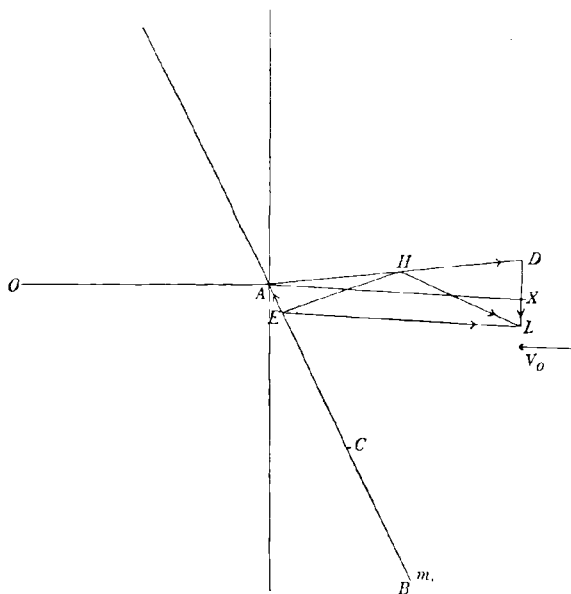
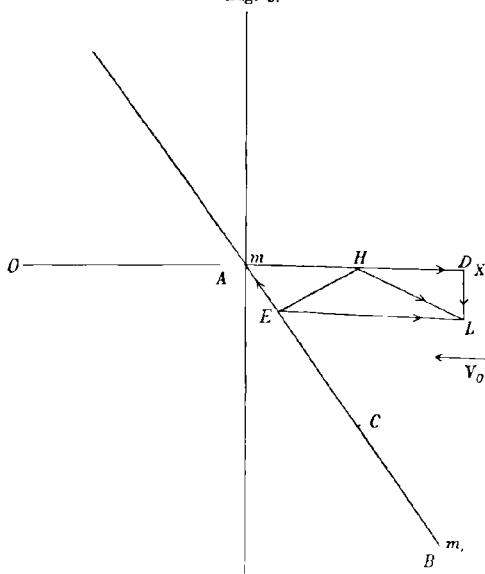


Fig. 9.



the magnitudes of the different quantities in which we are interested. The second figure differs from the first only in that the friction angle has been increased so that the direction of R and T is the same. In the third figure mg is small, while in the fourth it is zero in comparison with the other quantities.

In case 4 m is instantaneously brought to rest and the motion becomes a rotation about A as a fixed point. It is interesting to notice that if instead of thinking of EL as representing mj_a we think of it as representing $mj_a dt = -mV_0$, then HE represents $HL + LE = mj_c dt + mV_0 = mV_c$, where V_c is the velocity of the centroid after the particle at A is stopped and this velocity is at right angles to the rod as it should be.

A still larger value of the coefficient of friction would give the same solution as 4, as only enough friction would come into play to prevent any motion at A . If however we supposed A to move in such a case, we would be led to the conclusion that mg must be directed up-

ward as in Fig. 5. Fig. 6 is inserted to show that if the normal component of the reaction of the tube is assumed downward, the same difficulty is encountered.

Little explanation is necessary for Figs. 7—12 as the differences are only such as arise from changing the direction of the initial velocity. The figures show that for a sufficiently large value of the coefficient of friction, the normal component of the reaction of the tube may be assumed either upward as in Figs. 7 and 8, or downward, as in Fig. 10; but if the coefficient of friction is not sufficiently large it must be taken upward. Otherwise there results the impossible case shown in Fig. 12 where mg is directed upward.

Fig. 10.

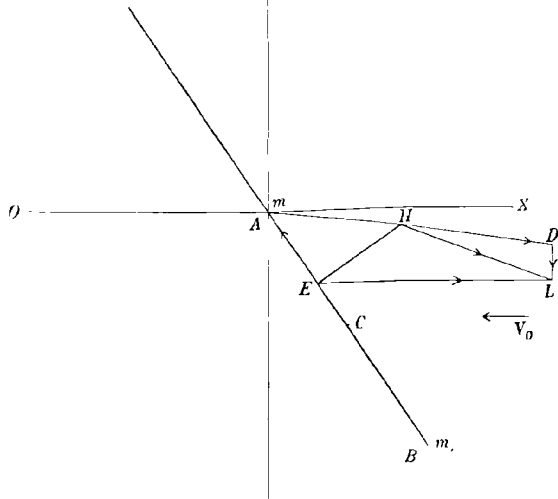


Fig. 11.

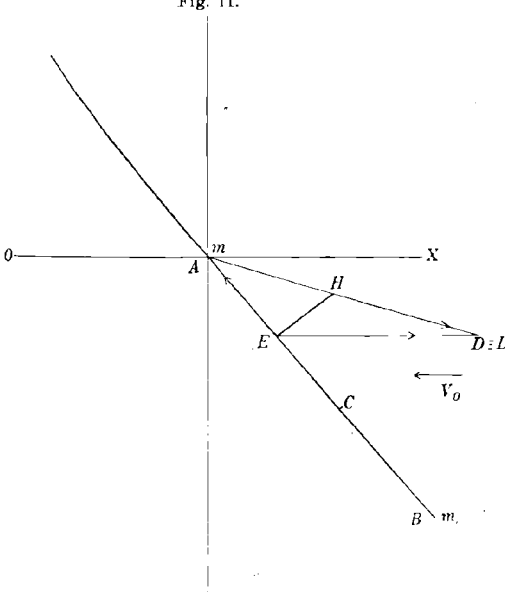
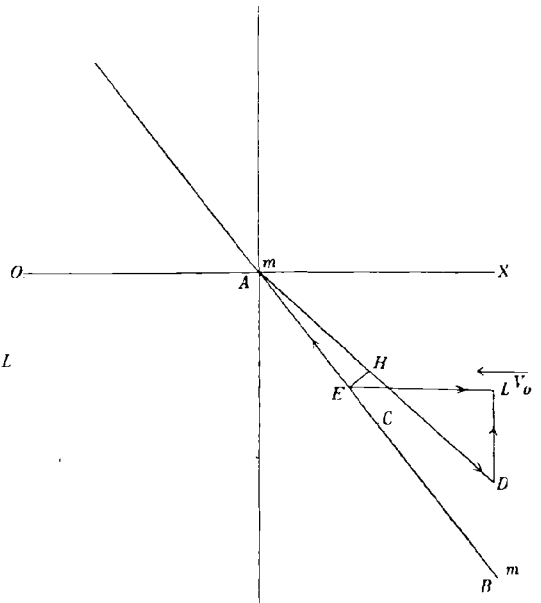


Fig. 12.



Numbers 9 and 11 are particularly interesting: 9 shows that as the coefficient of friction approaches infinity, the normal pressure on the tube approaches zero and the acceleration of m remains finite, while

in 11 we have a finite value of the coefficient of friction and infinite values of the accelerations just as in Fig. 4. Presumably the proper interpretation of 11 is that A is instantaneously brought to rest and the normal component of the reaction at the same time changes its sign.

These results of course agree with what is obtained analytically.

The following notation is used in all the figures: $AD = R$, $AH = \frac{R}{2}$, $EA = T$, $DL = mg$, $EL = mj_a$, $HL = mj_c$.

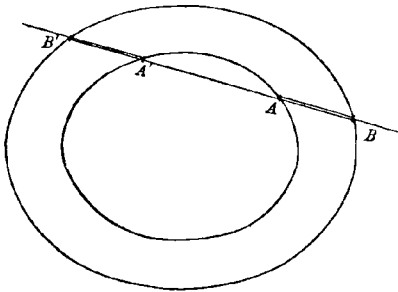
University of Michigan, Oct. 23th, 1911.

Ein Instrument zum Zeichnen von Hyperbeln mit Benutzung der Asymptoten.

Von W. ROTTSIEPER in Göttingen.

Zieht man durch zwei gleichmittige Kreise eine schneidende Gerade, so sind aus Symmetriegründen die abgeschnittenen Strecken innerhalb des Ringes einander gleich. Ein allgemeinerer Satz gilt für zwei ähnliche Ellipsen in entsprechender Lage, da sie aus jenen Kreisen durch

Fig. 1.



affine Umformung hervorgehen. Dabei bleibt ja das Längenverhältnis der beiden Strecken ungeändert. (Fig. 1.) Etwas Ähnliches gilt für zwei ähnliche Hyperbeln in solcher Lage (zu denselben Asymptoten). (Fig. 2.) Ein Sonderfall dieses Satzes ist der allgemeinere bekannte Satz, wonach die Stücke, welche eine Hyperbel und ihre Asymptoten auf einer schneidenden Geraden bilden, einander gleich sind.

Hier sind die Asymptoten als ähnliche, in unendlich kleinem Maßstab gezeichnete Hyperbeln aufzufassen.

Als leicht konstruierbare Gerade bieten sich die Asymptoten zur Zeichnung der Hyperbel von selbst dar, um so mehr, als sie für scheidelferne Punkte den Charakter einer ersten Annäherung besitzen. Es handelt sich nun darum, eine Vorrichtung zu finden, die mit ihrer Hilfe und des gerade genannten Satzes eine glatte Herstellung von Hyperbelbögen ermöglicht, an Stelle der üblichen punktweisen Zeichnung der Kurve. In Fig. 3 sei S ein fester Hyperbelpunkt. Es müssen bei der Drehung

der Schneidenden um S die *veränderlichen Strecken* $P'S$ und PS' einander gleich bleiben. Die unmittelbare mechanische Verwirklichung dieser Gleichheit ist, soweit ich sehe, recht schwer. Mittelbar erreicht man das aber auf folgende Weise. Zieht man nämlich durch S und P die in der Figur 3 gezeichneten Parallelen zu den Asymptoten, so müssen, damit P auch ein Hyperbelpunkt sei, also $P'S = PS'$ wird, die Dreiecke $P'Q'S$ und PQS' kongruent sein; demnach ist auch $Q'S = QS'$. $Q'S$ ist aber eine feste Strecke. Daher darf sich auch das Stück $Q'S$ bei der Drehung der Geraden um S nicht ändern.

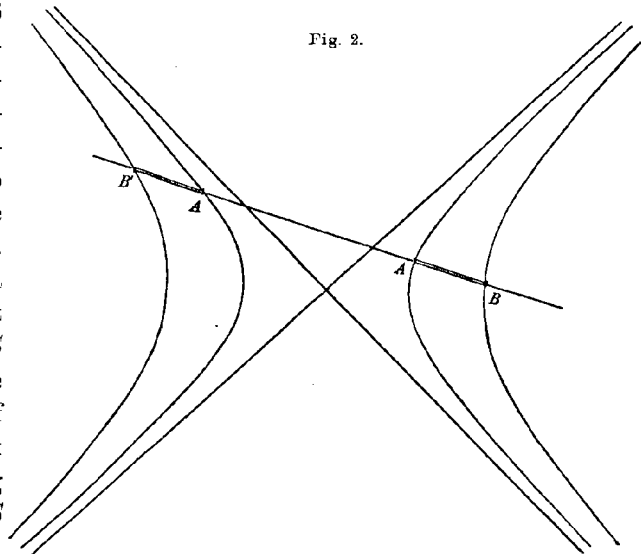


Fig. 2.

Dieses *konstante Stück* $Q'S$ ermöglicht nun, abgesehen von einer bequemen punktweisen Herstellung der Hyperbel, auch die Konstruktion einer Zeichenvorrichtung. Die Figur 4 stellt einen solchen Hyperbelzeichner dar, wie er vom Mechaniker Bartels, Göttingen, Weenderstraße, für das Göttinger Institut für angewandte Mathematik hergestellt worden ist. Ein kleiner Wagen führt die in beliebiger Richtung und Entfernung vom Drehpunkte (S') einstellbare Schiene (QP) längs der einen Asymptote parallel zur andern. Die andere (in S') drehbare Schiene gleitet dabei längs eines Stiftes im gegebenen Hyperbelpunkte (S). Der Schnittpunkt (P) der beiden Schlitze in den Schienen wird durch eine Rolle eingenommen, durch die man einen dünnen Schreibstift stecken kann. Mit der linken Hand schiebt man den Wagen unter gelindem Druck gegen das Papier von links nach rechts. Wenn dann die Schneiden die Asymptote berühren, so liegt der Drehpunkt (S')

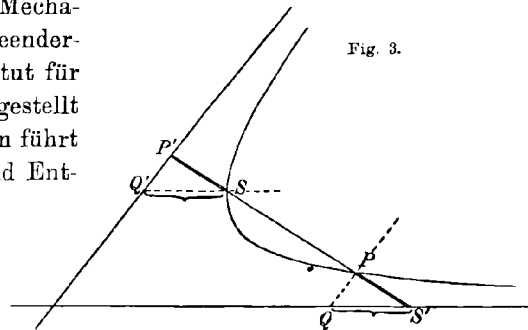
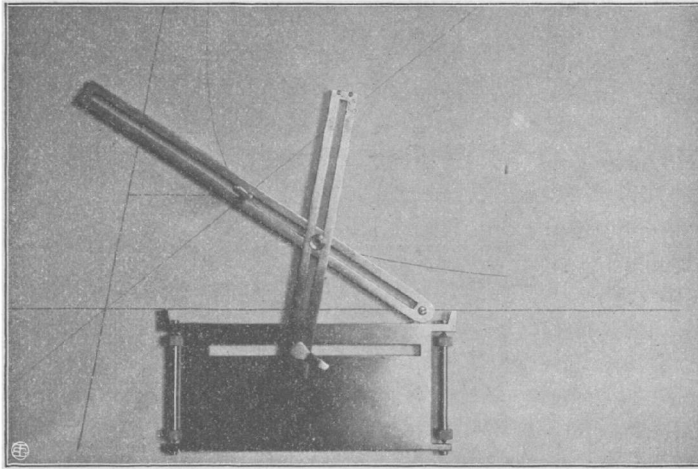


Fig. 3.

in dieser Geraden. Die rechte Hand führt währenddessen den Stift in der Rolle, indem sie zur Verminderung der Reibung der Rolle (in dem Schlitz der Parallelschiene) durch geringen Druck in der Richtung dieser Schiene ihrer Bewegung darin ein wenig nachhilft. Man bekommt da-

Fig. 4.



bei einen glatten Hyperbelbogen, soweit es die Abmessungen des Instruments erlauben. Hat man als gegebenen Hyperbelpunkt (S) den Scheitel genommen, so braucht man den Zeichenapparat nur umzuklappen, um genau so den andern Teil des Kurvenastes durch Fahren längs der andern Asymptote herzustellen, ohne erst die Parallelschiene anders einstellen zu müssen.

Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso.

Nota di UMBERTO CISOTTI a Padova (Italia).

Rapido è a dirsi il *corso* di un canale scoperto, in una assegnata sezione trasversale, quando la corrispondente velocità media è abbastanza rilevante, di fronte alla velocità di caduta libera di un grave (nel vuoto), da una altezza pari alla profondità del canale, nella sezione che si considera.

Rapida sarà a dirsi la *corrente* in un tratto di canale compreso tra due sezioni trasversali, quando lo è in queste e in ogni sezione intermedia.

In questa Nota intendo occuparmi appunto del moto permanente nei canali (sensibilmente) rettilinei e a *rapido corso* (purchè non troppo rapido, poichè in tal caso intervengono fenomeni di disgregazione).

Limitando la questione a due dimensioni, e sfruttando il metodo di approssimazione escogitato da Lord Rayleigh nel problema della *onda solitaria*¹⁾, si riesce ad assegnare l'andamento del pelo libero e a dedurre una notevole relazione tra elementi sperimentali.

Sieno: α l'inclinazione del fondo del canale (rispetto all'orizzonte); q la portata; c e c_1 le velocità medie in due sezioni, distanti fra loro di l , di cui la prima a monte e l'altra a valle; g l'accelerazione della gravità.

La relazione menzionata è la seguente:

$$(I) \quad l \sin \alpha + q \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1} \right) \cos \alpha + \frac{1}{2g} (c^2 - c_1^2) = 0.$$

Mediante questa si può esprimere una delle cinque quantità, l, q, c, c_1, α in funzione delle quattro rimanenti.

Nei casi pratici (*canali industriali*) si può con grande approssimazione trascurare le potenze di α superiori alla prima²⁾, e sostituire alla (I) la seguente

$$(II) \quad l\alpha = q \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2g} (c_1^2 - c^2).$$

Il pelo libero si dispone nel piano del moto (sezione longitudinale del canale), secondo una cubica (Cfr. § 4). — Essa degenera in una retta quando il fondo del canale è orizzontale ($\alpha = 0$); in tal caso si ha il regime uniforme ($c_1 = c$), come era evidente a priori.

La (I) può anche applicarsi ai getti liquidi verticali (§ 6).

Basta porre $\alpha = \frac{\pi}{2}$; con che la (I) diviene

$$(III) \quad c_1^2 - c^2 = 2gl.$$

Questa dice che *alle velocità medie delle varie sezioni trasversali del getto liquido può applicarsi la nota formula che regge la velocità di caduta dei gravi*.

1) Sc. Papers; Vol. I; pag. 251 oppure Phil. Mag.; pg. 257.

Il problema stesso era già stato trattato poco prima dal Boussinesq: „Théorie de l'intumescence liquide appelée *onde solitaire* ou *de translation*, se propageant dans un canal rectangulaire“. [Comptes Rendus; T. 72 (1. Semestre 1871) pg. 755—759].

2) Infatti i massimi valori di $\sin \alpha$ non superano mai, praticamente $\frac{4}{1000}$. Devo questa ed altre indicazioni pratiche a cortesi comunicazioni del Ch.^{mo} Prof. Turazza della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Padova, cui porgo vivi ringraziamenti.

§ 1.

Posizione del problema.

Si abbia un canale rettilineo, a sponde verticali ed il cui fondo è inclinato di un angolo α sull'orizzonte.

Il moto del liquido — fluido perfetto, incomprimibile, omogeneo, pesante, la cui densità costante conviene assumere eguale a 1 — ha luogo per piani verticali paralleli alle sponde, senza differenze sensibili dall'uno all'altro di essi, in guisa che i caratteri del movimento sono i medesimi sopra una stessa retta perpendicolare alle sponde.

Se si assume allora, al solito, uno di questi piani come piano coordinato $z = 0$, di un sistema cartesiano ortogonale O, xyz tutte le caratteristiche del moto (velocità e pressione) risultano indipendenti dalla coordinata z .

Basta studiare allora il moto nel piano $z = 0$.

Se si suppone ulteriormente che il regime sia *permanente*,

si avrà ancora, in ogni posto, l'*indipendenza dal tempo* t .

Si prenda in esame la porzione di canale compresa tra due sezioni trasversali, comunque assegnate.

Il campo del moto, nel piano $z = 0$, è allora circoscritto, a monte e a valle rispettivamente, dalle traccie OO' e PP' di dette sezioni, e inoltre dalla *parete rigida* rettilinea \bar{w} e dal *pelo libero* λ' , sezioni rispettivamente del fondo e della superficie libera del canale.

Sieno: q la portata del canale; $h = OO'$, $h_1 = PP'$ le misure della profondità del canale nelle due sezioni assegnate; l la distanza delle sezioni stesse; c e c_1 le rispettive velocità medie.

Dato il regime stazionario si ha manifestamente

$$(1) \quad ch = c_1 h_1 = q.$$

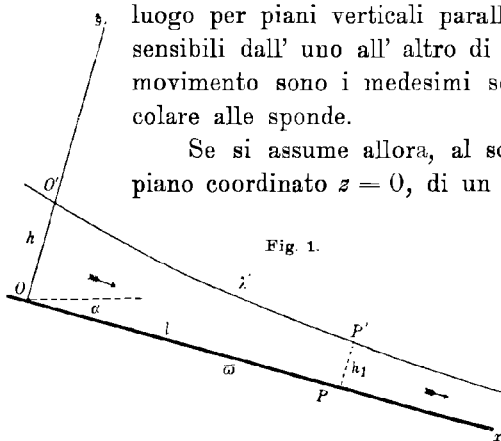
Si assuma, nel piano $z = 0$, una coppia di assi x, y coll'origine nel punto O del fondo \bar{w} , l'asse x coincidente con \bar{w} e diretto nel senso della corrente e l'asse y diretto verso la linea libera λ' .

Il moto del liquido sia infine *irrotazionale*.

§ 2.

Condizioni ai limiti.

Poichè il moto avviene senza vortici, e poichè il liquido è incomprimibile esistono due funzioni $\varphi(x, y)$ — *potenziale di velocità* — e



$\psi(x, y)$ — *funzione di corrente* — regolari nel campo del moto e tali che

$$(2) \quad \begin{cases} d\varphi = u dx + v dy, \\ d\psi = -v dx + u dy, \end{cases}$$

essendo u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y) .

Le (2) definiscono le funzioni φ e ψ , ciascuna a meno di una costante additiva; converremo di fissare queste costanti in modo che sia $\varphi = \psi = 0$ nell'origine delle coordinate.

Sopra $\bar{\omega}$ e sopra λ' , trattandosi di linee di flusso, la ψ deve avere, notoriamente, valori costanti; d'altra parte è pure noto che la differenza tra i valori costanti assunti da ψ sopra λ' e sopra il fondo $\bar{\omega}$, deve eguagliare la portata q della corrente.

Pertanto, notando che nell'origine è $\psi = 0$, avremo

$$(3) \quad \begin{cases} \psi = 0 \text{ sopra } \bar{\omega}, \\ \psi = q \text{ sopra } \lambda'. \end{cases}$$

Per i moti irrotazionali, stazionari, e soggetti a forze conservative le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano in un' unica relazione tra il quadrato $V^2 = u^2 + v^2$ della velocità, la pressione divisa per la densità (che nel caso nostro è $= 1$) e il potenziale unitario delle forze di massa.

Designando p la pressione specifica, g l'accelerazione della gravità, si ha

$$\frac{1}{2} V^2 - g(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + p = \text{costante.}$$

Sulla linea libera λ' , la pressione p è a ritenersi costante; sarà perciò

$$(4) \quad V^2 - 2g(x \sin \alpha - y \cos \alpha) = \text{costante, sopra } \lambda'.$$

Le (3) e la (4) esauriscono le condizioni ai limiti.

§ 3.

Considerazioni relative alla velocità sul fondo del canale. Corso rapido.

Posto

$$(5) \quad \begin{aligned} x + iy &= z, \\ \varphi + i\psi &= F(z), \\ u - iv &= \frac{dF}{dz} = f(x + iy); \end{aligned}$$

F ed f riescono notoriamente funzioni della variabile complessa $x + iy$; ciò che del resto è immediata conseguenza di (2).

Sul fondo del canale, cioè sulla retta $y = 0$, trattandosi di linea di flusso, la velocità deve essere tangenziale, il che implica $v = 0$; allora

dall'ultima (5) scende che $f(x)$ definisce, in valore assoluto e in senso, la velocità delle particelle liquide sul fondo del canale.

Applichiamo alla $f(x + \nu) - \nu$ essendo un incremento (reale o complesso) a priori arbitrario purchè soltanto tale che il punto $x + \nu$ appartenga al quadrante delle ordinate e delle ascisse positive — lo sviluppo del Taylor arrestato al terzo termine.

Si ha

$$f(x + \nu) = f(x) + \nu f'(x) + \frac{\nu^2}{2} f''(x_1),$$

essendo x_1 un punto del cammino rettilineo che unisce il punto x al punto $x + \nu$.

Da questa dividendo per c — velocità media della sezione a monte — si ottiene

$$(6) \quad \frac{1}{c} f(x + \nu) = \frac{1}{c} f(x) + \frac{\nu}{c} f'(x) + \frac{\nu^2}{2c} f''(x_1).$$

Riterremo trascurabile l'influenza di quest'ultimo termine di fronte al contributo dovuto ai termini che lo precedono.

Vediamo di precisare bene le condizioni sotto cui si rende plausibile tale ipotesi.

Il moto di una particella liquida sul fondo del canale si può paragonare, qualitativamente, al movimento di un grave libero discendente sullo stesso piano e che parte dall'origine O colla velocità c .

Per il grave — supposto di massa unitaria — si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} f(x) &= \left\{ 1 + \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{c^2} x \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{c} f'(x) &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{c^2} \left\{ 1 + \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{c^2} x \right\}^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{c} f''(x_1) &= -\frac{g^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{c^4} \left\{ 1 + \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{c^2} x_1 \right\}^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Sia h il massimo valore che si vuol assegnare a $|\nu|$. Poichè $x > 0$, e $x + \nu$ appartiene ai quadrante delle coordinate positive, il valore massimo di $\frac{1}{c} |f''(x_1)|$ è $\frac{g^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{c^4} = \left(\frac{g \operatorname{sen} \alpha}{c^2} \right)^2$. Si può dunque dire che, per il grave, è a ritenersi trascurabile l'ultimo termine dello sviluppo (6), tutte le volte che si può assumere come quantità di primo ordine — di cui cioè si possono ritenere nulle le potenze superiori alla prima — il rapporto

$$\frac{gh \operatorname{sen} \alpha}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{2gh \operatorname{sen} \alpha}{c^2}.$$

Questa condizione è certamente soddisfatta quando la velocità iniziale c del grave è sufficientemente grande rispetto alla velocità di caduta libera dello stesso grave da una altezza h .

Ciò posto, ritornando al moto della corrente nel canale, ammettiamo — ciò che si accorda colla intuizione fisica e colle circostanze di fatto — che la profondità del canale tenda a diminuire da monte a valle. Allora nel tratto di canale che si considera possiamo asserire che h (profondità del canale nella sezione a monte) è il massimo valore di y .

Per quanto si è visto, posto quindi nello sviluppo (6) $v = iy$, sarà a ritenersi trascurabile l'ultimo termine dello sviluppo, se $\frac{2gh \operatorname{sen} \alpha}{c^2}$ o meglio ancora $\frac{2gh}{c^2}$ è una quantità di primo ordine, cioè se la velocità media della sezione a monte è abbastanza rilevante rispetto alla velocità di caduta libera di un grave da un'altezza pari alla profondità del canale nella stessa sezione.

Quando questa condizione è soddisfatta diremo che nella sezione considerata il canale è a *rapido corso*.

Ne viene come conseguenza — poichè manifestamente, e del resto lo constateremo in seguito, la velocità media va aumentando da monte a valle — che se il canale è a *corso rapido* in una determinata sezione, lo è pure nelle seguenti.

§ 4.

Soluzione approssimata. — Equazione del pelo libero.

Dopo ciò, la (6), con la voluta approssimazione, fornisce

$$f(x + iy) = f(x) + iyf'(x);$$

per la quale da (5) si ricava, tenendo presente che per $x = y = 0$, dev' essere $\varphi = \psi = 0$,

$$(5') \quad \begin{cases} \varphi = F(x), & \psi = yf'(x); \\ u = f(x), & v = -yf''(x); \end{cases}$$

dove $F(0) = 0$.

La seconda delle condizioni (3) e la (4), riguardanti il pelo libero λ' , diventano colla cennata approssimazione

$$(7) \quad \left. \begin{cases} yf(x) = q, \\ f(x)^2 - 2g(x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) = \text{costante} \end{cases} \right\} \text{ sopra } \lambda'.$$

Eliminando fra queste la $f(x)$ si ricava la equazione del pelo libero,

$$(8) \quad y^2(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0,$$

alla quale deve aggiungersi l'ovvia condizione $y \geq 0$.

Come si vede il pelo libero in un canale a corso rapido è disposto secondo una cubica.

La costante che compare nella (8) va valutata in modo che per $x = 0$ sia $y = h$. — In tal guisa la cubica è completamente definita.

Osservazione I. Da (7) e (5') si deduce che la componente u della velocità, secondo il fondo del canale, è la stessa per tutti i punti di una medesima sezione trasversale¹⁾, ed ha per valore assoluto $\frac{q}{y}$, y essendo la profondità del canale nella sezione che si considera: la componente u non è altro che la velocità media della sezione stessa.

Osservazione II. Possiamo ora constatare a posteriori che, nelle fatte ipotesi, la profondità del canale decresce continuamente (e quindi la velocità aumenta) procedendo secondo corrente.

Infatti da (8) si ricava, tenendo conto di (1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 \operatorname{sen} \alpha}{y^3 \cos \alpha - \frac{c^2 h^2}{g}}$$

E poichè per ipotesi

$$y^3 \cos \alpha \leq y^3 \leq h^3$$

e

$$c^2 > 2gh > gh,$$

sarà

$$\frac{dy}{dx} < 0, \quad \text{c. d. d.}$$

Osservazione III. Nulla impedirebbe, dal punto di vista *teorico*, di estendere le nostre considerazioni a tutto il tratto di canale che, partendo dalla sezione a monte OO' , si protende indefinitamente a valle.

La limitazione al tratto finito è però imposta da considerazioni di indole pratica.

Si constata in effetto, nei casi concreti, che il moto della corrente non segue indefinitamente le leggi della continuità: ma che da una certa sezione trasversale in poi le particelle cominciano a staccarsi dalla massa liquida, e danno principio ad un complesso fenomeno discontinuo.

Da ciò segue la convenienza di non spingersi oltre quella certa sezione.

§ 5.

Relazione caratteristica fra elementi sperimentali.

Si vuole ora stabilire, per mezzo della (8) una notevole relazione tra: la velocità media c della sezione a monte, quella c_1 relativa ad una sezione PP' a valle, la distanza l delle due sezioni, la pendenza α del canale e la portata q .

Se si pone successivamente nella (8): una prima volta $y = 0$, $y = h$; una seconda volta $x = l$, $y = h_1$ [h e h_1 sono — giova ricordarlo —

1) Cfr. Boussinesq.; loc. cit.

le profondità del canale nella sezione a monte e nella sezione a valle], si ottiene

$$h^2(h \cos \alpha + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0,$$

$$h_1^2(h_1 \cos \alpha - l \sin \alpha + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0.$$

Da queste, moltiplicate rispettivamente per h_1^2 e per h^2 , si ottiene per sottrazione

$$h^2 h_1^2 (h - h_1) \cos \alpha + h^2 h_1^2 l \sin \alpha + \frac{q^2}{2g} (h_1^2 - h^2) = 0,$$

da cui dividendo per $h^2 h_1^2$ e tenendo presenti le (1), si ha in definitiva

$$(9) \quad l \sin \alpha + q \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1} \right) \cos \alpha + \frac{c^2 - c_1^2}{2g} = 0.$$

È questa la formola cercata.

Per piccole inclinazioni, quali si riscontrano nei casi pratici (canali industriali) si ha, con sufficiente approssimazione

$$\sin \alpha = \alpha, \quad \cos \alpha = 1$$

e la (9) può sostituirsi colla seguente

$$(9') \quad l \alpha = q \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2g} (c_1^2 - c^2).$$

§ 6.

Casi limiti.

Fondo orizzontale. Se il fondo del canale è orizzontale si ha $\alpha = 0$. L'equazione (8) del pelo libero da allora $y = \text{costante}$, e poichè per $x = 0$ è $y = h$ si avrà

$$y = h$$

per ogni valore di x , cioè il pelo libero è disposto secondo una retta orizzontale.

Essendo, in particolare, $h_1 = h$ da (1) scende

$$c_1 = c,$$

si ha cioè il regime *uniforme*, com'era evidente a priori.¹⁾

1) A questa conclusione deve manifestamente condurre anche la (9), oppure la (9'), quando si ponga in esse $\alpha = 0$.

Infatti, tenendo presente che $q = ch$, si ha

$$c \{ c_1 - c \} \{ 2gh - c_1 (c + c_1) \} = 0.$$

Ora, per le ipotesi fatte, $c^2 > 2gh$, $c_1 \geq c$ e quindi $c_1^2 > 2gh$; ciò permette di asserire che

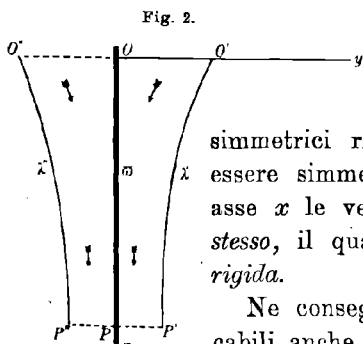
$$2gh - c_1 (c + c_1) < 0.$$

Dalla precedente scende pertanto $c_1 = c$, c. d. d.

Getto liquido verticale. Sia $\alpha = \frac{\pi}{2}$; in tal caso il fondo del canale è verticale e il senso della corrente è discendente.

Si immagini di operare la riflessione del campo del moto rispetto all'asse x .

Si ottiene allora una vena liquida limitata le tra linee libere λ' e λ'' (immagine riflessa di λ').



Reciprocamente se una vena verticale discendente ha andamento simmetrico rispetto all'asse x , ciò significa che in punti simmetrici rispetto a quest'asse le velocità devono essere simmetriche; in particolare sopra i punti dell'asse x le velocità devono essere situate sopra l'asse stesso, il quale pertanto si comporta come una parete rigida.

Ne consegue che le nostre conclusioni sono applicabili anche ai getti liquidi verticali.

Le equazioni delle linee libere λ' e λ'' si hanno da (8) ponendovi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si ottiene

$$y^2(-x + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0,$$

la quale per $y \geq 0$ definisce la λ' e per $y \leq 0$ la λ'' .

Come era da attendersi, le due curve sono simmetriche rispetto all'asse x .

Dalla (9) si ha invece

$$c_1^2 - c^2 = 2gl.$$

Da questa formula scende che le velocità medie delle varie sezioni trasversali seguono la legge della velocità di caduta dei gravi.

Padova, Dicembre 1911.

Ein Rechenstab für Ballonführer.

Von FR. A. WILLERS in Charlottenburg.

Mit 1 Tafel.

Seinem vorzüglichen Buche: „Grundlagen der Ballonführung“ (Leipzig 1910) hat Emden zwei Nomogramme beigelegt, die den Zusammenhang zwischen Tragkraft G , Volumen V , Prallhöhe H und Temperatur t eines Ballons darstellen; das eine gilt für den Wasserstoff, das andere für den Gasballon, falls die Normaltragkraft für das Kubikmeter Gas 0,7 kg ist. Nun läßt sich das zweite Nomogramm leicht so abändern,

daß sich dieser Zusammenhang auch für Gase anderer Tragkraft ablesen läßt, was — wenn man diese Formeln einmal darstellen will — doch ganz wünschenswert ist. Es scheint mir aber praktischer einen Rechenstab herzustellen, der die Nomogramme ersetzt, da dieser im Ballon bequemer zu gebrauchen sein dürfte. Die anliegende Tafel stellt diesen Rechenstab dar, den sich jeder mit Hilfe derselben, wie ich weiter unten angeben werde, leicht herstellen kann. Da ich nicht annehmen kann, daß das Buch von Emden allgemein bekannt ist, will ich hier die in Betracht kommenden Gleichungen im Anschluß an Emden kurz ableiten, sodann werde ich das Prinzip und den Gebrauch des Rechenstabes auseinandersetzen. Der Text ist jedoch so gefaßt, daß der letzte Teil auch ohne den ersten zu verstehen ist, so daß auch jemand, der die Theorie nicht kennt, den Rechenstab verwenden kann, falls er sich nur die vier gesperrt gedruckten Regeln A bis D merkt.

Ein Ballon habe das Volumen V ; bei normalem Luftdruck und einer Temperatur von 0° wiege 1 cbm Luft ϱ_1 kg und 1 cbm Gas ϱ_2 kg; dann ist die Tragkraft pro cbm des gefüllten Ballons nach bekannten Sätzen $(\varrho_1 - \varrho_2)$ kg; der Ballon vermag also in der Nähe des Erdbodens

$$G_A = V(\varrho_1 - \varrho_2) \text{ kg} = V\varrho_1(1 - s) \text{ kg}$$

zu tragen, wenn man das spezifische Gewicht des Gases, bezogen auf Luft mit s bezeichnet. Für die weiteren Betrachtungen unterscheiden wir nun die prallgefüllten und den schlaffen Ballon.

I. Praller Ballon.

a) Luft und Gas haben eine gemeinsame Temperatur von 0° .

Steigt der prallgefüllte Ballon von A nach B empor, so ändert sich der Luftdruck von b_A auf b_B . Nun sind nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz das Volumen einer Gasmasse umgekehrt, die Dichte und damit das Gewicht eines Kubikmeters direkt proportional dem Druck, so daß also in B das Gewicht eines Kubikmeters Luft nur noch $\varrho_1 \frac{b_B}{b_A}$ und eines Kubikmeters Gas $\varrho_2 \frac{b_B}{b_A}$ ist. In dieser Höhe trägt der Ballon also nur noch

$$G_B = V(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{b_B}{b_A} = V\varrho_1(1 - s) \frac{b_B}{b_A} \text{ kg.}$$

Emden setzt nun $T_0 = \varrho_1(1 - s)$ und $\frac{b_A}{b_B} = n$; n , das unter normalen Verhältnissen stets größer als Null ist, bezeichnet er als Höhenzahl. Er hat also die Gleichung

$$G_B = \frac{VT_0}{n}.$$

b) Luft und Gas haben die gemeinsame Temperatur t^0 .

Der Ausdehnungskoeffizient der Gase sei $\alpha = \frac{1}{273}$ ($= 4\text{‰}$). Das Gasvolumen nimmt mit steigender Temperatur zu, mit fallender ab, die Gasdichte und damit auch das Gasgewicht dagegen mit steigender Temperatur ab, mit fallender zu; und zwar wiegt das Kubikmeter Luft in erster Annäherung bei der Temperatur t $\rho'_1 = \rho_1(1 - \alpha t)$ kg und das Kubikmeter Gas $\rho'_2 = \rho_2(1 - \alpha t)$ kg. Die Tragkraft des Ballons ist infolgedessen

$$\begin{aligned} G_t &= \frac{V b_B}{b_A} (\rho'_1 - \rho'_2) \\ &= \frac{V b_B}{b_A} \rho_1 (1 - \alpha t) (1 - s) \end{aligned}$$

oder

$$(I) \quad G_t = \frac{V}{n} T_0 (1 - \alpha t).$$

Infolge höherer Temperatur nimmt also das Gewicht des Gases und der verdrängten Luft ab; da aber der Gewichtsverlust der letzteren stärker ist, so nimmt die Tragfähigkeit des Ballons ab; umgekehrt ist es bei niedriger Temperatur.

c) Die Gastemperatur weicht um Δt von der Lufttemperatur ab.

Dann ändert sich die Dichte des Gases weiter. Während das Gewicht ρ'_1 des Kubikmeters der verdrängten Luft dasselbe wie im Falle I, b) ist, wird das des Gases

$$\rho'_2 (1 - \alpha \Delta t) \text{ kg.}$$

Führt man das in die Gleichung I, b) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} G_{\Delta t} &= \frac{V b_B}{b_A} (\rho'_1 - \rho'_2 (1 - \alpha \Delta t)) \\ &= \frac{V}{n} \rho_1 (1 - \alpha t) (1 - s + \alpha s \Delta t) \\ &= \frac{V}{n} \rho_1 (1 - s) (1 - \alpha t) \left(1 + \frac{\alpha s}{1 - s} \Delta t \right). \end{aligned}$$

Also ist

$$(II) \quad G_{\Delta t} = G_t \left(1 + \frac{\alpha s}{1 - s} \Delta t \right).$$

Steigt die Temperatur des Gases gegen die der umgebenden Luft, so nimmt infolge Abnahme des Gasgewichtes die Tragfähigkeit des Ballons zu; umgekehrt ist es bei Temperaturabnahme.

II. Schlaffer Ballon.

a) Gas und Luft haben dieselbe Temperatur wie bei Erreichung der Prallhöhe.

Der schlaffe Ballon ist ein Ballon konstanten Gasgewichtes; denn hier vermag das Gas sich auszudehnen, ohne zu entweichen. Hat der Ballon die Höhe B erreicht und befindet er sich jetzt an irgendeiner Stelle C , die niedriger liegt als B , so hat das eingeschlossene Gas infolge des größeren Luftdruckes b_C nur noch das Volumen $V \frac{b_B}{b_C}$. Bezeichnet man die Gasdichte in der Höhe 0 bei derselben Temperatur, die das Gas in der Prallhöhe hat mit $\bar{\rho}_2$ und die Luftdichte in der Höhe 0 bei derselben Temperatur, die in der Prallhöhe herrscht, mit $\bar{\rho}_1$, so ist die Luft- resp. Gasdichte an der Stelle C $\bar{\rho}_1 \frac{b_C}{b_A}$ resp. $\bar{\rho}_2 \frac{b_C}{b_A}$. Der Ballon trägt also an der Stelle C

$$G_p = V \frac{b_B}{b_A} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) \text{ kg.}$$

Das ist aber dasselbe, was er in der Prallhöhe trug. Emden führt dafür ein

$$G_p = \frac{V T_0}{n'}.$$

Es ist zu beachten, daß in diesem n' die Temperatur des Gases und der Luft bei Erreichung der Prallhöhe enthalten sind; in welcher Weise das der Fall ist, kann man leicht durch Vergleichung der beiden letzten Gleichungen finden.

b) Gas und Luft ändern gemeinsam ihre Temperatur um t .

Ändern sich Luft- und Gastemperatur beide um t , so wird das Gasvolumen und damit auch das Volumen der verdrängten Luft $V(1 + at) \frac{b_B}{b_C}$, da aber die Luftdichte $\frac{b_C}{b_A} \cdot \frac{\bar{\rho}_1}{1 + at}$ wird, so bleibt das Gewicht der verdrängten Luftmenge, das gleich dem Produkt aus Dichte und Volumen ist, unverändert, ebenso wie das Gasgewicht. Also trägt der Ballon unterhalb der Prallhöhe, wenn sich die Temperatur von Gas und Luft um denselben Betrag ändert

$$G_p = \frac{V T_0}{n'_1} \text{ kg,}$$

d. h. dasselbe wie in der Prallhöhe. Die neue Prallhöhe ändert sich infolge der Temperaturänderung etwas; denn die neue Höhenzahl n'_1 hängt

mit der alten n' durch die Gleichung $\frac{1}{n'}(1+at) = \frac{1}{n_1}$ zusammen. Für positive t wird $n' > n_1$ für negative $n' < n_1$, so daß bei Temperaturzunahme die neue Prallhöhe niedriger, bei Abnahme höher liegt.

c) Die Differenz zwischen Gas- und Lufttemperatur ändert sich um Δt .

Bei allen Temperaturänderungen bleibt das Gasgewicht ungeändert, ändert sich die Differenz zwischen Gas- und Lufttemperatur um Δt , so wird das Volumen V' der verdrängten Luft zu $V'(1+a\Delta t)$, während ihre Dichte sich nicht ändert. Man hat also

$$G_{\Delta t} = V'(1+a\Delta t)\bar{\rho}'_1 - V'\bar{\rho}'_2,$$

woraus sich durch ähnliche Umformung, wie sie in I, c angewandt wurde, ergibt

$$(III) \quad G_{\Delta t} = \frac{VT_0}{n} \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t\right) = G_p \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t\right).$$

Bei wärmer werdendem Gas nimmt also die Tragfähigkeit des Ballons zu, die Prallhöhe dagegen ab, wie man leicht einsieht. Der Ballon steigt also bis zur Prallhöhe; da dort aber das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist, steigt er weiter nach dem Gesetz I, c. Kühlt sich das Gas dagegen ab, so sinkt der Ballon.

Wir haben also die drei Gleichungen I—III durch unseren Rechenstab darzustellen. Ich stelle dieselben noch einmal zusammen und führe, da ich zunächst den Leuchtgasballon betrachten will, eine mittlere Tragfähigkeit $T_m = 0,7$ kg ein. Die Gleichungen werden dann

$$(I) \quad G_t = \frac{V}{n} T_m \cdot \frac{T_0}{T_m} (1-at)$$

$$(II) \quad G_{\Delta t} = G_t \left(1 + \frac{as}{1-s} \Delta t\right)$$

$$(III) \quad G_{\Delta t} = G_p \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t\right).$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung I: $\frac{T_0}{T_m}(1-at)$ können wir als nachträglich anzubringende Korrektur auffassen, ebenso wie $\left(1 + \frac{as}{1-s} \Delta t\right)$ in Gleichung II und $\left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t\right)$ solche Korrekturen in III sind. Es handelt sich also zunächst um Darstellung der Gleichung

$$G = \frac{V}{n} T_m.$$

Logarithmiert, gibt das

$$\log G = \log V - \log n + \log T_m$$

und wenn man beachtet, daß für zwei verschiedene Punkte mit großer Annäherung

$$n = \frac{b_A}{b_B} = e^{\frac{h_b - h_a}{7991}}$$

ist, und daß T_m konstant ist, so kann man schreiben

$$\log G = \log V - \frac{h_b}{18400} + K,$$

das ist aber eine Gleichung, die sich durch einen gewöhnlichen Rechenschieber darstellen läßt. Auf der oberen Skala unseres Stabes ist V von rechts nach links logarithmisch von 500 bis 2500 cbm aufgetragen, auf der unteren, die fest mit der oberen verbunden ist, ebenfalls logarithmisch von rechts nach links G von 350 kg bis 1750 kg. Auf dem Schieber (wenn man von dem mittleren Stück absieht) steht oben und unten eine Skala für H in gewöhnlichem Maßstabe. Steigt der Ballon von 0 m Höhe auf, so verfährt man folgendermaßen:

A) Man stellt den Teilstrich 0 der oberen Schieberskala auf den Wert V der oberen festen Skala, der dem Ballonvolumen entspricht. Dann stehen auf den unteren Skalen den Werten von H die Werte von G gegenüber, die vom Ballon bei 0° und bei 0,7 kg Tragkraft pro Kubikmeter Gas in der Höhe H getragen werden können (In G ist das Gewicht des Ballons usw. eingeschlossen.)

Nun sind noch die Korrekturen wegen anderer Temperatur und Tragkraft anzubringen. Dem Korrektionsgliede der Gleichung I entspricht die gitterförmige Figur I der zweiten Zunge. Es ist das eine binäre Skala.¹⁾ Quer zur Richtung des Rechensstabes ist als Ordinate die Tragfähigkeit des Gases in beliebigem Maßstabe abgetragen. Als Abszisse dazu ist

$$\log T_0(1 - at)$$

auf den parallelen $T_0 = \text{konst.}$ — die positive Richtung geht von links nach rechts — aufgetragen. Der Übersichtlichkeit wegen sind dann die Punkte mit gleichem t miteinander verbunden. Durch die Schnittpunkte der der Normaltragfähigkeit $T_m = 0,70$ und der $t = 0^\circ$ entsprechenden Linien ist eine Gerade quer zum Rechenschieber der bequemeren Einstellung wegen gezogen.

Genau so sind die Skalen II und III angefertigt. Als Abszisse ist hier in

II
$$\log \left(1 + \frac{as}{1-s} \Delta t \right)$$

und in III
$$\log T_0 \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t \right)^2$$

1) d'Ocagne: Traité de Nomographie. Paris 1899.

2) In der Skala III ist $\log T_0 \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t \right)$ aufgetragen und nicht $\log \left(1 + \frac{a}{1-s} \Delta t \right)$, weil sich so die Prallhöhe eines nicht bis zur Prallheit gefüllten Ballons besser bestimmen läßt, falls die Tragfähigkeit des Gases von 0,7 kg abweicht.

aufgetragen. Diese drei binären Skalen sind auf einer zweiten Zunge angebracht, die innerhalb der ersten verschoben werden kann.

Um die Korrektur an der oben beschriebenen Einstellung der ersten Zunge anzubringen, stellen wir uns zunächst einen Läufer her. Wir nehmen einen Papierstreifen, legen ihn über den Rechenstab und kleben ihn auf der Rückseite so zusammen, daß er sich willig so fortbewegen läßt, daß der Rand des Streifens stets senkrecht zum Rechenstabe ist.

B) Will man die Normalhöhe des prallen Ballons wegen von 0° abweichender Temperatur und von 0,7 kg abweichender Tragfähigkeit korrigieren, so verschiebt man die zweite Zunge so in der ersten, daß die quer durch die Skala I gehende Gerade mit einem passenden Teilstrich (am besten 0) der Höhenskala zusammenfällt und stellt auch eine Kante des Läufers auf diesen Teilstrich ein. Dort wird der Läufer festgehalten und die erste mit der darin feststehenden zweiten Zunge so verschoben, bis der dem T_0 und t° entsprechende Punkt auf der Kante des Läufers liegt, die erst mit der Querlinie zusammenfiel. Auf der unteren Skala stehen sich dann entsprechende Werte der Höhe H und der Belastung G gegenüber.

C) Mit Hilfe der binären Skala II korrigiert man den so gefundenen Wert genau so wie das in B für Skala I angegeben ist wegen der Abweichung der Gas- gegen die Lufttemperatur beim *prallen* Ballon.

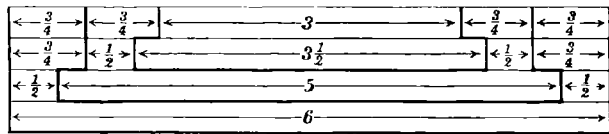
D) Skala III gilt für den *schlaffen* Ballon. Nach den Regeln A, B, C wird die erste Zunge für die Prallhöhe eingestellt. Abweichungen von der Temperaturdifferenz, die zwischen Gas und Luft bei Erreichung der Prallhöhe bestand, werden wie das in B für Skala I beschrieben mittels der Skala III korrigiert. Nur geht man dabei nicht von dem Punkte $T_m = 0,7 \text{ } \Delta t = 0^\circ$ aus, sondern am besten von dem Punkte, der dem T_0 und dem Δt der Prallhöhe entspricht.

Da der Querstrich der binären Skalen auf einem beliebigen Punkt der Höhenskala eingestellt sein kann, so hätte man an und für sich die zweite Zunge fest mit der ersten verbinden können, doch ist das nicht ratsam, weil in vielen Fällen der Querstrich über den Rechenschieber hinausfällt und dann die Läuferkante nicht auf ihn eingestellt werden kann. Es würde trotzdem möglich sein, sich ohne die zweite Zunge zu behelfen, doch ist das unbequem.

Die am oberen Rande der zweiten Zunge angebrachte Skala gilt für reinen Wasserstoff. Hier sind im Falle I und III natürlich wegen

der vollständig von 0,7 abweichenden Tragkraft stets sehr große Korrekturen anzubringen. Damit bei III die Skala sich noch auf der Zunge anbringen ließ, ist die Quergerade, die der Tragfähigkeit 0,7 kg entspricht, nach links verschoben und mit Q bezeichnet. Die der Skala II entsprechende Korrektur ist bei Wasserstoff außerordentlich klein, deswegen sind nur die Punkte -50^0 , 0^0 und $+50^0$ hier angegeben.

Nun noch kurz, wie man den Rechenstab anfertigt. Jeder Buchbinder wird für wenig Geld einen solchen Stab mit zwei ineinanderlaufenden Zungen herstellen. Er muß dazu vier Schichten Karton übereinanderkleben. In welcher Weise diese in Längsstreifen zerschnitten werden, zeigt die neben-



stehende Figur, in der die Trennungsflächen zwischen dem Stabe, der ersten und zweiten Zunge stärker ausgezogen sind. Die Länge der Streifen muß etwa 28 bis 30 cm betragen, während die Breite in der Figur in Zentimetern angegeben ist. Auf das obere Blatt des Kartons wird dann die in fünf entsprechende Längsstreifen zerschnittene Figur I aufgeklebt. Dabei ist darauf zu achten, daß auf dem Stabe die Teilstriche $G = 350$ kg und $V = 500$ cbm, $G = 1750$ kg und $V = 2500$ cbm einander genau gegenüberstehen. Dasselbe gilt für die erste Zunge für die mit gleichen Ziffern bezeichneten Teilstriche der Höhenskala. Schließlich knickt man über dem Stab einen geraden Streifen Papier und klebt ihn hinten zusammen. Dieser dient wie oben erwähnt als Läufer.

Im allgemeinen wird man ja nicht alle Größen genau kennen und wird daher den Rechenschieber nicht exakt einstellen können. Insbesondere wird man die Größe At , falls nicht ein Gasthermometer vorhanden ist, nur schätzungsweise angeben können. Umgekehrt wird man aber, wenn man die anderen Größen ziemlich genau kennt, angenähert die Größe At feststellen können, ohne irgendwelche experimentelle Vorrichtung. Freilich so genau wie die direkten Messungen, z. B. von Bassus und Schmaus¹⁾ dürfte das nicht werden, da man einmal den abgegebenen Ballast und die Belastung durch Regen nicht genau wird messen können, und da andererseits während der Fahrt die Tragfähig-

1) Bassus und Schmaus: Zur Gastemperatur des Freiballons. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1911 S. 216ff. Leider ist in der Arbeit weder Volumen der Ballone noch getragenes Gewicht angegeben; würde außerdem noch Zeit und Menge des ausgeworfenen Balastes angegeben sein, so ließe sich vielleicht etwas über die Abnahme der Tragfähigkeit des Gases mit der Fahrt sagen.

keit des Gases sich vermindern wird.¹⁾ Doch dürften, da erst wenige exakte Messungen vorliegen, selbst derartige Messungen einigen Wert haben.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man für Ballone jeden Volumens, auch für Lenkballone beliebigen Volumens, solche Rechenstäbe leicht herstellen kann.

Charlottenburg, im November 1911.

Ein Beitrag zur Theorie der Festigkeit von Zughaken.

VON DR. PAUL FILLUNGER in Wien.

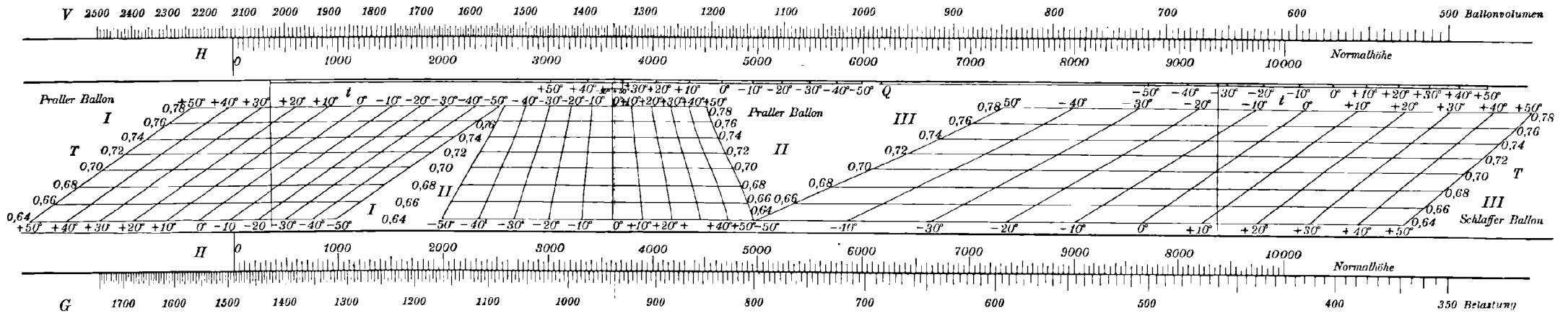
Die Berechnung von Zughaken erfolgt heute zumeist mittels der Grashof-Bachschen Formel für gekrümmte Stäbe. Ihre Anwendung ist jedoch nur in solchen Fällen als gerechtfertigt anzusehen, wo die untersuchte Stelle des Hakens genau genug als Teil eines Drehungskörpers betrachtet werden kann. Dieser Bedingung entsprechen Kranhaken gewöhnlich im sogenannten „Hauptquerschnitt“ ziemlich gut; hingegen weist der Zughaken der Eisenbahnen, welcher als Muster einer richtigen, d. h. im Materialaufwand sparsamen und doch möglichst festen und gedrängten Hakenform gelten kann, an allen Stellen so starke Abweichungen von einem Drehungskörper auf, daß die Benützung der Formeln für gekrümmte Stäbe geradezu unmöglich wird.

Bemerkenswerterweise ist die Berechnung der Festigkeit von Eisenbahnzughaken nach den einfachen Methoden, welche für „gerade Stäbe“ gelten, von verhältnismäßig gutem Erfolg begleitet.²⁾ Wenn aber eine Theorie, die an sich vollkommener ist als eine andere, indem die letztere als ein Sonderfall in der ersteren enthalten ist (und diese Beziehung besteht zwischen der Biegung des gekrümmten und des geraden Stabes), von dieser aus dem Felde geschlagen wird, so ist das nur ein Beweis dafür, daß sie für den Anwendungsfall, bei welchem dies geschieht, eben noch nicht vollkommen genug ist. Betreffend die Berechnung dieser Haken besteht die Unzulänglichkeit der Grashof-Bachschen Formel

1) Emden: Beitrag zur Theorie des offengehaltenen Füllansatzes. Deutsche Zeitschrift für Luftschiffahrt 1911 Nr. 18. — Poeschel: Der offengehaltene Füllansatz. Deutsche Zeitschrift für Luftschiffahrt 1911 Nr. 19

2) A. Föppl, Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München 1898, Heft 26. Ferner: Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen, Bericht ü. d. Verh. d. Ausschusses f. techn. Angeleg., betreffend d. Prüfung d. Frage e. allg. Verstärkg. d. Zugvorrichtungen, Berlin 1898.

Willers, Ein Rechenstab für Ballonführer.



darin, daß sie zwar die Krümmung der Fasern, nicht aber die Verschiedenheit der aufeinander folgenden Querschnittsflächen zu berücksichtigen vermag.

Im folgenden sei ein Versuch dargestellt, die Spannungsverteilung in einem Körper zu finden, welcher beide genannten Eigenschaften, also sowohl die Krümmung der Fasern als auch die Verschiedenheit der Querschnitte aufweist und dessen große Anpassungsfähigkeit an beide Erscheinungen ihn als geeignet erkennen läßt, der Hakenberechnung als Grundlage zu dienen. In mechanischer Beziehung ist dieses Problem als gelöst zu bezeichnen. Wenn Verfasser trotzdem nicht in der Lage ist, unmittelbar anwendbare Formeln für die Spannungen aufzustellen, liegen die Gründe für diese Unvollkommenheit, wie gezeigt werden wird, lediglich in rein mathematischen Aufgaben, deren Überwindung möglicherweise noch gelingen kann.

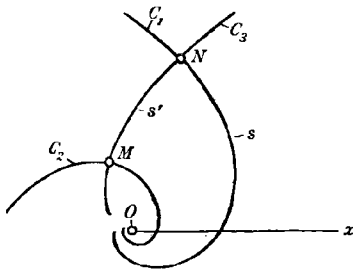
Zugleich bildet diese Arbeit eine Fortsetzung der vom Verfasser in dieser Zeitschrift schon mehrfach besprochenen *perspektivischen Spannungszustände*.¹⁾

Denkt man sich eine unendlich große Platte von einem Punkte ihrer Oberfläche aus nach zwei *kongruenten logarithmischen Spiralen* zerschnitten, so bildet der herausgeschnittene Teil einen Körper, der geeignet ist, Haken von verschiedenster Form stückweise zu vertreten, wie man sofort erkennt, wenn man bedenkt, daß der Winkel zwischen Tangente und Leitstrahl beliebig gewählt werden kann. Der Kraftangriff sei, wie beim „keilförmigen“ Körper, wieder durch ein „Kraftband“ gegeben, d. h. durch eine gleichmäßig verteilte Kraft längs einer senkrecht zur Plattenebene und zwischen ihren beiden Oberflächen liegenden Strecke. Die Richtung des Kraftbandes muß nicht durch die Schneide, welche im Ursprung der logarithmischen Spiralen entsteht, hindurchgehen, es sei aber dieselbe Schneide der Ort, an welchem das *äußere Kraftband* unmittelbar seine Wirkung auf den Körper äußert, während alle übrigen Massenpunkte des hakenförmigen Körpers nur durch *innere Kräfte* getroffen werden. An einem unendlich fernen Querschnitt sei der Körper festgehalten.

Wie beim keilförmigen Körper zerfällt auch hier die gestellte Aufgabe, welche als ein ebenes Problem aufgefaßt werden kann, in zwei Sonderfälle, die getrennt untersucht werden müssen; nach Hinzufügung von zwei entgegengesetzt gleichen Kraftbändern parallel zu dem äußeren,

1) Siehe Bd. 59 Heft 1 dieser Zeitschrift: „Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern . . .“; Bd. 59 Heft 4 „Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel . . .“; Bd. 60 Heft 3 „Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers“.

gegebenen, deren Richtung durch die Schneide hindurchgeht, liegt Beanspruchung durch eine Einzelkraft und durch ein Kräftepaar vor.



Ebenso ist ein besonderes, krummliniges Koordinatensystem, welches wir *logarithmische Polarkoordinaten* nennen wollen, für diesen Fall eines perspektivischen Spannungszustandes erforderlich.

Ist Ox die Polarachse eines gewöhnlichen Polarkoordinatensystemes (r, φ) , M ein Punkt mit den Koordinaten r und φ und sind C_1, C_2 zwei kongruente logarithmische Spiralen, so kann deren Gleichung geschrieben werden

$$(C_1) \quad r = a e^{ctg \theta \varphi}$$

$$(C_2) \quad r = a' e^{ctg \theta \varphi},$$

wenn man den Winkel der Tangente mit dem Leitstrahl mit θ bezeichnet. Ist θ konstant und a variabel, so definiert die erste Gleichung eine einfach unendliche Schar von Kurven, welche die Ebene gleichmäßig bedecken. Die orthogonalen Trajektorien dieser Schar, deren eine durch C_3 in der Figur bezeichnet ist, bilden gleichfalls kongruente logarithmische Spiralen, und zwar ist ihre Gleichung, wenn b den variablen Parameter bedeutet

$$(C_3) \quad r = b e^{-ctg \theta \varphi}.$$

Eine von den ersten Kurven der ersten Schar, z. B. C_1 , sei durch ein bestimmtes, gegebenes a hervorgehoben. Wir wollen sie „Polarspirale“ nennen. Folgt man vom Punkte $M_{(r, \varphi)}$ aus jener Trajektorie C_3 , auf welchen M liegt, bis man im Punkte N die Polarspirale erreicht, so legt man dabei die Bogenstrecke s' zurück; und folgt man hierauf der Polarspirale bis zum Ursprung O , so ist die Weglänge $s = \frac{r_1}{\cos \theta}$, wenn r_1 die Entfernung des Punktes N vom Ursprung bedeutet.

Als *logarithmische Polarkoordinaten* des Punktes M können nun die Bogenlänge s und der Quotient $\alpha = \frac{s'}{s}$ aufgefaßt werden. Der Bogen s' wird in praktischen Fällen immer leicht mit genügender Genauigkeit zu messen sein, während s , trotz der unendlich vielen Windungen, welche die logarithmische Spirale um den Ursprung legt, aus dem Ab-

stand r_1 des Punktes N vom Ursprung und aus dem Winkel Θ un-
schwer berechnet werden kann.

Für Transformationen aus gewöhnlichen in logarithmische Polar-
koordinaten dienen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} r = s (\cos \Theta - \alpha \sin \Theta) \\ \varphi = \operatorname{tg} \Theta \ln s - \operatorname{tg} \Theta \ln a + \frac{1}{\sin \Theta \cos \Theta} \ln \cos \Theta - \operatorname{ctg} \Theta \ln (\cos \Theta - \alpha \sin \Theta). \end{cases}$$

Ist $\Theta = 0$, so gehen die logarithmischen Polarkoordinaten in ge-
wöhnliche über, und ist $\Theta = \frac{\pi}{2}$, so entstehen aus beiden Kurven-
scharen zwar auch konzentrische Kreise und Strahlen aus dem Mittel-
punkt, r und φ nehmen aber nach Gl. (1) unbestimmte Formen an.

In logarithmischen Polarkoordinaten bedeuten $s = \text{constant}$ die
Gleichung aller Trajektorien, $\alpha = \text{constant}$ die Gleichung aller Spiralen
der ersten Schar und $\alpha = 0$ die Polarspirale selbst. s kann alle Werte
von 0 bis $+\infty$ annehmen; ist α positiv, so liegt der Punkt M auf
der betreffenden Trajektorie zwischen N und dem Ursprung, ist α nega-
tiv, so ist der Bogen s' von N aus nach außen aufzutragen. Der Winkel
 φ' , welchen die Leitstrahlen zweier Punkte $M_{(s,\alpha)}$ und $N_{(s,0)}$ mitein-
ander einschließen, ist

$$(2) \quad \varphi' = \operatorname{ctg} \Theta \ln \frac{1}{1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta},$$

ist also unabhängig von der Koordinate s derjenigen Trajektorie, auf
welcher beide Punkte liegen.

Die drei Spannungen, welche bei ebenen Problemen auftreten, wer-
den hier mit σ_s , σ_α und τ' bezeichnet, und zwar bedeutet σ_s eine Nor-
malspannung in der Richtung s , d. h. in der Richtung der Tangenten
an die Kurven der ersten Schar (σ_s positiv als Druckspannung), σ_α eine
Normalspannung (gleichfalls positiv als Druckspannung) in der Rich-
tung α der Tangenten an die Trajektorien, und τ' eine Schubspannung
in beiden Richtungen, positiv, wenn sie auf einem dem Ursprung zu-
gewandten Flächenelement in der Richtung der wachsenden Koordinate
 α tätig ist.

Zwischen diesen Spannungen und jenen für gewöhnliche Polar-
koordinaten bestehen die Beziehungen

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_s \cos^2 \Theta + \sigma_\alpha \sin^2 \Theta - 2\tau' \sin \Theta \cos \Theta \\ \sigma_t = \sigma_s \sin^2 \Theta + \sigma_\alpha \cos^2 \Theta + 2\tau' \sin \Theta \cos \Theta \\ \tau = (\sigma_s - \sigma_\alpha) \sin \Theta \cos \Theta + \tau' (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta). \end{cases}$$

Transformiert man mit Hilfe der Gl. (1) und (3) die *Airysche Spannungsfunktion* in das System der unabhängigen Variablen s und α , so erhält man für jeden Punkt der Ebene die Bedingungsgleichungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{s(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \sigma_\alpha = \frac{1}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{\operatorname{tg} \Theta}{s^2(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ \tau' = \frac{-1}{s(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \Theta}{s(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ \left[\frac{1}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{s(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\operatorname{tg} \Theta}{s^2(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] (\sigma_s + \sigma_\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Die Anwendung eines *perspektivischen Spannungszustandes* gestattet, in diesen Gleichungen die Differentiationen nach s auszuführen, so daß gewöhnliche Differentialgleichungen entstehen.

Wirkt nur eine Einzelkraft auf den hakenförmigen Körper ein, deren Richtung durch die Schneide im Ursprung der logarithmischen Spiralen geht, so entsteht auf einem Flächenelement, welches parallel zur Schneide liegt und dessen Mittelpunkt die Koordinaten s , α hat, eine resultierende Spannung σ , welche bei größter Allgemeinheit aufgefaßt werden kann als

$$\sigma = f(P, s, \alpha, \vartheta_1, \vartheta_2),$$

wobei P die auf die Längeneinheit der Schneide reduzierte äußere Kraft, ϑ_1 den Winkel zwischen Flächenelement und Tangente an die logarithmische Spirale im Punkte s , α und ϑ_2 den Winkel zwischen äußerer Krafttrichtung und Leitstrahl zum Punkte s , α bedeutet. Das Differential dieser Spannung lautet:

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial P} dP + \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta_2} d\vartheta_2.$$

Ein sicher *zusammengehöriges* System von Differentialen wird gefunden, wenn man alle Längengrößen im Verhältnisse $1 : 1 + \frac{ds}{s}$ ändert. Dann ist

$$ds = s \left(1 + \frac{ds}{s} \right) - s = ds$$

$$dP = P - P = 0,$$

weil die auf die Längeneinheit bezogene Kraft P die Dimension einer Länge nicht enthält. $\left(\left[\frac{g \cdot \text{cm}}{\text{sek.}^2} \right] : [\text{cm}] = \left[\frac{g}{\text{sek.}^2} \right] \right)$.

$$d\sigma = \sigma \left(\frac{s}{s + ds} \right) - \sigma = -\sigma \frac{ds}{s}$$

$$d\alpha = d\vartheta_1 = d\vartheta_2 = 0,$$

da α als Quotient zweier Längen ebenso wie die Winkel ϑ_1 , ϑ_2 von der Längeneinheit unabhängig sind.

Setzt man diese Werte in obige Gleichung ein, so erhält man, genau wie bei den keilförmigen Körpern

$$\sigma + s \frac{\partial \sigma}{\partial s} = 0$$

oder

$$(5) \quad \sigma = \frac{C}{s}.$$

Demnach wäre die Spannung σ indirekt proportional dem Bogen s , wenn man nur Flächenelemente miteinander vergleicht, welche auf derselben Kurve der ersten Schar und unter gleichem Winkel ϑ_1 zu ihr liegen. Sieht man aber genauer zu, so bemerkt man, daß, weil auch $d\vartheta_2 = 0$ ist, die äußere Kraft sich beim Übergange von einem Flächenelement zu einem anderen um den gleichen Winkel drehen muß wie der Leitstrahl, wenn Gl. (5) gelten soll. Unter dieser Voraussetzung kann Gl. (5) aber auch für jede Komponente von σ angeschrieben werden, daher ist

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma_s = \frac{C_1}{s} = \frac{PC'_1}{s} \\ \sigma_\alpha = \frac{C_2}{s} = \frac{PC'_2}{s} \\ \tau' = \frac{C_3}{s} = \frac{PC'_3}{s}, \end{cases}$$

wenn C'_1, C'_2, C'_3 unbekannte Funktionen von den Variablen α und ϑ_1 bedeuten.

Um von diesen Gleichungen, welche für alle Punkte derselben Kurve der ersten Schar, aber zu verschiedenen Zeiten gelten würden, zu solchen Gleichungen zu gelangen, die zur selben Zeit, also für eine feste Richtung ψ der äußeren Kraft gültig sind, denken wir uns die Kraft P in zwei Komponenten P_s und P_α zerlegt, wobei P_s und P_α beziehungsweise parallel sind zu den Tangenten an die Polarspirale und die Trajektorie in jenem Punkte N (siehe die Figur), in welchem die durch M gelegte Trajektorie die Polarspirale schneidet. Es ist

$$(7) \quad \begin{cases} P_s = P \cos \left(\psi - \Theta - \operatorname{tg} \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) \\ P_\alpha = P \sin \left(\psi - \Theta - \operatorname{tg} \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right). \end{cases}$$

Diese beiden Komponenten drehen sich um den gleichen Winkel wie die Leitstrahlen zum Punkte M , wenn man M auf der Kurve der ersten Schar beliebig verschiebt, da nach Gl. (2) der Winkel φ' von s unabhängig ist. Jede von diesen zwei Komponenten erzeugt aber für sich allein bei konstantem Wert von ϑ_1 auf dem Flächenelement sowohl eine Normalspannung, als auch eine Schubspannung, welche den Gleichungen (6)

folgen müssen, wenn man für P jetzt P_s , beziehungsweise P_α setzt. Die Summe aus beiden Normalspannungen und aus beiden Schubspannungen bildet die *totale Normalspannung* und *totale Schubspannung* auf dem Flächenelement. Bezeichnet man die unbekanntenen Funktionen von α für die nunmehr für alle Punkte derselben Kurve der ersten Schar festgelegte Bedeutung des Winkels $\vartheta_2 = \Theta - \varphi'$ bzw. $\vartheta_2 = \Theta - \varphi' + \frac{\pi}{2}$ mit $K_1, K_2 \dots K_6$, so gelangt man zu folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{P_s K_1}{s} + \frac{P_\alpha K_2}{s} = \frac{P}{s} \left[K_1 \cos \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) + K_2 \sin \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) \right] \\ \sigma_\alpha &= \frac{P_s K_3}{s} + \frac{P_\alpha K_4}{s} = \frac{P}{s} \left[K_3 \cos \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) + K_4 \sin \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) \right] \\ \tau' &= \frac{P_s K_5}{s} + \frac{P_\alpha K_6}{s} = \frac{P}{s} \left[K_5 \cos \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) + K_6 \sin \left(\psi - \Theta - \text{tg } \Theta \ln \frac{s \cos \Theta}{a} \right) \right]\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich, alle von s unabhängigen Größen in diesen Gleichungen zusammenzufassen unter den Buchstaben $L_1, L_2, \dots L_6$, und ihre Beziehungen zu den Größen P, ψ, Θ und a einer späteren Bestimmung zu überlassen. Dann ist

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_s = \frac{1}{s} [L_1 \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + L_2 \sin(\text{tg } \Theta \ln s)] \\ \sigma_\alpha = \frac{1}{s} [L_3 \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + L_4 \sin(\text{tg } \Theta \ln s)] \\ \tau' = \frac{1}{s} [L_5 \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + L_6 \sin(\text{tg } \Theta \ln s)]. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) stellen die Abhängigkeit aller Spannungen von der Koordinate s erschöpfend dar. Ist P, ψ, Θ und a gegeben, so bedeuten $L_1 \dots L_6$ Funktionen von α allein.

Wählt man nun die Airysche Spannungsfunktion in der Form

$$(9) \quad F = s[f_1 \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + f_2 \sin(\text{tg } \Theta \ln s)],$$

indem man voraussetzt, daß f_1 und f_2 zwei verschiedene unbekanntene Funktionen von α allein vorstellen, so sind nach Gl. (4):

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_s = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{d^2 f_1}{d\alpha^2} + \frac{f_1 + \text{tg } \Theta f_2}{(1 - \alpha \text{tg } \Theta)^2} \right) \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + \left(\frac{d^2 f_2}{d\alpha^2} - \frac{\text{tg } \Theta f_1 - f_2}{(1 - \alpha \text{tg } \Theta)^2} \right) \sin(\text{tg } \Theta \ln s) \right] \\ \sigma_\alpha = \frac{-\text{tg } \Theta}{s(1 - \alpha \text{tg } \Theta)} \left[\left(\frac{d f_1}{d\alpha} + \frac{\text{tg } \Theta f_1 - f_2}{1 - \alpha \text{tg } \Theta} \right) \cos(\text{tg } \Theta \ln s) + \left(\frac{d f_2}{d\alpha} + \frac{f_1 + \text{tg } \Theta f_2}{1 - \alpha \text{tg } \Theta} \right) \sin(\text{tg } \Theta \ln s) \right] \\ \tau' = \frac{-\text{tg } \Theta}{s(1 - \alpha \text{tg } \Theta)} \left[\left(\frac{d f_2}{d\alpha} + \frac{f_1 + \text{tg } \Theta f_2}{1 - \alpha \text{tg } \Theta} \right) \cos(\text{tg } \Theta \ln s) - \left(\frac{d f_1}{d\alpha} + \frac{\text{tg } \Theta f_1 - f_2}{1 - \alpha \text{tg } \Theta} \right) \sin(\text{tg } \Theta \ln s) \right]\end{cases}$$

Die Gleichungen (10) entsprechen aber vollkommen den in Gl. (8) aufgestellten Bedingungen. Daher ist die mit Gl. (9) getroffene Wahl für die Form von F als richtig anzusehen.

Zur Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 dient die letzte der Gleichungen (4). Sie lautet nunmehr

$$A_1 \cos(\operatorname{tg} \Theta \ln s) + A_2 \sin(\operatorname{tg} \Theta \ln s) = 0,$$

wenn

$$A_1 = \frac{d^4 f_1}{d\alpha^4} - \frac{2 \operatorname{tg} \Theta}{1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta} \frac{d^3 f_1}{d\alpha^3} + \frac{2 - 3 \operatorname{tg}^2 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{d^2 f_1}{d\alpha^2} + \frac{\operatorname{tg} \Theta (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \Theta)}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^3} \frac{d f_1}{d\alpha} + \frac{1 + 6 \operatorname{tg}^2 \Theta - 3 \operatorname{tg}^4 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^4} f_1$$

$$+ \frac{8 \operatorname{tg}^2 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^3} \frac{d f_2}{d\alpha} + \frac{8 \operatorname{tg}^3 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^4} f_2$$

$$A_2 = \frac{d^4 f_2}{d\alpha^4} - \frac{2 \operatorname{tg} \Theta}{1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta} \frac{d^3 f_2}{d\alpha^3} + \frac{2 - 3 \operatorname{tg}^2 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{d^2 f_2}{d\alpha^2} + \frac{\operatorname{tg} \Theta (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \Theta)}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^3} \frac{d f_2}{d\alpha} + \frac{1 + 6 \operatorname{tg}^2 \Theta - 3 \operatorname{tg}^4 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^4} f_2$$

$$- \frac{8 \operatorname{tg}^2 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^3} \frac{d f_1}{d\alpha} - \frac{8 \operatorname{tg}^3 \Theta}{(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^4} f_1.$$

Die obige Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn $A_1 = A_2 = 0$ ist. Damit gewinnt man zwei Differentialgleichungen, welche zur Bestimmung von f_1 und f_2 hinreichen.

Führt man an Stelle von α eine neue unabhängige Variable t durch die Beziehung

$$(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta) = e^t$$

ein, so nehmen die Gleichungen $A_1 = A_2 = 0$ die neue Form an

$$(11) \begin{cases} \frac{d^4 f_1}{dt^4} - 4 \frac{d^3 f_1}{dt^3} + \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta)}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \frac{d^2 f_1}{dt^2} - \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2 \Theta)}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \frac{d f_1}{dt} + \frac{1 + 6 \operatorname{tg}^2 \Theta - 3 \operatorname{tg}^4 \Theta}{\operatorname{tg}^4 \Theta} f_1 - \frac{8}{\operatorname{tg} \Theta} \left(\frac{d f_2}{dt} - f_2 \right) = 0 \\ \frac{d^4 f_2}{dt^4} - 4 \frac{d^3 f_2}{dt^3} + \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta)}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \frac{d^2 f_2}{dt^2} - \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2 \Theta)}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \frac{d f_2}{dt} + \frac{1 + 6 \operatorname{tg}^2 \Theta - 3 \operatorname{tg}^4 \Theta}{\operatorname{tg}^4 \Theta} f_2 + \frac{8}{\operatorname{tg} \Theta} \left(\frac{d f_1}{dt} - f_1 \right) = 0, \end{cases}$$

in welcher sie *konstante Koeffizienten* besitzen. Die Trennung der beiden Abhängigen f_1 und f_2 ist nun durchführbar und die Integration der Differentialgleichungen zurückgeführt auf die Bestimmung der Wurzeln der sog. charakteristischen Gleichung.¹⁾

1) Die Trennung der abhängigen Variablen f_1 und f_2 führt auf zwei bezüglich der Koeffizienten *völlig gleiche lineare Differentialgleichungen* von 14. Ordnung. Aber nicht die außergewöhnlich hohe Ordnungszahl dieser Gleichungen bildet das Hindernis für die Aufstellung unmittelbar anwendbarer Formeln. Es ist vielmehr nur ein verhältnismäßig kleiner Schritt erforderlich, um zu diesem Ziele zu gelangen. Zunächst führen nämlich beide Differentialgleichungen, da ihre (konstanten) Koeffizienten übereinstimmen, nur zu einer einzigen charakteristischen Gleichung 14. Grades, deren vierzehn Wurzeln die Lösung des ganzen Problems darstellen. Vier Wurzeln sind bekannt; es sind dies das *doppelt zählende* Wurzelpaar $x = 1 \pm \frac{i}{\operatorname{tg} \Theta}$ und sie entsprechen dem Sonderfall $\Theta = 0$, also dem „keilförmigen“ Körper. Dividiert man daher das Gleichungspolynom durch den Ausdruck $\left[(x-1)^2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \right]^2$, so reduziert sich die charakteristische Gleichung auf eine vom 10. Grad.

Die so erhaltene Gleichung 10. Grades trägt wieder alle Kennzeichen dafür,

Aber auch ohne Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 können aus dem Bau der Gl. (10) einige Schlüsse gezogen werden. So würde z. B. die Annahme, daß σ_α oder τ' *überall* verschwinde, unmittelbar dazu führen, daß entweder $\text{tg } \Theta = 0$ ist (dieser Fall entspräche dem „keilförmigen“ Körper) oder daß auch die beiden anderen Spannungen überall verschwinden, d. h. daß der Haken unbelastet ist. Daraus folgt, daß das Auftreten solcher „Querspannungen“ σ_α mit jeder Krümmung der Fasern verbunden ist.¹⁾ Man erkennt ferner aus den Gl. (10), daß die Querspannung σ_α im allgemeinen von gleicher Größenordnung wie die Schubspannung τ' ist.

Wirkt nur ein Kräftepaar vom Moment M auf den Haken in der Weise ein, daß alle Massenpunkte bis auf jene in der Schneide nur mittelbar durch innere Kräfte von den Wirkungen des Momentes getroffen werden, so ist, da ein Kräftepaar keine ausgezeichnete Richtung besitzt, die Entwicklung des perspektivischen Spannungszustandes vollkommen gleichartig mit jener des bezüglichen Sonderfalles beim keil-

daß sie nur *komplexe* Wurzeln besitzt, und daß der *reelle Teil* 1 ist. Dividiert man sie durch den Ausdruck $(x^2 - 2x + 1 + q)$, entsprechend komplexen Wurzelpaaren von der Form $x = 1 \pm \sqrt{q}$, wobei q eine *neue Unbekannte* vorstellt, so zeigt es sich, daß das mit x^1 verbundene Restglied = 0 ist, während das Restglied mit x^0 die Form

$$(a) \quad q^5 + D_4 q^4 + D_3 q^3 + D_2 q^2 + D_1 q + D_0$$

hat, worin die Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_4 &= 16 - \frac{6}{\text{tg}^2 \Theta} \\ D_3 &= 96 - \frac{56}{\text{tg}^2 \Theta} + \frac{13}{\text{tg}^4 \Theta} \\ D_2 &= 256 - \frac{224}{\text{tg}^2 \Theta} + \frac{40}{\text{tg}^4 \Theta} - \frac{12}{\text{tg}^6 \Theta} \\ D_1 &= 256 - \frac{640}{\text{tg}^2 \Theta} + \frac{80}{\text{tg}^4 \Theta} + \frac{16}{\text{tg}^6 \Theta} + \frac{4}{\text{tg}^8 \Theta} \\ D_0 &= -\frac{1024}{\text{tg}^2 \Theta} - \frac{512}{\text{tg}^4 \Theta} - \frac{64}{\text{tg}^6 \Theta} \end{aligned}$$

bedeuten.

Setzt man den Ausdruck (a) = Null, so stellt er eine Gleichung 5. Grades in q dar, deren Auflösung den Zugang zu allen Wurzeln der Gleichung 10. Grades und damit zu einer befriedigenden Lösung des ganzen Problems herstellen würde. *Mithin würde die Entdeckung einer einzigen Wurzel der Gleichung 5. Grades die allgemeine Lösung ermöglichen.*

1) Das Auftreten solcher Querspannungen σ_α wurde für gekrümmte Stäbe, d. i. für den Sonderfall $\Theta = \infty$, bereits von den Herren Pfeleiderer (Z. d. V. d. I. 1907), Prof. Föppl und Prandtl (siehe Föppl, Vorl. über techn. Mechanik Bd. V) festgestellt.

förmigen Körper. Sie braucht daher hier nicht wiederholt zu werden. Man findet, daß

$$(12) \quad \begin{cases} \sigma_s = \frac{C_1}{s^2} \\ \sigma_\alpha = \frac{C_2}{s^2} \\ \tau' = \frac{C_3}{s^2}, \end{cases}$$

wenn C_1, C_2, C_3 von s unabhängige Funktionen der Variablen α darstellen.

Diesen Bedingungsgleichungen wird entsprochen, wenn die Airy'sche Funktion unabhängig von s ist. Dann ist

$$(13) \quad \begin{cases} \sigma_s = \frac{1}{s^2} \frac{d^2 F'}{d\alpha^2} \\ \sigma_\alpha = \frac{-\operatorname{tg} \Theta}{s^2(1-\alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{dF}{d\alpha} \\ \tau' = \frac{1}{s^2(1-\alpha \operatorname{tg} \Theta)} \frac{dF}{d\alpha}. \end{cases}$$

während aus der letzten Gl. (4) zur Bestimmung von F' folgt

$$\frac{d^4 F'}{d\alpha^4} - \frac{2 \operatorname{tg} \Theta}{1-\alpha \operatorname{tg} \Theta} \frac{d^3 F'}{d\alpha^3} - \frac{\operatorname{tg}^2 \Theta - 4}{(1-\alpha \operatorname{tg} \Theta)^2} \frac{d^2 F'}{d\alpha^2} - \frac{\operatorname{tg} \Theta (\operatorname{tg}^2 \Theta - 4)}{(1-\alpha \operatorname{tg} \Theta)^3} \frac{dF'}{d\alpha} = 0.$$

Zur Integration der Gleichung setze man $(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta) = e^t$, wodurch entsteht

$$\frac{d^4 F'}{dt^4} - 4 \frac{d^3 F'}{dt^3} + 4 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta}{\operatorname{tg}^2 \Theta} \frac{d^2 F'}{dt^2} = 0.$$

Die vier Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung sind $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = 2 \pm \frac{2i}{\operatorname{tg} \Theta}$, oder

$$F' = a + b \ln(1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2 + (1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta)^2 [c \cos(\operatorname{ctg} \Theta \ln\{1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta\}^2) + d \sin(\operatorname{ctg} \Theta \ln\{1 - \alpha \operatorname{tg} \Theta\}^2)].$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten a, b, c und d kann nun ohne besondere Schwierigkeiten durchgeführt werden. Da aber dieser Sonderfall hinter dem zuerst behandelten an praktischer Bedeutung weit zurücksteht, indem für Haken die Richtungslinie der äußeren Kraft stets nahe an jener Stelle liegt, welche als Ursprung der logarithmischen Spiralen in Betracht käme, weshalb das Moment M klein im Vergleiche mit der Einzelkraft P ausfiele, so mag jene Bestimmung hier unterbleiben.

Aus den Gleichungen (13) ist aber zu ersehen, daß die Querspannung σ_α und τ' sich bei verschiedenen Werten des Winkels Θ verschieden verhalten. Ist Θ klein, so ist σ_α kleiner als die Schubspan-

nung τ' und umgekehrt ist es bei großen Winkeln Θ . Die beiden Grenzfälle sind der keilförmige Körper und der gekrümmte Stab.

Eine bemerkenswerte Schlußfolgerung aus der Anwendung der logarithmischen Spiralen ergibt sich für solche Haken, bei welchen der Innenrand an der am meisten beanspruchten Stelle geradlinig ausgeführt wird, wie v. Bach empfiehlt und wie es bei Eisenbahnzughaken der Fall ist. *An diesen Stellen schließen sich nämlich nicht mehr zwei kongruente logarithmische Spiralen möglichst eng an die Randkurven an, sondern besser zwei gerade Linien.* Das führt zu der Anschauung, daß solche Stellen am genauesten berechnet werden können, wenn man sie als Teil eines *keilförmigen Körpers* betrachtet. Im größten Querschnitt sind außerdem die Randlinien zueinander parallel, d. h. der stellvertretende Keil geht hier in einen geraden Stab über. *Daraus folgt aber eine zwanglose Erklärung dafür, daß die Berechnung der Festigkeit dieses Teiles von Haken zu befriedigenden Ergebnissen führt, wenn man die einfachen Formeln für gerade Stäbe in Anwendung bringt.*

Nur wenn es gelingen sollte, die Gesetze der Spannungsverteilung einer neuen Grundform aufzudecken, deren Anpassungsfähigkeit noch größer ist als die der logarithmischen Spiralen, wird es möglich sein, einen theoretisch einwandfreieren Rechnungsweg einzuschlagen.

Es sei noch hinzugefügt, daß die Spannungsverteilung bei Belastung des hier untersuchten Hakens durch eine auf einer oder beiden Rückenflächen herrschende Spannung, welche proportional mit einer beliebigen Potenz von s ansteigt, auf ähnliche, leicht integrierbare Differentialgleichungen führen würde, wie der zweite in dieser Abhandlung untersuchte Sonderfall.

Studio sulla spinta delle terre.

Memoria di MICHELE GEBBIA a Palermo.

Prefazione.

Non vi è forse quistione di meccanica applicata, la cui storia mostri, come quella del problema della spinta delle terre, tante incertezze, tante oscillazioni del pensiero accompagnate da concezioni spesso vaghe, talvolta manifestamente erronee. Noi non possediamo ancora una teoria della spinta delle terre, che soddisfi tutte le esigenze di un pensiero rigoroso. Ma poiché non si ha da fare con un soggetto di pura speculazione, e la pratica esige una risposta almeno provvisoria ai suoi quesiti, è giuocoforza tenere il meglio dei risultati, anche imperfetti,

ai quali le precedenti induzioni hanno condotto, e coordinarli. Fra gli scopi, che nel presente studio mi prefiggo, vi è quello di offrire un saggio di una siffatta coordinazione.

Parve, or è molto tempo, che la teoria del così detto masso illimitato, che il Rankine per primo e poscia il Levy e il Crotti introdussero indipendentemente l'uno dall'altro, e alla quale in seguito il Mohr, il Weyrauch ed altri apportarono importanti contribuzioni¹⁾, dovesse, pel pregio di una più scientifica coordinazione d'idee, sostituirsi definitivamente all'antica teoria di Coulomb, la così detta teoria del prisma di massima spinta. Ma anche quella teoria non è immune da obbiezioni, e fino ad oggi illustri maestri della materia, come il Müller-Breslau e il Ceradini, opinano che la teoria di Coulomb non possa ancora abbandonarsi. Del resto è stato riconosciuto che, almeno nel caso più studiato che la sola resistenza sia l'attrito, le due teorie non sono essenzialmente distinte.

Il Müller-Breslau in una recente monografia²⁾ dimostra questa coincidenza delle due teorie, riducendo quella di Coulomb al suo concetto essenziale, che è quello di definire la cercata spinta del terrapieno contro il muro di sostegno come la minima compatibile con l'equilibrio della terra. Anzi egli eleva questo concetto ad un principio fondamentale, che chiama *principio di Coulomb*, dal quale si può derivare tanto la teoria del Coulomb stesso quanto quella del Rankine. Io, seguendo il suo esempio, mi servirò di questo principio, associandolo con l'ipotesi semplificatrice adottata dallo stesso Coulomb, che le superficie di possibile scivolamento siano piani passanti pel piede della parete. Aggiungo del mio una dimostrazione del principio fondata sul concetto che la spinta cercata non sia la reale, cioè quella che si esercita fra la terra e il muro quando entrambi stanno in equilibrio stabile, ma sia piuttosto il valore che, col criterio della massima economia, conviene adottare per esser sicuri che il muro non crolli; nella mia dimostrazione interviene quindi la resistenza del muro. In più modi si è tentato di giustificare il concetto che la spinta minima di Coulomb abbia un significato reale: o si è detto che essa diventerebbe tale se il muro

1) Rankine W. J. M. On the Stability of Loose Earth; Philosophical Transactions, 1856—57 — Levy. M. Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. Journal de math. de Liouville, 1873. — Crotti, F. Sulla spinta delle terre, osservazioni e studi. — Mohr, Beitrag zur Theorie des Erddrucks. Zeitschrift d. Arch. u. Ing. Vereins zu Hannover. 1871—72. — Weyrauch, J. Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen. Wien. 1881.

2) Erddruck auf Stützmauern. Stuttgart. Kröner. 1906.

stesse per crollare, e che a questa ipotesi bisogna appunto attenersi; oppure che la terra sciolta, che dopo l'erezione del muro viene ad esso addossata, e alla quale in ultimo è dovuta la spinta, pel modo stesso come viene riversata si mette in equilibrio limite; o infine che il muro sotto l'azione di questa terra riversata andrà gradatamente piegandosi in fuori per elasticità, e per conseguenza la terra si metterà in istato prossimo allo scivolamento. Nessuna di queste spiegazioni è, a parer mio e di altri, soddisfacente, e la stessa loro pluralità è una prova della debolezza di ciascuna; ma io non ne svolgerò qui le ragioni, perchè non mi propongo un lavoro critico.

Messa la quistione sotto il mio punto di vista, si scorgerà facilmente che nella teoria di Coulomb non resta che un solo punto logicamente debole: *si ragiona paragonando gli effetti di spinte, che abbiano tutte la stessa linea d'azione*. Ciò è tutt'altro che giustificato, e questo punto debole della teoria di Coulomb mi sembra irremovibile.

Ciò riguarda la coordinazione della parte introduttiva dello svolgimento, che qui dò alla teoria. Ma i concetti e i procedimenti, che in questo scritto presento come, almeno a mio credere, nuovi, sono i seguenti.

1^o. Introduco un modo finora non usato per ottenere segmenti rettilinei proporzionali ai pesi di tutti i possibili prismi staccabili dal masso di terra e aderenti alla parete, o, come si dice, per ridurre questi pesi ad una data base. Questi pesi sono proporzionali ai segmenti, che i piani di distacco determinano sulla linea superiore del terrapieno, e quindi la punteggiata di questi segmenti è la più naturale punteggiata delle forze, benchè essa non sia verticale. È curioso che ciò non sia stato, ch'io mi sappia, avvertito. Intanto l'uso di questa punteggiata sparge la maggior luce possibile sull'entità geometrica del problema della spinta, e mi ha condotto ad un concetto, che credo utilissimo, cioè quello dei *diedri di scivolamento*, come qui li chiamo, e della involuzione di piani, che questi determinano. Invero in questa involuzione, o meglio nella corrispondente involuzione di punti sulla retta superiore del terrapieno, s'imbattè nel caso delle terre incoerenti anche il Culmann nella 1^a edizione della sua *Statica grafica*.¹⁾ Egli, servendosi di un altro modo per ottenere segmenti proporzionali ai pesi dei prismi di terra, la deriva da una involuzione di punti sopra una certa iperbole; così riesce ad ottenere il piano di scivolamento come piano doppio, e può pervenire ad una costruzione di questo piano, che in sostanza è quella di Poncelet, escludendo interamente dalla di-

1) Die graphische Statik—Zürich, Meyer u. Zeller, 1866.

mostrazione l'algoritmo algebrico. Però il Culmann non si affacciò a considerare la mia corrispondente involuzione di piani e il significato statico di questa. Nel mio ordine d'idee l'involuzione di punti del Culmann si ottiene, invece che dalla sua iperbole, come intersezione della retta superiore con un certo fascio di circoli.

2°. Passando a considerare l'efficacia della coesione sulla spinta, il Culmann nella cit. op. si parte dal concetto al suo tempo non contestato, che gli effetti delle resistenze di attrito e di coesione si sommino. Egli procura di estendere il procedimento da lui seguito per le terre incoerenti e fondato sull'uso della sudetta iperbole al caso che intervenga la coesione; ma non riesce ad ottenere una soluzione rigorosa, perchè la curva, che allora si sostituisce all'iperbole, non è più di second'ordine, ma d'ordine superiore, onde, a parere del Culmann, il problema non è più risolvibile col semplice uso della riga e del compasso. Così egli si limita a proporre una soluzione approssimativa, benché molto ingegnosa come dalla genialità del valente geometra poteva aspettarsi.¹⁾ Però l'indirizzo diverso da me preso mi ha condotto a scoprire che il Culmann s'ingannò, e che il problema è realmente di secondo grado, sebbene l'uso della iperbole, a cui egli si attenne, nasconda questo fatto. Così potrò dare nel capitolo terzo, § II, del presente scritto una soluzione rigorosa fondata sull'uso della riga e del compasso di questo, che chiamerò *problema di Culmann* in considerazione degli sforzi, che l'illustre autore vi dedicò. Ottengo l'intento col mezzo di una certa proprietà di due sistemi piani simili, che non credo sia stata notata (n°. 25), e che conduce mirabilmente allo scopo.

3°. Ma il problema di Culmann non ha ormai che un'importanza storica, perchè si va generalmente riconoscendo che gli effetti delle resistenze di attrito e di coesione non si sommano, ma la resistenza efficace è in ogni caso la maggiore delle due. Su questo concetto è stata già modificata la teoria dell'equilibrio delle scarpe nei terreni coerenti, e sul riguardo cito la bella Nota dell'Ing. A. Ciappi: "*Sull'inclinazione delle scarpe nelle trincee*" pubblicata nel periodico *L'Ingegneria civile e le Arti industriali*, Vol. XXIII. Credo che il Ciappi sia stato il primo a risolvere questo problema, e non è a mia cono-

1) Da der Strahlenbüschel . . . der Kohäsionsparabel dem Strahlenbüschel . . . nicht mehr projektivisch ist, so ist die Kurve . . . keine Kurve zweiter Ordnung mehr, da sie ferner auch keine Gerade ist, so ist sie jedenfalls eine Kurve höherer Ordnung, und wir können daher, einen einzigen Fall, auf den wir zurückkommen werden, ausgenommen, das *max.* ihrer Ordinate nicht mehr so konstruieren wie das der Kurve ohne Kohäsion, wir können uns daher nur approximativ von der Wirkung der Kohäsion Rechenschaft ablegen. (Loc. cit., pag. 568.)

scienza che sia stato seguito da altri. Egli però perviene alle formole, che danno la massima altezza, a cui un terrapieno di data inclinazione si può spingere tagliato a scarpa senza ritegno, e ne deduce ingegnose costruzioni grafiche; ma non si affaccia alle modificazioni, che subisce nella nuova ipotesi la utilissima ed elegante parabola di coesione del Culmann. Io colmo questa lacuna nel capitolo quinto del presente scritto, ove dò una teoria completa tanto analitica che grafica dell'equilibrio delle scarpe, e fra l'altro pervengo alle stesse formole del Ciappi.

4°. Tornando all'effetto della coesione sulla spinta io ne svolgo nel capitolo terzo, § IV, una teoria completa relativa al nuovo modo di considerare le due resistenze. Credo che fino al giorno d'oggi questo problema non sia stato nemmeno toccato, onde mi pare di aver fatto opera molto utile. Dalla risoluzione del problema di Culmann, ponendo eguale a zero la costante d'attrito, io passo alla teoria della spinta dovuta alla sola coesione come ad un caso particolare; ma in una esposizione diversa da quella, che io qui mi sono proposto, si può, mettendo da parte il problema storico di Culmann nella sua forma più generale, svolgerne i tratti essenziali riferendoli a questo caso. Si vedrà che, anche quando si suppone che agisca la sola coesione, si perviene medesimamente al concetto di diedri di scivolamento e ad un'altra corrispondente involuzione, di cui un piano doppio fa determinare la spinta fornita dal principio di Coulomb. Le due involuzioni relative all'attrito ed alla coesione sono proiettive. Quando le due resistenze sono simultanee, dipende dall'inclinazione e dall'altezza della parete che avvenga uno od un altro di questi casi: quando l'inclinazione della parete è superiore ad un certo limite, per altezze minime, ma superiori a quella a cui la terra sta in equilibrio da sè, la resistenza prevalente è la coesione, e la soluzione del problema è data da un piano doppio della seconda involuzione; per altezze successive nessuna delle due resistenze prevale, la spinta minima di Coulomb è tale, che le due resistenze sono sul punto di esser vinte simultaneamente, e il piano di scivolamento è un *piano unito* delle due involuzioni proiettive; finalmente per altezze ancor maggiori comincia, e permane poi sempre, la prevalenza dell'attrito, e la soluzione del problema è data da un piano doppio della prima involuzione; quando l'inclinazione della parete è inferiore al limite sudetto, per altezze minime la spinta è dovuta a un piano unito, e, per altezze maggiori, ad un piano doppio della prima involuzione. Ora, nei casi in cui vale un piano doppio, il problema è di 2°. grado, mentre negli altri, dovendosi costruire un elemento unito di due involuzioni proiettive, il pro-

blema sale al 4° grado, e non pare che possa abbassarsi; per questi casi sono stato quindi costretto a ricorrere ad una costruzione approssimativa, ma che mi sembra pure abbastanza semplice per esser pratica. In questa parte della teoria si manifesta luminosamente l'utilità del mio concetto dei diedri di scivolamento e delle corrispondenti involuzioni.

5°. Nel capitolo quarto dò una teoria analitica completa del problema della spinta, considerando tanto l'attrito che la coesione, e riunendo queste due resistenze secondo la nuova veduta. È noto che non si hanno formole semplici pel calcolo diretto della spinta, se non nel caso estremamente particolare di una parete verticale, una retta superiore orizzontale, e una spinta pure orizzontale. La deduzione delle formole generali, sebbene il metodo ne sia ben definito, urta contro complicazioni algoritmiche, che spaventano i più pazienti calcolatori. Ma la considerazione delle predette involuzioni pone in grado di attaccare il problema dal suo aspetto geometrico: non si tratta in ogni caso che della ricerca del piano doppio di una involuzione o del piano unito di due involuzioni proiettive sovrapposte, e la spinta non è altro che il valore corrispondente di un parametro comune alle equazioni di queste involuzioni. Così, riunendo con notazione abbreviata in dodici lettere certi gruppi di funzioni trigonometriche, dalle quali proviene tutta la complicazione, si possono, applicando la teoria algebrica dei discriminanti e dei resultanti, stabilire le equazioni, che in ogni caso determinano la spinta. Queste non sempre sono di 2° grado; ma quando non lo sono, facendo precedere il calcolo numerico dei detti dodici coefficienti, che non offre difficoltà, si possono risolvere per tentativi. Ritengo che con queste equazioni il calcolo numerico della spinta nel caso più generale riesca, se non breve, non poi troppo penoso.

6°. Nel capitolo sesto passo a studiare la distribuzione della spinta sulla parete. Questa quistione offre nuove difficoltà. D'ordinario vi si provvede mediante un passaggio illecito, il quale consiste nel differenziare senz'altro la funzione, che esprime la spinta per l'altezza della parete, rispetto a quest'altezza, senza riflettere che, se in questa funzione facciamo variare l'altezza della parete, noi passiamo da uno ad un altro *terrapieno intero*, ma non da questo alle sue parti. Il Crotti nel suo pregevolissimo opuscolo "Sulla spinta delle terre" sopra citato criticò severamente questo erroneo modo di deduzione, al quale (è spiacevole) continuano forse anche oggidì stimabilissimi maestri a ricorrere. Nondimeno non si può fare a meno di adottare i risultati di questo procedimento, perché non si ha di meglio; ma parmi che occorra pur dire francamente che con ciò s'introduce un nuovo principio indipen-

dente da quello di Coulomb. Io tento questa via, e denomino questo il *principio della inattività degli strati inferiori*, procurando di giustificarlo per quanto è possibile. Il lettore giudicherà della plausibilità del mio modo d'intendere.

Nel caso che agisca il solo attrito questo principio conduce, com'è noto, ad una determinazione semplice del centro di spinta e perciò del momento rovesciante. Quando però agisce anche la coesione, e secondo le nuove vedute, il problema della distribuzione e del centro di spinta si complica enormemente, stante il grado elevato delle equazioni. Io al n° 85 propongo una soluzione grafica, la quale, sebbene sia di grossolana approssimazione, mi pare che possa soddisfare sufficientemente le esigenze pratiche.

7°. Infine nel capitolo settimo, servendomi dei risultati del procedimento analitico sopra sviluppato, dò le formole dirette complete, ed in massima parte nuove, pel calcolo della spinta e del momento rovesciante nel caso particolare sopra cennato.

Ho creduto utile, per comodità del lettore, nei capitoli secondo e terzo far precedere alcuni preliminari geometrici, ove si trovano esposti sistematicamente i teoremi e i problemi, che ivi mi serviva di applicare. Specialmente ciò era opportuno per la teoria dei sistemi piani simili, non solo perchè non accade di trovarla esposta nei trattati con quella coordinazione, che qui mi serve, ma anche perchè mi occorreva innestarvi, come sopra cennai, qualche proprietà nuova.

Chiudo questa prefazione notando come la presente teoria dà una nuova prova dell'utilità, che per la coltura dell'ingegnere ha lo studio della geometria proiettiva fatto in una certa misura, e dimostra che il coefficiente di questa misura non è tanto basso, quanto forse si può credere. Invito il lettore ad evocare meco con riconoscenza la memoria del Cremona, al quale va attribuito il merito di aver promosso, or sono molti anni, l'introduzione in Italia dell'insegnamento di questa materia fra quelle d'obbligo per gli aspiranti alla laurea d'ingegnere.

Rendo pubbliche grazie ai miei amici ingg. G. Tripiciano e D. Saladino, che si son data la pena di calcolare la tabella numerica, che sta in fine a questo scritto.

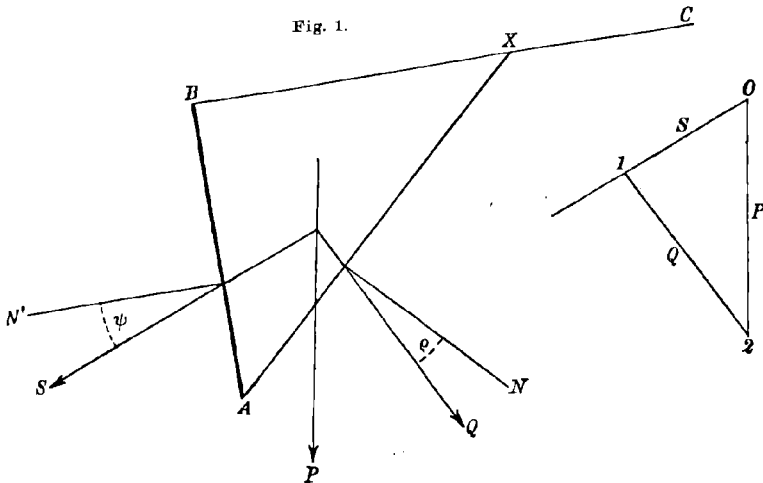
Capitolo primo.

Il principio di Coulomb.

1. *Considerazioni preliminari.* — Facciamo oggetto delle nostre ricerche un terrapieno omogeneo limitato da un piano e ritenuto da una parete piana parallela alle orizzontali del piano superiore. Consideriamo, come di solito, l'equilibrio di una porzione del sistema com-

presa fra due piani verticali perpendicolari alle sudette orizzontali e distanti l'uno dall'altro dell'unità di lunghezza. Allora lo studio dello equilibrio si riduce, com'è noto, a quello di forze giacenti sul piano verticale medio cioè parallelo ai due precedenti e da essi equidistante. Questo piano medio sarà sempre quello delle seguenti figure.

La *spinta* è la risultante delle pressioni, che il terrapieno esercita sulla parete, e diremo *controspinta* la forza eguale e contraria a questa, cioè la risultante delle pressioni, che la parete esercita sul terrapieno. Denoteremo con ψ l'angolo, che forma la direzione della spinta con la normale esterna alla parete, il quale si riguarda come un dato del problema. I nostri ragionamenti saranno indipendenti dal valore da attribuirsi a quest'angolo, sul quale tante discussioni sono corse.



Ammettiamo l'ipotesi semplificatrice che le superficie di possibile scivolamento della terra siano piani passanti per lo spigolo inferiore della parete, senza entrare nelle discussioni, di cui essa è stata oggetto.

Sia AB (Fig. 1) la parete del ritegno, BC la retta superiore del terrapieno. Tracciamo per lo spigolo A un piano qualunque AX , che chiameremo *piano di distacco* il quale stacchi un prisma di terra ABX , e per questo pensiamo decomposto il suo peso P in due componenti, di cui una sia la spinta S (formante con la normale esterna N' alla parete l'angolo ψ) e l'altra l'azione Q sul restante terrapieno. Adottata una scola delle forze, sia $O\bar{2}$ il segmento rappresentativo del peso, e conduciamo per O una retta indefinita parallela alla direzione data della spinta; su questa retta deve giacere il punto 1 tale, che $O12$ sia

il triangolo di decomposizione, cioè che $\overline{O1}$ rappresenti la spinta S , ed $\overline{12}$ l'azione Q . È manifesto che la decomposizione è indeterminata, e che questa indeterminazione è *semplice*, perché per determinare il triangolo basta assegnare arbitrariamente il valore di una sola variabile, per esempio del segmento $\overline{O1}$, oppure di un angolo, che fissi la direzione di $\overline{21}$. Ma il medesimo valore della spinta S deve anche provenire dalle decomposizioni dei pesi di tutti i possibili prismi di terra aderenti alla parete, che si ottengono facendo variare il piano di distacco AX . Questo piano è fissato dal valore di una seconda variabile, per esempio dalla sua inclinazione con una direzione fissa. Dunque *la statica pura lascia il problema della grandezza della spinta doppiamente indeterminato*.

2. A questa doppia indeterminazione provvede il principio di Coulomb, fornendo appunto *due condizioni*, come a presso vedremo. Esso non appresta, come pur troppo talvolta si lascia credere, il valore *reale* della spinta, il quale mantiene naturalmente la sua indeterminazione statica, e non potrebbe determinarsi, se non con la considerazione della elasticità del materiale terroso, ma invece esso dà il valore di S , che conviene adottare in ogni caso, per assicurare l'impossibilità dei movimenti temibili.

Se un masso di terra indefinito si taglia con un piano verticale o inclinato e si ritiene con un muro, è temibile il crollamento di questo in fuori, sia per rovesciamento, o per ischiacciamento, o per scivolamento. Il valore della spinta, che allora conviene adottare nel calcolo di resistenza del muro, è stato chiamato *spinta attiva*. Se invece al sudetto taglio è addossata una costruzione muraria, che spinga verso la terra, sono temibili lo scivolamento delle parti contigue di questa da basso in alto e il conseguenziale crollamento della costruzione spingente. Il valore della spinta, che conviene adottare in questo caso è stato detto *spinta passiva*. Definiamo dunque la spinta attiva come quel valore di S , fra gl'infiniti racchiusi nel campo d'indeterminazione, a cui *basta* proporzionare la resistenza del muro di sostegno, per esser sicuri che questo sotto l'azione della terra non possa crollare. Definiamo la spinta passiva come il valore di S , fra quelli compresi nel campo d'indeterminazione, che non dev' essere oltrepassato dall'effetto di una costruzione spingente contro la terra, per esser sicuri che quella non possa crollare verso di questa, trascinandola.

3. *Enunciato del principio*. — Il principio di Coulomb riguarda come data, non solo la direzione della spinta, ma anche la sua linea d'azione, o, per meglio dire, riguarda il problema della grandezza della

spinta come distinto e separato da quello della sua linea d'azione, e quindi tratta il primo problema indipendentemente dal secondo. Così, per risolvere il primo problema seguendo il principio di Coulomb, si ragiona paragonando fra loro spinte di diverse grandezze, ma aventi la stessa linea d'azione. È importante tener presente questo concetto, per non cadere in equivoci.

Ciò premesso, il principio di Coulomb può enunciarsi così:

La spinta attiva è tale, che la contospinta sia la minima, e la spinta passiva è tale, che la contospinta sia la massima di quelle compatibili con l'equilibrio della terra, tenuto conto delle condizioni di resistenza di questa.

Per avere una chiara intuizione del senso di questo enunciato, conviene pensare per un momento la contospinta, non come derivante dalla presenza di un muro resistente, ma come una risultante di pressioni artificialmente esercitate sulla faccia del taglio contro la terra, avente per linea d'azione la retta prestabilita, e suscettiva di aumento e di diminuzione. Il principio dice che la spinta attiva è quella tale che, se la contospinta così concepita cresce, l'equilibrio si mantiene, ma se diminuisce anche di un infinitesimo, avviene lo scivolamento della terra in basso; la spinta passiva è quella tale che, se la contospinta diminuisce, l'equilibrio perdura, ma se cresce, anche di un infinitesimo, avviene lo scivolamento della terra in alto. Ne segue che lo stato d'equilibrio della terra, tanto nel caso della spinta attiva che della passiva, è immediatamente prossimo al movimento temibile, o, come altrimenti si dice, è uno stato di *equilibrio limite*.

4. *Dimostrazione.* — Per dimostrare il principio, osserviamo che l'azione del muro contro la terra (la contospinta) può variare evidentemente fra un minimo, S_{\min} , prima del quale la terra scivolerebbe in fuori ed in basso, ed un massimo, S_{\max} , oltre il quale la terra scivolerebbe in dentro ed in alto. L'intervallo fra S_{\min} ed S_{\max} può chiamarsi *campo di stabilità per la terra*. Del pari l'azione della terra contro il muro (la spinta) può variare fra un minimo, F_{\min} , prima del quale il muro si rovescerebbe in dentro, cioè verso la terra, ed un massimo, F_{\max} , oltre il quale il muro si rovescerebbe in fuori. L'intervallo fra F_{\min} ed F_{\max} può chiamarsi *campo di stabilità pel muro*. Ora le due azioni mutue S ed F , cioè contospinta e spinta, debbono avere lo stesso valore assoluto comune, e questo per ragione della terra dev'essere compreso fra S_{\min} ed S_{\max} e per ragion del muro fra F_{\min} ed F_{\max} . Bisogna dunque, per l'equilibrio, che esistano valori possibili compresi fra questi rispettivi limiti, cioè che *i due campi di stabilità abbiano una parte comune*.

Ciò posto, si dimostra facilmente che, affinché vi sia equilibrio, debbono esser soddisfatte le due ineguaglianze

$$(1) \quad F_{\min} \leq S_{\max},$$

$$(2) \quad F_{\max} \geq S_{\min}.$$

Infatti le quattro quantità in discorso possono presentarsi nei seguenti ordini crescenti di grandezza:

$$(I) \quad F_{\min}, \quad F_{\max}, \quad S_{\min}, \quad S_{\max},$$

$$(II) \quad F_{\min}, \quad S_{\min}, \quad -F_{\max}, \quad S_{\max},$$

$$(III) \quad F_{\min}, \quad S_{\min}, \quad -S_{\max}, \quad F_{\max},$$

$$(IV) \quad S_{\min}, \quad S_{\max}, \quad F_{\min}, \quad F_{\max},$$

$$(V) \quad S_{\min}, \quad F_{\min}, \quad -S_{\max}, \quad F_{\max},$$

$$(VI) \quad S_{\min}, \quad F_{\min}, \quad -F_{\max}, \quad S_{\max}.$$

Di questi sei ordini il (I) e il (IV) debbono escludersi come incompatibili con l'equilibrio, perchè per essi i due campi di stabilità non hanno alcuna parte comune. Invece gli altri quattro ordini offrono parti comuni dei campi di stabilità, che sono quelle contrassegnate con barretta, e per esse sono sempre verificate le due ineguaglianze, onde queste sono *necessarie* per l'equilibrio. Inversamente, se sono verificate le ineguaglianze, gli ordini di successione possibili sono gl'indicati quattro, per le quali esiste sempre una parte comune dei due campi di stabilità, e quindi l'equilibrio è possibile; dunque le due ineguaglianze sono *sufficienti* — per l'equilibrio.

Ciò posto, nel caso ordinario dei muri di sostegno, la forma del muro è tale, che senza l'azione della terra esso starebbe in equilibrio da sè, onde $F_{\min} = 0$, e perciò la disequaglianza (1) è certamente soddisfatta; basta dunque fare in modo che sia soddisfatta la (2), cioè che la forza capace di rovesciare il muro in fuori sia uguale o maggiore della minima spinta: in altri termini *basta che il muro resista a questa minima spinta*; questa è dunque la spinta attiva, alla quale basta proporzionare la resistenza del muro.

Nel caso di una costruzione spingente verso la terra, per esempio di un muro di sostegno troppo inclinato verso la terra, tanto che senza questa si rovescerebbe in dentro, oppure di un muro di sostegno, al quale si addossi una volta spingente, F_{\max} è troppo grande rispetto alle spinte, che può esercitare la terra; quindi la (2) è sempre soddisfatta, e si può omettere di verificarla. D'altra parte F_{\min} è uguale, a meno del segno, all'azione spingente del muro, cioè alla spinta che il muro eserciterebbe nel momento, in cui stesse per rovesciarsi verso la terra; quindi, per impedire questo movimento bisogna far in modo che sia soddisfatta la (1), cioè che F_{\min} non sia tanto grande da superare S_{\max} : in altri termini, S_{\max} è la spinta passiva.

Capitolo secondo.

Spinta delle terre prive di coesione.

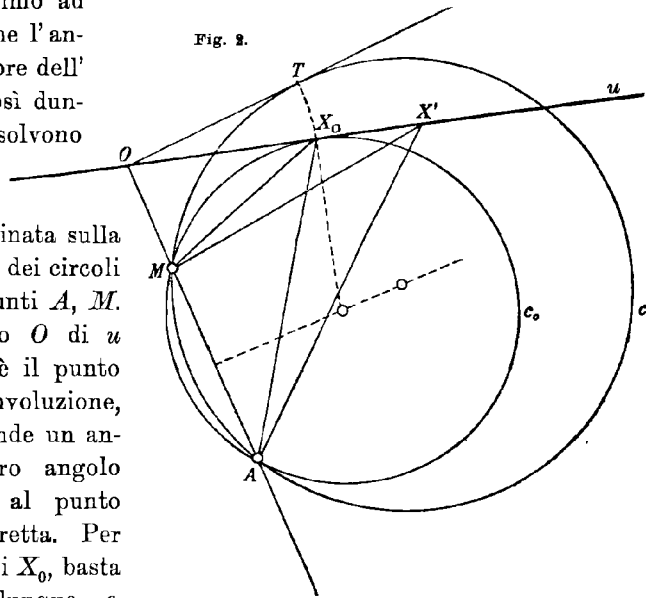
§ I. Preliminari geometrici.

5. *Problema P.* — *Dati nel piano una retta u e due punti A, M non giacenti su u , determinare sulla retta il punto o i punti X , pei quali l'angolo AXM , sotto il quale i punti A, M sono veduti da X , sia un massimo.*

In un punto X_0 , che risolve il problema, (Fig. 2) il circolo c_0 dei tre punti A, M, X_0 è tangente in X_0 alla retta u . Infatti, preso in u un punto X' prossimo ad X_0 , è elementare che l'angolo $AX'M$ è minore dell'angolo AX_0M . Così dunque i punti, che risolvono il problema sono i punti doppi della

involuzione determinata sulla retta u dal sistema dei circoli passanti pei due punti A, M . Il punto d'incontro O di u con la retta AM è il punto centrale di questa involuzione, e ad esso corrisponde un angolo nullo; l'altro angolo nullo corrisponde al punto all'infinito della retta. Per costruire i due punti X_0 , basta tracciare una qualunque, c ,

Fig. 2.

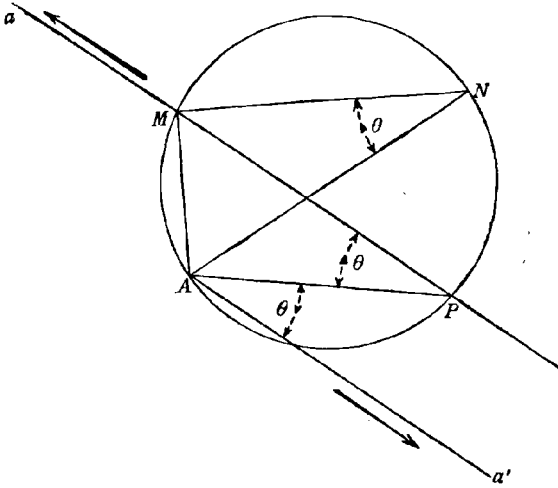


delle sudette circonferenze, e condurre a questa la tangente da O : il punto di contatto T ribaltato su u attorno ad O dà i due punti X_0 . Poiché questi giacciono da parti opposte di O , è evidente che uno dei due relativi angoli massimi è positivo e l'altro negativo.

6. *Teorema.* — *Data una retta a ed un punto A fuori di essa, se si prende su a un punto variabile M , e su AM come corda si descrive un segmento di circolo capace di un angolo dato in grandezza e segno $ANM = \theta$, i circoli così ottenuti al variare di M passano tutti per un punto fisso P di a , cioè formano un fascio di circoli.*

Infatti fissiamo il senso positivo di a (Fig. 3) in modo, che gli angoli di MA con a , qualunque sia M , abbiano il senso di θ . Esiste su a uno ed un solo punto P tale, che sia l'angolo di PA con a uguale e

Fig. 3.

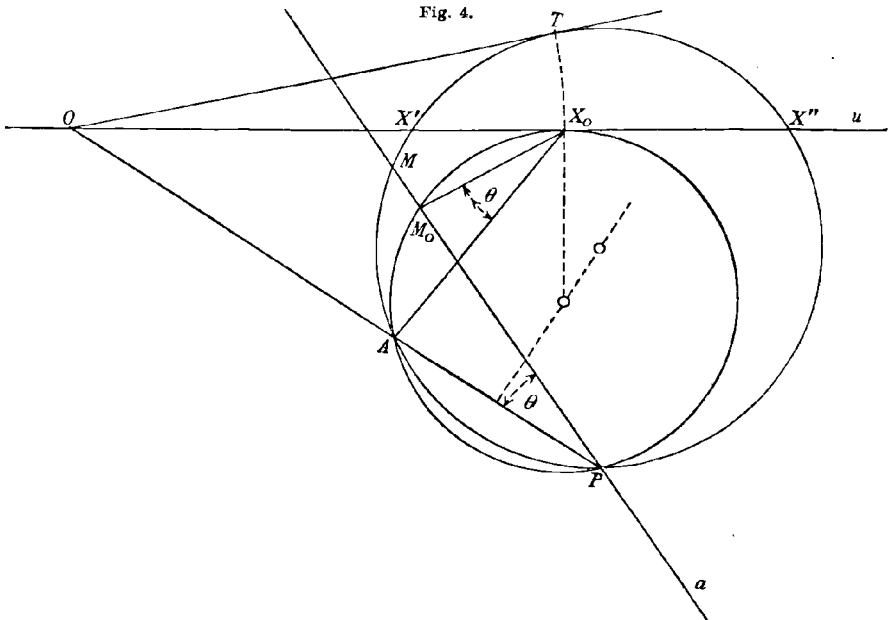


dello stesso senso dell'angolo dato θ , e per costruirlo basta condurre per A primieramente una retta a' parallela ad a e di senso opposto, e poi una retta, che formi con a' un angolo uguale a θ e dello stesso senso; questa seconda retta incontrerà a nel punto P dianzi definito. Ciò premesso, se si prende su a un punto M qualunque, e su AM come corda si descrive il segmento di circolo ANM capace dell'angolo $ANM = \theta$, il punto P giacerà, per quanto pre-

cede, su questo circolo. Dunque tutti i circoli così ottenuti facendo variare M su a passano per P .

7. Problema 2°. — Data (Fig. 4) una retta u , un'altra retta a ed un punto A fuori di entrambe, determinare su a un punto M_0 tale, che il massimo AX_0M_0 degli angoli AXM_0 , sotto i quali i punti A, M_0 sono veduti da un punto variabile X della retta u , sia uguale ad un angolo θ dato in grandezza e segno.

Fig. 4.



Se scegliamo ad arbitrio un punto M su a , esistono due punti X' , X'' di u , dai quali i punti A , M sono veduti sotto angoli uguali in grandezza e segno a θ , e sono le intersezioni di u col circolo ottenuto costruendo su AM come corda un segmento di circolo capace dell'angolo θ . Variando M su a , i relativi circoli costituiscono un fascio (n° 2), cioè passano tutti per un punto P di a , che può costruirsi direttamente come fu indicato al n° prec^{te}. Le coppie di punti X' , X'' ottenute facendo variare M costituiscono quindi sopra u una involuzione, i cui punti doppi sono i punti di contatto di u coi due circoli del fascio tangenti a questa retta. Se X_0 è uno di questi punti doppi, il circolo APX_0 incontra ulteriormente la retta a nel punto M_0 , che dà una delle soluzioni del problema. Infatti, siccome questo circolo appartiene al fascio, l'angolo AX_0M_0 è uguale in grandezza e segno a θ (n° 2); e poiché lo stesso circolo è tangente in X_0 alla retta u , l'angolo AX_0M_0 è un massimo di quelli, sotto i quali i punti A , M_0 sono veduti da un punto variabile di u (n° 1).

§ II. Determinazione della spinta.

8. *Condizioni fornite dal principio di Coulomb.* — Si suppone nel presente capitolo che la sola resistenza al moto relativo tangenziale delle parti terrose sia l'attrito. Denoteremo con φ il valore assoluto dell'angolo d'attrito. In questa ipotesi dedurremo dal principio di Coulomb, quale fu enunciato al n° 3, le condizioni, che insieme a quelle fornite dalla statica pura rendono determinato il problema della spinta attiva o della passiva.

Stabiliamo che nelle nostre figure della sezione del terrapieno, alle quali si riferiscono gli enunciati seguenti, la terra giaccia a destra della parete, ed assumiamo come senso positivo degli angoli quello del movimento delle sfere da orologio.

Torniamo a considerare il prisma di terra ABX segnato nella fig. 1. Come unica variabile, che determina la decomposizione del peso di questo prisma possiamo scegliere l'angolo ϱ , che la direzione di Q forma con la normale N rivolta verso l'esterno del prisma, angolo descritto da N verso Q . La condizione imposta dalle leggi dello attrito si traduce nella ineguaglianza fra valori assoluti

$$(1) \quad |\varrho| \leq |\varphi|.$$

Come variabile, che determina il piano di distacco AX scegliamo la sua inclinazione α con la verticale rivolta in alto.

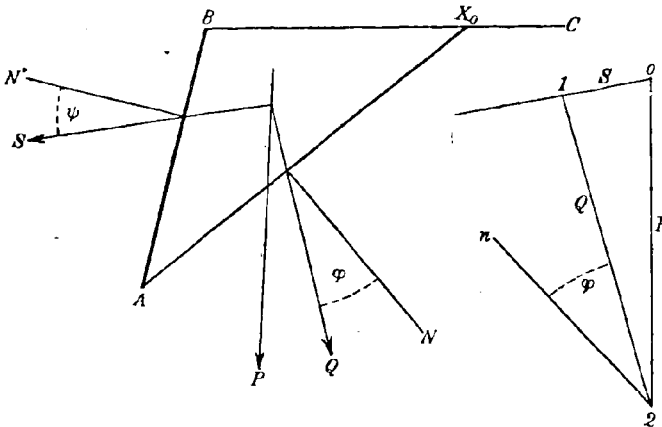
La spinta S , nel grado di determinazione lasciato dalla statica pura, è dunque una funzione di ϱ e di α . Per conseguenza si potrà riguardare ϱ come una funzione di S e di α .

Il principio di Coulomb appresta dunque due proposizioni, che dopo le precedenti premesse possono enunciarsi così:

1°. *L'angolo ρ dev' essere un massimo positivo per la spinta attiva ed un massimo negativo per la passiva quando, tenendo costante S , si fa variare α (analiticamente parlando, deve esser nulla la derivata parziale di ρ rispetto ad α).*

2°. *Il detto valor costante di S dev' essere tale, che questo massimo di ρ risulti eguale a $+\varphi$ per la spinta attiva ed a $-\varphi$ per la passiva.*

Fig. 5.



ρ risulti eguale a $+\varphi$ per la spinta attiva ed a $-\varphi$ per la passiva.

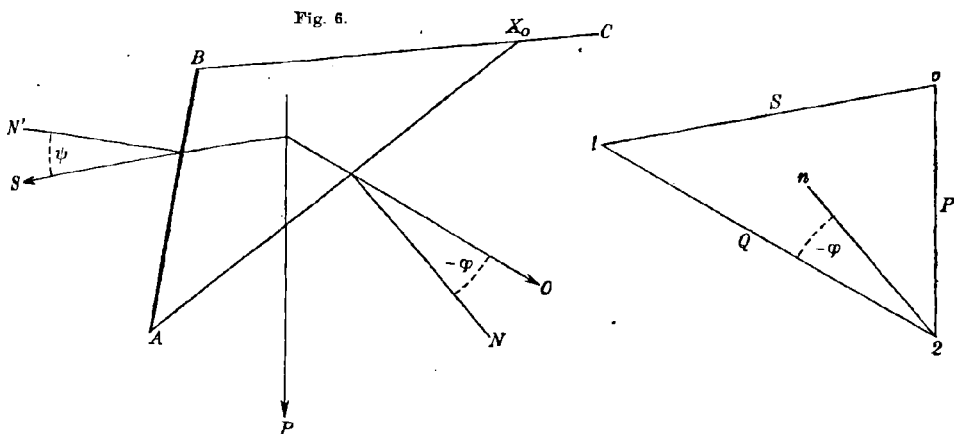
Prima di dimostrare che queste due proposizioni equivalgono nel nostro caso al principio di Coulomb, osserviamo che esse costituiscono due condizioni analitiche, e quindi permettono di de-

terminare S ed α . Il valore di α così determinato fissa un piano di distacco, che noi chiameremo *piano di scivolamento*, pel quale, in virtù dello 2ª proposizione, la relazione (1) è soddisfatta col segno =.

Ora, nel caso della spinta attiva sia AX_0 (Fig. 5) il piano di scivolamento, $O12$ il triangolo di decomposizione relativo al prisma ABX_0 , e conduciamo dal punto 2 la parallela $2n$ oppostamente rivolta allo normale esterna N al piano AX_0 . Per la 2ª proposizione l'angolo $n21 = \rho$ avrà il valore φ positivo, e quindi, per la convenzione sul senso positivo degli angoli, la retta $2n$ risulterà esterna al triangolo $O12$. Ne segue che, se il valore $O1$ della spinta crescesse da quello determinato dalle precedenti condizioni, il punto 1 si allontanerebbe dal punto O , e l'angolo $n21$ diverrebbe $< \varphi$, quindi, per la (1), l'equilibrio del prisma sarebbe sempre più assicurato. Pei prismi relativi ad altri piani di distacco e per lo stesso valore di S l'angolo analogo ad $n21$ sarebbe, per la 1ª proposizione, minor di φ , e quindi a fortiori esso discenderebbe al di sotto di φ al crescere di $O1$. Dunque per valori di S maggiori di quello, che risponde alle due proposizioni, l'equilibrio del terrapieno è sicuro. Se invece la spinta decrescesse, il punto 1 si avvicinerrebbe al punto O ; l'angolo $n21$ relativo al prisma ABX_0 cre-

scerebbe al di là di φ ; l'attrito sarebbe vinto sul piano AX_0 , e il prisma scivolerebbe in basso lungo questo piano. Così il valore di S determinato dalle due proposizioni per la spinta attiva è il minimo compatibile con l'equilibrio del terrapieno, come vuole il principio di Coulomb.

Nel caso della spinta passiva, sia AX_0 (Fig. 6) il piano di scivolamento determinato dalle due proposizioni, 012 il triangolo di decomposizione relativo al prisma ABX_0 . Per la 2^a proposizione l'angolo $n21$



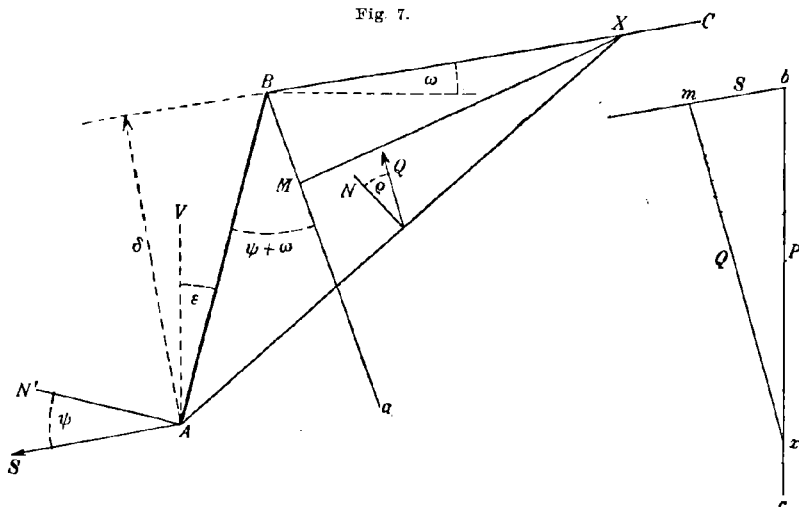
avrà il valore negativo $-\varphi$, e quindi $2n$ risulterà interna al triangolo 012. Per valori della spinta minori di 01 il punto 1 si avvicina al punto 0, l'angolo $n21$ decresce in valore assoluto diventando in valore assoluto $< \varphi$, quindi l'equilibrio riesce più sicuro. La stessa conclusione risulta *a fortiori* per altri prismi in virtù della 1^a proposizione. Se però la spinta cresce, il punto 1 si allontana dal punto 0, l'angolo $n21$ cresce in valore assoluto al di là di φ , ed il prisma ABX_0 scivola in alto sul piano AX_0 . Dunque il valore di S determinato dalle due proposizione è il massimo compatibile con l'equilibrio, come richiede il principio.

9. *Costruzione della spinta.* — Sia AB (Fig. 7) la parete, BC la retta superiore del terrapieno, ω l'angolo racchiuso da BC e dall'orizzontale rivolta verso l'interno, angolo percorso da BC verso l'orizzontale. Scegliamo come unità della scala delle forze il prodotto del peso specifica π della terra per metà della distanza ortogonale δ dal punto A alla retta BC . Allora i prismi staccati nel terrapieno da tutti i possibili piani di distacco AX hanno pesi rappresentati graficamente dalle basi BX dei triangoli ABX , cioè la retta BC stessa può riguardarsi come la punteggiata di questi pesi ruotata di un certo angolo. Se dunque

tracciamo la verticale bc rivolta in basso, e su questa consideriamo un punto variabile x tale, che sia sempre $bx = BX$, al variare del piano di distacco questo punto genererà su bc la punteggiata dei pesi con origine in b . Per sovrapporre BC a bc bisogna farla ruotare dell'angolo $90^\circ + \omega$ e poi trasferirla.

Data la direzione della spinta mediante la sua inclinazione ψ con la normale esterna alla parete, se conduciamo da b la parallela indefinita a questa direzione, su questa retta debbono trovarsi i vertici m di tutti i triangoli di forze $bm\bar{x}$, che decompongono il peso \bar{bx} secondo la spinta \bar{bm} e l'azione \bar{mx} sul piano di distacco. Facendo ruotare il

Fig. 7.



triangolo mbx di $90^\circ + \omega$ in senso negativo, e poi trasferendolo finché bx si sovrappone a BX , il punto m prenderà una certa posizione M , di guisa che la spinta e la reazione sudette saranno rappresentate in grandezza dai segmenti BM, MX .

Quando m varia sopra bm , il punto M varia sopra una determinata retta a passante per B , e l'angolo MBA , che questa forma con BA , ha il valore $(90^\circ + \omega) + \psi - 90^\circ = \psi + \omega$.

Segnando con θ l'angolo AXM , siccome

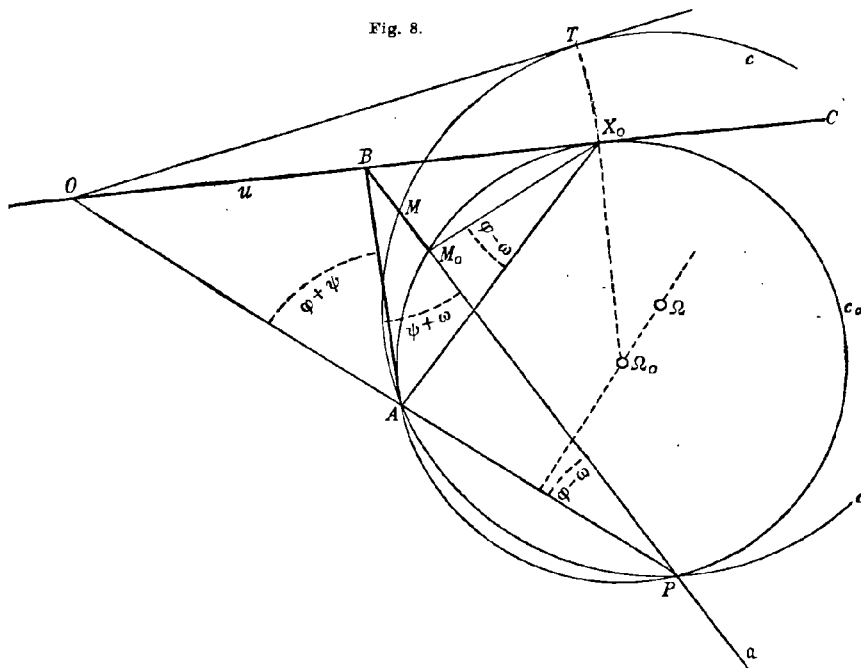
$$\begin{aligned} \sphericalangle AXM &= (XA, XM) = (XA, xm) + (xm, XM) \\ &= (90^\circ + \phi) - (90^\circ + \omega), \end{aligned}$$

si ha

$$(2) \quad \theta = \phi - \omega.$$

Volendo ora soddisfare al principio di Coulomb, dobbiamo fare in modo che: 1° ϕ sia massimo quando, tenendo costante S , cioè tenendo

fisso il punto M , si fa variare il piano di distacco; 2° questo massimo di ϱ abbia il valore φ . Ma, giusta la (2), ϱ differisce da θ per una costante, quindi il massimo di ϱ avviene simultaneamente col massimo di θ , e d'altra parte, quando il massimo di ϱ ha il valore φ , il massimo di θ ha il valore $\varphi - \omega$. Con ciò l'applicazione del principio di Coulomb conduce a dover risolvere il problema seguente: determinare sulla retta a un punto M_0 in modo, che il massimo dell'angolo $\theta = AXM_0$, sotto



il quale i punti A, M_0 sono veduti da un punto X della retta BC abbia il valor dato $\varphi - \omega$. Questo problema non è altro che quello posto e risoluto al n° 7; la retta BC prende il luogo della u , mentre A è il piede della parete.

Per piegare la soluzione del problema ai dati attuali, si guardi riprodotta nella Fig. 8 la Fig. 4 del n° 7, e si osservi che, segnata con B l'intersezione delle rette u, a , la congiungente AB rappresento la parete. Nel problema attuale sarà

$$\sphericalangle APB = \varphi - \omega,$$

$$\sphericalangle PBA = \psi + \omega,$$

onde dal triangolo APB si deduce

$$\sphericalangle OAB = APB + PBA = \varphi + \psi.$$

Or la retta AO condotta dal piede della parete e formante con questa l'angolo $\varphi + \psi$ è stata chiamata *retta di direzione*.

Dovendo poi essere M un punto arbitrario della retta a , il circolo c dei tre punti A, P, M sarà uno qualunque di quelli passanti per A, P , i quali hanno per luogo dei centri la normale al punto di mezzo di AP .

La costruzione sarà dunque la seguente. Dal piede A della parete AB si conduca la retta di direzione, e dal ciglio B la retta a formante con BA l'angolo $\psi + \omega$. Queste due rette s'incontrano in P . Condotta la normale pel punto di mezzo di AP , che sarà il luogo dei centri del fascio di circoli (AP), e preso su questa un punto arbitrario Ω come centro, si tracci con raggio ΩA il relativo circolo del fascio; a questo si guidi la tangente dal punto O , ove la retta di direzione incontra BC , e si ribalti il punto di contatto T attorno ad O su BC in X_0 . Allora AX_0 sarà il piano di scivolamento. Il circolo c_0 del fascio, che passa per X_0 sarà ivi tangente alla retta BC , e per ottenerne il centro Ω_0 basta condurre da X_0 la normale a BC ad incontrare il luogo dei centri, dopo di che $\Omega_0 A$ ne sarà il raggio. Questo circolo segnerà a nel punto M_0 tale, che $\overline{BM_0}$ sarà la spinta ridotta alla base $\frac{1}{2}\pi\delta$. Così la spinta attiva avrà l'espressione

$$(3) \quad S = \frac{1}{2}\pi\delta \cdot \overline{BM_0}.$$

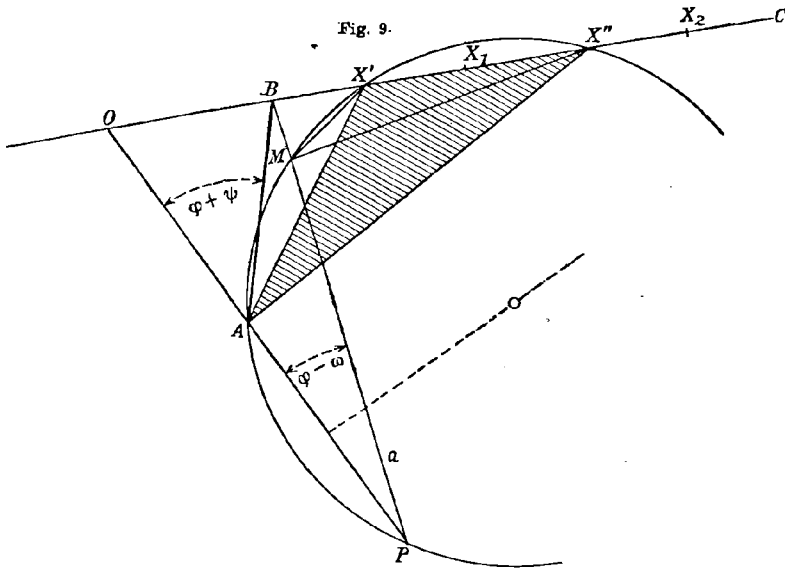
Si osservi che, ottenuto X_0 , per dedurne M_0 si potrà, invece di ricorrere al circolo c_0 , guidare la retta $X_0 M_0$ formante con AX_0 l'angolo $\varphi - \omega$.

10. Osservazione. — Nei ragionamenti del presente paragrafo si è ammessa implicitamente l'ipotesi che il triangolo bmx (Fig. 7) esista, e giaccia a sinistra della verticale bc , ossia che l'angolo (bc, bm) sia positivo. Il valore di quest'angolo si deduce facilmente, ed è $90^\circ - \varepsilon + \psi$, ove ε denota l'angolo della parete con la verticale ascendente percorso a partire da quest'ultima. Questa ipotesi si avvera sempre nei casi dei muri di sostegno, a cui serve la teoria, e noi la riguardiamo come sempre sussistente, cioè supponiamo che sia sempre

$$\psi - \varepsilon < 90^\circ.$$

L'ipotesi contraria è teoricamente ammissibile, perché, supposto, per esempio, che per ψ si adotti l'angolo di attrito fra terra e muratura, esiste un'inclinazione della parete verso sinistra ($\varepsilon = \psi - 90^\circ$), per la quale la direzione della spinta risulta verticale, e per inclinazioni maggiori di questa essa si volge verso destra. Però tali direzioni di parete sono troppo vicine all'orizzontale, perché possano convenire al

paramento interno di un muro di sostegno; così è che queste altre ipotesi non servono alla pratica, onde noi omettiamo di approfondirle. Ci basti accennare senza svolgimento che, se il detto angolo (bc, bm) è nullo, l'involuzione di punti sulla retta superiore diventa parabolica; la retta di direzione e quella di scivolamento coincidono con la scarpa naturale, e la decomposizione del peso P pel prisma scivolante dà $S = P, Q = 0$, cioè una spinta verticale coincidente col peso e un'azione nulla sul piano di scivolamento. Se poi lo stesso angolo è negativo, l'involuzione diventa ellittica, e non si ha piano di scivolamento reale, sicché il principio di Coulomb non è più applicabile.



11. *Diedri e piani limiti di scivolamento.* Sarà molto utile tornare alle considerazioni di una contropinta variabile, che al n°3 ci servì all'intuizione del principio di Coulomb: ne dedurremo una interpretazione statica dell'involuzione di piani di distacco determinata dal fascio di cerchi, di cui è parola nei precedenti preliminari geometrici.

Ad un valore qualunque della contropinta, cioè ad un valore di \overline{BM} (Fig. 9), corrisponde un punto M della retta a . Se il cerchio APM interseca BC in due punti X', X'' , gli angoli $AX'M, AX''M$ sono uguali a $\varphi - \omega$, e quindi, per questo valore della contropinta ai due piani di distacco AX', AX'' corrispondono angoli ρ uguali a φ . Se X_1 è un punto qualunque di BC compreso fra X' ed X'' , l'angolo AX_1M è maggiore di $\varphi - \omega$, e perciò, adottando AX_1 come piano di distacco e lo stesso valore per la contropinta, ne risulta un

angolo φ maggiore di φ ; dunque per questo valore della contropinta il prisma di terra ABX_1 scivolerebbe. Se poi X_2 è un punto qualunque di BC esterno al segmento $X'X''$, si giunge analogamente alla conclusione che, con questo valore della contropinta, il prisma ABX_2 non scivolerebbe. Dunque il diedro $X'AX''$ è il campo occupato da tutti i piani, sui quali, col valore BM della contropinta, potrebbe avvenire lo scivolamento. Noi lo chiameremo *diedro di scivolamento*, e diremo i piani di distacco AX' , AX'' , che lo limitano, *piani limiti di scivolamento* corrispondenti al valore \overline{BM} della contropinta. Abbiamo dunque il seguente teorema.

Le coppie di piani limiti di scivolamento relativi a valori successivi della spinta costituiscono una involuzione.

Per valori abbastanza grandi della contropinta \overline{BM} , il terrapieno starà in equilibrio, e quindi non potranno esistere diedri di scivolamento, al che corrisponde il fatto geometrico che i cerchi APM non intersecheranno BC . Decrescendo la contropinta, essa raggiungerà un valore \overline{BM}_0 tale, che il corrispondente cerchio tocchi BC in un punto X_0 ; AX_0 sarà il piano doppio utile dell' involuzione, cioè il piano di scivolamento (n° 9), e il segmento \overline{BM}_0 darà la spinta attiva determinata dal principio di Coulomb; il diedro di scivolamento compare allora con un'ampiezza nulla. Decrescendo ancora la contropinta, i cerchi APM intersecano BC in punti reali e distinti, e quindi si hanno, e continuano ad aversi fino al valore zero della contropinta, effettivi diedri di scivolamento. Dunque:

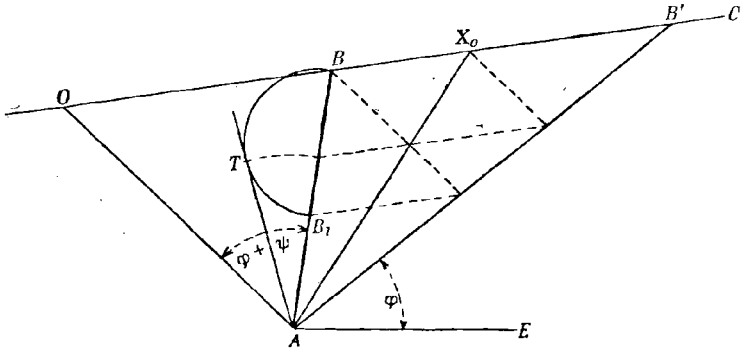
Il piano di scivolamento determinato dal principio di Coulomb è uno dei piani doppi dell' involuzione dei piani limiti di scivolamento.

12. Le costruzioni di Poncelet. — Per la costruzione del piano di scivolamento sono molto in uso la costruzione di Poncelet e alcune altre derivate da questa. Dimosteremo che questa costruzione non è che un caso particolare della nostra, corrispondente ad una scelta particolare delle coppie fondamentali dell' involuzione. Considerando l' involuzione di punti sulla retta superiore BC del terrapieno, noi abbiamo adoperato (n° 9) il suo punto centrale ed una coppia qualunque X', X'' corrispondente ad un punto M preso ad arbitrio su a . Or se M coincide con B , (Fig. 10), cioè se la contropinta è nulla, uno dei due punti X', X'' coincide con B , e l' altro è la seconda intersezione B' , della retta BC col cerchio APB ; l' angolo $AB'B$ sarà uguale a $\varphi - \omega$; condotta per A l' orizzontale AE e la parallela AL a BC , sarà $\sphericalangle B'AL = \varphi - \omega$, $\sphericalangle LAE = \omega$, e quindi $\sphericalangle B'AE = \varphi$; dunque AB' è il piano di natural declivio della terra.

quale sull'altra più generale ha il vantaggio di non richiedere il tracciamento della retta a .

13. Altre costruzioni in uso derivate dalla precedente, e che noi raggruppiamo con questa sotto il nome di costruzioni di Poncelet, si

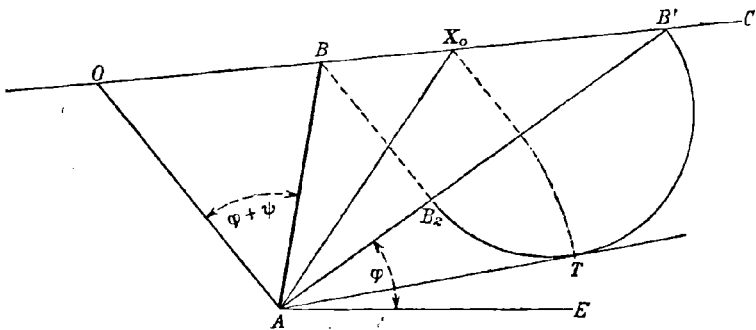
Fig. 11.



deducono con trasferimenti proiettivi dell'involuzione sulla parete, o sul piano di natural declivio, o sulla retta di direzione. Esse sono le seguenti.

1°. L'involuzione di punti su BC (Fig. 11) si proietti con parallele alla retta di direzione; questo fascio si seghi col piano di natural de-

Fig. 12.



clivio; questa punteggiata si proietti con parallele a BC , ed il fascio così ottenuto si seghi con la parete. Allora le coppie di punti di BC

$$B, B'; \quad O, \infty$$

si trasferiscono in

$$B_1, B; \quad A, \infty,$$

quindi A è il punto centrale dell'involuzione trasferita sulla parete, e B, B_1 ne sono due punti coniugati. Da ciò la costruzione del piano di scivolamento eseguita nella Fig. 11.

2°. Se nelle precedenti operazioni ci arrestiamo alla sezione con la retta di natural declivio (Fig. 12), alle coppie di punti

B, B' ; O, ∞
 corrispondono rispettivamente

B_3, B' ; A, ∞ ;
 dunque A è il punto

centrale della nuova involuzione, e B_2, B' due punti coniugati. Da ciò la costruzione richiamata nella Fig. 12.

3°. L'involuzione di punti su BC si proietti (Fig. 13) sulla retta di direzione parallelamente alla retta di natural declivio. Allora le

coppie di punti

B, B' ; O, ∞

si proiettano

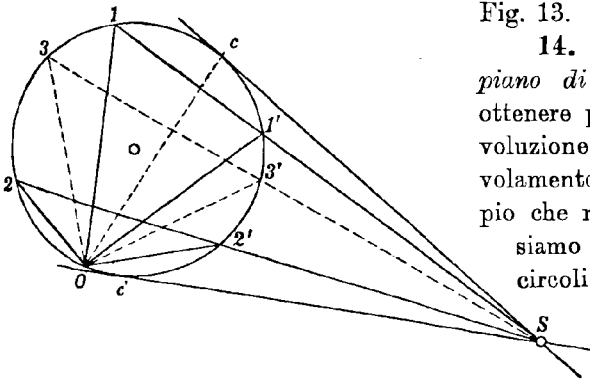
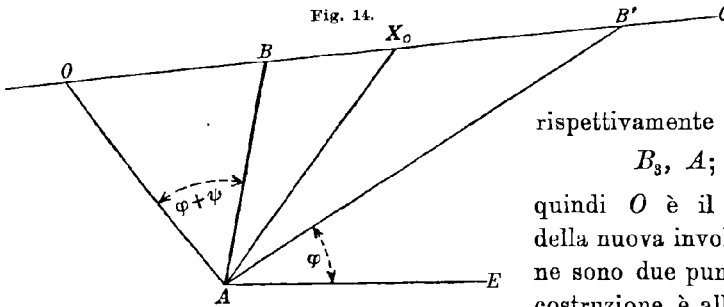
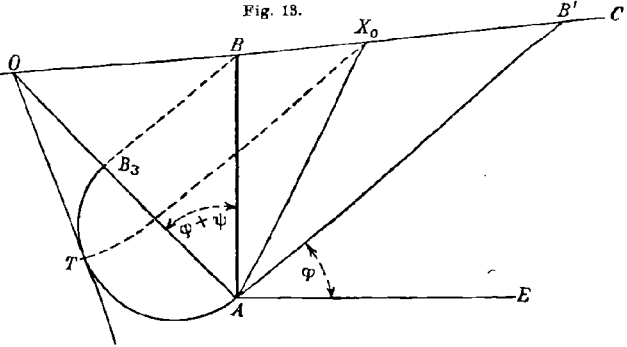
rispettivamente in

B_3, A ; O, ∞

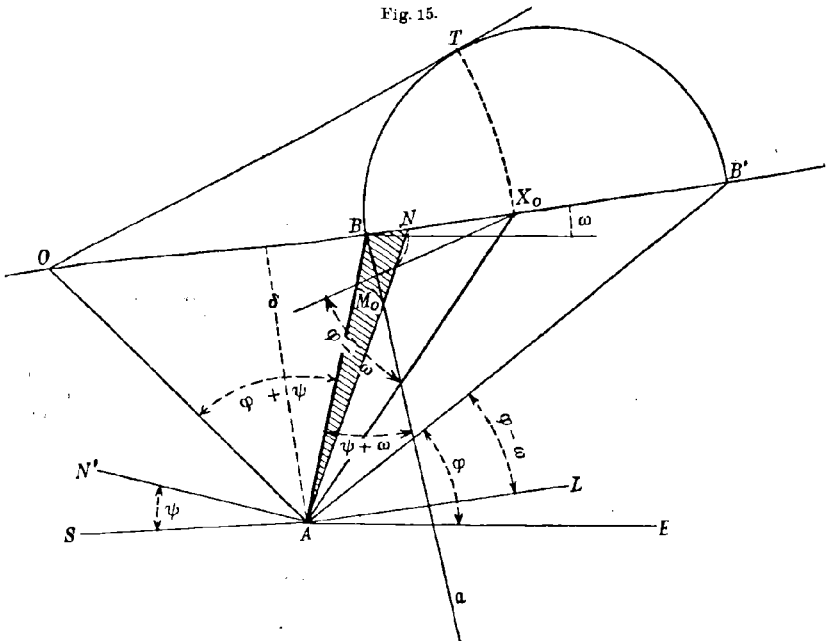
quindi O è il punto centrale della nuova involuzione, e B_3, A ne sono due punti coniugati. La costruzione è allora quella della Fig. 13.

14. *Altra costruzione del piano di scivolamento.* — Per ottenere piani coniugati dell'involuzione dei piani limiti di scivolamento, e quindi il piano doppio che risolve il problema, ci siamo serviti in generale di circoli del fascio (AP) . Si può procedere in un altro modo. Tracciamo sul disegno

(Fig. 14) un circolo qualunque, e prendiamo su di esso un punto qualunque Q , dal quale pensiamo condotte le parallele ai piani limiti di



scivolamento. I raggi di questo fascio segano ulteriormente il circolo in punti, che costituiscono quella, che chiamasi una involuzione di punti sul circolo. È noto che le congiungenti i punti coniugati di una siffatta involuzione concorrono in un punto S , che noi chiameremo il *centro d'involuzione*. Per determinare S basta conoscere due coppie della involuzione di piani. Or come tali possiamo scegliere (n° 12): 1° la coppia determinata dalla parete e dalla scarpa naturale; 2° la coppia determinata dalla retta di direzione e dalla parallela alla retta



superiore del terrapieno. La prima coppia determina sul circolo i punti 1, 1', e la seconda i punti 2, 2'. Le congiungenti 11', 22' determinano il punto S , ed allora qualunque retta per S che seghi il circolo, vi fissa due punti, come 3, 3' coniugati nell'involuzione, quindi le parallele da A ai raggi $Q3, Q3'$ se entrambe racchiuse nel terrapieno, limitano un diedro di scivolamento.

I punti doppi dell'involuzione sul circolo sono i punti di contatto c, c' delle tangenti condotte da S , e questi, proiettati da Q danno i raggi doppi del fascio Q . Si scorge subito quale di questi due raggi apprestati nella sua parallela da A una retta racchiusa nel terrapieno; nel caso della figura esso è Qc ; dunque la parallela AX_0 da A a Qc dà il piano di scivolamento.

Questa costruzione del piano di scivolamento, benché non abbia

titoli di semplicità per esser preferita a quelle di Poncelet, è però importante per ciò che segue.

15. *Operazioni pratiche definitive.* — *Triangolo di spinta.* — Il modo più semplice, e quindi più pratico, per ottenere la retta di scioglimento, è dato da qualcuna delle costruzioni di Poncelet: è da preferirsi l'una o l'altra secondo la disposizione della figura nel foglio da disegno.

Ottenuta questa retta, (Fig. 15), il modo più semplice per dedurne la spinta ridotta (alla base $\frac{1}{2}\pi\delta$) è di tracciare prima la retta a mediante l'angolo $\psi + \omega$, che forma con BA , e poi la retta X_0M_0 mediante l'angolo $\varphi - \omega$, che forma con X_0A . Queste due rette si segano in M_0 , e BM_0 è la spinta ridotta.

Ribaltando BM_0 su BC in BN , l'area del triangolo ABN rappresenta, per l'eguaglianza (3), la spinta ridotta alla base π , onde ABN , con una denominazione già usata, può chiamarsi *triangolo di spinta*.

Tutte queste operazioni vedonsi eseguite nella Fig. 15.

Capitolo terzo.

Spinta delle terre dotate di coesione.

§ 1. Preliminari geometrici.

16. *Sistemi piani simili.* — Quantunque sia ben nota la teoria dei sistemi piani simili, ne richiamiamo brevemente la generazione e le proprietà fondamentali, per riattaccarvi qualche altra proprietà nuova, che a noi servirà di applicare.

Dati nello spazio due piani paralleli π_1, π_2 , se da un punto o centro di proiezione situato fuori e dalla stessa parte di entrambi si proiettano i punti e le rette dell'uno sull'altro piano, si stabilisce una corrispondenza univoca fra i punti e le rette dei due piani. Questa corrispondenza gode evidentemente le seguenti proprietà:

1°. Ad una punteggiata corrisponde una punteggiata di sede corrispondente, e ad un fascio un fascio di centro corrispondente.

2°. L'angolo di due rette di π_2 è uguale a quello delle due rette corrispondenti di π_1 .

3°. Due punteggiate corrispondenti sono simili, e il *rapporto di similitudine* è lo stesso per tutte le coppie di punteggiate corrispondenti perché uguale al rapporto delle distanze dal centro di proiezione ai due piani.

Se allora, senza alterare nei due piani la corrispondenza degli elementi, si trasferisce π_2 in traslazione fino a sovrapporlo a π_1 , e poi si fa subire a π_2 un movimento qualunque nel piano comune, si otten-

gono due figure Σ_1, Σ_2 , che diconsi *sistemi direttamente simili sovrapposti*. Evidentemente le tre proprietà sopra notate pei due piani π_1, π_2 valgono anche per questi sistemi, e dalla 2° si deduce subito quest'altra:

4°. L'angolo di due rette corrispondenti è costante. Noi chiameremo questa costante *l'angolo dei due sistemi*, e la denoteremo con β .

17. Due sistemi piani simili Σ_1, Σ_2 possono anche costruirsi direttamente dandosi una coppia di punti A_1, B_1 del primo e la coppia dei punti corrispondenti A_2, B_2 del secondo, o, come diremo, dandosi i due *segmenti fondamentali* $\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}$. Allora, dato in Σ_1 un terzo punto C_1 fuori della retta $A_1 B_1$, per ottenere in Σ_2 il suo corrispondente C_2 , basta costruire il triangolo $A_2 B_2 C_2$ direttamente simile al triangolo $A_1 B_1 C_1$. Se il punto C_1 è dato sulla retta $A_1 B_1$, si costruirà C_2 come quel punto, che divide il segmento $\overline{A_2 B_2}$ nel rapporto stesso e dello stesso segno di quello, in cui C_1 divide $A_1 B_1$. Data in Σ_1 una retta r_1 , per costruire la corrispondente r_2 si costruirà prima il punto M_2 corrispondente del punto M_1 , in cui r_1 sega $A_1 B_1$, e poi per M_2 si guiderà una retta inclinata con $A_2 B_2$ come r_2 lo è con $A_1 B_1$: questa sarà la retta r_2 .

Alla retta all'infinito di Σ_1 corrisponde evidentemente la retta all'infinito di Σ_2 , cioè la retta all'infinito del piano comune è una *retta unita*.

Per determinare i due sistemi, possiamo anche darci: 1°. una coppia A_1, A_2 di punti corrispondenti; 2°. l'angolo β dei due sistemi; 3°. il rapporto di similitudine C . Allora, data una retta r_1 per A_1 , si costruirà la corrispondente r_2 guidando per A_2 una retta, che formi con r_1 l'angolo β . Dato su r_1 un altro punto B_1 , si costruirà B_2 su r_2 in modo, che il rapporto $\overline{A_2 B_2} : \overline{A_1 B_1}$ sia $= C$. Poi si potrà costruire nello stesso modo la retta s_2 corrispondente di una retta s_1 per B_1 , e su questa il punto C_2 corrispondente di un punto C_1 dato su s_1 . Così si potranno costruire su Σ_2 gli elementi corrispondenti di qualunque punto o retta dati su Σ_1 .

18. *Centro di similitudine*. — Dati i due segmenti fondamentali $A_1 B_1, A_2 B_2$ (Fig. 16), se costruiamo il punto J , in cui si segano le loro rette, e tracciamo i due cerchi $A_1 A_2 J \equiv c_1, B_1 B_2 J \equiv c_2$, il punto O di ulteriore intersezione di questi cerchi corrisponde a sè stesso. Infatti i due triangoli $OA_1 B_1, OA_2 B_2$ sono simili, perché si ha, con la disposizione della figura (e per altre si procederebbe analogamente)

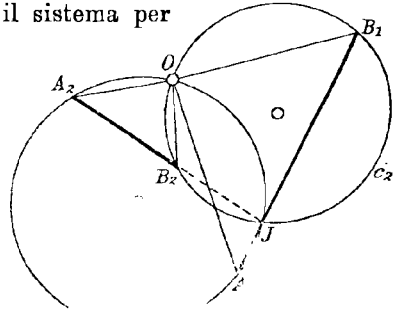
$$\sphericalangle OA_1 B_1 = \sphericalangle OA_1 J = \sphericalangle OA_2 J = \sphericalangle OA_2 B_2,$$

$$\sphericalangle OB_1 A_1 = \sphericalangle OB_1 J = 180^\circ - \sphericalangle OB_2 J = \sphericalangle OB_2 A_2.$$

Due sistemi simili hanno dunque *un punto unito* O , che chiamasi *centro di similitudine*, e può costruirsi nel modo descritto. Non possono esistere in generale due punti uniti, perché allora, presi questi come fondamentali, si otterrebbero sempre punti corrispondenti coincidenti, cioè i due sistemi sarebbero identici. Ne segue che si perviene sempre allo stesso punto O , cioè al centro di similitudine, comunque si scelgano nel sistema i due segmenti fondamentali per operarvi la precedente costruzione.

19. Tutte le coppie di rette corrispondenti, che passano rispettivamente pei due punti A_1, A_2 si segano sulla circonferenza $A_1A_2J \equiv c_1$, formando fra loro l'angolo β . Su questa proprietà si può fondare un metodo per costruire il sistema per

Fig. 16.



punti, quando esso sia determinato mediante due punti fondamentali A_1, A_2 insieme all'angolo β dei due sistemi ed al rapporto di similitudine C . Si costruirà prima su A_1A_2 come corda (Fig. 16) un segmento di circolo capace dell'angolo β , e questo sarà il circolo c_1 . Dato poi un punto B_1 di Σ_1 , la retta A_1B_1 segnerà c_1 in un punto J , e sulla congiungente A_2J si otterà il punto B_2 staccandone un segmento A_2B_2 tale, che sia $\overline{A_2B_2} : \overline{A_1B_1} = C$.

20. *Parabole determinate dalle rette corrispondenti.* — Consideriamo in Σ_1, Σ_2 due punteggiate corrispondenti $u_1 \equiv A_1B_1C_1 \dots, u_2 \equiv A_2B_2C_2 \dots$. Poiché queste sono simili, le congiungenti $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots$ involuppano una parabola tangente alle rette u_1, u_2 . Segniamo con J l'intersezione di queste due rette. I triangoli, che hanno rispettivamente per lati $u_1, u_2, A_1A_2; u_1, u_2, B_1B_2; \dots$, cioè i triangoli A_1A_2J, B_1B_2J, \dots , sono tutti formati da tre tangenti alla parabola. Ora è nota proprietà della parabola che *il circolo circoscritto ad un triangolo formato da tre tangenti passa sempre per il fuoco*; dunque i circoli circoscritti a tutti i triangoli precedenti passano tutti per il fuoco della parabola. Ma per la costruzione del n° 18 il punto di concorso di questi circoli non è altro che il centro di similitudine dei due sistemi; dunque è dimostrato il seguente.

Teorema 1°. — *Prese nei due sistemi due rette corrispondenti qualunque u_1, u_2 , le congiungenti i punti corrispondenti di esse involuppano una parabola; tutte le parabole così ottenute hanno per fuoco comune il centro di similitudine dei due sistemi.*

21. Dalla proprietà della parabola dianzi richiamata si deduce l'altra seguente.

Teorema 2°. — *Data una parabola e una sua tangente u , se per ogni punto X di u si conducono la seconda tangente e la congiungente col fuoco, l'angolo di queste due rette è costante qualunque sia X .*

Infatti, siano X, X' (Fig. 17) due punti di u, F il fuoco; conduciamo le due seconde tangenti $XT, X'T$, le quali s'incontrino in T , e le due congiungenti $XF, X'F$. Per il citato teorema, essendo $XX'T$ un triangolo formato da tre tangenti, il circolo ad esso circoscritto passa per il fuoco. Dunque gli angoli $FXT, FX'T$, come insistenti sullo stesso arco FT , sono uguali, come si volea dimostrare.

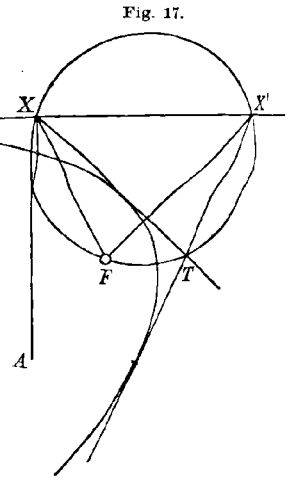


Fig. 17.

22. *Problema 1°.* — *Data una parabola, una sua tangente u ed un punto qualunque A del piano, determinare su u un punto X_0 tale, che l'angolo formato dalla congiungente X_0A con la seconda tangente da X_0 sia un massimo.*

Per un punto qualunque X di u (Fig. 17) sia XT la seconda tangente. L'angolo AXT , di cui si cerca il massimo, è la somma algebrica degli angoli AXF, FXT ; e poiché il secondo di questi è costante qualunque sia X (teor. 2°), il massimo di AXT avviene per lo stesso punto X_0 , pel quale avviene il massimo di AXF . Or siccome il punto F è fisso il problema è ridotto a quello di trovare sulla retta u un punto X_0 tale, che l'angolo sotto il quale i due punti A, F sono veduti da X_0 sia un massimo. Questo problema è quello trattato al n° 5, e si risolve costruendo un circolo che passi per A, F e sia tangente alla retta u .

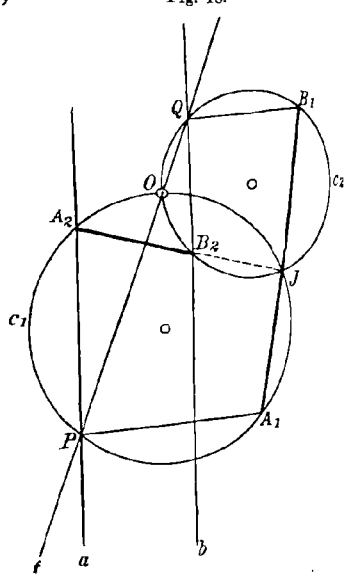


Fig. 18.

23. *Traslazione di uno dei due sistemi.* *La retta f e l'angolo τ .* — Consideriamo di nuovo (Fig. 18) i due segmenti fondamentali A_1B_1, A_2B_2 di due sistemi direttamente simili Σ_1, Σ_2 ; seguiamo con J il loro

punto di concorso, e tracciamo i due cerchi $A_1A_2J \equiv c_1$, $B_1B_2J \equiv c_2$, i quali s'incontrano ulteriormente nel centro di similitudine O . Pensiamo ora che il segmento A_2B_2 insieme all'intero sistema Σ_2 si muova in traslazione, in modo che, restando A_2B_2 sempre equipollente a sè stesso, i punti A_2B_2 descrivano due rette parallele a , b . Siano P l'ulteriore intersezione di a col circolo c_1 , Q l'ulteriore intersezione di b col circolo c_2 .

Dico che *in questo movimento i punti P , Q restano fissi, e le rette A_1P , B_1Q sono parallele*. Infatti, muovendosi JA_2 parallelamente a sè stessa, mentre il punto A_2 percorre a , l'angolo A_1JA_2 resta costante; quindi (n° 6) il circolo c_1 varia passando sempre per lo stesso punto della retta a , il quale non è altro che P . Similmente si dimostra che le circonferenze c_2 passano sempre pel punto Q . Così è dimostrata la prima parte dell'enunciato. Per dimostrare la seconda, osserviamo che dalla considerazione del circolo c_1 si deduce

$$\sphericalangle A_1JA_2 + A_2PA_1 = 180^\circ,$$

e parimente il circolo c_2 ci dà

$$\sphericalangle B_2JB_1 + B_1QB_2 = 180^\circ.$$

Sommando queste eguaglianze, e notando che

$$\sphericalangle A_1JA_2 + B_2JB_1 = 180^\circ,$$

si ottiene

$$\sphericalangle A_2PA_1 + B_1QB_2 = 180^\circ,$$

e, pel parallelismo delle rette a , b , questa ci dimostra che le rette A_1P , B_1Q sono parallele.

24. Ciò premesso, dimostreremo che *il punto O giace sempre sulla retta PQ* .

Infatti, per una posizione qualunque di Σ_2 durante la traslazione, siano rispettivamente O' , O'' le ulteriori intersezioni (supposte distinte) dei cerchi c_1 , c_2 con la retta PQ . Si avrà dal circolo c_1

$$\sphericalangle PA_1J + JO'P = 180^\circ,$$

e dal circolo c_2

$$\sphericalangle JB_1Q + QO''J = 180^\circ;$$

ma dal parallelismo sopra dimostrato delle rette A_1P , B_1Q segue

$$\sphericalangle PA_1J + JB_1Q = 180^\circ,$$

onde, sommando le due precedenti, viene

$$\sphericalangle JO'P + QO''J = 180^\circ,$$

e questa dimostra che i due punti O' , O'' della retta PQ coincidono in unico O , ch'è l'intersezione (oltre J) dei due cerchi.

25. I risultati dei due n¹ precedenti si possono riunire in questo unico teorema importantissimo per le nostre applicazioni:

Teorema 3°. — *Se di due sistemi direttamente simili uno si muove in traslazione nel piano comune, il centro di similitudine descrive una retta.*

Noi chiameremo questo luogo dei centri di similitudine *la retta f*. Per tracciarla basta disegnare le rette *a*, *b* percorse dai punti fondamentali A_1, A_2 del sistema mobile; poi, messi questi punti in una qualunque delle rispettive posizioni, trovare l'intersezione *J* delle rette $A_1 B_1, A_2 B_2$. Allora il circolo $A_1 J A_2 \equiv c_1$ determina su *a* il punto *P*, e la parallela da B_1 ad $A_1 P$ determina su *b* il punto *Q*: la congiungente *PQ* è la retta *f* cercata.

26. È pure importante l'angolo τ , che la retta *f* forma con la direzione *a* della traslazione. Diamo, sebbene non dovremo servircene, la sua espressione per mezzo dell'angolo $\beta = A_1 J A_2$ dei due sistemi e del rapporto di similitudine *C*. Essendo *O* il centro di similitudine, si ha

$$\frac{OA_2}{OA_1} = C;$$

e d'altra parte

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\text{sen } A_2 A_1 O}{\text{sen } A_1 A_2 O} = \frac{\text{sen } A_2 P O}{\text{sen } A_1 P O} = \frac{\text{sen } A_2 P O}{\text{sen } (A_1 P A_2 + A_2 P O)} = \frac{\text{sen } \tau}{\text{sen } (\beta + \tau)},$$

ed uguagliando, si ottiene

$$\text{sen } \tau = C \text{sen } (\beta + \tau),$$

da cui

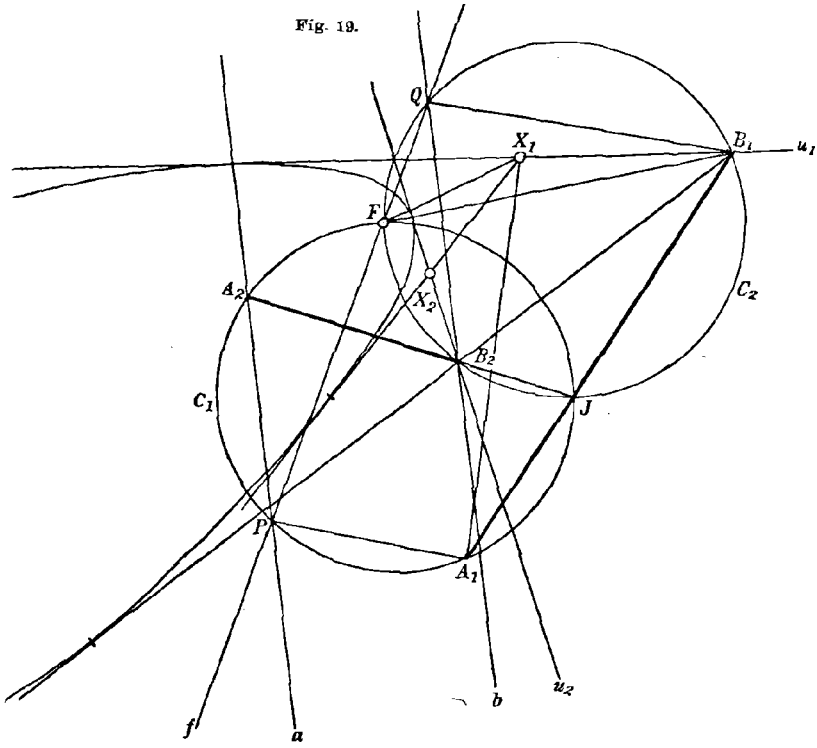
$$\text{tang } \tau = \frac{C \text{sen } \beta}{1 - C \cos \beta}.$$

È notevole che l'angolo τ è indipendente dalla direzione della traslazione *a*.

26. *Ritorno al problema 1°.* — Vogliamo ritornare al problema 1° del n° 22 riguardandolo da un nuovo punto di vista. Consideriamo ancora i due sistemi simili Σ_1, Σ_2 determinati dai segmenti fondamentali $A_1 B_1, A_2 B_2$ (Fig. 19), che si seghino nel punto *J*. Sia u_1 una retta passante per B_1 , ed u_2 la retta corrispondente per B_2 ; denotiamo con X_1 un punto mobile sopra u_1 , e con X_2 il punto corrispondente mobile sopra u_2 . Quando questi due punti si muovono sulle rispettive rette, la congiungente $X_1 X_2$ involupa una parabola, che ha per fuoco, *F*, il centro di similitudine dei due sistemi (n° 20), e questo è la seconda intersezione (oltre *J*) dei circoli $A_1 A_2 J \equiv c_1, B_1 B_2 J \equiv c_2$.

Noi vogliamo pensare applicato il problema 1° del n° 22 all'anzidetta parabola, riguardando u_1 come tangente fissa, ed A_1 come punto fisso del piano, onde il problema sarebbe di trovare sulla retta u_1 la

posizione del punto X_1 tale, che l'angolo $A_1X_1X_2$ formato dalla seconda tangente da X_1 con la congiungente X_1A_1 sia un massimo. Abbiamo veduto che questo problema si risolve cercando la posizione di X_1 , dalla quale i punti A_1, F sono veduti sotto un angolo massimo.



27. Come dal problema 1° del n° 5 passammo al problema 2° del n° 7, così, con una certa analogia vogliamo passare dal precedente problema 1° al seguente.

Problema 2°. — Tenendo fisso il sistema Σ_1 , e con esso la retta u_1 ed il punto A_1 (Fig. 19) e pensando che Σ_2 si muova in traslazione secondo una direzione assegnata a , determinare la posizione di Σ_2 , per la quale il massimo dell'angolo $A_1X_1X_2$ abbia un valore dato θ .

Per risolvere questo problema, osserviamo che

$$\sphericalangle A_1X_1X_2 = \sphericalangle A_1X_1F - \sphericalangle X_2X_1F$$

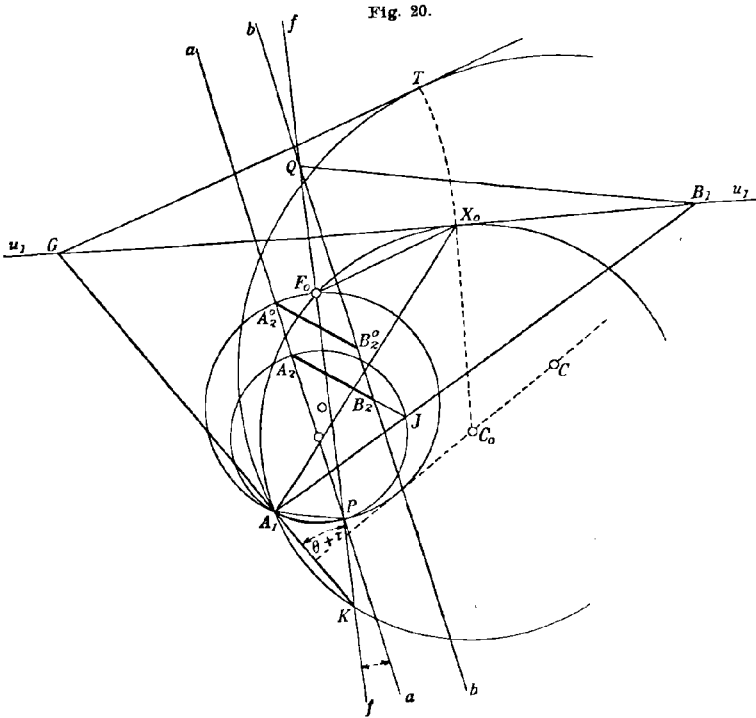
e si ha, pel teor. 2° (n° 21)

$$\sphericalangle X_2X_1F = \sphericalangle B_2B_1F, \text{ cioè } = \sphericalangle B_2QF = \tau$$

dove τ (angolo delle rette b, f) è l'angolo che la retta f forma con la direzione della traslazione. Sostituendo, si ha dunque

$$(1) \quad \sphericalangle A_1 X_1 X_2 = A_1 X_1 F' - \tau,$$

dove τ è costante, non solo quando il punto X_1 si muove sulla retta u_1 ma anche quando il sistema Σ_2 si muove in traslazione secondo la direzione a . Ne segue che il massimo di $\sphericalangle A_1 X_1 X_2$ avviene simul-



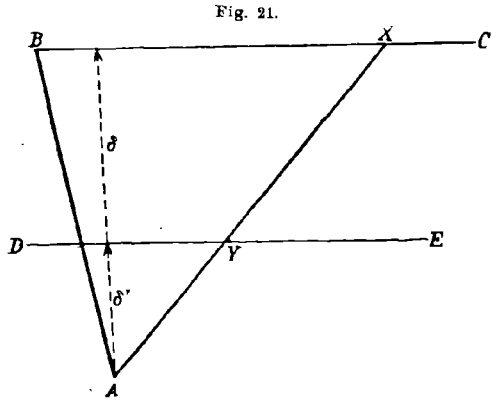
taneamente col massimo di $\sphericalangle A_1 X_1 F'$, e quando diventa $A_1 X_1 X_2 = \theta$, diventa insieme $A_1 X_1 F' = \theta + \tau$. Ma quando Σ_2 si muove in traslazione, in modo che A_1 percorra la retta a , il punto F' percorre la retta f (teor. 3°, n° 25); dunque il problema è ridotto a quest'altro: trovare sulla retta f il punto F_0 tale, che il massimo degli angoli, secondo i quali i punti A_1, F_0 sono veduti dai punti di u_1 abbia il valore dato $\theta + \tau$. Questo problema non è altro che quello trattato al n° 7

Per risolverlo (Fig. 20) condurremo per A_1 una retta inclinata con f dell'angolo $\theta + \tau$, la quale la incontra in un punto K , e poi un circolo, che passi per A_1, K e sia tangente alla retta u_1 . A tal uopo si conduca la perpendicolare dal punto di mezzo di AK , e su

essa si prenda un punto arbitrario C ; con centro in C e raggio CA_1 si descriva un circolo; poi dal punto G , in cui A_1K incontra u_1 si guidi la tangente a questo circolo, ed il punto di contatto T si ribalti sopra u_1 attorno a G . Questo ribaltamento dà il punto X_0 di contatto del circolo cercato, ed una normale da X_0 ad u_1 determina il centro C_0 di questo circolo, mentre C_0A_1 ne è il raggio. Il circolo così ottenuto incontra la retta f nel punto F_0 (oltre K) tale, che $\sphericalangle A_1X_0F_0$, sarà uguale a $\theta + \tau$, e sarà il massimo degli angoli, dai quali i punti A_1, F_0 sono veduti da un punto variabile di u_1 . Poi si costruisca il circolo A_1PF_0 , il quale segnerà la retta a nel punto A_2^0 (oltre P) tale, che la equipollente $A_2^0B_2^0$ ad A_2B_2 darà la posizione di questo segmento fondamentale, per la quale la posizione del sistema Σ_2 sodisfa alle condizioni del problema.

§ II. Il problema di Culmann.

28. *Assegnazione del problema.* — È noto che la resistenza di *coesione* di un corpo di terra si concepisce come agente nel piano, lungo il quale si teme lo scivolamento, in senso opposto al movimento tangenziale temibile, e tale, che la sua grandezza non può superare un certo valore massimo senza che lo scivolamento avvenga. Questo massimo valore si suppone indipendente dalla pressione normale e proporzionale all'area del piano. Il coefficiente di proporzionalità è una costante specifica, che chiamasi *coefficiente di coesione*, o brevemente *coesione*.



Sia di nuovo AB la parete, BC il profilo superiore del terrapieno (Fig. 21), AX un piano di distacco qualunque. Detto c il coefficiente di coesione, la massima resistenza di coesione, che può opporre il piano AX sarà $c \cdot AX$. Se, adottando una scala di forze, rappresentiamo questa resistenza con un segmento \overline{AY} , che portiamo sulla retta AX a partire da A , il luogo del punto Y , quando AX ruota attorno ad A , sarà una parallela DE alla retta BC : noi la chiameremo *retta di coesione*. Adotteremo come sopra per unità della scala delle forze il semi-prodotto del peso specifico π della terra per la distanza ortogonale δ da A a BC ; allora si ha

$$c \cdot \overline{AX} = \frac{1}{2} \pi \delta \cdot \overline{AY},$$

è decomposta nelle tre S, C, Q' rappresentate nel poligono $01'23$. Di queste quattro forze le due P, C sono note; della S si conosce la direzione, e la Q' è interamente ignota. Convieni per un momento cambiare nel poligono l'ordine delle forze, facendo seguire le due note, cioè condurre dal punto 0 l'equipollente $\overline{01}$ ad YA , e poi pensare decomposta la risultante $\overline{13}$ nelle due forze $12, 23$, che rappresentino risp: S, Q' . Così è meglio manifesto che la decomposizione in discorso della forza P è *semplicemente indeterminata*, poiché, essendo noti della retta $\overline{12}$ un estremo 1 e la direzione, qualunque punto 2 di questa retta dà una soluzione del problema. Invece di assegnare il punto 2 , è meglio far dipendere la soluzione dall'angolo φ' , che Q' forma con la normale esterna N al piano di distacco. Intanto lo stesso valore di S deve provenire dalle analoghe decomposizioni relative a tutti i possibili prismi, e questi dipendono dall'inclinazione α del piano di distacco con una direzione fissa; con ciò s'introduce un'altra indeterminazione semplice. Dunque, in conclusione, il problema della determinazione di S mediante la sola statica è *doppiamente indeterminato*.

31. Si conduca dal punto 3 la parallela $3n$ alla normale al piano di distacco, e dal punto 2 si cali la perpendicolare $\overline{24}$ a questa parallela; il punto 4 starà in linea retta coi punti $1', 2$, sicché $\overline{1'4}$ è la componente tangenziale T della pressione Q sul piano di distacco, e $\overline{43}$ ne è la componente normale. Or si ha $\overline{1'4} = \overline{1'2} + \overline{24}$, e poiché $\overline{1'2} = C = cl$, dove $l = AX$, risulta

$$(3) \quad T = cl + N \operatorname{tang} \varphi'.$$

Paragonata questa relazione con la (2), si vede che la condizione d'equilibrio si riduce alla espressione più semplice

$$(4) \quad \varphi' \overline{=} \varphi.$$

32. *Condizioni fornite dal principio di Coulomb.* — Questo principio, che noi richiamiamo con l'enunciato generale datone al n° 3, fornisce le due condizioni, che rendono determinato il problema. Facciamo dipendere S dalle due variabili φ', α qui sopra definite, sicché φ' può riguardarsi come una funzione di S e di α . Per la spinta attiva le due condizioni offerte dal principio di Coulomb sono le seguenti:

1. *L'angolo φ' dev' essere un massimo quando, tenendo costante S , si fa variare α .*

2. *Il valore di S deve esser tale, che questo massimo di φ' sia uguale a φ .*

Per formulare le analoghe condizioni relative alla spinta passiva, bisogna, non solo cambiare il segno di φ , ma anche il senso della componente di coesione, che dovrà essere AY invece di YA .

Nel caso della spinta attiva, per dimostrare che queste due condizioni equivalgono al principio di Coulomb, supponiamo che AX della Fig. 22 rappresenti il piano di scivolamento da esse determinato, e che la parte a destra della figura sia la decomposizione che vi corrisponde; quindi si legga φ al posto di φ' . Se si fa crescere S , il punto 2 si allontana dal punto 1', l'angolo φ' diminuisce, e quindi, per la (4), l'equilibrio del prisma ABX diventa più sicuro. Alla stessa conclusione si perviene *a fortiori* per altri prismi, pei quali, con lo stesso valore della spinta, è già $\varphi' < \varphi$. Se invece si

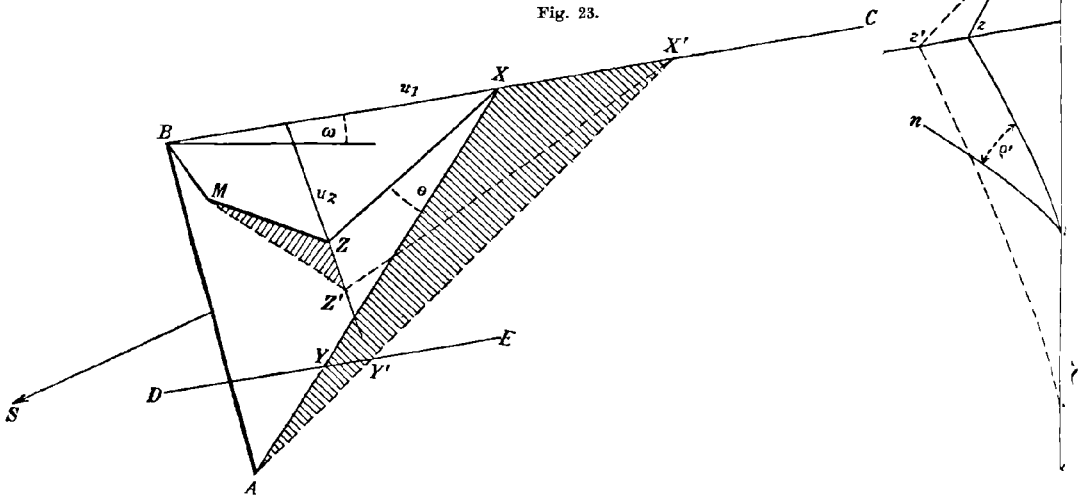


Fig. 23.

pensa che S decresca, ragionando analogamente si conclude che l'equilibrio del prisma ABX sarebbe rotto nel piano di scivolamento AX , e quindi il prisma si muoverebbe in basso strisciando su questo piano.

Per la spinta passiva la dimostrazione si può svolgere analogamente.

33. Sistemi simili determinati da un terrapieno. — Come nel capitolo primo ci limitiamo a trattare della spinta attiva. Adottando la solita scala delle forze, il segmento verticale $\overline{bx} = \overline{BX}$ (Fig. 23) rappresenterà il peso P del prisma ABX determinato da un piano di distacco qualunque AX . Conduciamo da b la parallela bm alla direzione supposta nota della spinta. Assegniamo arbitrariamente il valore di S , riportiamolo alla scala delle forze sulla predetta parallela in \overline{bm} ; poi conduciamo da m l'equipollente \overline{mz} ad YA , e congiungiamo z con x . Il quadrilatero $bmzx$ rappresenterà la decomposizione del peso P nelle tre componenti $S = \overline{bm}$, $C = \overline{mz}$, $Q' = \overline{zx}$ definite al n° 30. Se con

una rotazione di ampiezza $-(90^\circ + \omega)$ ed una traslazione spostiamo questo quadrilatero in modo che \overline{bx} si sovrapponga a \overline{BX} , i due punti m, z prenderanno le rispettive posizioni M, Z . Se allora, mantenendo il valore della spinta, consideriamo un altro piano di distacco AX' , e ripetiamo per questo le operazioni anzidette, i punti m, M restano fissi; i punti x, X si spostano sulle rispettive rette bc, BC ; il punto z' si ottiene conducendo $\overline{mz'}$ equipollente ad $\overline{Y'A}$. Se Z' e' la posizione di z' dopo lo sportamento, il triangolo MZZ' risulterà uguale al triangolo AYY' ; ma questo è direttamente simile al triangolo AXX' , dunque i due triangoli $MZZ' AXX'$ sono direttamente simili. Poiché ciò vale per qualunque altro piano di distacco, si conclude che, se X, X', X'', \dots sono successive posizioni di X sulla retta BC , e Z, Z', Z'', \dots sono le corrispondenti posizioni di Z , che giacciono pure evidentemente sopra una retta, i punti A, X, X', X'', \dots da una parte ed i punti M, Z, Z', Z'', \dots dall'altra appartengono a due sistemi direttamente simili Σ_1, Σ_2 .

La posizione di questi due sistemi può riguardarsi come determinata (n° 17) dalla coppia di punti corrispondenti A, M insieme all'angolo β dei due sistemi e al rapporto di similitudine C . Il primo ha il valore

$$\begin{aligned} \beta &= \sphericalangle (AX, MZ) = (AX, mz) + (mz, MZ) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \omega) = 90^\circ - \omega, \end{aligned}$$

e il valore di C è

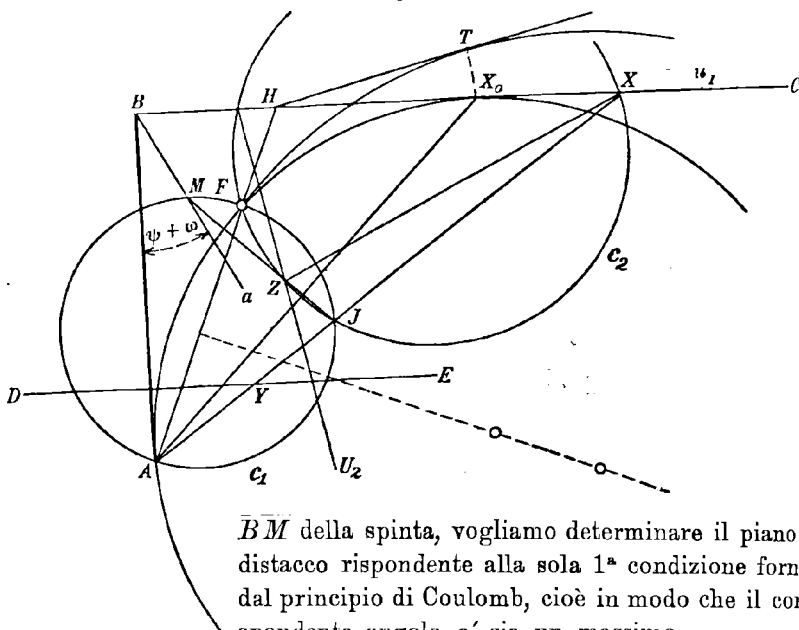
$$C = \frac{\overline{AY}}{\overline{AX}} = \frac{2c}{\pi\delta} = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Con questi dati si possono costruire direttamente i due sistemi simili col metodo prescritto al n° 19, sostituendo ai punti allora segnati con $A_1, A_2; B_1, B_2$ (Fig. 16) i punti $A, M; X, Z$, e quindi si può costruire il quadrilatero di decomposizione spostato relativo a un dato piano di distacco e a un dato valore della spinta, senza che sia necessario disegnare la parte a destra della figura 23., anzi, usufruendo della retta di coesione, non serve nemmeno ricorrere alla precedente espressione di C . Disegnata la parete AB (Fig. 24), la linea superiore BC e la retta di coesione DE , si guiderà per B la retta a formante con BA l'angolo $\psi + \omega$ (n° 9), che sarà il luogo dei punti M . Il valore dato S della spinta si porterà alla saputa scala in BM . Poi su \overline{AM} come corda si descriverà un segmento di circolo capace dell'angolo $90^\circ - \omega$: questo sarà il circolo c_1 . Data poi la linea di distacco AX , si segnerà il punto J , in cui essa incontra c_1 (oltre A), e sulla congiungente MJ si staccherà il segmento $\overline{MZ} = \overline{AY}$; si tratterà la con-

giungente ZX , e così sarà completo il quadrilatero di decomposizione $BMZX$ cercato.

34. *Problema preliminare.* — Torniamo a considerare la fig. 23, e proponiamoci un problema preliminare. Dato arbitrariamente il valore

Fig. 24.



\overline{BM} della spinta, vogliamo determinare il piano di distacco rispondente alla sola 1^a condizione fornita dal principio di Coulomb, cioè in modo che il corrispondente angolo ϱ' sia un massimo.

Denotando con θ l'angolo AXZ , abbiamo

$$\theta = \sphericalangle (XA, XZ) = (XA, xz) + (xz, XZ);$$

ma si ha

$$\sphericalangle (XA, xz) = 90^\circ + \varrho', \quad \sphericalangle (xz, XZ) = -(90^\circ + \omega),$$

onde

$$(5) \quad \theta = \varrho' - \omega.$$

Poiché dunque ϱ' differisce da θ per una costante, il massimo di ϱ' avviene simultaneamente col massimo di θ . Ma quando AX varia ruotando attorno ad A , i punti X, Z descrivono due punteggiate simili corrispondenti nei due sistemi Σ_1, Σ_2 , cioè X descrive la retta superiore $BC \equiv u_1$, e Z la retta corrispondente u_2 luogo dei punti Z ; dunque la congiungente XZ involupa una parabola tangente a queste due rette. Così l'angolo θ è formato dalla congiungente XA , dove A è un punto fisso, con la seconda tangente XZ alla parabola. Il problema del massimo di θ è dunque identico a quello assegnato al n° 22 e riprodotto

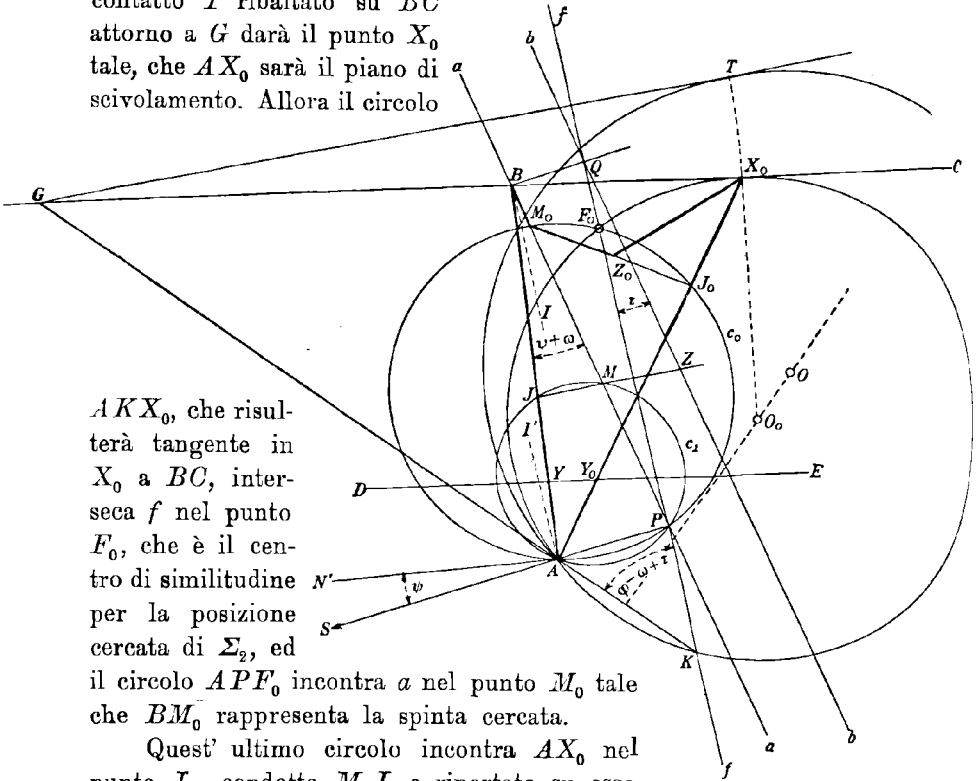
al n° 26. Per risolverlo si determini prima (Fig. 24) il centro di similitudine F dei due sistemi, che è insieme fuoco della parabola (n° 20), come seconda intersezione dei circoli $AMJ \equiv c_1$, $XZJ \equiv c_2$; poi si descriva (n° 26, 5) un circolo qualunque pei punti A , F , e dal punto H , in cui AF sega BC , gli si conduca la tangente; il punto di contatto T ribaltato su BC attorno ad H darà il punto X_0 tale, che il circolo AFX_0 risulterà tangente in X_0 a BC . Il piano di distacco AX_0 sarà quello, che risolve il problema.

35. Determinazione della spinta. — Ma il problema precedente, che abbiamo svolto solamente per concatenare le idee, non serve allo scopo, perché dobbiamo pur soddisfare alla 2ª condizione di Coulomb, cioè determinare \overline{BM} (Fig. 24) in modo, che il massimo di φ' abbia il valore φ . Or è evidente che, quando M si sposta sulla retta BM , il segmento fondamentale \overline{MZ} , e con esso tutto il sistema Σ_2 , si muovono in traslazione secondo la direzione di BM . Dunque il nostro definitivo problema, cioè di determinare la spinta rispondente alle due condizioni di Coulomb, è identico a quello assegnato al n° 27. La retta ivi segnata con a è sostituita da BM , la retta u_1 da BC , ed il punto A_1 da A ; e poiché il massimo φ' deve avere il valore φ , il massimo di θ avrà il valore $\varphi - \omega$ (equaz. (5)). Il problema si risolverà, come fu prescritto al n° 27, costruendo prima la retta f e l'angolo τ , e determinando su f un punto F_0 tale, che il massimo degli angoli, sotto i quali i punti A , F_0 sono veduti dai punti di BC abbia il valore dato $\varphi - \omega + \tau$.

Ecco come verrebbero particolarizzate le operazioni della fig. 20. Il punto d'intersezione della retta a con la u_1 rappresenterà il ciglio superiore B della parete, e la a formerà con la parete l'angolo $\psi + \omega$. Inoltre, poiché A_1B_1 rappresenta un piano di distacco qualunque, sarà più semplice assumere come tale la parete stessa. Le operazioni sarebbero dunque le seguenti (Fig. 25). Si conduca per B la retta a formante con la parete BA l'angolo $\psi + \omega$. Poi, preso su essa un punto qualunque M , si costruisca su \overline{AM} come corda un arco di circolo capace dell'angolo $90^\circ - \omega$: questo sarà il circolo c_1 . L'intersezione di a con c_1 (oltre A) sarà il punto P . Per ottenere il punto Z di Σ_2 corrispondente a B , basta congiungere M col punto J , in cui AB sega c_1 (oltre A) e riportare sulla congiungente il segmento $MZ = \overline{AY}$, dove Y è l'intersezione di AB con la retta di coesione. Allora \overline{AB} , \overline{MZ} faranno l'ufficio di segmenti fondamentali dei due sistemi Σ_1 , Σ_2 . Poi la parallela da Z ad a sarà la retta b , e la parallela da B ad AP segherà b nel punto Q ; la congiungente PQ sarà

la retta f , e l'angolo di f con a (o con b) sarà τ . Dal punto A si condurrà una retta inclinata con f dell'angolo $\varphi - \omega + \tau$, la quale incontrerà f in un punto K , e BC in un punto G . Condotta la normale ad AK dal suo punto di mezzo e fatto centro in un punto qualunque O di essa, con raggio OA si descriverà un circolo, al quale si condurrà la tangente da G ; il punto di contatto T ribaltato su BC attorno a G darà il punto X_0 tale, che AX_0 sarà il piano di scivolamento. Allora il circolo

Fig. 25.



AKX_0 , che risulterà tangente in X_0 a BC , interseca f nel punto F_0 , che è il centro di similitudine per la posizione cercata di Σ_2 , ed il circolo APP_0 incontra a nel punto M_0 tale che BM_0 rappresenta la spinta cercata.

Quest'ultimo circolo incontra AX_0 nel punto J_0 , condotta M_0J_0 e riportato su essa $\overline{M_0Z_0} = \overline{AY_0}$, dove Y_0 denota l'intersezione di AX_0 con la retta di coesione, si ottiene il punto Z_0 tale, che $BM_0Z_0X_0$ rappresenta la decomposizione determinata dal principio di Coulomb. Così è risoluto il problema.

36. Semplificazioni. — La costruzione precedente può essere semplificata per le seguenti notevoli considerazioni.

1°. Abbiamo per costruzione

$$\sphericalangle PBA = \psi + \omega, \text{ ed } \sphericalangle APB = 90^\circ - \omega;$$

ma si ha dal triangolo APB

$$\sphericalangle PAB = 180^\circ - (PBA + APB),$$

quindi

$$\sphericalangle BAP = 180^\circ - (90^\circ + \psi) = 90^\circ - \psi;$$

si ha poi direttamente, conducendo AS nella direzione della spinta,

$$\sphericalangle SAB = 90^\circ + \psi,$$

dunque

$$\sphericalangle SAB + BAP = 180^\circ,$$

cioè la retta AP sta sul prolungamento della direzione della spinta guidata per A .

2°. Conduciamo da B la parallela BI e da A la parallela AI' alla retta f . Si avrà

$$\sphericalangle PBI = \tau,$$

e poiché

$$\sphericalangle PBA = \psi + \omega,$$

sarà

$$\sphericalangle I'AB = IBA = PBA - PBI = \psi + \omega - \tau;$$

ma si ha poi

$$\sphericalangle GAI' = AKP = \varphi - \omega + \tau,$$

onde

$$\sphericalangle GAB = GAI' + I'AB = \varphi + \psi.$$

Così la retta KAG non è altro che la retta di direzione.

3°. Denotiamo con V il punto d'intersezione di f con BC , e pensiamo condotta la linea di distacco AV (che non è segnata nella fig. 25 per non confondere il disegno). Se invece di un circolo qualunque del fascio (AK) scegliamo quello, che passa per V , l'ulteriore intersezione di esso con BC è il punto V' coniugato di V nella involuzione determinata su questa retta dai circoli del fascio, e si ha

$$\sphericalangle AV'V = \varphi - \omega + \tau,$$

onde V' può costruirsi come intersezione di BC con una retta, che formi con l'orizzontale per A l'angolo $\varphi + \tau$, cioè con la retta, che sarebbe quella di natural declivio della terra, se l'angolo φ fosse incrementato di τ . Ottenuto V' , per costruire il piano di scivolamento, anziché far uso del predetto circolo, si può adoperare la costruzione di Poncelet coi punti V, V', G .

37. Costruzione pratica definitiva. — Per queste proposizioni la costruzione semplificata della spinta, che noi adottiamo come definitiva, è la seguente. (Fig. 26, Tav. 3).

Disegnata la retta AS nella direzione della spinta e poi per B la retta a formante con la parete l'angolo $\psi + \omega$, l'intersezione di queste

raggio ΩA si descriva un circolo, che segherà a in un punto M , e BA in un punto J . Sulla retta JM a partire da M si porti $\overline{MZ} = \overline{AY}$, e per Z si tracci la retta b parallela ad a . Allora una parallela da B ad AP sega b nel punto Q , e PQ è la retta f che determina l'angolo τ . Per A si conduca: 1° la retta di direzione AG , che sega f in K ; 2° la retta AV' inclinata con l'orizzontale per A dell'angolo $\varphi + \tau$. Segnato con V il punto d'incontro di f con BC , coi punti V, V', G si esegua la costruzione di Poncelet, che darà il piano di scivolamento AX_0 . Allora il circolo AKX_0 sega f nel punto F_0 , ed il circolo APF_0 sega a nel punto M_0 tale, che BM_0 rappresenta la spinta ridotta. La formula

$$S = \frac{1}{2} \pi \delta \cdot \overline{BM_0}$$

permetterà di calcolarne il valore numerico.

§ III. Spinta sotto l'azione della sola coesione.

38. *Applicazione del principio di Coulomb — Determinazione della spinta* — Supponiamo che la sola azione resistente allo scivolamento del corpo di terra sia la coesione. Benché non possa mai ammettersi che l'attrito non agisca, pure questa astrazione ci sarà utile per poter poi combinare l'effetto del solo attrito studiato nel capitolo primo con quello della sola coesione, che vogliamo studiare nel presente paragrafo.

Dalla precedente risoluzione del problema di Culmann possiamo evidentemente ricavare quella dell'attuale problema ponendo $\varphi = 0$. Ma poiché il problema di Culmann dev' essere, a mio credere, abbandonato, non essendo esatto ritenere che gli effetti dell'attrito e della coesione si sommino, si dovrebbe, in una esposizione della teoria, che non premetta, come noi abbiám fatto, il problema di Culmann, procedere allo studio dell'attuale problema direttamente. Accenniamo questo procedimento.

La condizione d'equilibrio di un prisma qualunque sarà, invece della (2) del n° 29, la seguente:

$$T \leqslant cl,$$

che paragonata con la (3) del n° 21 valevole anche adesso, si riduce all'espressione più semplice

$$\rho' \leqslant 0.$$

La prima condizione offerta dal principio di Coulomb (n° 32) resta inalterata, ma la seconda sarà sostituita dalla seguente.

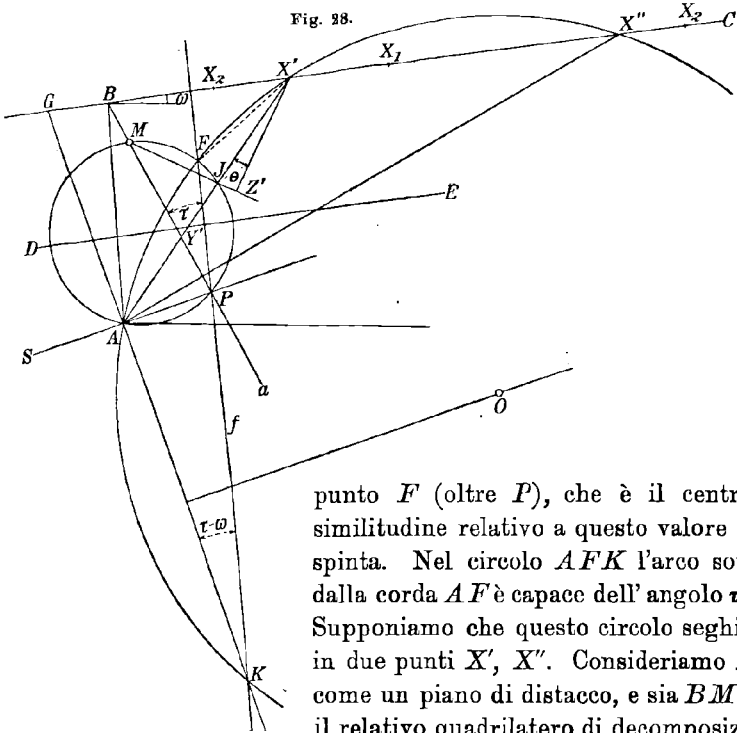
Il valore di S deve esser tale, che il massimo di ρ' sia zero.

Non ci fermeremo qui a dimostrare che questa 2ª condizione insieme alla 1ª enunciata al n° 32 equivalgono al principio di Coulomb, poiché

drilatero per avere una conferma della giustezza delle costruzioni grafiche, perché dovrà risultare X_0Z_0 perpendicolare ad M_0Z_0 .

39. *Diedri e piani limiti di scivolamento* — Diamo un valore arbitrario BM alla spinta (Fig. 28.). Il circolo APM sega f nel

Fig. 28.



punto F (oltre P), che è il centro di similitudine relativo a questo valore della spinta. Nel circolo AFK l'arco sotteso dalla corda AF è capace dell'angolo $\tau - \omega$. Supponiamo che questo circolo seghi BC in due punti X', X'' . Consideriamo AX' come un piano di distacco, e sia $BMZ'X'$ il relativo quadrilatero di decomposizione.

L'eguaglianza (1) del n° 27 trascritta con le presenti notazioni ci dà

$$\sphericalangle AX'Z' = AX'F - \tau, \text{ cioè } \theta = AX'F - \tau;$$

ma per costruzione si ha

$$\sphericalangle AX'F = \tau - \omega,$$

quindi

$$\theta = -\omega,$$

onde, per la (5) del n° 34,

$$(1) \quad \varphi' = \theta + \omega = 0;$$

Dunque il piano di distacco AX' si trova in equilibrio limite. Alla stessa conclusione s'è perviene pel piano AX'' . Se X_1 è un punto di BC compreso fra X' ed X'' , si ha evidentemente

$$\sphericalangle AX_1F > \tau - \omega,$$

e quindi

$$\varphi' = \theta + \omega > 0;$$

dunque nel piano AX_1 la coesione è vinta, e l'equilibrio non è possibile. Al contrario, per punti, come X_2 , situati fuori del segmento $X'X''$ si ottiene analogamente $\varphi' < 0$, e quindi l'equilibrio sussiste. Così il diedro $X'AX''$ racchiude tutti i piani di distacco, pei quali l'equilibrio non è possibile col valore assunto per la controspinta. Noi lo chiameremo *diedro di scivolamento*, e diremo *piani limiti di scivolamento* i due piani AX' , AX'' che lo limitano. Al variare di BM le coppie di punti X' , X'' costituiscono su BC l'involuzione determinatavi dai cerchi del fascio (AK) . Così è dimostrato pel caso che agisca la sola coesione il seguente teorema, che fa riscontro a quello del n° 11 relativo all'ipotesi che agisca il solo attrito:

Le coppie dei piani limiti di scivolamento relativi a valori successivi della spinta costituiscono una involuzione.

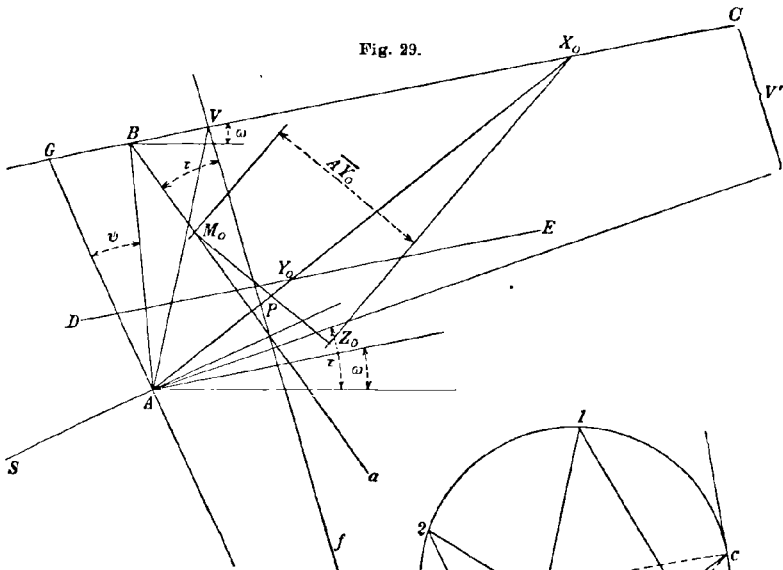
Il piano di scivolamento determinato dal principio di Coulomb è evidentemente uno dei piani doppi di questa involuzione.

Ciò posto, per valori abbastanza grandi della controspinta \overline{BM} il terrapieno sta in equilibrio, e quindi i diedri di scivolamento non esistono, perché i cerchi AFK non segano BC . Decrescendo la controspinta, essa raggiunge un valore tale, che il corrispondente circolo del fascio (AK) tocca BC in un punto X_0 ; allora AX_0 è il piano doppio utile dell'involuzione, cioè il piano di scivolamento rispondente al principio di Coulomb. Decrescendo ancora la controspinta fino a zero, i cerchi AKF cominciano a incontrare BC in due punti, e quindi esistono effettivi diedri di scivolamento.

È importante osservare, perché ce ne serviremo in seguito, che anche per un piano limite di scivolamento, come AX' , e pel corrispondente valore della spinta, il quadrilatero di decomposizione ha l'angolo in z' retto, perché $\varphi' = 0$, come dice l'equazione (1).

40. Altra costruzione del piano di scivolamento. — Per costruire il piano di scivolamento possiamo far uso di una costruzione analoga a quella, che abbiamo proposto al n° 14 pel caso del solo attrito. Tracciamo un circolo qualunque (Fig. 29.), e prendiamo su esso un punto qualunque O , dal quale pensiamo condotte le parallele ai piani limiti di scivolamento; queste costituiranno un fascio in involuzione, e le loro intersezioni col circolo determinano su questo una involuzione di punti. Le congiungenti i punti coniugati di questa involuzione concorrono in un punto S , che chiameremo *centro d'involuzione*. Per determinare questo punto bastano due coppie di piani limiti di scivolamento. Come tali possiamo scegliere: 1° la coppia AV , AV' definita al n° 36, e per questa bisogna osservare che nel caso presente V è sem-

pre l'intersezione di f con BC^1), mentre AV' forma con l'orizzontale per A rivolta verso il terrapieno l'angolo τ ; 2° la coppia costituita dalla retta di direzione AG e dalla parallela da A a BC , che forma con l'orizzontale l'angolo ω . La prima coppia determini sul circolo i punti 1, 1' e la seconda i punti 2, 2'. Le congiungenti 11', 22' determinano il punto S . Una delle due tangenti da S al circolo lo tocca



in un punto c tale, che Oc ha la direzione del piano di scivolamento AX_0 , che così può costruirsi.

41. Ottenuto così il piano di scivolamento, per dedurne la spinta il prosieguo delle operazioni può procedere come è detto al n° 38. Però, siccome con questo metodo si deve far uso del punto K , che cade d'ordinario a grande distanza, proponiamo invece la seguente costruzione molto più semplice (Fig. 29). Nel quadrilatero di decomposizione cercato $BM_0Z_0X_0$ l'angolo in Z_0 dovrà essere retto, ed il lato M_0Z_0 dovrà essere uguale ad AY_0 . Inoltre l'angolo AX_0Z_0 avrà il valore $-\omega$. Per queste proprietà è facile costruire direttamente il quadrilatero. Si prenda sul circolo l'arco OO' di ampiezza -2ω ; la retta

1) Nella figura, per non confondere il disegno, abbiamo ommesso in parte le operazioni preliminari, che servono alla determinazione della retta f .

cO formerà con cO' l'angolo $-\omega$, e quindi cO' sarà la direzione di X_0Z_0 . Conduciamo dunque da X_0 una parallela a questa direzione e un'altra parallela situata alla distanza AY_0 dalla prima. Quest'ultima incontrerà la retta a nel punto M_0 tale, che $\overline{BM_0}$ rappresenterà la spinta cercata. Il quadrilatero potrà facilmente completarsi.

§ IV. Spinta sotto le azioni simultanee dell'attrito e della coesione.

42. *Applicazione del principio di Coulomb.* — Non essendo esatto che gli effetti dell'attrito e della coesione si sommino, bisogna ritenere che nel corpo di terra avvenga lo scivolamento lungo un piano di distacco, quando in questo è vinta la maggiore delle due resistenze. Con le notazioni precedentemente adottate, siccome la resistenza d'attrito è misurata da $N \tan \varphi$ e quella di coesione da cl , bisogna distinguere i seguenti tre casi.

1°. Se $N \tan \varphi > cl$, la condizione d'equilibrio è $T < N \tan \varphi$. Se, restando costante N , cresce T , quando questa raggiunge il valore $T = N \tan \varphi$, si ha uno stato di equilibrio limite, nel quale la coesione è già vinta. Crescendo ancora T , cioè per $T > N \tan \varphi$, avviene lo scivolamento. Diremo che in questo caso lo scivolamento avviene *per vinto attrito*.

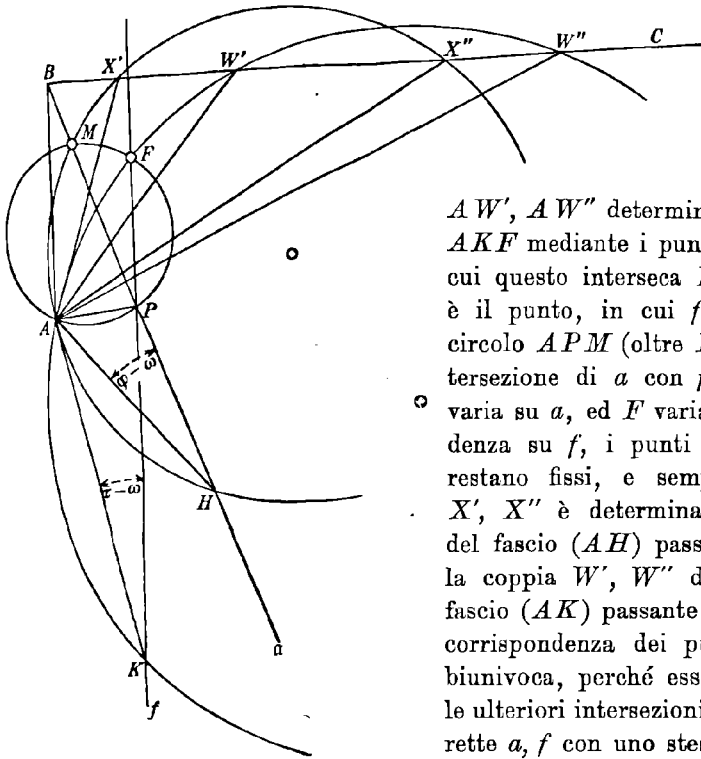
2°. Se $N \tan \varphi < cl$, la condizione d'equilibrio è analogamente $T < cl$. Se, restando costante N , cresce T , quando questa raggiunge il valore $T = cl$, l'equilibrio è allo stato limite, e l'attrito è già vinto. Se cresce ancora T , cioè per $T > cl$, avviene lo scivolamento. Diremo allora che esso avviene *per vinta coesione*.

3°. Se $N \tan \varphi = cl$, la condizione d'equilibrio è indifferentemente $T < N \tan \varphi$, oppure $T < cl$. Se T , crescendo, raggiunge il valore comune dei secondi membri, si ha un equilibrio limite, ed oltrepassato questo valore, avviene lo scivolamento *per vinto attrito e per vinta coesione insieme*.

Per applicare alla determinazione della spinta il principio di Coulomb, bisogna assumerlo nella forma più generale, che ne abbiamo dato al n° 3, e quindi la spinta attiva avrà un valore assoluto tale, che per valori della contropinta alquanto minori di questo l'equilibrio non sia possibile, mentre per valori alquanto maggiori esso sussista. L'equilibrio limite, che si raggiungerà applicando il principio, non potrà avvenire che in uno dei tre stati qui sopra distinti, ed il problema è ridotto a trovare quale di questi si raggiunga per primo facendo crescere la spinta a partire da zero. A differenza di ciò che avveniva nei casi fin qui trattati, in questo non sempre avviene, come riconosceremo in seguito, che la spinta così determinata corrisponda ad un massimo analitico.

43. *Proposizioni preliminari.* — Premettiamo alcune proposizioni. Abbiamo veduto al n° 11 che, condotta per A (Fig. 30) la retta, che forma con a l'angolo $\varphi - \omega$, la quale la incontri nel punto H (ivi denotato con P), se si dà un valore arbitrario $B\bar{M}$ alla spinta, i relativi piani limiti di scivolamento contro l'attrito sono determinati dal circolo AHM mediante i punti X', X'' , in cui questo interseca BC . Abbiamo veduto poi al n° 39 che, guidata per A la retta, che formi con f l'angolo $\tau - \omega$, la quale la incontri nel punto K , i piani limiti

Fig. 30.



di scivolamento contro la coesione, per lo stesso valore della spinta, sono

AW', AW'' determinati dal circolo AKF mediante i punti W', W'' , in cui questo interseca BC , mentre F è il punto, in cui f è segata dal circolo APM (oltre P), e P è l'intersezione di a con f . Quando M varia su a , ed F varia in corrispondenza su f , i punti A, P, H, K restano fissi, e sempre la coppia X', X'' è determinata dal circolo del fascio (AH) passante per M , e la coppia W', W'' dal circolo del fascio (AK) passante per F . Ma la corrispondenza dei punti M, F è biunivoca, perché essi sono sempre le ulteriori intersezioni (oltre P) delle rette a, f con uno stesso circolo del

fascio (AP) .¹⁾ Dunque anche la corrispondenza delle coppie X', X'' con le coppie W', W'' è biunivoca. Così è dimostrato il seguente teorema fondamentale.

Teorema — *Le coppie dei piani limiti di scivolamento relativi allo attrito e di quelli relativi alla coesione riferite per valori comuni della spinta costituiscono due involuzioni proiettive sovrapposte.*

1) Le due punteggiate determinate sulle rette a, f dei punti M, F sono simili, ed hanno unito il punto P , come facilmente si dimostra.

44. Ora in due involuzioni siffatte sono da distinguere i seguenti elementi singolari¹⁾:

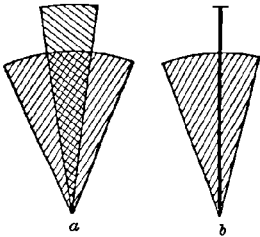
1°. gli elementi doppi di ciascuna delle due involuzioni;

2°. gli elementi di ciascuna delle due involuzioni, che corrispondono agli elementi doppi dell'altra, e che noi, con denominazione già usata e attinta dall'analisi, chiameremo elementi *di diramazione*; per ciascuna involuzione essi sono quattro distinti in due coppie;

3°. gli elementi *uniti*, cioè quelli, in cui coincidono due elementi appartenenti a coppie corrispondenti delle due involuzioni. È noto che, trattandosi di involuzioni quadratiche, gli elementi uniti sono quattro.

45. *Il piano di scivolamento in diversi casi.* — Noi vogliamo considerare un terrapieno tale, che non si tenga in equilibrio da sè. Ne segue che pel valore zero della spinta i due diedri di scivolamento re-

Fig. 31.



lativi all'attrito ed alla coesione debbono essere reali ed avere una parte comune, poiché soltanto una parte siffatta può racchiudere piani, lungo i quali lo scivolamento sia possibile. È evidente che, crescendo la contropinta a partire da zero, essa deve raggiungere valori tali, per cui l'equilibrio sia possibile. Ora ciò può avvenire in due modi: o perché uno dei due diedri diventi immaginario, passando prima pel piano doppio, o

perché i due diedri, pur restando reali, si separino. Dunque, crescendo la spinta a partire da zero, uno di questi due fatti deve verificarsi:

1° *Caso* — Se avviene prima, che uno dei due diedri diventi immaginario, esso si riduce prima ad un piano doppio, il quale è interno all'altro diedro reale. I due diedri si trasformano, al crescere della spinta, passando dallo stato che nella Fig. 31 è segnato con a) a quello segnato con b) e, successivamente, il diedro divenuto piano doppio sparisce. Questo piano doppio è allora il piano di scivolamento determinato dal principio di Coulomb, perché, per valori della spinta minori di quello che gli corrisponde, lo scivolamento è possibile, essendovi diedri reali con parte comune, mentre per valori maggiori non è possibile, mancando uno dei due diedri.

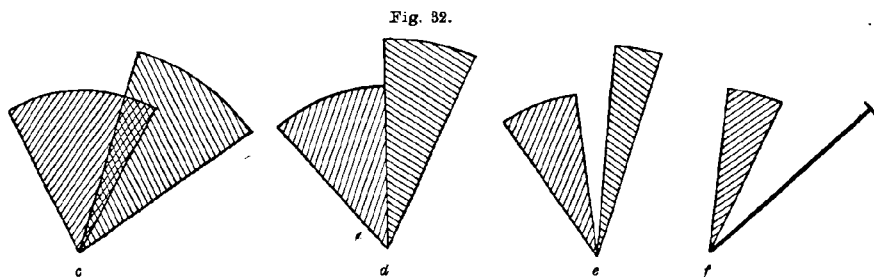
Dunque in questo caso il piano di scivolamento è un piano doppio

1) Per la definizione generale di due involuzioni proiettive si può consultare Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geom., Leipzig, 1876, pag. 208 e segg. Per le involuzioni di 2° grado v. Battaglini G. *Sulle forme binarie dei primi quattro gradi*, Giorn. di Battaglini, Vol. III, n° 9; e Capelli A. *Sopra la corrispondenza (2, 2)*; ibid, Vol. XVII, § IV. In queste ultime però si fa uso della teoria delle forme algebriche con notazione simbolica.

di una delle due involuzioni. Esso è compreso fra i due piani di diramazione, che gli corrispondono nell'altra.

2° Caso — Se avviene prima che i due diedri si separino, al momento della separazione un piano limite di uno di essi coincide con un piano limite dell'altro, costituendo un piano unito. La trasformazione è indicata nella Fig. 32 col passaggio dallo stato c) allo stato d). Il piano unito è allora il piano di scivolamento determinato dal principio di Coulomb, perché, per valori della spinta minori del corrispondente, esistono diedri reali con parte comune, mentre per valori maggiore i diedri sono separati, come vedesi in e).

Dunque in questo caso il piano di scivolamento è un piano unito delle due involuzioni. Allora, crescendo ancora la spinta, uno dei due diedri diventa immaginario, riducendosi prima ad un piano doppio, co-



me vedesi indicato in f), il quale non è compreso fra i due piani di diramazione, che gli corrispondono nell'altra involuzione.

È poi evidente che nel 1° caso lo scivolamento tende ad avvenire per vinto attrito o per vinta coesione, secondo che il piano doppio rappresenti un diedro di scivolamento per attrito o per coesione; in altri termini esso avviene nel 1° o nel 2° dei modi distinti al n° 42. Invece nel 2° caso lo scivolamento tende ad avvenire per vinto attrito e per vinta coesione insieme, cioè nel 3° dei tre modi distinti al n° 42.

In entrambi i casi, crescendo la spinta a partire da zero, s'incontrerà prima il piano doppio utile di una delle due involuzioni¹⁾, al quale corrispondono nell'altra piani di diramazione reali, come vedesi indicato negli stati b) della Fig. 31 ed f) della Fig. 32. Crescendo la spinta più oltre, i piani della prima involuzione diventano immaginari, e quindi al piano doppio utile dell'altra, il quale successivamente si incontra, corrispondono nella prima piani di diramazione immaginari. Dunque:

1) Qui per *utili* intendiamo i piani doppi corrispondenti a valori positivi della spinta, per distinguerli da gli altri, che non entrano nella quistione.

Le coppie di piani di diramazione corrispondenti ai piani doppi utili delle due involuzioni sono una reale e l'altra immaginaria.

Asseriamo per ora come un semplice fatto, del quale ci renderemo ragione in seguito (n.º 84), che per terrapieni relativamente alti il piano doppio utile, a cui corrispondono piani di diramazione reali, è quello relativo all'attrito, cioè quello che sarebbe piano di scivolamento, se la coesione non vi fosse, e per terrapieni bassi è quello relativo alla coesione, cioè quello che sarebbe piano di scivolamento se non vi fosse l'attrito.

46. Costruzione del piano di scivolamento. — Sulle precedenti proprietà fondiamo il metodo per la determinazione del piano di scivolamento e quindi del valore della spinta rispondente al principio di Coulomb.

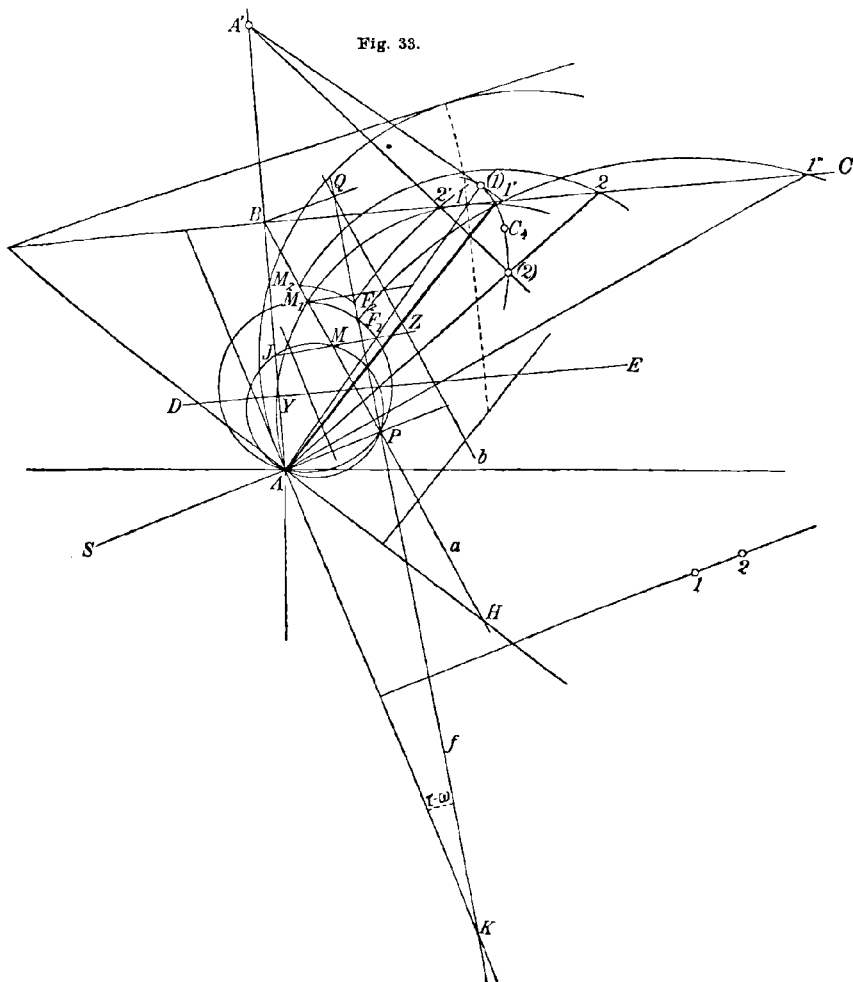
Per un terrapieno alto si determini coi metodi del capitolo secondo il piano doppio relativo allo attrito, e si costruiscano, come diremo, i piani di diramazione corrispondenti relativi alla coesione. La costruzione stessa dirà se questi risultano reali, e se quindi veramente il terrapieno è da trattarsi come alto. Se questi due piani comprendono il piano doppio anzidetto, si è nel 1º caso del n.º prec.^{te} (Fig. 31 b), ed il piano doppio relativo all'attrito è anche piano di scivolamento per le due resistenze simultanee, il quale perciò resta determinato coi metodi del capitolo secondo. Se, al contrario, il piano doppio relativo all'attrito resta esterno al diedro formato dai piani di diramazione corrispondenti relativi alla coesione, si è nel 2º caso del n.º precedente (Fig. 32 f.) ed allora il piano di scivolamento per le azioni simultanee sarà il piano unito prossimo, il quale dovrà espressamente costruirsi come diremo.

Invece, per un terrapieno basso, si determinerà coi metodi del presente capitolo, § 3 il piano doppio relativo alla coesione, e si costruiranno i piani di diramazione corrispondenti relativi all'attrito. Il risultato verificherà se essi sono veramente reali. Se questi comprendono il piano doppio, si è nel 1º caso, e il problema è risolto coi metodi del § III; se invece non lo comprendono, si è nel 2º caso, ed il piano di scivolamento sarà un piano unito da costruirsi.

Prescriviamo tre procedimenti: i due primi avranno una maggiore importanza teorica; il terzo è quello che conviene seguire in pratica.

47. 1º Procedimento. Consideriamo le due involuzioni di punti, che i piani limiti di scivolamento relativi all'attrito ed alla coesione determinano sulla retta superiore BC , e diciamo I_a la prima ed I_c la seconda. Pensiamo l'involuzione I_a proiettata dal punto A e la I_c da

un altro punto A' (Fig. 33.), che per comodità scegliamo sul prolungamento di AB . Le due involuzioni di raggi così determinate sono proiettive, cioè ad ogni coppia della prima corrisponde una ed una sola coppia della seconda e reciprocamente. È noto che allora il luogo dei punti d'intersezione di due raggi corrispondenti è una curva



del 4° ordine C_4 . I punti d'intersezione di C_4 con BC sono i punti uniti delle due involuzioni proiettive sovrapposte I_a, I_c .

Supponiamo dapprima che si tratti di un *terrapieno alto* (Fig. 33). Tracciamo anzitutto la retta di coesione DE , la retta di direzione per la coesione (formante con la parete l'angolo ψ), la retta di direzione per l'attrito (formante con la parete l'angolo $\varphi + \psi$), e le rette a, f ,

onde derivano i punti H, K . Allora si costruisca con uno dei metodi svolti nel capitolo secondo (nella fig. si è adottato il metodo del n.º 9) il piano di scivolamento $A1$ relativo all'attrito. Il circolo $A1H$ sega ulteriormente a nel punto M_1 . Il circolo APM_1 sega f nel punto F_1 , ed il circolo AF_1K sega BC nei due punti di diramazione $1', 1''$ di I_c^1 , i quali sono reali, e ciò conferma che il terrapieno è da trattarsi come alto. Se 1 risultasse interno al segmento $1'1''$, ciò proverebbe che saremmo nel 1.º caso (n.º 45), e quindi $A1$ sarebbe il piano di scivolamento. Ma siccome nella fig. esso risulta esterno (a sinistra), siamo nel 2.º caso, e si deve procedere alla ricerca del piano unito prossimo antecedente.

Intanto i raggi $A1, A'1'$ (se $1'$ è il più vicino ad 1) si segano nel punto (1), che appartiene alla curva C_4 . Questa è inoltre tangente in (1) alla retta $A'1'$, perché, essendo $A1$ un raggio doppio, in (1) si trovano riuniti due punti infinitamente vicini della curva giacenti su $A'1'$. Preso poi su BC un punto 2 a destra di 1 , non troppo lontano, si ripeta la costruzione precedente pel piano di distacco $A2$, trovando così un punto $2'$ corrispondente di 2 (fra i due punti $2', 2''$ forniti dalla costruzione si sceglierà quello $2'$ che giace a sinistra di 2). Allora i raggi $A2, A'2'$ si segano in un punto (2), che appartiene a C_4 .

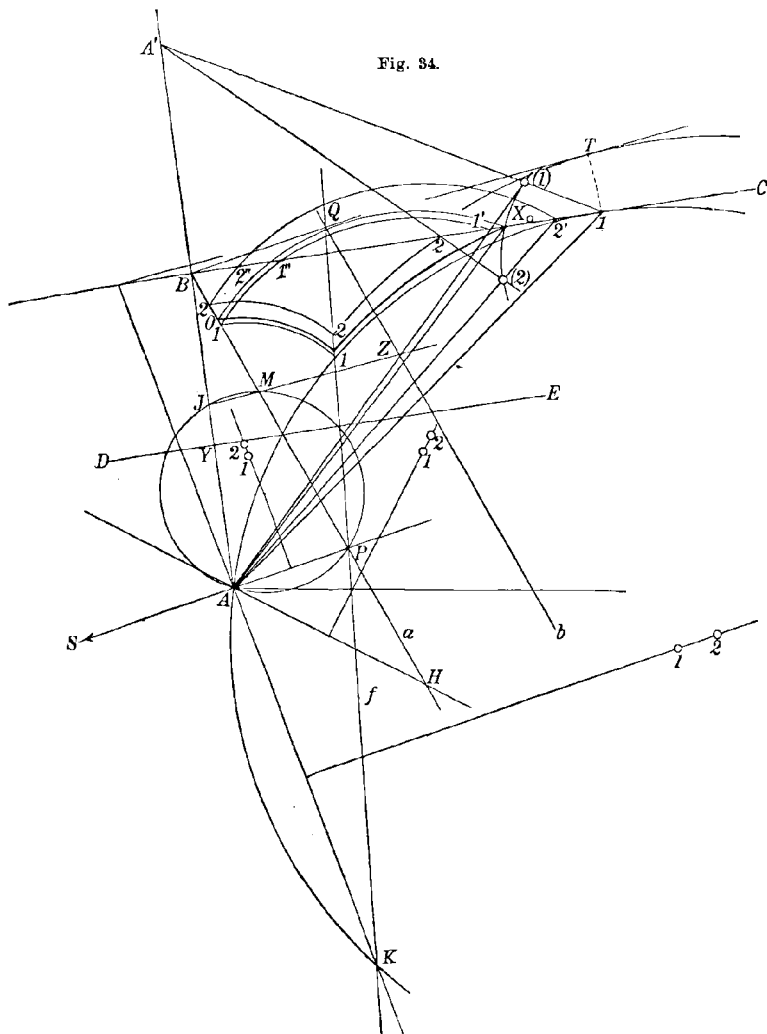
Conoscendo così i due punti (1), (2) di C_4 e la tangente nel primo di essi, e se si è operato in modo che il secondo punto riesca abbastanza vicino al primo, si potrà costruire con sufficiente approssimazione un piccolo arco di C_4 , il quale attraversa la retta BC . Questo punto d'intersezione è il punto unito utile, e proiettandolo da A , si ottiene il piano di scivolamento sotto l'azione simultanea delle due resistenze.

Ottenuto il piano di scivolamento, sarà facile dedurne la spinta e il relativo quadrilatero di decomposizione; ma noi abbiamo omissa nella fig. queste operazioni, per non confondere il disegno.

Supponiamo ora che si tratti di un *terrapieno basso* (Fig. 34). Fatte le stesse operazioni preliminari, troviamo col metodo del n.º 38 seguito nella Fig. 27. il piano doppio $A1$ relativo alla coesione. Il circolo del fascio (AK) passante per 1 (ed ivi tangente a BC) sega f nel punto segnato pure con 1 , ed il circolo del fascio (AP) passante per questo punto sega a nel punto pure segnato con 1 ; finalmente il circolo del fascio (AH) passante per quest'ultimo punto sega BC in due punti reali $1', 1''$, che sono i punti di diramazione corrispon-

1) Praticamente, per disegnare questi circoli conviene tracciare le rette dai centri dei tre fasci di circoli $(AP), (AH), (AK)$ come vedonsi in figura. Allora sarà facile trovare con tutta la precisione desiderabile i centri che servono, operando per tentativi col compasso.

denti al punto doppio 1 di I_c . Ciò conferma che il terrapieno è da considerarsi come basso. Se questi punti di diramazione comprendessero il punto doppio 1, ciò proverebbe che il piano doppio $A1$ relativo alla coesione sarebbe anche il piano di scivolamento per le due



resistenze riunite; ma se, come nella fig., non lo comprendono, il piano di scivolamento sarà un piano unito prossimo.

Intanto i raggi $A'1$, $A1'$ (se $1'$ è il più vicino ad 1) si segano nel punto (1), che appartiene alla curva C_4 , ed ivi questa è tangente alla retta $A1'$. Allora, scelto su BC un altro punto 2 a sinistra di 1

49. 3° *Procedimento (pratico)*. — Con questo procedimento molto più semplice si risparmia in molti casi la costruzione della retta f e dell'angolo α . Esso può adottarsi come pratico.

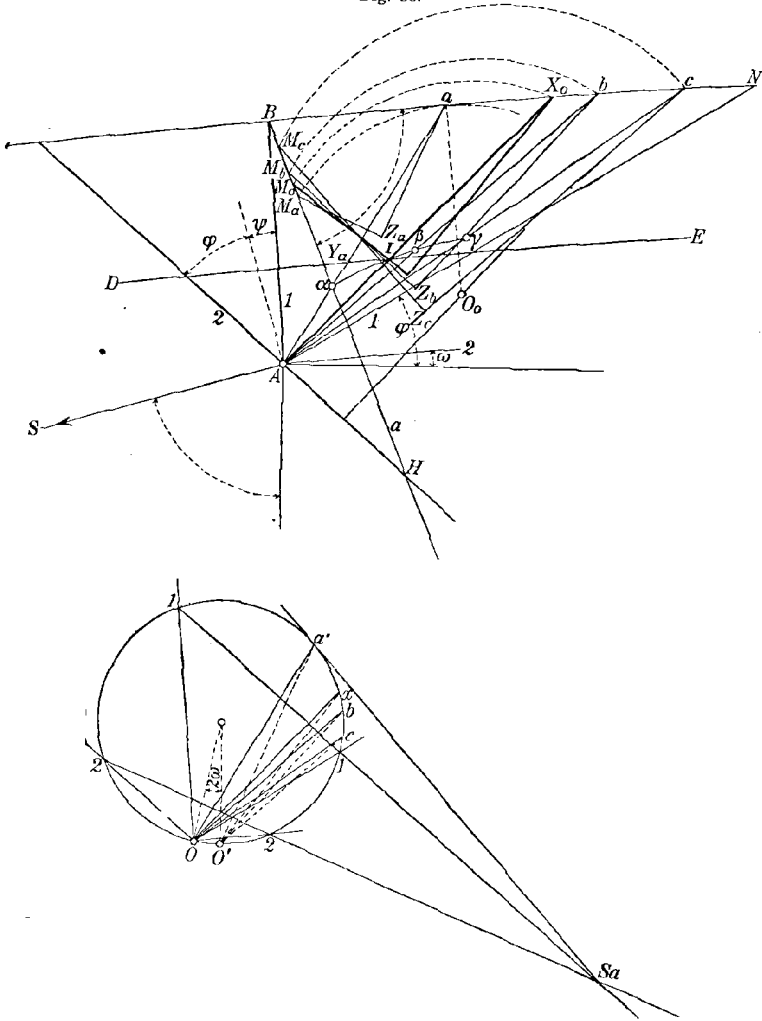
Premettiamo una considerazione. Costruita (Fig. 35) la retta di direzione per l'attrito e la retta a , che si seghino in H , qualunque circolo del fascio (AH) sega BC in due punti X' , X'' , che determinano un diedro di scivolamento per attrito (n° 11), e sega a in un punto M , che determina in \overline{BM} il valore corrispondente della spinta. Assumiamo come piano di distacco uno di questi due piani limiti, AX' . L'angolo $AX'M$ è $= \varphi - \omega$. Ne segue che, se conduciamo $X'Z$ facente con $X'A$ l'angolo $-\omega$, sarà l'angolo $ZX'M = \varphi$, e quindi $X'Z$ avrà la direzione della normale al piano di distacco dopo lo sportamento del poligono di decomposizione, e guidando MZ perpendicolare ad $X'Z$, avremo la direzione del piano di distacco stesso dopo il detto spostamento. I segmenti \overline{MZ} , $\overline{ZX'}$ rappresentano perciò risp: (in grandezza) le componenti tangenziale T e normale N dell'azione sul piano di distacco rappresentata da $\overline{MX'}$. Se questo valore di T è $> cl$, cioè se $\overline{MZ} > \overline{AY'}$, ciò vuol dire che, con questa spinta, su questo piano di distacco la coesione è vinta, e se risulta $<$, essa non è vinta.

Ecco ora il procedimento, che vogliamo suggerire. Si costruisca (Fig. 36*) la retta di scivolamento per solo attrito, ed in questo caso è preferibile il metodo prescritto al n° 14, cioè, si tracci un circolo qualunque. e poi, preso su esso un punto O , si determini il centro d'involuzione, S_a relativo all'attrito, e mediante questo si costruisca il raggio doppio Oa' della involuzione di raggi di centro O ; la parallela Aa ad Oa' dà il piano di scivolamento per solo attrito. Il cerchio del fascio (AH) passante per a determina sulla retta a il punto M_a , che dà il valore corrispondente della spinta. Poi si stacchi dal primo circolo l'arco OO' di ampiezza -2ω , si conduca aZ_a parallela ad $O'a'$ ed M_aZ_a perpendicolare a questa retta. Allora l'angolo AaZ_a sarà $= -\omega$, onde M_aZ_a è la componente tangenziale T per questa soluzione. Segnato con Y_a l'incontro Aa con la retta di coesione, se risulta $\overline{M_aZ_a} > \overline{AY_a}$, ciò prova che nel piano di distacco Aa la coesione è vinta, e siccome l'attrito è allo stato limite; Aa è anche il piano di scivolamento per l'azione simultanea delle due resistenze. Noi siamo allora nel 1° dei due casi distinti al n° 45, e il problema è risoluto come se la coesione non esistesse.

Se però, come nella figura, risulta $\overline{M_aZ_a} < \overline{AY_a}$, la coesione non è vinta; si è nel 2° caso del n° 45, ed il piano di scivolamento cercato sarà un piano unito prossimo corrispondente ad un valore minore della spinta. Questo sarà un piano limite di scivolamento tanto per l'attrito

che per la coesione (nº. 45). Pel primo carattere esso sarà determinato da un circolo del fascio (AH); pel secondo carattere dovrà dare il corrispondente $\overline{MZ} = \overline{AY}$. Bisogna dunque che, facendo ruotare

Fig. 36.



la retta di distacco intorno ad A , e ripetendo le operazioni, si colga la sua posizione tale, che questa eguaglianza risulti soddisfatta.

Si porti perciò $\overline{M_a Z_a}$ su Aa in \overline{Aa} , determinando così il punto α , che cade al di sotto della retta di coesione. Poi si prendano su BC altri punti b, c, \dots a destra di a e non troppo discosti, e si operi per questi come si è fatto per a . Per condurre le rette bZ_b, cZ_c, \dots

facenti con bA, cA, \dots l'angolo $-\omega$, serve lo stesso punto O' già determinato. I segmenti $\overline{M_b Z_b}, \overline{M_c Z_c}, \dots$ così ottenuti si riportino su Ab, Ac, \dots risp: in $\overline{A\beta}, \overline{A\gamma}, \dots$, ottenendo i punti β, γ, \dots , i quali, se b, c, \dots furono infine scelti abbastanza discosti da a , finiranno (supponiamolo nel caso in discorso) per cadere al di sopra della retta di coesione. Si congiungano i punti a, β, γ, \dots con una curva continua, la quale segnerà la retta di coesione in un punto I . La retta AIX_0 dà il piano di scivolamento cercato, ed il circolo del fascio (AH) passante per X_0 sega la retta a nel punto M_0 tale, che $\overline{BM_0}$ rappresenta la spinta rispondente al principio di Coulomb. Sarà utile completare, facendo uso del solito punto O' , il quadrilatero $BM_0Z_0X_0$, per verificare se risulti esattamente $\overline{M_0Z_0} = \overline{AY_0}$, e nel caso contrario poter correggere qualche piccolo errore derivante dal tracciamento della curva.

Può accadere che, per quanto si faccia diminuire la spinta fino a zero, non si ottengano mai punti della serie $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ giacenti al di sopra della retta di coesione. Noi ne saremo avvisati operando con una spinta nulla e col piano di natural declivio come piano di distacco: se anche allora il punto della serie cade sotto la retta di coesione, è certo che vi cadono tutti. In questo caso non esiste alcun piano limite di scivolamento per l'attrito, dove la coesione sia vinta, e ciò è segno che il piano di scivolamento non è nè il piano doppio relativo all'attrito, nè alcun piano unito; esso è dunque il piano doppio relativo alla coesione. Questo piano può allora costruirsi direttamente coi metodi del § III. E' questo il solo caso, in cui la costruzione della retta f sia necessaria.

50. Osservazione. — Tutta la discussione del presente § fa emergere questo importante risultato, che nella ipotesi che le resistenze di attrito e di coesione non si sommino, non sempre la resistenza di coesione agisce diminuendo il valore della spinta dovuto al solo attrito, come avviene sempre nella ipotesi contraria (problema di Culmann). Ciò avviene soltanto quando il piano di scivolamento è un piano unito o il piano doppio relativo alla coesione, ma non avviene quando esso è il piano doppio relativo all'attrito, cioè quando il terrapieno è molto alto (o la coesione molto piccola). Dunque *in terrapieni molto alti, o per coesioni molto piccole, la presenza della coesione non influisce più a diminuire la spinta relativa all'attrito.*

51. Caso particolare. — Chiudiamo il presente capitolo notando alcune specialità, che avvengono in un caso particolare molto frequente in pratica, cioè quello, in cui la retta superiore sia orizzontale, la parete verticale, e la spinta si ritenga normale alla parete cioè orizzontale. In questo caso si ha $\omega = \varepsilon = \psi = 0$ (Fig. 37). La retta a coincide con

Ma si ha dalla figura

$$(P, X) = 180^\circ + \alpha, \quad (S, X) = \psi + 90^\circ - \varepsilon + \alpha, \quad (Q, X) = -(\varrho + 90^\circ)$$

onde

$$\begin{aligned} \cos(P, X) &= -\cos \alpha, & \cos(S, X) &= -\sin(\psi - \varepsilon + \alpha), & \cos(Q, X) &= -\sin \varrho, \\ \sin(P, X) &= -\sin \alpha, & \sin(S, X) &= \cos(\psi - \varepsilon + \alpha), & \sin(Q, X) &= -\cos \varrho, \end{aligned}$$

sicché le equazioni diventano

$$(1) \quad \begin{aligned} P \cos \alpha - S \sin(\psi - \varepsilon + \alpha) - Q \sin \varrho &= 0, \\ P \sin \alpha + S \cos(\psi - \varepsilon + \alpha) - Q \cos \varrho &= 0. \end{aligned}$$

In queste si deve esprimere P in α . Or si ha dal triangolo BAX ,

$$(a) \quad P = \frac{1}{2} \pi \cdot BA \cdot AX \sin(\alpha - \varepsilon),$$

$$(b) \quad \overline{BA} : \overline{AX} = \sin AXB : \sin XBA;$$

guidata AC' parallela a BC , si vede che

$$\sphericalangle AXB = XAC' = -\alpha + 90^\circ - \omega, \quad \sphericalangle XBA = \omega + 90^\circ + \varepsilon,$$

onde

$$\sin AXB = \cos(\omega + \alpha), \quad \sin XBA = \cos(\varepsilon + \omega).$$

Si segni con Z l'altezza della parete e con l quella del piano di distacco, cioè

$$BA = Z, \quad AX = l.$$

Così si ottiene dalla (b)

$$l = Z \frac{\cos(\varepsilon + \omega)}{\cos(\omega + \alpha)},$$

e dalla (a)

$$P = \frac{1}{2} \pi Z^2 \frac{\cos(\varepsilon + \omega) \sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\omega + \alpha)}.$$

Noi metteremo in vista i fattori che non contengono α , ponendo

$$(2) \quad \frac{1}{2} \pi Z^2 \cos(\varepsilon + \omega) = a, \quad Z \cos(\varepsilon + \omega) = b$$

e scriveremo:

$$(3) \quad l = \frac{b}{\cos(\omega + \alpha)}, \quad P = a \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\omega + \alpha)}.$$

53. Caso del solo attrito. Applicazione del principio di Coulomb. — Eliminando Q fra le (1), si ottiene

$$P \cos(\alpha + \varrho) - S \sin(\varrho + \psi - \varepsilon + \alpha) = 0,$$

ed esprimendo P in α ,

$$(4) \quad \Phi \equiv a \sin(\alpha - \varepsilon) \cos(\alpha + \varrho) - S \cos(\omega + \alpha) \sin(\varrho + \psi - \varepsilon + \alpha) = 0.$$

Questa è la relazione fra S , ϱ , α , di cui fu parola al n° 8. Secondo il principio di Coulomb ivi esplicitato per questo caso, dovremmo

da questa ricavare ϱ in funzione di S , α , e queste due variabili sarebbero determinate dalle condizioni

$$(5) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = 0, \quad \varrho_{\max} = \varphi;$$

ma conviene meglio operare direttamente sulla (4) secondo la regola per trovare i massimi o minimi delle funzioni implicite. Riguardando in essa ϱ come funzione di S , α e derivando parzialmente rispetto ad α , si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = 0,$$

e non potendo essere $\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = \infty$, se non per $S = \infty$, ipotesi da escludersi, così la prima delle (5) equivale a $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$.

Così alle condizioni (5) possiamo sostituire le altre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \quad \varrho = \varphi.$$

Ma poiché allora, per ottenere la prima di queste, si deve derivare parzialmente Φ rispetto ad α , e per la seconda deve porsi nella derivata così ottenuta $\varrho = \varphi$, si perviene evidentemente allo stesso risultato ponendo, nella funzione Φ , $\varrho = \varphi$ prima della derivazione rispetto ad α . Ciò vuol dire che basta porre

$$(4') \quad \Phi' \equiv a \sin(\alpha - \varepsilon) \cos(\alpha + \varphi) - S \cos(\omega + \alpha) \sin(\varphi + \psi - \varepsilon + \alpha) = 0,$$

e alle (5) sostituire l'unica condizione

$$(5') \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} = 0;$$

le equazioni (4'), (5') determinano S ed α .

54. Osservazione sulla espressione „*prima di massima spinta*“. — Facciamo una digressione. Se riguardiamo la (4') come determinatrice di S in funzione di α , possiamo proporci un secondo problema, cioè quello dei massimi o minimi della funzione S così definita. Questo secondo problema non è più quello di Coulomb; ma si scorge subito che ha le stesse soluzioni. Infatti il metodo della derivazione delle funzioni implicite dà

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi'}{\partial S} \frac{dS}{d\alpha} = 0,$$

e non potendo essere $\frac{\partial \Phi'}{\partial S} = \infty$, l'equazione $\frac{dS}{d\alpha} = 0$, che risolve il nuovo problema, equivale a $\frac{\partial \Phi'}{\partial \alpha} = 0$, cioè alla (5'), che risolve il problema di Coulomb.

Intanto la $\Phi' = 0$ può evidentemente riguardarsi come dedotta al pari della $\Phi = 0$ dalle equazioni d' equilibrio del prisma generico, quando però si supponga che *per tutti* i prismi la reazione Q formi con la normale al piano di distacco l' angolo costante φ , ed il nuovo problema consiste nella ricerca dei massimi o minimi valori, che si ottengono per S , quando si facciano le decomposizioni del peso P in quest' altro modo. Noi asseriamo senza dimostrarlo, che la soluzione del problema di Coulomb attribuita al nuovo problema dà per questo *un massimo* e non un minimo di S .¹⁾

Gli autori posteriori a Coulomb fino a qualche tempo addietro facevano la decomposizione del peso del prisma appunto in questo secondo modo, e svolgevano la teoria chiamandola *teoria del prisma di massima spinta*, dando a questo concetto un senso, come se fra tutte le spinte possibili così ottenute convenisse per sicurezza adottare la massima, come quella che mette in maggior pericolo il muro. Ma questa maniera d' intendere fu poi giustamente oggetto di censure, e se ne fece carico ingiustamente al Coulomb, poiché fu obbiettato che la spinta deve concepirsi come *una* per tutti i possibili prismi, e pei diversi piani di distacco deve avvenire che gli angoli ϱ siano in generale minori di φ , e per un solo, il piano di scivolamento, sia $\varrho = \varphi$; quindi il supporre che in tutti questi piani sia $\varrho = \varphi$ è illogico.

La critica è giusta, ma può riprendersi soltanto il modo di porre il problema, poiché il risultato è esatto per la ragione qui indicata. In ogni modo l' errore deve attribuirsi ai successori di Coulomb, che guastarono il concetto di lui, e la presente discussione mette in chiara luce l' equivoco, che ha mantenuto questo errore, poiché mostra come e perché il secondo problema, sebbene non possa prendersi a fondamento logico della teoria, ha la stessa soluzione del primo. Recentemente il Kötter ha difeso Coulomb da questa accusa in un importante articolo pubblicato negli atti della Società matematica tedesca.²⁾

55. *Involuzione dei piani limiti di scivolamento.* — Torniamo all' equazione (4'), ed osserviamo che, siccome essa può ricavarsi dalle equazioni di equilibrio (1) ponendovi $\varrho = \varphi$ ed eliminando Q , se in essa diamo ad S un valore qualunque, i corrispondenti valori di α , che se ne deducono, fissano quei piani di distacco, pei quali la componente Q forma con la normale l' angolo φ . Questi non sono altro che i piani limiti

1) Si dovrebbe studiare la derivata seconda. Ma si può verificare facilmente per via grafica, disegnando il triangolo delle forze 012 (Fig. 5) pel piano di scivolamento di Coulomb e per altri piani di distacco prossimi.

2) F. Kötter, Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1893.

di scivolamento definiti al n° 11; dunque l'equazione (4') rappresenta appunto l'involuzione di questi piani. Per metterne in evidenza la forma involutiva, basta svincolare α , esprimere tutto in tang α ed ordinare. Così, ponendo per brevità di scrittura

$$\text{tang } \alpha = t,$$

l'equazione prende la forma

$$(6) \quad \Phi_\alpha \equiv (At^2 + 2Bt + C) + S(A't^2 + 2B't + C') = 0,$$

dove

$$(7) \quad \begin{aligned} A &= -a \cos \varepsilon \sin \varphi, & A' &= \cos(\varphi + \psi - \varepsilon) \sin \omega, \\ B &= \frac{1}{2} a \cos(\varphi - \varepsilon), & B' &= -\frac{1}{2} \cos(\varphi + \psi - \varepsilon + \omega), \\ C &= -a \sin \varepsilon \cos \varphi, & C' &= -\sin(\varphi + \psi - \varepsilon) \cos \omega, \end{aligned}$$

e questa rappresenta appunto una involuzione di raggi, ciascuno dei quali è determinato dalla coordinate t (coordinate tangenti). L'involuzione è determinata dalle due coppie fondamentali corrispondenti ai due valori 0 ed ∞ del parametro S , e ad ogni valore di S corrispondono due elementi coniugati dell'involuzione determinati dalle radici dell'equazione di secondo grado in t $\Phi_\alpha = 0$.

Cerchiamo il significato delle due coppie fondamentali. La prima, corrispondente al valore $S = 0$, è data dalle radici dell'equazione

$$At^2 + 2Bt + C = 0;$$

fattevi le sostituzioni (7), si trovano per α i valori

$$\alpha = \varepsilon, \quad \alpha = 90^\circ - \varphi,$$

al primo dei quali corrisponde la parete e al secondo il piano di natural declivio della terra, come già sappiamo.

La seconda coppia, corrispondente al valore $S = \infty$, è determinata dalle radici dell'equazione

$$A't^2 + 2B't + C' = 0,$$

e fattevi le sostituzioni (7), si trovano per essa le due soluzioni

$$\alpha = -(\varphi + \psi - \varepsilon), \quad \alpha = 90^\circ - \omega,$$

alla prima delle quali corrisponde la retta di direzione e alla seconda la parallela alla retta superiore del terrapieno, come fu trovato per via sintetica.

56. Determinazione della spinta e del piano di scivolamento. — Le espressioni della spinta e del valore di t , che determina il piano di scivolamento, si otterranno (n° 53) dalle equazioni (4)', (5)', val quanto dire dalla (6) e dall'equazione

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = 0$$

(poiché $\frac{d \operatorname{tang} \alpha}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ non può esser nulla). Quest'ultima, sviluppata, diviene

$$(8) \quad (A + SA')t + (B + SB') = 0.$$

Da questa ricavando t e sostituendo nella (6), si ottiene

$$(9) \quad (B + SB')^2 - (A + SA')(C + SC') = 0;$$

questa con le apposizioni (7) è dunque l'equazione, che dà con una delle sue radici l'espressione della spinta secondo il principio di Coulomb. È facile riconoscere che essa dà i valori di S , a cui corrispondono i raggi doppi dell'involuzione; infatti, affinché l'equazione $\Phi_\alpha = 0$ in t abbia le radici uguali, è necessario che si annulli il discriminante, che è appunto il primo membro della (9).

Per ottenere il valore di t , che dà il piano di scivolamento, dovremo invece fra le (6), (8) eliminare S . Or dalla (8) si ricava

$$S = -\frac{At + B}{A't + B'},$$

e sostituendo nella (6), dopo facili riduzioni, si ottiene

$$(11) \quad (AB' - A'B)t^2 + (AC' - A'C)t + (BC' - B'C) = 0,$$

e questa, con le apposizioni (9), determina con una delle sue radici il piano di scivolamento.

Come si vede, le formole fondamentali, a cui siamo pervenuti, sono le (9), (11). La sostituzione dei valori di A, A' etc. in queste conduce a formole troppo complicate, ragion per cui non si dà generalmente l'espressione analitica di S . Ma in pratica, volendo calcolare la spinta con metodo analitico, converrà in generale calcolarsi prima i detti coefficienti dati dalle (7), facendo uso dei logaritmi, e poi sostituirli nella (9), che così diventerà un'equazione numerica di 2° grado.

57. Caso della sola coesione. Applicazione del principio di Coulomb. — Passiamo a supporre che agisca la sola coesione. Richiamiamo la (3) del n° 31, cioè

$$T = cl + N \operatorname{tang} \varrho',$$

la quale, poiché (Fig. 22)

$$T = Q \operatorname{sen} \varrho, \quad N = Q \cos \varrho,$$

può scriversi

$$Q \operatorname{sen} \varrho = cl + Q \cos \varrho \operatorname{tang} \varrho'.$$

Allora le equazioni d'equilibrio (1), nella prima delle quali si ponga questo valore di $Q \operatorname{sen} \varrho$, divengono:

$$P \cos \alpha - S \operatorname{sen} (\psi - \varepsilon + \alpha) - cl - Q \cos \varrho \operatorname{tang} \varrho' = 0$$

$$P \operatorname{sen} \alpha + S \cos (\psi - \varepsilon + \alpha) - Q \cos \varrho = 0,$$

da cui, eliminando $Q \cos \varrho$,

$$\Phi \equiv P(\cos \alpha - \operatorname{tang} \varrho' \operatorname{sen} \alpha) - c l \\ - S[\operatorname{sen}(\psi - \varepsilon + \alpha) + \operatorname{tang} \varrho' \cos(\psi - \varepsilon + \alpha)] = 0.$$

Secondo il principio di Coulomb (n° 38), si dovrebbe da questa equazione ricavare ϱ' in funzione di S , α , e i valori di queste due variabili sarebbero determinati dalle condizioni

$$(12) \quad \frac{\partial \varrho'}{\partial \alpha} = 0, \quad \varrho'_{max} = 0.$$

Ora, ragionando come al n° 53, si deduce che queste condizioni equivalgono alle due

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \quad \varrho' = 0,$$

e che perciò basta derivare rispetto ad α la funzione Φ , in cui si sia posto $\varrho' = 0$ prima della derivazione, cioè la funzione

$$(13) \quad P \cos \alpha - c l - S \operatorname{sen}(\psi - \varepsilon + \alpha) = 0,$$

la quale, esprimendovi P ed l in α mediante le (3) diviene

$$(14) \quad \Phi \equiv a \operatorname{sen}(\alpha - \varepsilon) \cos \alpha - bc - S \cos(\psi - \varepsilon + \alpha) \cos(\omega + \alpha) = 0,$$

onde alle (12) si sostituisce l'unica

$$(15) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0;$$

le (14), (15) fanno determinare S , α .

58. Involuzione dei piani limiti di scivolamento. — La (13) può ottenersi dalla prima delle (1), ponendovi $Q \operatorname{sen} \varrho = cl$, e perciò essa, ed anche la (14), esprime che pei valori di α ch'essa determina in funzione di S , la componente tangenziale di Q è uguale alla massima resistenza di coesione, che può opporre il piano di distacco corrispondente. Così, dato ad S un valore qualunque, i valori corrispondenti di α determinano quelli, che al n° 39 furono chiamati piani limiti di scivolamento per la coesione, e la (14) non è altro che l'equazione della involuzione di questi piani. La forma involutiva viene in evidenza trasformando l'equazione in

$$(16) \quad \Phi_c \equiv (A_1 t^2 + 2 B_1 t + C_1) + S(A'_1 t^2 + 2 B'_1 t + C'_1) = 0,$$

dove $t = \operatorname{tang} \alpha$, e sono

$$(17) \quad \begin{aligned} A_1 &= -bc, & A'_1 &= \cos(\psi - \varepsilon) \operatorname{sen} \omega, \\ B_1 &= \frac{1}{2} a \cos \varepsilon, & B'_1 &= -\frac{1}{2} \cos(\psi - \varepsilon + \omega), \\ C_1 &= -(\alpha \operatorname{sen} \varepsilon + bc), & C'_1 &= -\operatorname{sen}(\psi - \varepsilon) \cos \omega. \end{aligned}$$

Le coppie fondamentali di questa involuzione sono quelle corrispondenti ai valori nullo e infinito di S . La seconda è determinata dalle radici dell'equazione

$$A_1' t^2 + 2B_1' t + C_1' = 0,$$

ed è facile verificare che i due corrispondenti valori di α sono

$$\alpha = -(\psi - \varepsilon), \quad \alpha = 90^\circ - \omega,$$

al primo dei quali corrisponde la retta di direzione per la coesione, ed al secondo la parallela alla retta superiore del terrapieno (cfr. il n° 40).

59. Determinazione della spinta e del piano di scivolamento. — Le espressioni della spinta e del valore di t , che determina il piano di scivolamento, si otterranno dalle (16) e dall'equazione

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial t} = 0,$$

cioè

$$(18) \quad (A_1 + SA_1')t + (B_1 + SB_1') = 0,$$

onde S sarà una delle radici dell'equazione

$$(19) \quad (B_1 + SB_1')^2 - (A_1 + SA_1')(C_1 + SC_1') = 0$$

e t sarà una delle radici di

$$(20) \quad (A_1 B_1' - A_1' B_1) t^2 + (A_1 C_1' - A_1' C_1) t + (B_1 C_1' - B_1' C_1) = 0.$$

La prima esprime la condizione, perché il valore di S dia i raggi doppi dell'involuzione, e la seconda determina i raggi doppi stessi.

60. Caso che agiscano l'attrito e la coesione insieme. — Le forme delle equazioni (6), (16), che rappresentano le due involuzioni dei piani limiti di scivolamento relativi all'attrito ed alla coesione, manifestano immediatamente la proiettività di queste due involuzioni riferite per valori comuni del parametro S .

L'equazione complessiva dei piani di diramazione dell'involuzione $\Phi_c = 0$ si ottiene evidentemente eliminando S fra le equazioni (9), (16); all'uopo bisogna prima ordinare la (9) per S , e poi la sostituzione del valore di S tratto dalle (16) dà

$$(21) \quad (B^2 - AC)(A_1' t^2 + 2B_1' t + C_1') + (2BB' - AC' - CA')(A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1)(A_1' t^2 + 2B_1' t + C_1) + (B'^2 - A'C)(A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1) = 0.$$

Del pari i piani di diramazione di $\Phi_o = 0$ si ottengono eliminando S fra le equazioni (6), (19), oppure si può dedurre dalla precedente affiggendo indici alle lettere A, B, C che ne mamano, e viceversa.

L'equazione complessiva dei piani uniti si ottiene eliminando S fra le equazioni (6), (16), ed è quindi:

$$(23) \quad (At^2 + 2Bt + C)(A_1't^2 + 2B_1't + C_1) - (A_1t^2 + 2B_1t + C_1)(A't^2 + 2B't + C) = 0.$$

I valori corrispondenti della spinta si ottengono eliminando fra le stesse equazioni t , e quindi sono radici dell'equazione risultante

$$(23) \quad [(A + SA')(C_1 + SC_1) - (C + SC')(A_1 + SA_1')]^2 - 4[(A + SA')(B_1 + SB_1) - (B + SB')(A_1 + SA_1')] \times \\ \times [(B + SB')(C_1 + SC_1) - (C + SC')(B_1 + SB_1)] = 0.$$

Sulle precedenti equazioni si può fondare un metodo pel calcolo numerico della spinta, il quale però riuscirebbe enormemente complicato. Ciò mette in rilievo la grande convenienza dei metodi grafici, specie di quello da noi prescritto al n.º 49. In seguito noi trarremo partito dal metodo analitico in un caso particolare semplice.

Capitolo quinto.

Teoria dell'equilibrio delle scarpe.

§ I. Trattazione sintetica.

61. Premesse. Assegnazione del problema. — Abbiamo rilevato, esponendo il principio di Coulomb, che la spinta di un terrapieno contro un muro è staticamente indeterminata, e i valori estremi del campo d'indeterminazione sono la spinta attiva (la minima) e la spinta passiva (la massima). La spinta *reale*, che conserva la sua indeterminazione finché si rimane nella statica pura, è distinta dall'attiva e dalla passiva.

Però qualunque valore, che si attribuisca alla spinta, deve pensarsi come relativo alla presenza di un muro, onde è implicito nel suo concetto che esso sia positivo, poiché fra il muro e la terra possono esercitarsi pressioni ma non mai tensioni.

Possiamo ora domandarci: che cosa avviene quando la spinta attiva risulti nulla o negativa, il che, come vedremo, è possibile? In quanto alla spinta passiva presumiamo che essa non può mai risultare negativa.

Se la spinta attiva risulta nulla, questo valore zero è compreso nel campo d'indeterminazione delle spinte possibili, anzi è un valore estremo di questo campo. Se dunque supponiamo che il muro non esista, cioè che la parete sia sostituita da un taglio libero praticato nel corpo di terra, questo valore zero, che è allora il solo ammissibile, sarà il *valore reale* della spinta cioè il terrapieno così tagliato potrà stare in equilibrio da sè.

Se la spinta attiva risulta negativa, ma la passiva positiva, il campo d'indeterminazione delle spinte possibili passa dal negativo al positivo attraverso lo zero. Ma, esclusi i valori negativi inammissibili per l'anzidetta ragione, il campo d'indeterminazione dei valori ammissibili va sempre dallo zero verso il positivo. Se dunque manca il muro, non potendosi effettuare che una spinta nulla, e questa essendo compresa nel campo d'indeterminazione, la spinta nulla *sarà anche la reale*, onde anche in questo caso il terrapieno sta in equilibrio da sè.

Riassumendo, diciamo che nei due casi, in cui la spinta attiva risulti nulla o negativa, la spinta reale sarà nulla, e il terrapieno potrà stare in equilibrio senza ritegno.

Questa conclusione però va accettata con riserva, perché l'esser nulla la spinta totale non implica necessariamente che siano nulle le pressioni su tutti gli elementi della parete. Questo esame riguarda la distribuzione della spinta sulla parete, questione tutta estranea alla teoria fin qui svolta. Così dal precedente risultato non si può rigorosamente arguire la possibilità che realmente un terrapieno tagliato con un piano, quando concorrono le condizioni perché la spinta attiva sia nulla o negativa, possa stare in equilibrio da sè. E difatti l'esperienza mostra che i terrapieni dotati di coesione sono capaci di stare in equilibrio quando, fra certi limiti, siano tagliati diversamente che col piano di natural declivio; ma allora la forma del taglio o, per meglio dire, della superficie libera, che la terra in equilibrio si costituisce da sè, non è piana, ma è cilindrica con la concavità rivolta verso l'esterno. Questa diversità fra i risultati della teoria che svolgiamo ed i fatti trova anche ragione nell'arbitrarietà dell'ipotesi che gli scivolamenti non possano avvenire che su piani passanti pel piede del terrapieno.

Nondimeno in pratica si passa sopra a queste considerazioni, e si parla di *piani a scarpa*, secondo i quali una terra coerente può stare in equilibrio da sè. Allora viene fuori il problema, che forma oggetto del presente paragrafo.

Se di un terrapieno pensiamo date l'inclinazione della retta superiore e quella della parete, quest'ultima maggiore dell'inclinazione del piano di natural declivio, ma pensiamo variabile l'altezza, presumiamo euristicamente che avverrà il seguente fatto. Per altezze minime la spinta attiva risulterà negativa, ma crescendo l'altezza, giungerà ad un valore, pel quale essa sarà nulla, per poi passare a valori positivi. Infra questo campo delle altezze il terrapieno potrà stare in equilibrio da sè, ed il valore zero della spinta attiva corrisponderà alla *massima altezza*, alla quale il terrapieno può mantenersi in equilibrio. Questa massima altezza è dunque determinata da un valore nullo della spinta

attiva, cioè, secondo il principio di Coulomb, da uno stato di equilibrio limite, in cui concorrono soltanto il peso della terra e le due resistenze di attrito e di coesione.

Possiamo dunque formulare così il problema fondamentale della teoria dell'equilibrio delle scarpie. Per un terrapieno dotato di attrito e di coesione, pel quale siano date la direzione della retta superiore e l'inclinazione, che si vuol dare alla scarpa, determinare la massima altezza, a cui quest'ultima si può spingere, senza che avvenga il franamento.

62. I diversi casi di equilibrio limite. — Riprendiamo la discussione dei tre casi distinti al n° 42 in quanto all'equilibrio limite, che può avvenire lungo un piano di distacco, attraverso il quale siano T , N le componenti tangenziale e normale della pressione, mentre l è la lunghezza del piano. Scrivendo brevemente f (coefficiente di attrito) in luogo di $\tan \varphi$, i risultati allora ottenuti possono riassumersi così.

1°. Se $Nf > cl$, l'equilibrio limite avviene quando T , crescendo, raggiunge il valore $T = Nf$, cioè per vinto attrito.

2°. Se $Nf < cl$, l'equilibrio limite avviene quando T raggiunge il valore $T = cl$, cioè per vinta coesione.

3°. Se $Nf = cl$, l'equilibrio limite avviene quando $T = Nf = cl$, cioè per vinto attrito e per vinta coesione insieme.

Qui sarà più comodo enunciare queste condizioni, riferendo le pressioni all'unità di superficie, ponendo

$$\frac{T}{l} = t, \quad \frac{N}{l} = n;$$

esse saranno:

1°. Se $nf > c$, cioè $n > \frac{c}{f}$, l'equilibrio limite avviene per $t = nf$ (per vinto attrito).

2°. Se $nf < c$, cioè $n < \frac{c}{f}$, l'equilibrio limite avviene quando $t = c$ (per vinta coesione).

3°. Se $nf = c$, cioè $n = \frac{c}{f}$, l'equilibrio limite avviene per $t = nf = c$ (per vinto attrito e per vinta coesione insieme).

63. Risoluzione del problema. — Consideriamo un terrapieno dotato di attrito e di coesione con profilo superiore rettilineo BC (Fig. 39), e supponiamo che sia tagliato con un piano a scarpa AB . Condotta un piano di distacco qualunque AX , presumiamo che esso sia piano di scivolamento. Affinché il prima ABX di lunghezza = 1 stia in equilibrio senza ritegno, è necessario che si facciano equilibrio le forze in esso agenti, che sono il peso proprio P e la reazione del piano di

distacco, che supponiamo decomposta nelle sue componenti normale N e tangenziale T ; il poligono di queste tre forze deve essere chiuso. Osservando che

$$P = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX} \cdot \overline{BD},$$

dove BD è la perpendicolare da B ad AX , assumiamo come unità della scala delle forze il prodotto $\frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX}$, onde P sarà rappresentato dal segmento BD . Riportato dunque verticalmente $0 \cdot 2 = \overline{BD}$, e condotta da O una parallela e da 2 una perpendicolare ad AX , si ha in $O12$ il triangolo delle tre forze in equilibrio, e quindi

$$N = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX} \cdot 2 \cdot 1, \\ T = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX} \cdot 1 \cdot 0.$$

Se ora conduciamo da D una orizzontale e da B una verticale, che s'incontrano in F , i due triangoli

201 , BDF risultano uguali; infatti sono rettangoli, l'angolo in B è uguale all'angolo in 2 per parallelismo di lati, e le ipotenuse sono uguali per costruzione. Così anche BDF può riguardarsi come il triangolo delle forze ruotato, e precisamente \overline{FD} rappresenta la componente T , e BF la N , onde

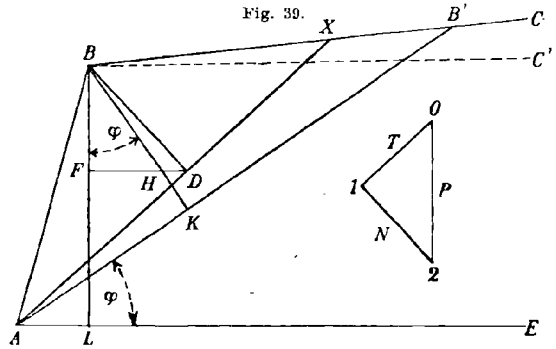
$$N = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX} \cdot \overline{BF}, \quad T = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{AX} \cdot \overline{FD}.$$

I rapporti $\frac{N}{\overline{AX}}$, $\frac{T}{\overline{AX}}$ sono le componenti normale e tangenziale riferite all'unità di superficie, quelle che sopra designammo con n , t ; queste ultime hanno dunque i valori rispettivi $\frac{1}{2}\pi \cdot \overline{BF}$, $\frac{1}{2}\pi \cdot \overline{FD}$, di guisa che si ha

$$(1) \quad BF = \frac{2n}{\pi}, \quad \overline{FD} = \frac{2t}{\pi}.$$

64. Osserviamo che, se mantenendo costante la scarpa AB e l'inclinazione del piano di distacco, pensiamo variabile la retta superiore portandola ad un'altra BC' , il triangolo BFD non varia. Da ciò l'importante teorema:

Per una stessa scarpa e per uno stesso piano di distacco le componenti normale e tangenziale della reazione di questo piano (e perciò anche la reazione stessa) riferite all'unità di superficie sono indipendenti dalla direzione della retta superiore del terrapieno.



Siccome gli stati di equilibrio limite dipendono dai valori, che prendono le pressioni unitarie t , n sui piani di distacco (n° 62), deriva da questo teorema che nella risoluzione del nostro problema possiamo fare astrazione dalla retta superiore, la quale potrà avere un'inclinazione qualunque, e considerare soltanto l'inclinazione della scarpa AB : ad ogni valore di questa inclinazione dovrà corrispondere un'unica massima altezza compatibile con l'equilibrio.

65. Supponiamo che il piano di distacco AX sia superiore al piano di natural declivio AB' , onde

$$\sphericalangle XAE > \varphi,$$

e siccome $\sphericalangle XAE = FBD$, sarà

$$(a) \quad \sphericalangle FBD > \varphi.$$

Abbassando poi da B la perpendicolare BK su AX , la quale incontra FD nel punto H , sarà

$$(b) \quad \sphericalangle FBH = \varphi$$

e dalle (a), (b) segue

$$\sphericalangle FBD > FBH,$$

onde

$$\overline{FD} > \overline{FH}, \text{ cioè, per le (1), } t > nf;$$

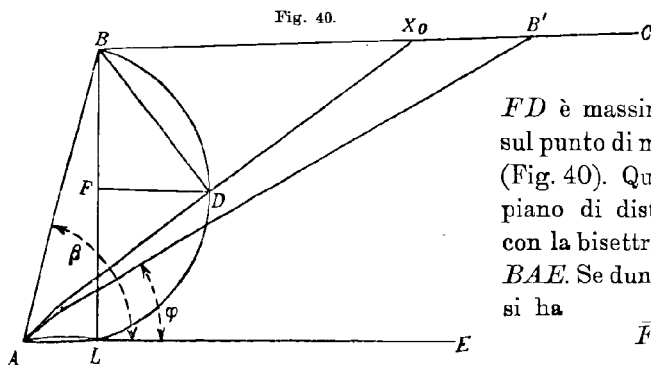
dunque sul piano AX l'attrito è vinto: Così l'attrito è sempre vinto sui piani di distacco superiori e non è mai vinto su quelli inferiori al piano di natural declivio. Su quest'ultimo piano l'attrito è in equilibrio limite, il che del resto è evidente da sè.

Da ciò segue come corollario che, se l'equilibrio limite avviene per vinto attrito, il piano di scivolamento è sempre quello di natural declivio.

66. Se varia il piano di distacco AX , il punto D ha per luogo geometrico la circonferenza descritta su AB come diametro. Questa sega la orizzontale AE in un punto L tale, che la retta BL risulta verticale, cioè coincide con BF . Ne segue che allora

FD è massimo, quando F cade sul punto di mezzo della corda BL (Fig. 40). Quando ciò avviene, il piano di distacco AX coincide con la bisettrice AX_0 dell'angolo BAE . Se dunque per questo piano si ha

$$\overline{FD} = \frac{2c}{\pi},$$



sarà, per la seconda delle (1)

$$\frac{2t}{\pi} = \frac{2c}{\pi}, \quad \text{cioè } t = c,$$

cioè sul piano AX_0 sta per esser vinta la coesione, mentre per altri piani di distacco, essendo la FD ad essi relativa $< \frac{2c}{\pi}$ (perchè questo valore è il massimo), sarà per la seconda delle (1) $t < c$, cioè la coesione non vinta.

Così il prisma ABX_0 si trova in equilibrio limite per vinta coesione, a condizione però che sul piano AX_0 l'attrito sia vinto, cioè (pel teorema del n° prec^{te}) che AX_0 sia superiore alla retta di natural declivio AB' .

In conclusione, per tutte le inclinazioni di scarpa tali, che la bisettrice dell'angolo BAE sia superiore alla retta di natural declivio, l'equilibrio limite avviene per vinta coesione, ed avviene per quel punto B tale, che, assunta pel piano di distacco la bisettrice sudetta, risulti $FD = \frac{2c}{\pi}$. Questa bisettrice è allora la retta di scivolamento. Denotando con β l'inclinazione della scarpa con l'orizzontale ($\beta = 90^\circ - \varepsilon$), ciò avviene dunque quando

(2) $\beta > 2\varphi$, cioè $\varepsilon < 90^\circ - 2\varphi$.

67. Anziché costruire direttamente il punto B , che sodisfa a questa condizione per una data inclinazione di scarpa, conviene meglio ricorrere al luogo descritto da esso quando varia questa inclinazione.

Prolunghiamo BD fino ad incontrare in G la orizzontale AE (Fig. 41). Dalla similitudine dei triangoli BFD , BLG , essendo $BL = 2BF$, risulta

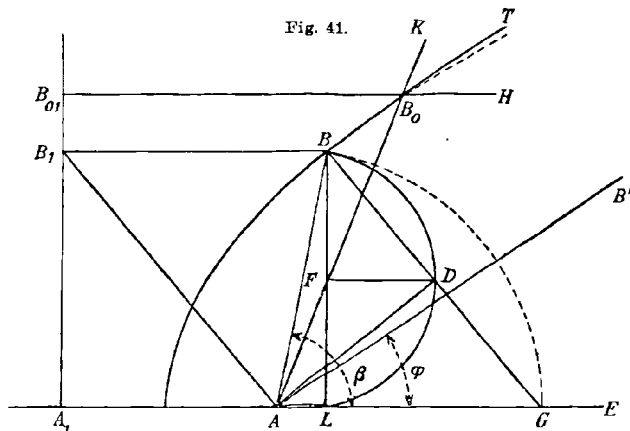
$$\overline{LG} = 2\overline{FD} = \frac{4c}{\pi};$$

inoltre, essendo AD bisettrice dell'angolo PAG e AD perpendicolare a BG , sarà

$$\overline{AB} = \overline{AG}.$$

Si porti dunque sul prolungamento esterno di AE un segmento

$$\overline{A_1A} = \overline{LG} = \frac{4c}{\pi},$$



con che A_1 sarà un punto fisso indipendente dalla posizione di B sul luogo cercato; per A_1 si conduca una verticale e per B una orizzontale, che s'incontrino in B_1 ; sarà

$$\overline{BB_1} = \overline{LA_1} = \overline{GA} = \overline{BA};$$

dunque il punto B del luogo ha sempre eguale distanza dal punto fisso A e dalla retta fissa A_1B_1 . Così il luogo cercato è una parabola ad asse orizzontale AE , che ha per fuoco il punto A e per direttrice la retta A_1B_1 . Il parametro della parabola è $\frac{8c}{\pi}$. Questa curva chiamasi *parabola di coesione*.

Ciò posto, per costruire sopra una scarpa AB di data inclinazione soddisfacente alla relazione (2) il punto B , che risolve il problema, basta descrivere la parabola di coesione e la sua intersezione con la scarpa. Però si può fare a meno di tracciare questa curva. Infatti è facile dimostrare che AB_1 è la bisettrice dell'angolo A_1AB ; costruita quindi questa bisettrice, essa determina sulla direttrice il punto B_1 , ed una orizzontale da questo determina il punto B cercato.

68. In questo modo il problema è risoluto per tutte le inclinazioni di scarpa, che soddisfano la condizione (2). Questa risoluzione è applicabile fino a quella scarpa AB_0 , per la quale sia $\beta = 2\varphi$, cioè la retta di natural declivio sia bisettrice dell'angolo formato dalla scarpa e dalla orizzontale. Fino a questo punto B_0 si estende la parte utile della parabola di coesione.

È facile dimostrare che in questo punto B_0 la tangente alla parabola è parallela alla retta di natural declivio. Infatti, prolungando AB_0 in B_0K e $B_{01}B_0$ in B_0H , la tangente B_0T è, per nota proprietà, bisettrice dell'angolo KB_0H ; ma per la scarpa AB_0 si ha $\sphericalangle KB_0H = \beta$, onde $\sphericalangle TB_0H = \varphi$.

69. Per una scarpa AB tale, che sia

$$\beta < 2\varphi, \text{ cioè } \varepsilon > 90^\circ - 2\varphi$$

essendo $\sphericalangle BAE < 2\varphi$, la costruzione precedente non vale più, perché, se si assume il punto B sulla parabola, benché l'equilibrio sia in istato limite rispetto alla coesione, l'attrito non è vinto, giacché il piano di scivolamento è inferiore al piano di natural declivio. Dunque l'equilibrio limite dovrà allora avvenire o per vinto attrito o perché ambo le resistenze siano vinte, e quindi il piano di scivolamento dovrà essere quello di natural declivio (n.º 65).

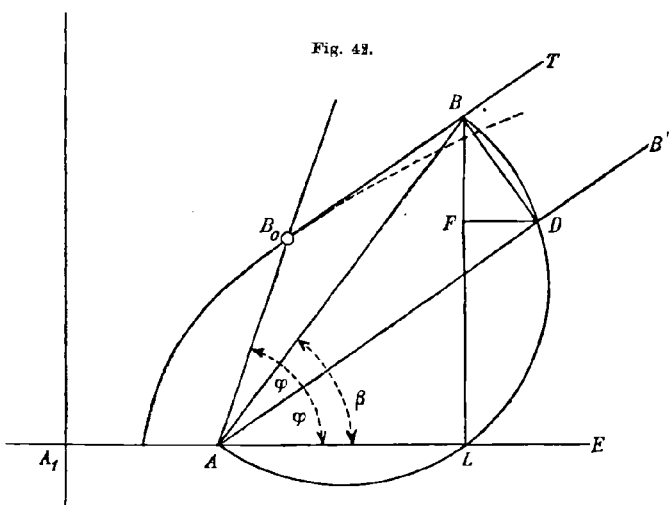
Supposto risoluto il problema e descritta, come sopra, la circonferenza di diametro AB (Fig. 42), questa sega AB in D , e completando il triangolo BDF , si ha la seconda delle (1):

$$\overline{FD} = \frac{2t}{\pi}, \text{ cioè } t = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{FD}.$$

Or se il punto B è troppo basso sulla scarpa AB , questo valore di t sarà $< c$, e quindi, sebbene l'attrito sia in istato limite sul piano AB' , la coesione non vi sarà vinta, onde non si avrà equilibrio limite. Perché questo si abbia, è dunque necessario che B si innalzi tanto, che risulti $\frac{\pi}{2} \overline{FD} = c$, cioè $\overline{F'D} = \frac{2c}{\pi}$. Allora tanto l'attrito che la coesione si troveranno in istato limite, cioè l'equilibrio limite si stabilirà nella terza delle condizioni distinte al n°. 62.

Vediamo quale sia il luogo del punto B rispondente a queste condizioni. Variando il piano AB , i triangoli analoghi a BDF' si mantengono simili fra loro,

perché BD si mantiene sempre normale ad AB' e gli altri due lati restano rispettivamente paralleli a sè stessi. Ma inoltre il lato \overline{FD} conserva il valore costante $\frac{2c}{\pi}$; dunque il triangolo BDF' si mantiene sempre uguale a sè stesso. Ne segue che le ipotenuse \overline{BD} sono sempre uguali, e



quindi il luogo di B è una retta parallela a quella di natural declivio. La posizione di questa retta è determinata dal dover passare per B_0 , perché questo luogo sarà evidentemente una continuazione della parabola. Dunque, pel teorema del n°. precedente, il luogo cercato è la tangente alla parabola nel punto B_0 .

In conclusione il luogo completo del punto B , estremo delle scarpe da A in equilibrio limite, è costituito dalla parabola di coesione e dalla tangente ad essa nel punto, in cui la incontra la scarpa inclinata con l'orizzontale dell'angolo 2φ .

Si osservi che se, diminuendo l'inclinazione della scarpa, questa diventa parallela al piano di natural declivio, la precedente teoria dà per B un punto all'infinito: ed infatti il terrapieno tagliato con la scarpa di natural declivio si mantiene in equilibrio a qualunque altezza.

70. Caso di una scarpa verticale. — L'angolo d'attrito delle terre è d'ordinario minore di 45° , onde il suo doppio è minore di 90° .

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 61. Band. 1912. Heft 1/2. 12

Ne segue che per una scarpa verticale vale sempre la parabola di coesione e non la sua tangente. La massima altezza Z_0 , a cui può spingersi una scarpa verticale è quindi data dal semiparametro $\frac{4c}{\pi}$ della parabola. Da ciò, com'è noto, si ricava un metodo per determinare sperimentalmente il coefficiente di coesione di una data terra, che consiste nel misurare questa massima altezza Z_0 , a cui nel dato terrapieno può spingersi un taglio verticale, senza che avvenga franamento, e poi determinare c dalla formola

$$c = \frac{\pi Z_0}{4}.$$

Qui è opportuno osservare che la distanza δ' della retta di coesione (n.º 28) dal piede A della parete è metà della massima altezza, a cui la terra può tagliarsi verticalmente. Questa osservazione giova pel tracciamento della retta di coesione in tutte le costruzioni del capitolo terzo, quando questa massima altezza sia conosciuta.

71. Formole analitiche. — Benché ci riserbiamo di trattare nel prossimo § la quistione con metodo direttamente analitico, pure ricaviamo qui subito dalle costruzioni precedenti le formole per calcolare la massima altezza, a cui può spingersi una scarpa di data inclinazione.

1.º Nel caso $\beta > 2\varphi$, la massima altezza Z , che può darsi alla scarpa inclinata con l'orizzontale dell'angolo β , è data direttamente dall'equazione in coordinate polari della parabola con polo nel fuoco ed asse polare diretto dal fuoco verso il vertice. Questa è

$$\varrho = \frac{p}{1 + \cos \theta},$$

dove nel nostro caso ϱ , raggio vettore, è = Z , p , semiparametro, è = $\frac{4c}{\pi}$, e $\theta = 180^\circ - \beta$, quindi

$$Z = \frac{4c}{\pi(1 - \cos \beta)}.$$

2.º Nel caso $\beta < 2\varphi$ la fig. 42 ci dà

$$\overline{FD} = \overline{BD} \sin \varphi, \quad \overline{BD} = \overline{AB} \sin (\beta - \varphi)$$

e poiché $\overline{AB} = Z$, $\overline{FD} = \frac{2c}{\pi}$, ne viene

$$\frac{2c}{\pi} = Z \sin \varphi \sin (\beta - \varphi),$$

onde

$$Z = \frac{2c}{\pi \sin \varphi \sin (\beta - \varphi)}.$$

In queste due espressioni di Z si può introdurre invece di c la detta massima altezza Z_0 , e si ottiene

$$(3) \quad Z = \frac{Z_0}{1 - \cos \beta}, \quad \text{se } \beta > 2\varphi.$$

$$(4) \quad Z = \frac{Z_0}{2 \sin \varphi \sin (\beta - \varphi)}, \quad \text{se } \beta < 2\varphi.$$

Queste due formole coincidono con quelle date dal sig. ing. Ciappi nella sua citata nota, salvo alcune trasformazioni trigonometriche e cambiamenti di notazione.¹⁾

§ II. Trattazione analitica.

72. Ritornando alle notazioni introdotte nel capitolo quarto ed alle formole ivi svolte, il problema della massima altezza, a cui può spingersi un terrapieno tagliato a scarpa di data inclinazione, si riduce a trovare una relazione fra Z ed ε tale, che la terra possa stare in equilibrio senza ritegno, cioè che l'equazione in S da adottarsi in ogni caso abbia una radice nulla. Se agisce il solo attrito, l'equazione da adoperarsi è la (6) del n.º 55 con $S = 0$, cioè

$$At^2 + 2Bt + C = 0.$$

Il suo discriminante ha il valore (formole (7)):

$$(1) \quad B^2 - AC = \frac{1}{4} a^2 \cos(\varphi + \varepsilon),$$

il quale, pel principio di Coulomb, dovrebbe esser nullo. A parte la soluzione inammissibile $a = 0$, che dà $Z = 0$ (n.º 52, (2)), dev' essere $\cos(\varphi + \varepsilon) = 0$, $\varepsilon = 90^\circ - \varphi$, cioè, qualunque sia Z , la scarpa deve coincidere col piano di natural declivio, come del resto sappiamo.

73. Supponiamo ora che insieme all'attrito agisca la coesione. Se $\varepsilon > 90^\circ - \varphi$, il discriminante (1) è negativo, e quindi il diedro di scivolamento relativo all'attrito è immaginario, onde si ha equilibrio per qualunque altezza Z . Se $\varepsilon = 90^\circ - \varphi$, quel discriminante è nullo, onde il diedro relativo all'attrito si riduce a un piano doppio, qualunque sia Z ; cada o non cada questo piano dentro il diedro relativo alla coesione, si ha sempre equilibrio (limite o non) per qualunque Z .

L'altezza che si cerca non può dunque avere un valore finito e determinato, se non per $\varepsilon < 90^\circ - \varphi$. Allora il discriminante (1) è positivo, e il diedro di scivolamento per attrito è reale e non nullo, onde segue che l'equilibrio limite, con $S = 0$, può aversi o in un piano doppio relativo alla coesione o in un piano unito. Avviene il primo caso se il piano doppio relativo alla coesione cade *dentro* il detto diedro relativo all'attrito, e avviene il secondo se cade *fuori*.

Nel 1º caso vale l'equazione (16) del n.º 58 con $S = 0$, cioè l'equazione

$$(a) \quad A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1 = 0,$$

e quindi dev' essere

$$B_1^2 - A_1 C_1 = 0,$$

1) Sono identiche alle (7) (17) della cit. nota.

cioè, per le apposizioni (17):

$$\frac{1}{4}a^2 \cos^2 \varepsilon - bc(a \operatorname{sen} \varepsilon + bc) = 0,$$

e sostituendo i valori di a , b ,

$$\frac{1}{16}\pi^2 Z^4 \cos^2(\varepsilon + \omega) \cos^2 \varepsilon - \frac{1}{2}\pi Z^3 c \cos^2(\varepsilon + \omega) \operatorname{sen} \varepsilon - Z^2 c^2 \cos^2(\varepsilon + \omega) = 0,$$

ovvero, omettendo il fattore $Z^2 \cos^2(\varepsilon + \omega)$, che non può esser nullo,

$$\pi^2 \cos^2 \varepsilon \cdot Z^2 - 8\pi c \operatorname{sen} \varepsilon \cdot Z - 16c^2 = 0.$$

La radice positiva di questa equazione è

$$(2) \quad Z = \frac{4c}{\pi} \frac{1 + \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon}.$$

Ponendo in essa $\varepsilon = 0$, si ha

$$Z = \frac{4c}{\pi} = Z_0,$$

e l'equazione può scriversi più brevemente

$$(2)' \quad Z = \frac{Z_0}{1 - \cos(90^\circ - \varepsilon)},$$

ovvero, ponendo $90^\circ - \varepsilon = \beta$, con che β è l'inclinazione della scarpa con la orizzontale,

$$Z = \frac{Z_0}{1 - \cos \beta}.$$

Questa equazione coincide con la (3) del § precedente, e rappresenta come quella la parabola di coesione.

74. La precedente relazione è valida finché il piano doppio relativo alla coesione cade dentro il diedro di scivolamento relativo all'attrito. Or questo diedro, per $S = 0$, è compreso fra i piani determinati da $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ - \varphi$ (n.º 55); dunque la nostra relazione vale finché $\alpha \leq 90^\circ - \varphi$, cioè $t \leq \operatorname{ctg} \varphi$. Ma poiché pel piano doppio relativo alla coesione l'equazione (a) ha una radice doppia, il valore di questa è

$$t = + \frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{2} \frac{a}{bc} \cos \varepsilon = \frac{\pi Z \cos \varepsilon}{4\pi},$$

ovvero, osservando la (2),

$$t = \frac{1 + \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon} = \frac{1 + \cos \beta}{2 \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta;$$

dunque la condizione in discorso è

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \leq \operatorname{cotg} \varphi, \quad \text{civè } \beta \geq 2\varphi,$$

come fa trovato per via sintetica (n.º 66).

75. Se però $\beta < 2\varphi$, cioè $\varepsilon > 90^\circ - 2\varphi$, il piano di scivolamento per $S = 0$ non sarà più un piano doppio relativo alla coesione, ma un piano unito, e la relazione cercata fra Z ed ε si otterrà dall'equazione in S (23) del n.º 60 esprimendo che questa ha una radice nulla. Essa è

$$(AC_1 - CA_1)^2 - 4(AB_1 - BA_1)(BC_1 - CB_1) = 0.$$

Fattavi la sostituzione dei valori (7), (17) del capitolo quarto, e dopo alcune riduzioni trigonometriche, questa equazione si riduce a

$$-a^3bc \cos(\varphi + \varepsilon) \operatorname{sen} \varphi + a^2b^2c^2 = 0,$$

e dividendo per a^2bc , che non può essere nullo,

$$a \operatorname{sen} \varphi \cos(\varphi + \varepsilon) - bc = 0;$$

poi, sostituendo i valori di a , b , e dividendo per $Z \cos(\varepsilon + \omega)$,

$$\frac{1}{2} \pi Z \operatorname{sen} \varphi \cos(\varphi + \varepsilon) = c$$

cioè

$$(3) \quad Z \cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{Z_0}{2 \operatorname{sen} \varphi}.$$

Tale è la relazione cercata fra Z ed ε in questo campo. Essa può anche scriversi

$$(3') \quad Z \operatorname{sen}(\beta - \varphi) = \frac{Z_0}{2 \operatorname{sen} \varphi}$$

ed è, nel sistema di coordinate polari già usato per la parabola, (Z raggio vettore, β angolo polare) l'equazione di una retta formante con l'asse polare (orizzontale) l'angolo φ . Questa retta non è altro che la tangente alla parabola (2)' nel punto, in cui questa incontra la retta $\beta = 2\varphi$. Per riconoscere ciò basta osservare che tanto dall'equazione (2)' della parabola che da quella (3)' della retta si ottengono i valori comuni

$$Z_{(\beta=2\varphi)} = \frac{Z_0}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi}, \quad \frac{dZ}{d\beta_{(\beta=2\varphi)}} = -\frac{Z_0 \cos \varphi}{2 \operatorname{sen}^3 \varphi}.$$

Notiamo infine che la (3)' è identica alla (4) del § precedente.

Capitolo sesto.

Distribuzione della spinta sulla parete.

76. *Principio della inattività degli strati inferiori.* — Abbiamo veduto nel capitolo primo che il principio di Coulomb assegna come spinta attiva da adottarsi per la verifica della stabilità di un muro di sostegno la più piccola di quelle che, avendo la stessa linea d'azione, sono capaci (invero le rispettive contospinte) di tenere il terrapieno in equilibrio. Esso però nulla dice su questa linea d'azione comune

delle spinte che si paragonano, ed ancor meno sulla distribuzione della spinta attiva sulla parete.

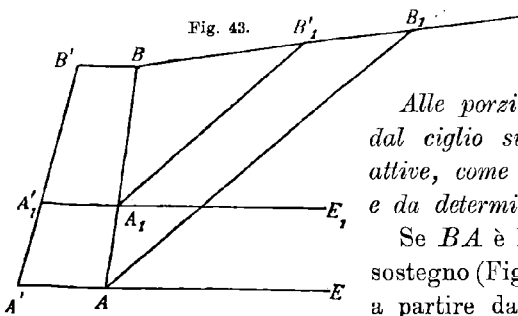
Poichè d'altra parte la spinta attiva *non è reale*, la quistione della sua distribuzione non può avere che un carattere fittizio, cioè non può trattarsi che di cercare una distribuzione fittizia di pressioni sulla parete, le quali abbiano una risultante uguale in grandezza e direzione alla spinta attiva di Coulomb.

Intanto la conoscenza tanto della linea d'azione della spinta attiva totale quanto della sua distribuzione sono necessarie per la verifica effettiva della stabilità, non solo del muro intero, ma anche delle sue parti, poichè, per esempio, in quanto al muro intero, bisogna conoscere il momento rovesciante, il quale contiene come elemento costitutivo la linea d'azione sudetta.

Poiché dunque il principio di Coulomb lascia insoluta quest'altra quistione, occorre associarvi un altro principio. Noi lo chiameremo

principio della inattività degli strati inferiori, e lo enunciamo così:

Alle porzioni di parete prese a partire dal ciglio superiore competono tali spinte attive, come se esse fossero nuove pareti, e da determinarsi nell'istesso modo.



Se BA è l'intera parete di un muro di sostegno (Fig. 43) e BA_1 una sua parte presa a partire dallo stesso ciglio superiore B ,

il principio dice che la spinta attiva su BA_1 è determinata come se questa fosse parete *intera di un nuovo* muro di sostegno, e perciò si debbono paragonare gli equilibri possibili dei diversi prismi ottenuti mediante piani di distacco passanti per lo spigolo A_1 , e fra questi cogliere quel tale, che si trova in equilibrio limite.

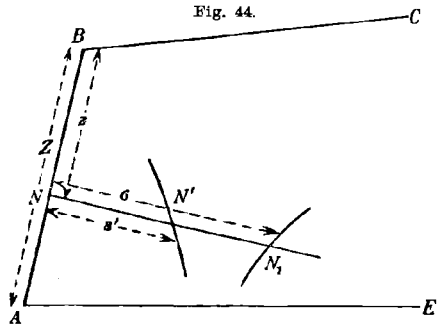
È evidente che da questa legge si possono dedurre anche, per differenze, le spinte attive, che competono agli elementi infinitesimi dell'intera parete, e quindi ne deriva la distribuzione della spinta attiva totale, come si desidera.

Per giustificare il principio, osserviamo che, come l'intero muro di sostegno si può riguardare come un corpo solido pesante $BAA'B'$ posato sopra un piano di sostegno AA' , e del quale si vuole che sia impossibile ogni movimento sotto l'azione della terra, così, supponendo che per A_1 passi un giunto reale $A_1A'_1$ del muro, anche la parte $BA_1A'_1B'$ può riguardarsi come un corpo solido pesante posato su questo giunto, e del quale si vuole impossibile ogni movimento sotto l'azione della

terra. Così l'analogia fra l'intero muro e le sue parti, quanto ai rispettivi movimenti da rendersi impossibili, è perfetta. Il principio estende, benché meno a buon dritto, l'analogia alle azioni esercitate dalla terra, cioè dice che, come per l'intera parete BA noi abbiamo, riguardo all'azione della sola terra soprastante al piano orizzontale AE (anzi, in ultimo, soprastante al piano di natural declivio AB_1), così per la parte BA_1 avremo riguardo all'azione della sola terra soprastante al piano orizzontale A_1E_1 (o, in ultimo, al piano di natural declivio $A_1B'_1$), e valuteremo la spinta attiva parziale con metodo analogo a quello adottato per la spinta attiva totale.¹⁾

Questo ragionamento non è una dimostrazione, ma soltanto una esposizione dei criterii, con cui si può giustificare l'accettazione del principio. Questo non è una conseguenza necessaria del principio di Coulomb, ma è coerente con esso, ed altronde non sarebbe logico pretendere una dimostrazione rigorosa, quando del principio di Coulomb stesso non se ne ha una tale.

77. *Diagrammi di spinta.* — Sulla parete AB (Fig. 44) prendiamo un punto N , e pensiamolo determinato dall'ascissa $\overline{BN} = z$ con origine sul ciglio superiore. Il principio dell'inattività degli strati inferiori dice che sulla porzione BN agisce una spinta attiva s , che si esprime in z per quella stessa funzione, che esprime la spinta attiva totale S per l'altezza totale Z della parete.



Sia

$$(1) \quad s = f(z)$$

questa funzione, e denotiamo con s' il segmento di retta, che rappresenta s ridotta alla base πb , dove π è il peso specifico della terra e b un segmento di retta arbitrario, onde

$$(1') \quad s' = \frac{s}{\pi b}, \quad \text{cioè} \quad (1'') \quad s' = \frac{1}{\pi b} f(z).$$

Se sulla perpendicolare da N alla parete pensiamo portato un segmento $NN' = s'$, il luogo del punto N' , quando N varia sulla parete,

1) Per stimare meglio la restrizione, che introduce il principio, si rifletta che, se applicando la teoria matematica dell'elasticità potessimo determinare la pressione reale esercitata sopra una parte qualunque della parete, non sarebbe più vero che gli strati di terra sottostanti a questa parte non ci diano alcun contributo per questa pressione.

è una curva, che chiameremo *curva delle spinte parziali ridotte*; la sua equazione è la (1'').

Se poi sulla stessa perpendicolare pensiamo portato come ordinata il segmento di retta

$$(2) \quad \sigma = b \frac{ds'}{dz}, \quad \text{cioè} \quad (2') \quad \sigma = \frac{1}{\pi} \frac{ds}{dz}$$

o anche

$$(2'') \quad \sigma = \frac{1}{\pi} f'(z)$$

in $\overline{NN_1}$, il luogo del punto N_1 è un'altra, che chiameremo *curva delle spinte unitarie ridotte*; la sua equazione è la (2'').

Queste due curve, considerate per tutta l'estensione della parete, chiudono due diagrammi, che diremo rispettivamente *delle spinte parziali* e *delle spinte unitarie* ridotte (il primo alla base πb e il secondo alla base π). Il diagramma delle spinte parziali è l'integrale di quello delle spinte unitarie ridotto alla base b , perchè dalla (2) si trae

$$\int_0^z \sigma dz = bs'.$$

Inversamente, il diagramma delle spinte unitarie rappresenta le spinte parziali sotto forma di aree (a partire dall'ordinata estrema da B) da moltiplicarsi per π perché dalla (2') si deduce

$$s = \pi \int_0^z \sigma ds,$$

ed in questo senso si può dire che il diagramma delle spinte unitarie rappresenta le spinte parziali *trasformate in terra*.

La spinta sopra un elemento dz della parete è rappresentata dallo elemento di area del diagramma delle spinte unitarie sovrapposto a questo elemento (area della striscia sovrapposta), poiché la (2') può scriversi

$$(3) \quad ds = \pi \sigma dz,$$

il che giustifica, per σ , la denominazione di spinta unitaria ridotta.

78. Centro di spinta. — La linea d'azione della spinta totale S si otterrà applicando alle forze verticali ds agenti sui diversi elementi della parete il teorema dei momenti rispetto al centro B , e prendendo come direttrice dei bracci di leva (obliqui) la parete, e ciò dà, denotando con k il braccio di leva della risultante cioè la distanza di questa da B presa secondo la parete,

$$\int_0^s z ds = k \int_0^s ds,$$

da cui, per la (3),

$$(4) \quad k = \frac{\int_0^s z ds}{\int_0^s ds} = \frac{\int_0^z \sigma z dz}{\int_0^z \sigma dz}.$$

L'intersezione della linea d'azione di S con la parete, di cui k è l'ascissa, chiamasi *centro di spinta*, e la (4) dice che *l'ascissa del centro di spinta è quella del baricentro del diagramma delle spinte unitarie*.

79. Caso che agisca il solo attrito. — In questo caso l'equazione (1) non è altro che la (9) del n° 56, ove si ponga z invece di Z ed s invece di S , e si risolva per s , cioè l'equazione

$$(B^2 - AC) + (2BB' - AC' - CA')s + (B'^2 - A'C')s^2 = 0.$$

Osserviamo subito che, siccome A, B, C sono proporzionali a z^2 (n° 52, 55), ed A', B', C' non dipendono da z , questa equazione riesce della forma

$$(5) \quad Lz^4 + 2Mz^2s + Ns^2 = 0,$$

ove L, M, N sono costanti. Risolvendo per z^2 e applicando la (1'), si ottiene

$$z^2 = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L} \pi b \cdot s'.$$

Questa è l'equazione della curva delle spinte parziali. Essa rappresenta due parabole corrispondenti ai segni \pm , le quali hanno entrambe il vertice in B e l'asse diretto normalmente alla parete; ma di queste una sola risponde al problema.

Derivando rispetto a z ed applicando la (2), si ricava dalla precedente

$$z = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{2L} \pi \cdot \sigma$$

e questa, con l'opportuno segno del radicale, è l'equazione della curva delle spinte unitarie, e rappresenta una retta passante per l'origine B . Dunque:

Se agisce il solo attrito, il diagramma delle spinte unitarie è un triangolo con un vertice sul ciglio superiore della parete.

Dalla proprietà del baricentro di un triangolo, risulta poi quest'altra conseguenza:

Se agisce il solo attrito, il centro di spinta cade ad un terzo della parete a partire dal piede.

80. Caso che agiscano insieme l'attrito e la coesione. — In questo caso, se a partire dal ciglio B della parete (Fig. 45) prendiamo un

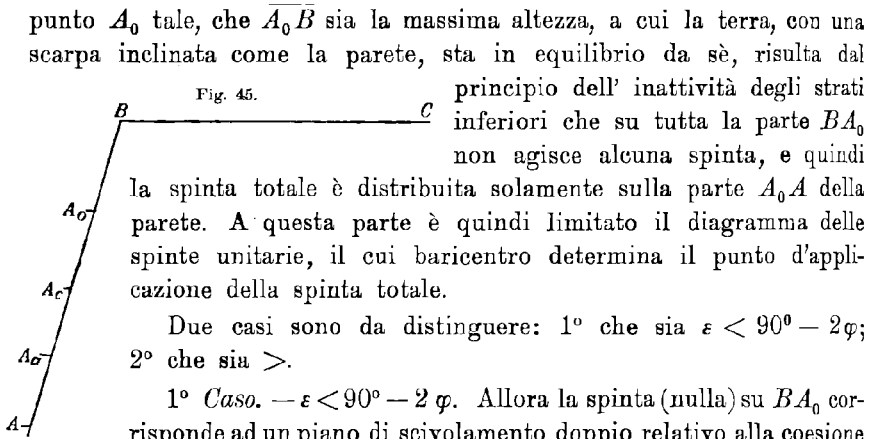


Fig. 45. punto A_0 tale, che $\overline{A_0B}$ sia la massima altezza, a cui la terra, con una scarpa inclinata come la parete, sta in equilibrio da sè, risulta dal principio dell' inattività degli strati inferiori che su tutta la parte BA_0 non agisce alcuna spinta, e quindi la spinta totale è distribuita solamente sulla parte A_0A della parete. A questa parte è quindi limitato il diagramma delle spinte unitarie, il cui baricentro determina il punto d'applicazione della spinta totale.

Due casi sono da distinguere: 1° che sia $\varepsilon < 90^\circ - 2\varphi$; 2° che sia $>$.

1° *Caso.* — $\varepsilon < 90^\circ - 2\varphi$. Allora la spinta (nulla) su BA_0 corrisponde ad un piano di scivolamento doppio relativo alla coesione (n° 66, 74). Se un punto M variabile sulla parete discende al di sotto di A_0 , sulle porzioni BM va manifestandosi una spinta crescente, la quale, per un certo percorso di M sarà data ancora da un piano di scivolamento doppio relativo alla coesione, e questo percorso si estende a tutta la rimanente parte A_0A , se avviene che anche la spinta su tutta la parete sia determinata da un piano doppio siffatto. Ma in generale ciò avviene finché M raggiunge un certo punto A_c compreso fra A_0 ed A , tale che, se M discende al di sotto di A_c , la spinta sulla porzione BM comincia ad esser determinata da piani di scivolamento uniti delle due involuzioni relative all' attrito ed alla coesione. Questo secondo percorso del punto M può estendersi a tutta la restante porzione A_cA , il che accade se la spinta totale è pure determinata da un piano unito. Ma più generalmente questo percorso si estende fino ad un certo punto A_a compreso fra A_c ed A , tale che, se M discende al di sotto di A_a , la spinta sulla porzione BM è determinata da un piano di scivolamento doppio relativo all' attrito, come da un piano siffatto è anche determinata la spinta totale.

2° *Caso:* $\varepsilon > 90^\circ - 2\varphi$. Allora la massima altezza, a cui la terra si mantiene senza ritegno, è dovuta ad un piano unito (n° 69, 75). La sola diversità, che allora interviene, è la mancanza del punto A_c ; al punto A_0 , se la parete è abbastanza alta, segue A_a , e a questo segue A .

81. Risulta dall'anzidetto, che nel caso più vario, il quale accade per grandi altezze della parete, la curva delle spinte parziali comincia dal punto A_0 , e si compone di tre porzioni di curve diverse. Indaghiamo quali siano le equazioni di queste tre curve e quali le ascisse dei punti A_c , A_a , che ne separano i tratti utili, poiché, quanto ad A_0 , sappiamo già come si determina.

L'equazione della curva relativa al tratto A_0A_c è la (19) del n° 59, ove si pongano z, s in luogo di Z, S . Per vederne il grado, osserviamo che, giusta le espressioni di a, b (n° 52), i coefficienti A_1, B_1, C_1 (n° 58), hanno le forme esplicitate in z

$$A_1 = Lz, B_1 = Mz^2, C_1 = Nz^2 + Lz,$$

mentre A'_1, B'_1, C'_1 non dipendono da z . Ne segue che l'equazione è di 2° grado in s e di 4° grado in z , ma rispetto ad entrambe risulta di 4° grado, onde la curva è del 4° ordine. Questa non si spezza in curve d'ordine inferiore.

L'equazione della curva relativa al tratto A_cA_a è la (23) del n° 60, e siccome A, B, C , sono proporzionali a z^2 ed A', B', C' non contengono z , essa è di 4° grado in s e di 8° grado in z , ma rispetto ad entrambe risulta di 8° grado, onde la curva è dell' 8° ordine, in generale non degenera.

Infine la curva relativa al tratto A_aA è una parabola, come proveniente dal solo attrito (n° 79).

82. Il punto A_c è tale che, assumendolo come punto inferiore della parete, il piano doppio relativo alla coesione è anche piano unito. Quindi la relativa ascissa Z_c si otterrà eliminando s fra le equazioni su richiamate (19) del n° 59 e (23) del n° 60. La risultante, per un noto teorema di algebra è del 4° grado nei coefficienti della (19) e del 2° grado in quella della (23), quindi il suo grado in z sarebbe al più il 32°, ma discende per essere le equazioni incomplete. Una delle radici di questa risultante dà l'ascissa Z_c del punto A_c .

Del pari il punto A_a è tale che, assumendolo come punto inferiore della parete, il piano doppio relativo all'attrito è anche piano unito. La relativa ascissa Z_a si otterrà eliminando s fra le equazioni (9), (23) del citato paragrafo. Abbiamo visto che la prima di queste assume la forma (5) del presente capitolo, e quindi si scompone nel prodotto di due fattori di 2° grado in z e di 1° in s , e di questi uno solo è utile. Ne segue che la risultante rispetto ad s è di 4° grado nei coefficienti della (5) e di 1° grado in quelli della (23), e quindi è al più dell' 8° grado in z , ma questo grado discende. Una radice di questa risultante determina Z_a .

83. Si può dimostrare che le tre curve in discorso *si raccordano nei punti di unione*. Basta all'uopo dimostrare che le relative equazioni (1) danno per ciascuno dei punti di unione lo stesso valore della derivata $\frac{ds}{dz}$.

Ora richiamiamo le (6), (16) del capitolo quarto, cioè le equazioni delle due involuzioni relative all'attrito ed alla coesione:

$$\begin{aligned} \Phi_a &\equiv (A + SA')t^2 + (B + sB')t + (C + sC') = 0, \\ \Phi_c &\equiv (A_1 + sA'_1)t^2 + (B_1 + sB'_1)t + (C_1 + sC'_1) = 0. \end{aligned}$$

L'espressione di s in z pel tratto A_0A_c , provenendo da un piano doppio relativo alla coesione, si ottiene eliminando t fra le equazioni

$$\Phi_c = 0, \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} = 0.$$

Se dunque riguardiamo queste due equazioni come determinatrici di s, t , in funzione di z , dalla prima otteniamo

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \frac{dt}{dz} + \frac{\partial \Phi_c}{\partial s} \frac{ds}{dz} = 0,$$

da cui, osservando la seconda, si deduce

$$\frac{ds}{dz} = - \frac{\frac{\partial \Phi_c}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi_c}{\partial s}}.$$

D'altra parte l'espressione di s in z pel tratto A_cA_a , provenendo da un piano unito, si ottiene eliminando t fra le equazioni

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_c = 0,$$

e se queste se riguardano come determinatrici di s, t in funzione di z , se ne deduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \frac{dt}{dz} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial s} \frac{ds}{dz} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \frac{dt}{dz} + \frac{\partial \Phi_c}{\partial s} \frac{ds}{dz} &= 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{ds}{dz} = \frac{\frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \frac{\partial \Phi_a}{\partial t}}{\frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \frac{\partial \Phi_c}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial s} \frac{\partial \Phi_c}{\partial t}}.$$

Nel punto corrispondente ad A_c un piano doppio di $\Phi_c = 0$ coincide con un piano unito delle involuzioni, quindi per esso $\frac{\partial \Phi_c}{\partial t} = 0$, ed allora quest'ultima espressione di $\frac{ds}{dz}$ coincide con la precedente. Ciò prova l'assunto.

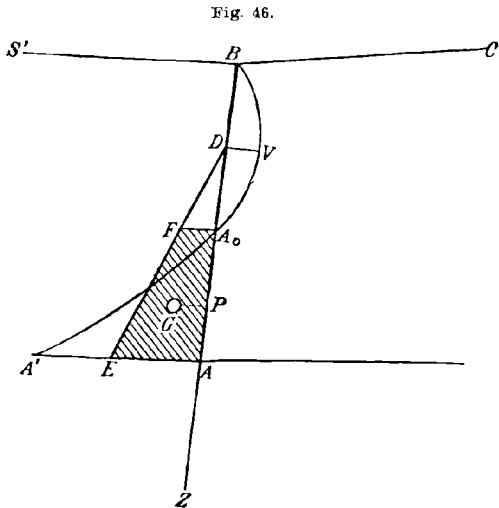
Analogamente si dimostrerebbe il raccordamento nel punto di unione corrispondente ad A_a .

84. Osservazione. Le deduzioni precedenti giustificano un'asserzione, che noi abbiamo fatto senza dimostrarla in fine del n° 45, cioè che per terrapieni alti la spinta totale è determinata da un piano doppio relativo all'attrito o da un piano unito, e per terrapieni bassi essa è determinata da un piano unito o da un piano doppio relativo alla coesione. Abbiamo detto che si ha il primo caso, quando il piano doppio, a cui corrispondono piani di diramazione reali, è relativo all'attrito, e si ha il secondo quando è relativo alla coesione.

Il passaggio da quelli, che diciamo terrapieni *alti* a quelli, che diciamo *bassi* avviene evidentemente per un'altezza tale, che i due piani di diramazione corrispondenti al piano doppio utile di una delle due involuzioni coincidano, costituendo pure un piano doppio relativo all'altra involuzione: in altri termini avviene per un'altezza tale, che le due involuzioni proiettive abbiano due rispettivi elementi doppi corrispondenti. L'equazione in Z , che determina quest'altezza di passaggio si otterrebbe dunque eliminando S fra le equazioni (9), (19) del capitolo quarto; ma non ci serve insistere su di ciò.

85. *Costruzione approssimativa del centro di spinta.* — Come ormai si vede, la determinazione dei punti A_c , A_a e quella successiva del baricentro dell'area racchiusa dal diagramma delle spinte unitarie riuscirebbe enormemente complicata col metodo analitico, al quale bisogna quindi rinunciare. Nemmeno il grado elevato del problema può consentire costruzioni geometriche rigorose.

Il solo ripiego semplice, al quale si può ricorrere, è quello che qui suggeriamo, il quale sebbene informantesi ad un'approssimazione molto grossolana, non pare che possa condurre ad errore praticamente considerevole.



La curva delle spinte parziali (Fig. 46) comincia in basso dal punto A' estremo dell'ordinata $\overline{AA'}$ rappresentante la spinta totale ridotta, ed incontra poi la parete nel punto A_0 tale, che BA_0 è la massima altezza, alla quale il terrapieno starebbe in equilibrio da sé. L'arco $A'A_0$ è il solo utile per la determinazione del centro di spinta. Però la curva prosegue al di sopra di A_0 con un altro arco relativo alle spinte negative, la cui equazione è la (19) del capitolo quarto, se $\beta > 2\varphi$, ed è la (23) dello stesso capitolo se $\beta < 2\varphi$. In ambo i casi quest'arco va ad incontrare di nuovo la parete nel punto B , perché per $z = 0$ si ha sempre $s = 0$. L'intera curva non offre discontinuità nelle ordinate, e nemmeno nelle inclinazioni delle tangenti in grazia dei raccordamenti, che avvengono nei punti proiettati in A_c , A_a .

Il procedimento, che vogliamo prescrivere si fonda sul ripiego

molto usato nelle applicazioni di riguardare un tratto di curva non molto esteso e mancante di singolarità come praticamente sostituibile con un arco di parabola. Nel nostro caso questa dovrebbe passare pei punti B, A_0, A' , i quali non bastano a determinarla. Per compirne la determinazione aggiungiamo, benché arbitrariamente, la condizione utile che l'asse sia normale a quello delle ascisse, cioè alla parete. Allora l'equazione della curva sarà della forma

$$s' = lz^2 + mz + n,$$

e quindi la linea delle spinte unitarie sarà la retta di equazione

$$\frac{\sigma}{b} = \frac{ds'}{dz} = 2lz + m,$$

la quale incontra l'asse delle z nel punto D proiezione del vertice V della parabola. Il centro di spinta P cercato è determinato dall'ascissa del baricentro G del trapezio AA_0FE . Si noti che quest'ascissa non varia se cambia l'inclinazione della retta, fermo restando il punto D ¹⁾, sicché per la determinazione di P basta la conoscenza di D , cioè del vertice V . Or essendo BA_0 la corda bisecata dall'asse della parabola, D cade sul punto di mezzo di questa corda.

La costruzione, molto semplice, che ne deriva per la determinazione del centro di spinta è la seguente, che non richiede nemmeno la costruzione della parabola. Si determini coi metodi noti la massima altezza, alla quale il terrapieno con la data inclinazione della parete starebbe in equilibrio da sè, e si porti in BA_0 . Dal punto di mezzo D di BA_0 si guidi una retta arbitraria, che segnerà in E, F le normali da A, A_0 alla parete, e si costruisca il baricentro G del trapezio $AEEA_0$. La proiezione di G sulla parete sarà il centro di spinta P cercato.

Capitolo settimo.

Caso particolare $\omega = \varepsilon = \psi = 0$.

§ I. Valori della spinta.

86. Il metodo analitico svolto nel capitolo quarto per ottenere il valore della spinta non conduce a formole dirette di una relativa semplicità se non nel caso, per fortuna frequente in pratica, in cui si abbia un terrapieno con profilo superiore orizzontale, una parete verticale, e si assuma la direzione della spinta normale alla parete, cioè nel caso $\omega = \varepsilon = \psi = 0$. Questo è il caso, pel quale al n° 51 abbiamo già rilevate

1) Qualunque sia l'inclinazione della retta passante per D , che stacca il trapezio, P è il centro di due forze parallele applicate ai punti fissi A_0, A , di sensi opposti, e di grandezze proporzionali alle quantità costanti $\overline{DA_0}^2, \overline{DA}^2$.

le peculiarità grafiche. Ad esso può pure applicarsi il procedimento rigoroso accenato nel capitolo sesto, n° 80 e segg, per la determinazione del centro di spinta, quando il terrapieno sia dotato di coesione. Anziché ricorrere a questo centro, il quale poi serve alla determinazione del momento rovesciante, cioè di quello che tende a produrre la rotazione del muro di sostegno, si potrà più direttamente calcolare questo momento mediante la sua espressione analitica. Ci gioverà trattare questo caso particolare anche per illustrare con un esempio procedimenti, che in generale abbiamo potuto soltanto accennare.

Allora le espressioni dei coefficienti A , A_1 etc. definiti dalle formole (7), (17) del capitolo quarto si particolarizzano così:

$$(1) \quad \begin{aligned} A &= -a \operatorname{sen} \varphi, & A' &= 0 \\ B &= \frac{1}{2} a \cos \varphi, & B' &= -\frac{1}{2} \cos \varphi \\ C &= 0, & C' &= -\operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} A_1 &= -bc, & A'_1 &= 0 \\ B_1 &= \frac{1}{2} a, & B'_1 &= -\frac{1}{2} \\ C_1 &= -bc, & C'_1 &= 0 \end{aligned}$$

dove

$$a = \frac{1}{2} \pi Z^2, \quad b = Z.$$

87. *Caso che agisca il solo attrito. — Piano di scivolamento.* — Questo è determinato dall'equazione (11) del n° 56, cioè

$$(AB' - A'B)t^2 + (AC' - A'C)t + (BC' - B'C) = 0, \quad (t = \operatorname{tang} \alpha)$$

e si ha dalle (1)

$$\begin{aligned} AB' - A'B &= \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi, \\ AC' - A'C &= a \operatorname{sen}^2 \varphi, \\ BC' - B'C &= -\frac{1}{2} a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

onde la precedente diventa

$$\cos \varphi \cdot t^2 + 2 \operatorname{sen} \varphi \cdot t - \cos \varphi = 0,$$

che dà

$$t = \frac{-\operatorname{sen} \varphi \pm 1}{\cos \varphi}.$$

Si deve scegliere il segno +, che dà per t un valore positivo, cioè un piano di distacco giacente dentro il terrapieno, e quindi

$$t = \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1 - \cos(90^\circ - \varphi)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \operatorname{sen} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

cioè

$$(3) \quad t = \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right), \quad \alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Valore della spinta — Questo è dato dall'equazione (9) del n° 56, dove ora

$$B^2 - AC = \frac{1}{4}a^2 \cos^2 \varphi,$$

$$2BB' - AC' - CA' = -\frac{1}{2}a \cos^2 \varphi - a \sin \varphi = -\frac{1}{2}a(1 + \sin^2 \varphi),$$

$$B'^2 - A'C' = \frac{1}{4} \cos^2 \varphi,$$

e quindi

$$a^2 \cos^2 \varphi - 2a(1 + \sin^2 \varphi)S + \cos^2 \varphi \cdot S^2 = 0.$$

Il discriminante di questa equazione è

$$a^2[(1 + \sin^2 \varphi)^2 - (1 - \sin^2 \varphi)^2] = 4a^2 \sin^2 \varphi,$$

perciò essa dà

$$S = \frac{a(1 + \sin^2 \varphi) \pm 2a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)^2}{\cos^2 \varphi}.$$

Il segno da scegliere è il +. Ciò si dimostra semplicemente osservando che i valori di S , t debbono verificare la (10) del n° 56. Così, trasformando come sopra e sostituendo il valore di a , si ottiene infine

$$(4) \quad S_a = \frac{1}{2} \pi Z^2 \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

ove alla lettera S abbiamo affisso l'indice a per indicare che questa spinta è relativa all'attrito.

Le formole (3), (4) sono molto note.

88. *Caso che agiscano l'attrito e la coesione.* — Determiniamoci dapprima i piani doppi e il piano unito utili delle due involuzioni relative all'attrito ed alla coesione e i valori corrispondenti della spinta. Il piano doppio relativo all'attrito è già determinato dalla (3), ed il corrispondente valore della spinta è dato dalla (4).

Piano doppio relativo alla coesione — Questo è determinato dall'equazione (20) del n° 59, e si ha dalle (2):

$$A_1 B'_1 - A'_1 B_1 = \frac{1}{2}bc,$$

$$A_1 C'_1 - A'_1 C_1 = 0,$$

$$B_1 C'_1 - B'_1 C_1 = -\frac{1}{2}bc,$$

quindi la (20) sudetta diventa

$$bc \cdot t^2 - bc = 0,$$

da cui

$$(5) \quad t^2 = 1, \quad t = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Spinta relativa al piano doppio per coesione. — Questa è determinata dalla (19) del n° 20, e si ha:

$$B_1^2 - A_1 C_1 = \frac{1}{4}a^2 - b^2 c^2,$$

$$2B_1 B'_1 - A_1 C'_1 - C_1 A'_1 = -\frac{1}{2}a,$$

$$B_1'^2 - A_1' C_1' = \frac{1}{4},$$

onde la (19) sudetta diventa

$$(a^2 - 4b^2c^2) - 2aS + S^2 = 0,$$

che dà

$$S = a \pm 2bc.$$

Il segno da scegliere è il —, il che si dimostra come si accennò analogamente per l'attrito, e quindi

$$(6) \quad S_c = \frac{1}{2}\pi Z^2 - 2cZ,$$

ove per distinzione si è affisso l'indice c ad S .

Piano unito. — L'equazione complessiva dei piani uniti è la (22) del n° 60, e sostituendo in questa i valori (1), (2) dei coefficienti, si ottiene

$$(-a \operatorname{sen} \varphi \cdot t^2 + a \cos \varphi \cdot t)(-t) - (-bc t^2 + at - bc)(-\cos \varphi \cdot t - \operatorname{sen} \varphi) = 0,$$

cioè, ordinando per t ,

$$(a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi)t^3 - bc \operatorname{sen} \varphi \cdot t^2 + (a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi)t - bc \cos \varphi = 0,$$

o anche

$$(a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi)t(1 + t^2) - bc \operatorname{sen} \varphi(1 + t^2) = 0.$$

L'equazione ha il fattore $1 + t^2$, che dà due radici immaginarie. La rimanente radice, che dà il piano unito utile, è

$$(7) \quad t = \frac{bc \operatorname{sen} \varphi}{a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi}.$$

Spinta relativa al piano unito. — Il valore di questa spinta si ottiene dalla (23) del n° 60, la quale coi valori (1), (2) dei coefficienti diventa

$$\begin{aligned} & [-a \operatorname{sen} \varphi \cdot (-bc) - (-S \operatorname{sen} \varphi(-bc))]^2 \\ & - 4[-a \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{1}{2}(a - S) - \frac{1}{2} \cos \varphi(a - S)(-bc)] \times \\ & \times [\frac{1}{2} \cos \varphi(a - S)(-bc) - (-S \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{1}{2}(a - S))] = 0, \end{aligned}$$

cioè

$$b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (a - S)^2 - (a - S)^2 (-a \operatorname{sen} \varphi + bc \cos \varphi)(-bc \cos \varphi + S \operatorname{sen} \varphi) = 0.$$

Togliendo il fattore $(a - S)^2$ e risolvendo,

$$S \operatorname{sen} \varphi = bc \cos \varphi + \frac{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{bc \cos \varphi - a \operatorname{sen} \varphi}.$$

Riducendo, e sostituendo i valori di a , b , viene

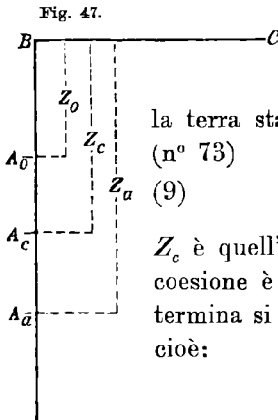
$$S \operatorname{sen} \varphi = \frac{2c^2Z - \pi cZ^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2c \cos \varphi - \pi Z \operatorname{sen} \varphi},$$

e facendo la divisione,

$$S \operatorname{sen} \varphi = -\frac{2c^2}{\pi} \operatorname{sen} \varphi + c \cos \varphi \cdot Z + \frac{4c^3}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{-\pi \operatorname{sen} \varphi \cdot Z + 2c \cos \varphi}.$$

Così si ottiene infine

$$(8) \quad S_u = -\frac{2c^2}{\pi} + c \operatorname{cotg} \varphi \cdot Z - \frac{4c^3}{\pi^2} \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{Z - \frac{2c}{\pi} \operatorname{cotg} \varphi}.$$



89. Valori di Z_0, Z_c, Z_a . — Questi sono le ascisse sulla parete dei punti A_0, A_c, A_a definite al n° 80 (Fig. 47). Z_0 è la massima altezza, a cui

la terra sta in equilibrio da sè tagliata verticalmente, quindi (n° 73)

$$(9) \quad Z_0 = \frac{4c}{\pi}.$$

Z_c è quell'altezza, per la quale il piano doppio relativo alla coesione è anche piano unito, perciò l'equazione che la determina si ottiene eguagliando i valori di t dati dalle (5), (7), cioè:

$$\frac{bc \operatorname{sen} \varphi}{a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi} = 1,$$

e sostituendovi a, b coi loro valori in Z , questa dà

$$(10) \quad Z_c = \frac{2c}{\pi} (1 + \operatorname{cotg} \varphi) = Z_0 \frac{\operatorname{sen} (45^\circ + \varphi)}{2 \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} \varphi}.$$

Z_a è quell'altezza, per la quale il piano doppio relativo all'attrito è anche piano unito, onde l'equazione che la determina si ottiene eguagliando i valori di t dati dalle (3), (7), ed è

$$\frac{bc \operatorname{sen} \varphi}{a \operatorname{sen} \varphi - bc \cos \varphi} = \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi},$$

ed analogamente se ne ricava

$$(11) \quad Z_a = \frac{2c}{\pi} \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} = \frac{2c}{\pi} \frac{\operatorname{cotg} (45^\circ - \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{sen} \varphi} = Z_0 \frac{\operatorname{cotg} (45^\circ - \frac{\varphi}{2})}{2 \operatorname{sen} \varphi}.$$

Questi tre valori delle Z serviranno a far distinguere quale dei tre valori S_a, S_c, S_u della spinta valga in ogni singolo caso, cioè:

- 1° Se $Z > Z_a$, il valore della spinta é S_a
- 2° " $Z_a > Z > Z_c$, " " " " " S_u
- 3° " $Z_c > Z > Z_0$, " " " " " S_c
- 4 " $Z_0 > Z$, la spinta è nulla.

§ II. Valori del momento rovesciante.

90. Per questo s'intende il momento della spinta rispetto allo spigolo esterno del muro di sostegno. Ma, supponendo che la base del muro sia il piano orrizzontale passante pel piede della parete, esso sarà pure il momento della spinta rispetto a quest'ultimo punto.

91. Caso che agisca il solo attrito. — Allora, nel nostro caso, il braccio di leva della spinta rispetto al piede della parete è $= \frac{1}{3} Z$ (n° 79),

e perciò dalla espressione (4) della spinta si passa subito a quella del momento rovesciante M , cioè

$$(12) \quad M = \frac{1}{6} \pi Z^3 \operatorname{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Anche questa formola è molto conosciuta.

92. Caso che agiscano l'attrito e la coesione. — Il momento rovesciante ha in generale l'espressione

$$M = \int_{S_0}^S (Z - z) ds - \int_{z_0}^Z (Z - z) \frac{ds}{dz} dz = Z \int_{z_0}^Z \frac{ds}{dz} dz - \int_{z_0}^Z \frac{ds}{dz} z dz,$$

dove S_0 ($= 0$) ed S denotano rispettivamente i valori della spinta nei tratti $\overline{BA_0}$, \overline{BA} . In generale la forma funzionale di s in z varia quando si passa dall'uno all'altro dei tratti, in cui i punti A_c , A_a dividono la parete. Ma poiché attraverso i punti di separazione di questi tratti variano continuamente tanto i valori di s quanto quelli della sua derivata rispetto a z (n° 83), possiamo applicare all'ultimo integrale precedente l'integrazione per parti, ed otteniamo

$$M = ZS - ZS_0 - (sz) \Big|_{z_0}^Z + \int_{z_0}^Z s dz,$$

e poiché $S_0 = 0$, le tre prime parti di questa si distruggono, e resta semplicemente

$$(13) \quad M = \int_{z_0}^Z s dz.$$

1° Caso. = $Z > Z_a$ — Allora questo integrale si spezza in tre relativi ai tratti $\overline{A_0A_c}$, $\overline{A_cA_a}$, $\overline{A_aA}$, cioè

$$(14) \quad M = M_1 + M_2 + M''',$$

dove

$$(15) \quad M_1 = \int_{z_0}^{z_c} s_c dz, \quad M_2 = \int_{z_c}^{z_a} s_u dz, \quad M''' = \int_{z_a}^Z s_a dz.$$

2° Caso. = $Z_a > Z > Z_c$ — Allora il punto A_a manca, e l'integrale si spezza in due relativi ai tratti $\overline{A_0A_c}$, $\overline{A_cA}$, cioè

$$(16) \quad M = M_1 + M'',$$

dove

$$(17) \quad M'' = \int_{z_c}^Z s_u dz.$$

3° Caso. = $Z_c > Z > Z_0$ — L' integrale (13) ha unica parte relativa al tratto $\overline{A_0 A}$, cioè

$$(18) \quad M = M' = \int_{Z_0}^Z s_c dz.$$

Gl' integrali M_1, M_2 sono costanti, mentre M', M'', M''' dipendono da Z .

93. *Calcolo degl' integrali M_i, M^i .* — Si ha dalla (6), ove si pongano s, z in luogo di S, Z ,

$$s_c = \frac{1}{2} \pi z^2 - 2cz,$$

quindi

$$\int s_c dz = \frac{1}{6} \pi z^3 - cz^2 + \text{cost},$$

e perciò

$$M_1 = \frac{1}{6} \pi (Z_c^3 - Z_0^3) - c (Z_c^2 - Z_0^2)$$

$$M' = \frac{1}{6} \pi (Z^3 - Z_0^3) - c (Z^2 - Z_0^2).$$

Analogamente la seconda (15) e la (17) divengono in virtù della (8),

$$M_2 = -\frac{2c^2}{\pi} (Z_a - Z_c) + \frac{c}{2} \cotg \varphi (Z_a^2 - Z_c^2) - \frac{4c^3}{\pi^2} \cotg \varphi \log_e \frac{Z_a - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi}{Z_c - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi}$$

$$M'' = -\frac{2c^2}{\pi} (Z - Z_c) + \frac{c}{2} \cotg \varphi (Z^2 - Z_c^2) - \frac{4c^3}{\pi^2} \cotg \varphi \log_e \frac{Z - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi}{Z_c - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi}$$

Infine dalla terza (15) mediante la (4) si ottiene

$$M''' = \frac{1}{6} \pi (Z^3 - Z_a^3) \tan g^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Notiamo che l'argomento del logaritmo, che entra nella espressione di M_2 , si semplifica molto, perché si ha

$$Z_a - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi = \frac{2c}{\pi} \left(\frac{\cotg \varphi}{1 - \text{sen } \varphi} - \cotg \varphi \right) = \frac{2c}{\pi} \frac{\cos \varphi}{1 - \text{sen } \varphi},$$

$$Z_c - \frac{2c}{\pi} \cotg \varphi = \frac{2c}{\pi},$$

onde questo argomento è $= \frac{\cos \varphi}{1 - \text{sen } \varphi} = \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$.

Parimente l'argomento del logaritmo, che entra in M'' , diventa

$$\frac{\pi}{2c} Z - \cotg \varphi.$$

94. *Espressioni di M .* — Le eguaglianze (14), (16), (18) coi presenti valori delle M_i, M^i ci danno le espressioni di M relative ai tre casi. Le facciamo seguire dapprima raccogliendo in righe successivi i termini relativi a $Z_0, Z_c, Z_a; Z$.

1. *Caso* = $Z > Z_a$

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{\pi}{6} Z_0^3 + c Z_0^2 \\
 &+ \frac{\pi}{6} Z_c^3 - \frac{c}{2} (2 + \cotg \varphi) Z_c^2 + \frac{2c^2}{\pi} Z_c \\
 \text{(I)} \quad &- \frac{\pi}{6} \text{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot Z_a^3 + \frac{c}{2} \cotg \varphi \cdot Z_a^2 - \frac{2c^2}{\pi} Z_a \\
 &+ \frac{\pi}{6} \text{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot Z^3 \\
 &- \frac{4c^3}{\pi^2} \cotg \varphi \log_e \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

2. *Caso* = $Z_a < Z < Z_c$.

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{\pi}{6} Z_0^3 + c Z_0^2 \\
 \text{(II)} \quad &+ \frac{\pi}{6} Z_c^3 - \frac{c}{2} (2 + \cotg \varphi) Z_c^2 + \frac{2c^2}{\pi} Z_c \\
 &+ \frac{c}{2} \cotg \varphi \cdot Z^2 - \frac{2c^2}{\pi} Z - \frac{4c^3}{\pi^2} \cotg \varphi \log_e \left(\frac{\pi}{2c} Z - \cotg \varphi \right)
 \end{aligned}$$

3. *Caso* = $Z_c > Z > Z_0$.

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{\pi}{6} Z_0^3 + c Z_0^2 \\
 \text{III)} \quad &+ \frac{\pi}{6} Z^3 - c Z^2
 \end{aligned}$$

95. Queste formole si rendono molto più acconce esprimendovi c , Z_c , Z_a per mezzo di π , Z_0 , che saranno in ogni caso, oltre a φ , i dati sperimentali relativi alla qualità di terra, per cui si opera. A tal uopo scriviamo le (10), (11) così:

$$Z_c = \frac{C}{2} Z_0, \quad Z_a = \frac{A}{2} Z_0,$$

dove

$$C = \frac{\text{sen} (45^\circ + \varphi)}{\text{sen} 45^\circ \cdot \text{sen} \varphi}, \quad A = \frac{\cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{\text{sen} \varphi}.$$

La (9) dà poi

$$c = \frac{\pi}{4} Z_0, \quad \frac{2c^2}{\pi} = \frac{\pi}{8} Z_0^2, \quad \frac{4c^3}{\pi^2} = \frac{\pi}{16} Z_0^3.$$

Allora i termini in Z_0 , che entrano in tutte e tre le espressioni di M , con la sostituzione di questo valore di c danno $\frac{\pi}{12} Z_0^3$, che noi, per analogia con gli altri seguenti, scriviamo:

$$-\frac{\pi}{96} Z_0^3 \text{ (— 8).}$$

I termini in Z_c , che entrano nelle prime due espressioni di M , osservando pure che

$$2 + \cotg \varphi = 1 + C,$$

ci danno:

$$-\frac{\pi}{96} (C^3 + 3C^2 - 6C) Z_0^3.$$

Qui il trinomio fra parentesi si può ridurre a un binomio, osservando che

$$3C^2 - 6C = 3C(C-2) = 3(\cotg \varphi + 1)(\cotg \varphi - 1) = 3(\cotg^2 \varphi - 1),$$

ed è

$$\cotg^2 \varphi - 1 = \frac{\cos 2\varphi}{\sen^2 \varphi} = D,$$

onde infine i termini in Z_c danno

$$-\frac{\pi}{96} Z_0^3 (C^3 + 3D).$$

Nella (I) i termini in Z_a insieme al termine logaritmico, osservando pure che

$$A^3 \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{A}{\sen^2 \varphi},$$

danno:

$$-\frac{\pi}{96} Z_0^3 \left(\frac{2A}{\sen^2 \varphi} - 3A^2 \cotg \varphi + 6A + 6 \cotg \varphi \log_e \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right).$$

Finalmente nella (II) l'argomento del logaritmo si può trasformare osservando che, siccome $\frac{2c}{\pi}$ è una lunghezza ($= \frac{Z_0}{2}$), possiamo porre

$$\frac{\pi}{2c} Z = \cotg \theta,$$

e calcolare con questa l'angolo θ , dopo di che il detto argomento diventa

$$\frac{\pi}{2c} - \cotg \varphi = \frac{\sen(\varphi - \theta)}{\sen \varphi \cdot \sen \theta}.$$

Con queste trasformazioni, e riducendo pure i logaritmi naturali a bridgiani, otteniamo le seguenti formole definitive.

1. *Caso* = $Z > Z_a$

$$(I) \quad M = \frac{\pi}{6} \left[Z^3 \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - Z_0^3 F_1(\varphi) \right]$$

dove

$$F_1(\varphi) = \frac{1}{16} \left[-8 + \frac{\sen^3(45^\circ + \varphi)}{\sen^3 45^\circ \cdot \sen^3 \varphi} + \frac{3 \cos 2\varphi}{\sen^2 \varphi} \right. \\ \left. + \frac{2 \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sen^2 \varphi} - \frac{3 \cos \varphi \cotg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sen^3 \varphi} + \frac{6 \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{\sen \varphi} \right. \\ \left. + \frac{6 \cotg \varphi}{\log e} \log \cotg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

2. Caso = $Z_a > Z > Z_c$.

$$(II)' \quad M = \frac{\pi}{8} \left[Z_0 \cotg \varphi \cdot Z^2 - Z_0^2 Z - Z_0^3 \frac{\cotg \varphi}{2 \log e} \log \frac{\text{sen}(\varphi - \theta)}{\text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \theta} - Z_0^3 F_2(\varphi) \right]$$

dove

$$\theta = \text{ang} \cdot \cotg \frac{2Z}{Z_0}, \quad F_2(\varphi) = \frac{1}{12} \left[-8 + \frac{\text{sen}^3(45^\circ + \varphi)}{\text{sen}^3 45^\circ \cdot \text{sen}^3 \varphi} + \frac{3 \cos 2\varphi}{\text{sen}^2 \varphi} \right]$$

3. Caso = $Z_c > Z > Z_0$

$$(III)' \quad M = \frac{\pi}{12} [2Z^3 - 3Z_0Z^2 + Z_0^3].$$

Per l'uso di queste formole giova la seguente tabella.

Valori di φ	Valori corrispondenti di			
	$\frac{Z_a}{Z_0}$	$\frac{Z_c}{Z_0}$	$F_1(\varphi)$	$F_2(\varphi)$
35°	1,6746	1,2141	0,4642	0,7862
35°, 30'	1,6718	1,2010	0,4505	0,7295
36°	1,6695	1,1882	0,4374	0,6753
36°, 30'	1,6677	1,1757	0,4249	0,6234
37°	1,6664	1,1635	0,4130	0,5737
37°, 30'	1,6655	1,1516	0,4015	0,5261
38°	1,6651	1,1400	0,3905	0,4805
38°, 30'	1,6652	1,1286	0,3800	0,4368
39°	1,6657	1,1174	0,3699	0,3948
39°, 30'	1,6667	1,1065	0,3603	0,3545
40°	1,6681	1,0959	0,3510	0,3158
40°, 30'	1,6700	1,0854	0,3422	0,2786
41°	1,6723	1,0752	0,3338	0,2428
41°, 30'	1,6751	0,0651	0,3257	0,2084
42°	1,6783	1,0553	0,3180	0,1752

Ottenuti sperimentalmente i valori di π , φ , Z_0 relativi alla terra, per cui si opera, e data l'altezza Z del terrapieno, le cifre delle due prime colonne serviranno a calcolare Z_a e Z_c , e con questi si potrà distinguere quale delle tre formole per M sia da adottare. Per le due formole (I)', (II)' i valori di $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$ tratti dalle due ultime colonne della tabella agevolano il calcolo.

95. *Esempi numerici.* — Le costanti della terra per cui si opera siano

$$\pi = 1500^{\text{kg}}, \quad \varphi = 40^\circ, \quad Z_0 = 1^{\text{m}}, 25.$$

Le prime due colonne della tabella danno

$$Z_a = 1,6681 \cdot Z_0 = 2^m,085$$

$$Z_c = 1,0959 \cdot Z_0 = 1^m,370.$$

Esempio 1°. — L'altezza della parete di ritegno sia $Z = 3^m,50$, per cui $Z > Z_a$, onde siamo nel 1° caso, e la formola da adottare è la (I)'.

Calcoliamo la quantità fra parentesi. Mediante una tavola di logaritmi otteniamo

$$\operatorname{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tang}^2 25^\circ = 0,2174,$$

e quindi

$$1^\circ \text{ termine} = \overline{3,50^3} \cdot 0,2174 = 9,3210.$$

Poi, prendendo dalla terza colonna della tabella il valore di $F_1(\varphi)$, abbiamo

$$2^\circ \text{ termine} = \overline{1,25^3} \cdot 1,3510 = 0,6855,$$

e sostituendo nella (I)', otteniamo:

$$M = \frac{1500}{6} \cdot (9,3210 - 0,6855) = 2158,88 \text{ kg m}$$

Esempio 2°. — La parete del ritegno sia alta $Z = 1^m,90$, onde $Z_a > Z > Z_c$, e siamo nel 2° caso, per cui la formola da impiegare è la (II)'.

Per ottenere il valore della parentesi, calcoliamone dapprima il 3° termine. Otteniamo con la tavola di logaritmi:

$$\theta = \operatorname{ang} \cdot \operatorname{cotg} \frac{2 \cdot 1,90}{1,23} = \operatorname{ang} \cdot \operatorname{cotg} 3,04 = 18^\circ, 12', 30'',$$

$$\varphi - \theta = 21^\circ, 47', 30'',$$

e di seguito:

$$\log \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta} = 0,2667662,$$

$$\log \cdot \log \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta} = 9,4261308.$$

Poi

$$\log Z_0^3 = 0,2907300,$$

$$\log \operatorname{cotg} \varphi = 0,0761865,$$

$$\log \cdot \log e = 0,4342945,$$

$$\log 2 = 0,3010300,$$

onde il logaritmo de 3° termine è

$$0,2907300 + 0,0761865 + 9,4261308$$

$$- 0,3010300 - 0,4342945 = 9,0577228,$$

e quindi:

$$3^\circ \text{ termine} = 0,1142.$$

Si ha poi

$$\cotg \varphi = 1,1917,$$

onde

$$1^{\circ} \text{ termine} = 1,25 \cdot 1,1917 \cdot \overline{1,90^2} = 5,3775,$$

$$2^{\circ} \text{ termine} = \overline{1,25^2} \cdot 1,90 = 2,9688.$$

Per avere il 4° termine, facciamo uso del valore di $F_2(\varphi)$ dato dalla tabella, che ci dà

$$4^{\circ} \text{ termine} = \overline{1,25^3} \cdot 0,3158 = 0,6168.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$M = \frac{1500}{8} \cdot [5,3775 - 2,9688 - 0,1142 - 0,6168] = 314,57 \text{ kg m.}$$

Esempio 3 — La parete sia alta $Z = 1^m,35$, onde $Z_c > Z > Z_0$ e siamo nel 3° caso, per cui la formola da adottare è la (III)'. Si ha quindi:

$$M = \frac{1500}{12} \cdot (2 \cdot \overline{1,35^3} - 3 \cdot 1,25 \cdot \overline{1,35^2} + \overline{1,25^3}) = 4,94 \text{ kg m.}$$

Questi esempi danno occasione di osservare come le altezze Z_c , Z_a sono poco differenti da Z_0 , quindi la formola, che quasi sempre servirà in pratica sarà la (I)'.

Palermo, Dicembre 1909.

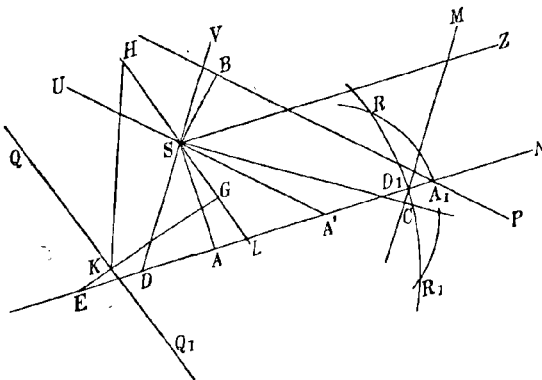
Kleinere Mitteilungen.

Einfache Konstruktion der Trägheitsmomente ebener Flächen (aus drei bekannten Trägheitsmomenten ohne Hilfe von Trägheitskreisen und Trägheitsellipsen).

Die folgende zeichnerische Darstellung der Trägheitsmomente einer Querschnittsfläche mit dem Inhalt F , von der drei Trägheitsmomente ermittelt sind, ist ohne Frage einfacher als die mit Hilfe von Trägheitskreisen und Trägheitsellipsen.

Man bestimmt nach irgendeinem bekannten Verfahren zeichnerisch den Schwerpunkt S und die Trägheitsmomente I_u, I_v, I_z bez. die Trägheitsarme oder Trägheitsradien $i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}, i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}}, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$ der gegebenen Querschnittsfläche für die Achsen SU, SV, SZ .

Man trägt ab auf der Senkrechten zur Achse $SU : SB = i_u,$
 " " " " " $SV : SC = i_v,$
 " " " " " $SZ : SA = i_z.$



Man zieht BP parallel zu SU, CM parallel zu SV und AN parallel zu SZ ; AN schneidet SU in A' , SV in D , BP in A_1 und CM in D_1 . Man beschreibt einen Kreis um A' mit dem Radius $A'A_1$ und einen zweiten Kreis um D mit dem Radius DD_1 ; diese Kreise schneiden sich in den Punkten R, R_1 .

Um für irgend eine Achse QQ_1 das Trägheitsmoment zu bestimmen, zieht man parallel zu QQ_1 durch S eine Gerade, die AN in L trifft, trägt auf AN die Länge $LE = LR = LR_1$ ab, fällt von E eine Senkrechte auf QQ_1 , die QQ_1 in K und SL in G schneidet, und trägt endlich auf SL die Länge $GH = GE$ ab; das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die Achse QQ_1 ist $HK^2 \cdot F$ und für die Achse SL ist es $EG^2 \cdot F$.

Darmstadt.

FR. GRAEFE.

Aufruf!

Eine umfassende Weltanschauung auf Grund des Tatsachenstoffes vorzubereiten, den die Einzelwissenschaften aufgehäuft haben, und die Ansätze dazu zunächst unter den Forschern selbst zu verbreiten, ist ein immer dringenderes Bedürfnis vor allem für die Wissenschaft geworden, dann aber auch für unsere Zeit überhaupt, die dadurch erst erwerben wird, was wir besitzen.

Doch nur durch gemeinsame Arbeit vieler kann das erreicht werden. Darum rufen wir alle philosophisch interessierten Forscher, auf welchen wissenschaftlichen Gebieten sie auch betätigt sein mögen, und alle Philosophen im engeren Sinne, die zu haltbaren Lehren nur durch eindringendes Studium der Tatsachen der Erfahrung selbst zu gelangen hoffen, zum Beitritt zu einer Gesellschaft für positivistische Philosophie auf. Sie soll den Zweck haben, alle Wissenschaften untereinander in lebendige Verbindung zu setzen, überall die vereinheitlichenden Begriffe zu entwickeln und so zu einer widerspruchsfreien Gesamtaufassung vorzudringen.

Um nähere Auskunft wende man sich an den mitunterzeichneten Herrn M. H. Baege, Friedrichshagen bei Berlin, Waldowstraße 23.

E. DIETZGEN, Fabrikbesitzer u. philos. Schriftsteller, Bensheim.	Prof. Dr. S. FREUD, Wien.	Prof. Dr. TH. ZIEHEN, Gch. Medizinalrat, Wies- baden.
Prof. Dr. FÖPPL, München.	Prof. Dr. JENSEN, Göttingen.	Prof. Dr. FOREL, Yvorne.
Prof. Dr. HILBERT, Geh. Reg.-Rat, Göttingen.	Prof. Dr. B. KERN, Obergeneralarzt u. Inspek- teur der II. Sanitäts-In- spektion, Berlin.	Prof. Dr. HELM, Geh. Hofrat, Dresden.
Prof. Dr. KAMMERER, Geh. Reg.-Rat, Charlotten- burg.	Prof. Dr. v. LISZT, Geh. Justizrat, Berlin.	Prof. Dr. JERUSALEM, Wien.
Prof. Dr. LAMPRECHT, Geh. Hofrat, Leipzig.	Prof. Dr. G. E. MÜLLER, Geh. Reg.-Rat, Göttingen.	Prof. Dr. F. KLEIN, Geh. Reg.-Rat, Göttingen.
Prof. Dr. E. MACH, Hofrat, Wien.	Prof. Dr. POTONIÉ, Königl. Landesgeologe, Berlin.	Prof. Dr. LOEB, Rockefeller-Institute, New-York.
JOSEF POPPER, Ingenieur, Wien.	Prof. Dr. Roux, Geh. Medizinalrat, Halle a. S.	Dr. MÜLLER-LYER, München.
Prof. Dr. RIBBERT, Geh. Medizinalrat, Bonn.	Prof. Dr. Ritter v. SEELIGER, München.	Prof. Dr. RHUMBLER, Hann.-Münden.
Prof. Dr. SCHUPPE, Geh. Reg.-Rat, Breslau.	Prof. Dr. WERNICKE, Oberrealschuldirektor und Privat-Dozent, Braun- schweig.	Prof. Dr. F. C. S. SCHILLER, Corpus Christi College, Oxford.
Prof. Dr. VERWORN, Bonn.		Prof. Dr. TÖNNIES, Kiel.
Prof. Dr. EINSTEIN, Prag.		Prof. Dr. WIENER, Geh. Hofrat, Leipzig.
M. H. BÄEGE, Dozent der Freien Hochschule Berlin Friedrichshagen.		Prof. Dr. PETZOLDT, Oberlehrer und Privat-Dozent, Spandau.

Bücherschau.

J. Bauschinger und **J. Peters**. **Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten**. Erster Band: Tafel der achtstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000. Stereotypausgabe. Leipzig 1910, Wilhelm Engelmann. Geb. *M.* 18.50.

Für manche Rechnungen insbesondere der Astronomie und Geodäsie sind mehr als siebenstellige Logarithmentafeln ein Bedürfnis; an solchen Tafeln standen seither hauptsächlich zur Verfügung der zehnstellige, für die Interpolation unbequeme „Thesaurus logarithmorum“ von G. Vega und die achtstelligen, vom französischen Service géographique de l'Armée herausgegebenen „Tables des logarithmes à huit décimales“, welche letzteren die Dezimalteilung des Quadranten zugrunde liegt. Die vorliegenden achtstelligen Tafeln haben als Grundlage die Sexagesimalteilung des Quadranten; das Werk füllt demnach eine vorhandene Lücke aus.

Die Tafeln wurden mit Rücksicht auf die Handlichkeit auf zwei Bände verteilt, von denen der erste Band eine Tafel der achtstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200 000 und die zur Berechnung der Logarithmen von Sinus und Tangens kleiner Winkel erforderlichen Größen S und T enthält.

Die Intervalle des Arguments wurden derart gewählt, daß nicht nur an jeder Stelle der Tafel lineare Interpolation gestattet ist, sondern daß die Funktionsintervalle nur ausnahmsweise auf vier Stellen ansteigen. Interpolationstäfelchen sind dem vorliegenden ersten Band in genügender Anzahl beigegeben.

Für die Anordnung und Gruppierung der einzelnen Seiten diente die bekannte sechsstellige Tafel von Bremiker als Vorbild. Die Zerlegung der einzelnen Logarithmen geschah in Gruppen zu drei und fünf Ziffern. In bezug auf die äußere Ausstattung wurde alles aufgeboten, um die Tafel zu einer mustergültigen zu machen.

Von besonderem Interesse ist bei dem neuen Tafelwerk die Ermittlung der Funktionswerte, die nicht durch vollständige Neuberechnung bestimmt wurden. Als Grundlage für den vorliegenden ersten Band dienten die auf zwölf Dezimalen abgekürzten, in Briggs, *Arithmetica logarithmica* (Londini 1624) vierzehnstellig enthaltenen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000. Die dazwischenliegenden Werte wurden mit Benützung der zweiten Differenzen berechnet; für diese Arbeit wurde von Ingenieur Hamann eine neue Differenzenmaschine konstruiert, die außerdem die berechneten Werte gleichzeitig aufschreibt. Die ganze Interpolationsarbeit, bestehend

aus 828 000 Einzelwerten, wurde mit Hilfe der Maschine von zwei Rechnern in einem Jahr erledigt. Das Ergebnis der mit der Maschine unmittelbar geleisteten Arbeit stellt eine zwölfstellige Logarithmentafel vor, die im Manuskript dem Astronomischen Recheninstitut in Berlin zur ständigen Aufbewahrung übergeben wurde. Eine Beschreibung der neuen Maschine, die sich vorzüglich bewährt hat, ist in der dem ersten Band beigegebenen Einleitung enthalten.

Nach menschlichem Ermessen wurde alles getan, um eine möglichst fehlerfreie Tafel zu schaffen.

Beigefügt möge noch sein, daß das Werk mit Unterstützung der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin und der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien durchgeführt wurde.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

Prof. J. Peters. Einundzwanzigstellige Werte der Funktionen Sinus und Cosinus zur genauen Berechnung von zwanzigstelligen Werten sämtlicher trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Arguments sowie ihrer Logarithmen. Aus dem Anhang zu den Abhandlungen der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1911. Berlin 1911, in Kommission bei Georg Reimer.

Die vorliegende Tafel entstand als Hilfstafel für die Bearbeitung der im vorhergehenden besprochenen, vom Verfasser und J. Bauschinger herausgegebenen achtstelligen Logarithmentafel, bei welcher einzelne zweifelhaft gebliebene Werte einer mindestens sechzehnstelligen Neuberechnung unterzogen werden mußten.

Die Tafel enthält für alte Teilung des Quadranten die einundzwanzigstelligen Werte der Funktionen Sinus und Cosinus, und zwar auf sieben Seiten für die Winkel von 0 Grad bis 90 Grad von zehn zu zehn Minuten und auf dreißig Seiten für die Winkel von 0 Grad bis 0 Grad 10 Minuten für jede Sekunde; im letzteren Fall mit Angabe der ersten bis dritten Differenzen. Außerdem sind zur Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen drei Hilfstafeln vorhanden, die auf einundzwanzig Dezimalen Vielfache des Moduls M , Vielfache von $\text{arc } 1''$ und Vielfache des reziproken Moduls $1:M$ enthalten.

Die Ermittlung der natürlichen Werte von Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels mit Hilfe der Tafel geschieht auf Grund der Formeln

$$\sin(\alpha \pm \Delta\alpha) = \sin\alpha \cos\Delta\alpha \pm \cos\alpha \sin\Delta\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \Delta\alpha) = \cos\alpha \cos\Delta\alpha \mp \sin\alpha \sin\Delta\alpha$$

$$\text{tg}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\cos 2\Delta\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\Delta\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\Delta\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\Delta\alpha}$$

$$\text{tg}(\alpha - \Delta\alpha) = \frac{\cos 2\Delta\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\Delta\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\Delta\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\Delta\alpha}$$

Für die Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen empfiehlt der Verfasser den Weg über die natürlichen Werte und unter Be-

nützung der Tafeln von Steinhauser¹⁾ oder Callet²⁾ die Verwendung der stark konvergierenden Reihe

$$\log(n + \Delta n) = \log n + 2M \left\{ \frac{\Delta n}{2n + \Delta n} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta n}{2n + \Delta n} \right)^3 + \dots \right\}$$

In der Einleitung zu der Tafel gibt der Verfasser mehrere durchgeführte Zahlenbeispiele.

Die Art der Berechnung der einzelnen Tafelwerte und die ausgeführten Kontrollen, über die der Verfasser in der Einleitung nähere Angaben macht, lassen zusammen mit der beim Korrekturenlesen angewandten Sorgfalt vermuten, daß die neue, für manche Zwecke wertvolle Tafel frei von Fehlern ist.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

Prof. **Dr. J. Peters**, Observator des Kgl. Astronomischen Recheninstituts in Berlin. **Siebenstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen für jede Bogensekunde des Quadranten.** Stereotypausgabe. Leipzig 1911, Wilhelm Engelmann. Geb. *M* 30.—

Bei Benützung des trigonometrischen Teiles der gebräuchlichsten siebenstelligen Logarithmentafeln tritt insofern eine Unbequemlichkeit auf, als — abgesehen von den kleinen Winkeln — das Argumentintervall für die Interpolation zu groß ist. Diese Unbequemlichkeit ist bei der neuen Tafel nicht vorhanden, indem sie für die Sexagesimalteilung des Quadranten die siebenstelligen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Sekunde zu Sekunde angibt.

Die Grundlage für die Tafel bildete die bei der Herstellung der von J. Bauschinger und J. Peters herausgegebenen achtestelligen Logarithmentafel³⁾ gleichsam als Nebenprodukt entstandene zwölfstellige Tafel.

Die Tafel umfaßt 921 Seiten, auf denen je drei — bis zu zwei Grad nur je zwei — Minuten in übersichtlicher Weise untergebracht sind. Von den einzelnen Logarithmen sind aus Raumrücksichten die drei ersten — bei den kleineren Winkeln weniger — Ziffern abgetrennt und am Kopf bzw. Fuß der Vertikalspalte vorgedruckt.

Die Interpolationstafelchen sind in ausreichender Anzahl für ein-, zwei- und dreistellige Differenzen — im Winkel von einem Grad zwanzig Minuten an — vorhanden. Für kleine Winkel — bis zu zwei Grad — sind die bekannten Größen *S* und *T* angegeben.

An Korrekturenlesen wurde nach Angabe des Verfassers nicht gespart, so daß die Tafel frei von Druckfehlern sein dürfte.

Die äußere Ausstattung der Tafel entspricht den Anforderungen, die man an eine gute Tafel stellt.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

1) A. Steinhauser. *Hilfstafeln zur präzisen Berechnung zwanzigstelliger Logarithmen usw.* Wien 1880.

2) F. Callet. *Tables portatives de logarithmes.* Paris 1795.

3) J. Bauschinger und J. Peters: *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen.* Leipzig 1910 und 1911. Vgl. die Besprechung auf S. 204.

Dr. **Lothar Schrutka, Edler von Rechtenstamm**, Privatdozent für Mathematik an der Universität und an der Technischen Hochschule in Wien. **Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers**. Leipzig und Wien 1911, Franz Deuticke. *M* 3.—

Nach einleitenden Bemerkungen über die Grundlagen der Theorie des Rechenschiebers gibt der Verfasser eine Beschreibung des Instruments in seiner gewöhnlichen Ausführung. Die Anleitungen zu seinem Gebrauch beziehen sich insbesondere auf Proportionsrechnungen, Multiplikation, Division, Quadrieren, Quadratwurzelausziehen, Kubieren und Kubikwurzelausziehen. Ferner findet man Angaben über Rechenschieberskalen für besondere Zwecke und über die Verwendung des Rechenschiebers zur Auflösung von quadratischen und kubischen Gleichungen. Beigefügt sind auch Bemerkungen über die Genauigkeit der Rechenschieberrechnung und solche über besondere Arten von Rechenschiebern.

Bei den Anleitungen für den Gebrauch des Rechenschiebers bespricht der Verfasser zuerst die Berechnung von Proportionen und dann erst die Multiplikation und Division; für den Anfänger ist zweifellos der umgekehrte Weg der empfehlenswertere.

Wenn auch die erste Einführung in den Gebrauch des Rechenschiebers am besten mündlich durch einen erfahrenen Rechner geschieht, oder — wenn hierzu keine Gelegenheit vorhanden ist — an Hand einer kurzen Anleitung ausgeführt werden kann, wie sie seitens der Rechenschieberfabriken den einzelnen Instrumenten beigegeben wird, so wird doch mancher für das weitere Eindringen eine Anleitung wie die vorliegende gerne zur Hand nehmen.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

Ing. **Siegmond Wellisch**, Bauinspektor der Stadt Wien. **Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung**. Zwei Bände. Wien und Leipzig 1909 und 1910, Carl Fromme. *M* 10.—, bzw. *M* 7.50.

Das Werk zerfällt in zwei Bände, von denen der erste die „Elemente“ und der zweite die „Probleme“ der Ausgleichsrechnung behandelt. Der erste Band enthält drei Abschnitte, die sich mit der Theorie der wahren Beobachtungsfehler, der scheinbaren Beobachtungsfehler und der kleinsten Fehlerquadratsummen beschäftigen; im zweiten Bande werden in drei Abschnitten die Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume, die Triangulierungs-Ausgleichung und die Aufstellung empirischer Formeln behandelt. Wie schon diese kurze Inhaltsübersicht andeutet, ist insbesondere der zweite Band für die Zwecke der Geodäsie bestimmt.

In der Einteilung und Behandlung des Stoffes weicht der Verfasser vielfach von dem sonst Üblichen ab; besonderes Interesse verdienen in dieser Hinsicht im ersten Band diejenigen Teile, die sich mit den verschiedenen Fehlermaßen befassen. An verschiedenen Stellen des Werkes findet man Neuerungen; von diesen mögen hier nur angeführt sein eine Näherungsformel zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers unmittelbar aus Beobachtungsfehlern, und die Einführung von neuen — vom Verfasser als neutrale widerspruchsfreie Werte der charakteristischen Fehlermaße bezeichnete — Fehlermaßen.

Das Werk, das sowohl für den Theoretiker als auch für den Praktiker lesenswert ist, ist klar und leicht verständlich geschrieben; es bedeutet zweifellos eine wertvolle Bereicherung der Literatur über Ausgleichsrechnung.

Straßburg i/E.

P. WERKMEISTER.

S. Arrhenius. Das Schicksal der Planeten. Mit 2 Abbildungen im Text. 55 S. 8. Leipzig 1911, Akad. Verlagsgesellschaft.

In dieser anregenden Schrift entwickelt der Verf. aus physikalischen und chemischen Überlegungen heraus in großen Zügen den Ablauf des Schicksals, das einen Planeten nach seiner Geburt treffen muß. Die Oberflächengestaltung und Intensität des organischen Lebens sind aufs engste mit der Dichte und Beschaffenheit der Atmosphäre verknüpft; die einfachen und durch die fortschreitende Entwicklung notwendigen atmosphärischen Wandlungen ziehen den für das organische Leben gewaltigen Umschwung auf den Planetenoberflächen nach sich. Nur die letzten Phasen der Entwicklung seien hier skizziert. Der Stufe der Erde geht ein Stadium voran, wie wir es jetzt auf der Venus vor uns sehen: eine dichte feuchte Atmosphäre, ständige Wolkenbedeckung, tiefende Nässe. Ein schwaches klimatisches Abbild gewähren auf der Erde die Kongogebiete und das Innere Brasiliens am Amazonas. Mit schwindender Atmosphäre sinkt der Planet durch das Erdstadium hindurch und tritt in einen Zustand, den wir auf dem Mars beobachten. Ein dünne Luft umgibt eine wüstenhafte Oberfläche, deren Gebirge schon abgetragen sind. Als Gleichnis zieht der Verf. die von Hedin in den letzten Jahren genauer studierten Wüsten Zentralasiens heran, in denen auch Gebiete nicht fehlen, die Seitenstücke zu den Kanälen und Seen des Mars abgeben. Jedenfalls widerspricht die von Arrhenius mit besonderer Liebe behandelte Erklärung der Marsformationen in keinem Punkte dem heutigen Stande der visuellen und spektrographischen Beobachtungen. In der weiteren Entwicklung büßt der Planet immer mehr Atmosphäre ein und infolge des Wassermangels hört der größte Teil des Kreislaufes auf. In diesem Zustand befinden sich Mond, Merkur und die kleinen Planeten. Von da ab ist der Himmelskörper tot und unveränderlich.

Um das Mindeste zu sagen bildet das „Schicksal der Planeten“ für einen großen Komplex sehr verschiedenartiger Beobachtungen eine einfache Beschreibung; die einfachste Beschreibung ist das Ziel der Forschung.

Straßburg i. E.

WIRZ.

1. **C. V. L. Charlier. Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems.** I. Mit 1 Fig. 21 S. 8. II. Mit 1 Fig. 28 S. 8. Upsala 1911, Meddel. Lunds observat. Nr. 45, 46.
2. **C. V. L. Charlier. Die Lagrangesche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem.** Mit 1 Tafel. 18 S. 4. Lund 1911, Meddel. Lunds observat. Ser. II, Nr. 7.

1. Der Verf. will in diesen Untersuchungen die von Lagrange bearbeitete Methode der Bahnbestimmung nach der Richtung vervollständigen, daß er die Lösung in rein analytischer Weise ohne irgend welche Näherungen direkt ausdrückt. Er diskutiert zu dem Zwecke zunächst die Lagrangesche Gleichung für den Radiusvektor, eine Gleichung 8ten Grades zwischen dem Radiusvektor des Planeten und seinem Erdbstand. Sie hat immer eine Wurzel, die der Einheit gleich ist, der Erdbahn entspricht und daher ausscheidet; ferner müssen eine negative, zwei positive und vier imaginäre Wurzeln vorhanden sein. Die weitere Diskussion der beiden positiven Wurzeln führt auf Notwendigkeit und

Möglichkeit von Doppellösungen, deren Auftreten in verschiedenen Raumgebieten durch eine Figur der Grenzflächen veranschaulicht wird. Aus den Endgleichungen, mit denen Lagrange seine Untersuchungen abschloß und die die mathematische Lösung des Bahnbestimmungsproblems enthalten, leitet nun der Verf. die eigene analytische Lösung ab, deren Vorzug er besonders darin sieht, daß sie eben die Unbekannten direkt ohne Näherungen liefert.

2. Zur Erleichterung der numerischen Auflösung der Lagrangeschen Gleichung hat der Verf. in der zweiten Abhandlung Tafeln veröffentlicht, die aber nicht in so engen Intervallen angelegt sind, daß man sie mit Vorteil bei praktischen Rechnungen verwerten könnte. Ein durchgerechnetes Bahnbestimmungsbeispiel fehlt; man kann sich daher nicht ohne weiteres eine Vorstellung von dem erforderlichen Arbeitsaufwand bei der praktischen Anwendung der Lagrange-Charlierschen Methode machen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

C. V. L. Charlier. Über die Bewegung der Bahnebenen der Satelliten in unserem Planetensystem. 35 S. 4. Lund 1909, Meddel. Lunds observat. Ser. II, Nr. 5.

Der Verf. untersucht die wichtige Frage, inwieweit die Satellitenbahnen der Bewegung des Äquators ihres Hauptplaneten folgen, ein Problem von großer Bedeutung sowohl für die Entwicklung der Satelliten als auch für die kosmische Geschichte der Rotation der Planeten. Die interessante mathematische Ableitung, die den breitesten Raum einnimmt und das Problem originell löst, führt zu dem Resultat, daß in der Hauptsache die Beziehung $S_1 : S_2$ das Verhalten der Bahnebenen der Satelliten zum Äquator des Hauptplaneten bestimmt; hier bedeutet S_1 näherungsweise die Bewegung der Bahnebenen des Satelliten auf der Bahnebene des Hauptplaneten unter dem alleinigen Einfluß der Sonne, und S_2 ist die Bewegung des Knotens der Satellitenbahn auf dem Äquator des Planeten, wenn nur die Abplattung des Hauptplaneten die Knotenbewegung der Satellitenbahn bedingt. Bleibt $S_1 : S_2$ sehr klein ($S_1 < S_2$), so folgt die Satellitenbahn den Bewegungen des Äquators des Hauptplaneten und die Bahn liegt ungefähr in dieser Äquatorebene; ist $S_1 : S_2$ aber sehr groß ($S_1 > S_2$), so heißt das, daß die Abplattung des Planeten zu gering und nicht mehr imstande ist, die Mondbahnebene den Änderungen der Äquatorebene nachzuzwingen.

Einige der kosmogonisch wichtigen Schlüsse, zu denen Charlier auf Grund dieser Untersuchungen gelangt, mögen hervorgehoben werden. Für die Erde ergibt sich, daß zur Zeit der Loslösung ihres Mondes der Erdäquator eine erheblich kleinere Neigung gegen die Ekliptik gehabt hätte als heute. Die sieben inneren Saturnsatelliten sind an die Bewegungen des Saturnäquators gebunden; der äußerste Satellit Phoebe läuft rückwärts. Das legt die Annahme nahe, daß der Saturn zur Zeit der Bildung der Monde in retrograder Richtung rotierte, daß die Rotationsachse dann allmählich umkippte, hierbei die sieben inneren Monde mitnahm, den äußersten Phoebe aber als Zeugen der alten Rotation stehen ließ. Auf eine eigenartige Entwicklung, ähnlich derjenigen im Saturnsystem deuten die Verhältnisse des Jupitersystems hin. Natürlich setzen diese weitreichenden kosmogonischen Schlußfolgerungen voraus, daß wirklich die merkwürdigen, in den letzten Jahren entdeckten schwachen

und entfernten Monde des Jupiter und Saturn ursprünglich jenen massenstarken Planeten angehören und nicht etwa erst später von ihnen eingefangen wurden. Gerade für einen solchen Vorgang spricht aber manches.

Straßburg i. E.

WIRTZ

A. v. Flotow. Einleitung in die Astronomie. Mit 1 Fig. XIV u. 288 S. 8. (Samml. Schubert XV.) Leipzig 1911, G. J. Göschen. Geb. *M* 7.—.

Unter Einleitung in die Astronomie versteht der Verf. die Definition und Transformation der verschiedenen astronomischen Koordinaten, ihre gegenseitigen Veränderungen im Laufe der Zeit und die Bestimmung der uns durch das Licht vermittelten Richtungen der Himmelsobjekte. Das ist also der theoretische Teil der sphärischen Astronomie oder Astrometrie. Die Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie werden streng und allgemein auf Grund des Möbiusschen Begriffs der Strecke und des Prinzips der Drehung um Achsen abgeleitet und die Lagrangeschen Reihenentwicklungen, die für die astronomischen Rechnungen besondere Bedeutung besitzen, wiedergegeben. Mit den fundamentalen Koordinatensystemen, dem Zeitmaß und der Transformation der Koordinaten beschäftigen sich die nächsten drei Abschnitte, in denen neben den strengen Formeln auch die Vereinfachungen und rechenflüchtigen Umgestaltungen auseinandergesetzt werden, deren sich in praxi der Astronom bedient. Sehr vollständig erscheint das Problem der Parallaxe; nicht nur der Übergang auf den *locus fictus* wird gelehrt, sondern auch die Reduktion der Koordinaten auf das Baryzentrum, i. e. den Schwerpunkt des Systems Erd-Mond, wie es zuerst von H. Bruns angegeben worden ist.

Der Zeitrechnung liegt die Bewegung der Erde in ihrer Bahn zugrunde, und daher erfahren in einem folgenden Kapitel die Elemente der Bahnbewegung eine eingehende Darstellung, in der die Bewegung der Erde unter dem Einfluß des Mondes und die Beziehung zwischen heliozentrischen Koordinaten des Geozentrums und des Baryentrums nicht fehlen. Der Theorie der Refraktion und ihrem Einfluß auf die Koordinaten ist der achte Abschnitt gewidmet, der allgemein die Realisierung der Richtung durch den Lichtstrahl umfaßt. Hierhin gehört dann auch an zweiter Stelle die Aberration, die eine ebenso anschauliche wie vollständige Durcharbeitung findet. Die „Änderungen der Fundamentalebene“ im letzten (9.) Kapitel umfassen die Präzession, die Nutation und die Polschwankungen, wobei wieder die bequemen in der numerischen Rechnung gebrauchten Formeln den Abschluß der Entwicklung bilden. — Die zahlreichen numerischen Angaben des Textes und die Elemente und Konstanten am Schluß des Buches gehen auf die besten modernen Quellen zurück.

Das Vorwort hebt hervor, daß für die Behandlung des Stoffes maßgebend waren die Vorlesungen über Astronomie von H. Bruns in Leipzig und Untersuchungen von Leverrier und Newcomb. Das Werk zeichnet sich aus durch Straffheit der Disposition, Schärfe der Definitionen und Kürze und Strenge der Entwicklungen. Seiner Anlage nach stellt es das Wesen der Methode in den Vordergrund. Nicht nur dem Studierenden wird es von Nutzen sein.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

S. Günther. Vergleichende Mond- und Erdkunde. Mit 23 Abbild. im Text u. 4 Tafeln. XI. u. 193 S. 8. (Samml. „Die Wissenschaft“, Heft 37.) Braunschweig 1911, F. Vieweg & Sohn. Geb. *M* 5. 80.

Nach dem Willen des Verf. soll in dem Buche „von den ältesten Zeiten an der Gedanke, im Monde sei eine zweite Erde anzuerkennen, durch die Jahrhunderte verfolgt werden, um zuletzt zu zeigen, daß in der Tat mit gutem Recht ein Vergleich zwischen Mond- und Erdkunde gezogen werden kann, der in sich volle Berechtigung besitzt, sobald man nicht in den freilich sehr gefährlichen und wiederholt begangenen Irrtum verfällt, Analogie mit Identität zu verwechseln.“ So ist denn auch die Schrift vorwiegend historischer Art, und für den Astronomen besteht ihr großer Wert in den reichen Literaturnachweisen, neben denen für den noch nicht mit dem Monde Vertrauten die sachliche Behandlung der eigentlich selenographischen Fragen zu kurz kommt. Unter den modernen Forschungsmethoden, Hypothesen und Theorien bleibt wohl keine unerwähnt; ja man kann das nützliche Buch als einen mit philologischer Akribie gearbeiteten und gut disponierten Abriß der selenographischen Literaturgeschichte bezeichnen. Der breiteste Raum ist der Frage des lunaren Vulkanismus eingeräumt, kürzer gefaßt das Kapitel über die tektonischen Dislokationen auf dem Mond. Die Ansicht des Verf., die übrigens bei dem referierenden Charakter des Buches nie in den Vordergrund tritt, geht dahin, „gezeigt zu haben, daß es möglich ist, sich von der großen Mehrzahl der Dinge, die man auf dem Monde sieht, dadurch Rechenschaft zu geben, daß man die Normen, welche für die vulkanischen und tektonischen Erscheinungen auf der Erde als gültig anerkannt sind, unter geeigneten Kautelen auch auf das Nachbargestirn überträgt.“— Die Hinzufügung des Erscheinungsjahres bei den Zeitschriftenbänden würde den Zitatenschatz noch übersichtlicher gemacht, die historische Entwicklung noch genauer festgelegt haben.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

H. Martus. Entstehungsweise der Monde der Planeten. Mit 6 Tafeln. 52 S. 8. Dresden 1909, C. A. Koch. *M* 2. —.

Aus Messungen an Mondphotographien findet der Verf., daß die Mondkrater entweder kreisförmige oder in vielen Fällen eirunde Kammlinien aufweisen. Sechzig dem Rande nicht ferne Krater hat Martus durchgemessen; ihre Reduktionselemente und die Planzeichnung der Kraterwälle sind übersichtlich wiedergegeben. Diese Untersuchungen führen nun den Verf. zu dem Schluß, daß die Mondkrater ihren Ursprung einschlagenden meteorischen Kugeln verdanken, eine Ansicht, die schon von manchen Selenographen ernstlich diskutiert worden ist und die in dem in den letzten Jahren genauer bekannt gewordenen sog. Meteorkrater Coon butt in Arizona eine irdische Stütze fand. Eine genaue Ausmessung des Alpentales bestätigt es wieder, daß diese eigentümliche Formation eine geradlinige 147 km lange Furche in die Wölbung der Mondkugel reißt, also entschieden auf einen Streifschuß hindeutet. Es existieren übrigens noch andere derartige Furchen, wenn auch in kleinerem Maßstabe, und alle diese Furchen sind merkwürdigerweise untereinander parallel. Der Geschoßhagel, der den Mond getroffen hätte, rührt nach Martus her von einem Ring kosmischen Staubes, der in der Art der Saturnringe einst die Erde

14*

umgab und hernach zum Monde wurde. Den Marsmond Phobos, den V., VI., VII., VIII. Jupitermond hält Martus für eingefangene kleine Planeten, während die ursprünglichen Planetenmonde aus Meteorringen hervorgegangen seien.

Gegen die Anschauungen des Verf. lassen sich leicht Einwände erheben; seine mit einfachen Mitteln ausgeführten sorgfältigen Vermessungen nach Mondphotogrammen aber verdienen Anerkennung und Nachahmung.

Straßburg i. E.

WIRTZ

F. Nölke. Neue Erklärung des Ursprungs der Kometen. Mit 6 Fig. 42 S. 8. S.-A. aus den Abh. d. Nat. Ver. Bremen, Bd. XX, Heft 1. Bremen 1909.

Die Schrift ist dem Beweis der Behauptung gewidmet, daß der Ursprung der Kometen und die Entstehung der irdischen Eiszeiten einem Durchgange der Sonne durch kosmische Nebelmassen zugeschrieben werden müsse. Der Nebel, der für die Kometen unseres Systems das Material geliefert habe, sei der Orionnebel; die Sonne verließ ihn vor etwa 50 000 Jahren, nachdem sie vielleicht 5000 Jahre im Hindurchwandern darin verweilt. Während des Aufenthalts der Sonne in der Nebelmasse herrschte im Sonnensystem die Eiszeit, weniger wegen der Verringerung der Wärmestrahlung durch Absorptionswirkung der zwischen Erde und Sonne lagernden Staubmaterie, als vielmehr weil die Sonnentemperatur durch die unaufhörlich mit ihr vereinigten und sie verdichtenden Nebelpartikelchen allmählich ihre Durchlässigkeit für Wärmestrahlen einbüßte. Die längere Dauer der Eiszeit von 50 000—100 000 Jahren nebst den Interglazialzeiten rührt daher, daß die Sonne nacheinander in mehrere ziemlich weit voneinander entfernte, hinter dem Orionnebel liegende und mit ihm nur lose zusammenhängende Nebelmassen eintrat.

Die Bedingungen, unter denen kometenartige Gebilde von der Sonne mitgezogen werden und das Bild, das sich nun für die Verteilung der Bahnen ergeben muß, sucht der Verf., sehr ins Einzelne gehend, nachzurechnen. Er muß zwar Hypothese auf Hypothese fügen, aber daß irgend eine unannehmbar oder gezwungen sei, kann man nicht gerade sagen. Die Verteilung der Bahnen und ihrer Elemente prüft dann der Verf. an Hand des tatsächlichen Materials. Wenn er aber gleich in der Verteilung der Perihelien eine Andeutung zu gunsten seiner Theorie sieht, so darf man dem entgegenhalten, daß diese Erscheinung sich sehr viel einfacher dadurch erklären läßt, daß die Kometenentdecker meist in höheren geographischen Breiten beobachten. Infolgedessen werden Kometen mit Perihellängen bei 90° und 270° im allgemeinen leichter gefunden als andere. Ähnliche Einwände lassen sich gegen die Deutung der Verteilung der anderen Bahnelemente erheben.

Wenn es also auch dem Verf. nicht gelingt, die gegenwärtig beobachtete Verteilung der Kometenbahnen aus seiner Theorie heraus als notwendig zu erweisen, so wird man in ihr immerhin eine Bereicherung unserer Auffassungsmöglichkeit vom Ursprung der Kometen erblicken. Und als Arbeitshypothese ist sie gar nicht schlecht.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

S. Oppenheim. Probleme der modernen Astronomie. Mit 11 Fig. im Text. VI u. 156 S. kl. 8. (ANuG. 355). Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geb. *M* 1. 25.

Moderne Fragen der Himmelsmechanik sind es im wesentlichen, die der Verf. in diesem schönen Büchlein für einen weiteren Leserkreis darstellt. In sechs Kapiteln baut er den gewählten Stoff auf; er beginnt mit dem Problem der Störungen, das vorwiegend unter dem Gesichtspunkt betrachtet wird, die Beträge der zu erwartenden Abweichungen von der Keplerschen Bewegung abzuschätzen. Auf den allgemeinen Charakter der verschiedenen Störungen geht der zweite, dem Stabilitätsproblem gewidmete Aufsatz näher ein. Die Frage der Lücken im Schwarm der kleinen Planeten und einige verwandte Erscheinungen beherrschen das Kapitel. Die Gruppe der Kometen und Sternschnuppen behandelt der dritte Abschnitt. Wiederum ist es der Bahncharakter und seine Verteilung, der eine besondere Berücksichtigung erfährt, dessen Studium auch einen Anhalt für den Ursprung der Kometen liefern soll. Die jüngsten Forschungen über die Konstitution der Kometenschweife bilden den Schluß. Den breitesten Raum nimmt das vierte Kapitel mit dem Problem der Gestalt der Himmelskörper ein. Die Wichtigkeit des Themas für kosmogonische Fragen einerseits, seine Schwierigkeiten andererseits haben den Verf. wohl zu dieser im Rahmen des Buches recht ausführlichen Darstellung veranlaßt, die bis zu den neuesten Resultaten der Untersuchungen von Poincaré und Darwin vordringt und in historischer Folge die spannenden Phasen unserer Erkenntnis des Rotationsproblems wiedergibt. In den Bau der Fixsternwelt führt Kapitel V ein; die Sterneichungen und ihre Bearbeitung von W. Herschel bis Seeliger erfahren eine eindringende Wiedergabe und nicht minder die Aufschlüsse, zu denen das Studium der Eigenbewegungen der Fixsterne für die Anordnung der Sterne in unserer engeren Nachbarschaft führte. Das Buch schließt mit einer Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes, die die bemerkenswerten Abweichungen bespricht, die anscheinend noch zwischen der astronomischen Theorie und der Beobachtung bestehen.

Die Sprache des Buches ist leicht und klar, und zum Verständnis tragen nicht wenig die einfachen Formeln und numerischen Beispiele bei, die die Darstellung schwierigerer Gegenstände begleiten. Abgesehen von seiner selbständigen Bedeutung bildet das Werkchen eine wertvolle Ergänzung zu jeder guten populären Astronomie.

Druckfehler. S. 36, Zeile 15 v. oben; statt 1908 lies 1898.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

C. Schoy. Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Fig. im Text u. 8 Tafeln. VII u. 40 S. 8. Leipzig u. Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 1. 60.

Die kleine Schrift behandelt in der Hauptsache die graphische Lösung der wichtigsten sphärisch-astronomischen Aufgaben. Mit Interesse wird man die Einleitung lesen, die die Geschichte der konstruktiven Lösungen von den Griechen, Indern, Arabern angefangen bis auf die neuere Zeit in ihren Hauptzügen skizziert. Die genauen Quellenangaben sind für jeden von Wert, der die geometrische Entwicklung der sphärischen Probleme historisch verfolgt. In einem ersten Abschnitt behandelt dann der Verf. zehn Aufgaben, darunter das

Problem der kürzesten Dämmerung, die sich in einfacher Weise mittels der Orthogonalprojektion lösen lassen. Der zweite Teil bringt sieben weniger leichte Aufgaben, die die Anwendung der Zentralperspektive verlangen. Die geometrische Behandlung einiger Fragen aus der Gnomonik geht voran und unter den graphisch gelösten Aufgaben befindet sich die berühmte Dou wessche Aufgabe, die heute freilich praktisch auch für den Seemann kein Interesse mehr hat.

Daß die angegebenen konstruktiven Lösungen auch nicht rohen Anforderungen an astronomische Genauigkeit entsprechen ist klar; der Verf. hält aber dafür, daß sie einen tiefern Einblick in die Natur der Aufgabe vermitteln. Mag sein. Ref. dagegen glaubt nicht daran, daß es für die Schüler der Mittelschulen sehr ersprießlich ist, wenn immer und immer wieder Didaktik und Praxis verschiedene Wege einschlagen. Eine Bemerkung, mit der übrigens nichts gegen das Wesen der Schrift Schoys gesagt ist. —

In der Linie der hier eingeschlagenen Untersuchungen liegt auch eine spätere Schrift desselben Verf., die noch kurz angeführt sei. Ich meine seine „Geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern“⁽¹⁾, die die Geschichte dieser Aufgabe von den ältesten Kulturvölkern bis zu den gnomonisch-konstruktiven Methoden des Abul Hassan Ali von Marokko durchführt. Sie bietet dem an der Geschichte seiner Wissenschaft interessierten Astronomen wertvolles Material in bequemer und durchgearbeiteter Form.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

P. Schwahn. Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse.

Mit 20 Fig. im Text. V u. 128 S. 8. (Math.-phys. Schriften f. Ingen. u. Stud. herausgeg. v. E. Jahnke, 8). Leipzig 1910, B. G. Teubner.

Das nützliche Büchlein beschäftigt sich mit einem Zweig der Theorie der Finsternisse, der in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie entweder nur recht kurz oder gar nicht behandelt wird. Während nämlich dort das Ziel in der Benutzung einer Finsterniserscheinung zu Längenbestimmungen oder mehr noch zur Ableitung der Ephemeridenkorrekturen von Sonne, Mond oder Planeten besteht, stellt Schwahn in erster Linie die Vorausberechnung der Okkultationsphänomene dar. Das setzt natürlich schon die Theorie der Finsternisse voraus, und die findet auch beim Verfasser eine eingehende, einfache und didaktisch klare Darstellung. Die vier Abschnitte des Buches befassen sich der Reihe nach mit der Theorie und Vorausberechnung der Mondfinsternisse, der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe, der Sonnenfinsternisse und der Sternbedeckungen durch den Mond. Die Theorie der Sonnenfinsternisse folgt der mathematisch eleganten Besselschen Methode, deren Verständnis durch ein paar gut gezeichnete Figuren unterstützt wird. Die Phasen für einen gegebenen Ort und die Grenzkurven der Sichtbarkeit auf der Erdoberfläche erfahren eine eingehende Darstellung. Ausführlich wiedergegebene Rechenbeispiele erläutern den Gebrauch der abgeleiteten Formeln, und den vom Verf. im Vorwort ausgesprochenen Wunsch, daß das kleine Werk für die Studierenden der Astronomie ein praktischer Ratgeber sein möge, wird es erfüllen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

1) A. d. Archiv d. D. Seewarte 34 (1911), Nr. 2.

K. Schwarzschild. Über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. Mit 13 Fig. 44 S. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner. *M* 1.—.

In vier populären Vorträgen behandelt der Verf. den Stand unseres Wissens vom Bau der Fixsternwelt. Ein Aufsatz über das Fernrohr dient als Einleitung. Die folgende Rede über Lamberts kosmologische Briefe stellt neben die teleologische Weltauffassung, die vor 150 Jahren auch noch einen Gelehrten vom Range Lamberts beherrschte, die moderne Erkenntnis und zeigt in lebendiger Weise, inwieweit sich Lamberts Ideengang als keimkräftig erwies; die Darlegung der Anschauungen Lamberts begleiten Schritt für Schritt die Ergebnisse der neueren Forschung. Diesen selbst wird im dritten Abschnitt „Über das System der Fixsterne“ der breiteste Raum des Heftes zugewiesen. Der Verf., der selbst auf diesem Gebiete entscheidend wirkte, baut hier aus den Resultaten der astrometrischen und astrophysikalischen Untersuchungen unter kurzer Andeutung des Wesens der Methoden dasjenige Weltsystem auf, in das sich die heute bekannten Phänomene am bequemsten hineinpasse lassen. Auf die Bewegungen der Sterne folgt ihre physikalische Beschaffenheit und schließlich die Vereinigung aller Einzelzüge im Spiralnebel. Der vierte Vortrag betont die Vorstellbarkeit unseres Universums und macht sie deutlich; ein kurzer Absatz streift die Frage Endlichkeit oder Unendlichkeit des Raumes.

Die schönen Vorträge hat der Verf. „seinem hochverehrten Lehrer Herrn v. Seeliger zur Feier seines 60. Geburtstages“ gewidmet. Mit tiefem Sinn; denn auf allen in dieser Schrift behandelten Gebieten nehmen Seeligers Arbeiten eine führende Stellung ein.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

K. Schwarzschild, O. Birk. Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung im Luftballon bei Nacht. Mit 1 Karte von Mitteleuropa auf Pauspapier. 11 S. u. 32 Tafeln. 22×24 cm. (Lithographiert). Göttingen 1909, Vandenhoeck & Ruprecht. *M* 3.80.

Seitdem zu wissenschaftlichen und sportlichen Zwecken die Fahrten im Freiballon und im lenkbaren Luftschiff eine immer größere Ausdehnung genommen haben, stellte sich mehr denn früher die Notwendigkeit zu astronomischer Ortsbestimmung heraus; schon die Sicherheit der Fahrt verlangte das. Die üblichen Methoden, die klassischen und auch die in der Nautik gebräuchlichen, beanspruchen zu ihrer Auswertung eine viel zu lange Zeit und deshalb sucht man nach einem Verfahren, das unter möglicher Abkürzung der Rechnung nur gerade die Genauigkeit wahr, die der Luftschiffer beansprucht, i. a. höchstens $\pm 2' = \pm 3$ km. Die von Schwarzschild und Birk ausgearbeitete Methode geht unmittelbar aus dem anschaulichen Standlinienverfahren hervor. Für 16 der hellsten, über den ganzen Himmel verteilten Fixsterne sind je nach ihrer Stellung in Ost oder West je zwei Tafeln entworfen, die in einem Gradnetz die Kurven der Standlinien tragen. Durch einige mechanische Operationen, die man mit diesen Standlinientabellen und einer durchsichtigen Karte von Mitteleuropa vorzunehmen hat — die Beschreibung würde sehr viel länger ausfallen, als die Ausführung — läßt sich der Ort des Luftschiffs ablesen. Die Breite mag gleichzeitig durch eine Polarishöhe festgelegt sein, man kann aber den Ort auch als Schnittpunkt der Standlinien zweier beliebiger Sterne bestimmen. An Einfachheit läßt die Methode Schwarzschild-

Birck nichts zu wünschen übrig; sogar jeder astronomische Fachausdruck ist vermieden und der Ungeübte wird leicht die Auswertung der Messungen ganz mechanisch ausführen. Auf der Ila in Frankfurt a. M. wurde die Methode mit einem Preise ausgezeichnet.

Ein anderes ist es, ob sich stets mit der erforderlichen Sicherheit die Deckung der mäßig durchsichtigen Karte mit den Kurventafeln und die Ablesungen werden bewerkstelligen lassen. Indes kann man eine mechanische Vorrichtung angeben, die die jetzt noch bestehenden kleinen Unbequemlichkeiten beseitigt: die Kurvenblätter der Sterne werden für den Gebrauch einzeln in einen Rahmen gelegt, über den in fester Führung die auf eine steife glasklare Celluloidplatte gedruckte Karte von Mitteleuropa gleitet. Bringt man noch einen Läuferstreifen an, so ist die Ortsbestimmung so bequem und sicher wie nur möglich. Vor den beiden anderen bewährten Apparaten, dem Standlinieninstrument von Brill und Voigts „Orion“, hat die vorgeschlagene Vorrichtung immer noch den Vorzug der Leichtigkeit, der einfacheren Handhabung und der Billigkeit.

Schließlich sei noch hingewiesen auf ein durch Vollständigkeit und klare Darstellung ausgezeichnetes, kritisch gehaltenes Referat über den „heutigen Stand der astronomischen Ortsbestimmung im Luftschiff“¹⁾ von Knappschaftsdirektor Dr. jur. Heimann in Bochum; es berücksichtigt die Literatur bis Ende 1911.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

E. Anding. Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. Zweiter Abschnitt: Hilfsmittel und vorbereitende Untersuchungen zur Stellarastronomie. 174 S. 4. Leipzig 1910, B. G. Teubner. *M* 10. —

„Die nachstehenden Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum sind der Methode nach allgemein, der Tendenz nach kritisch.“ Mit diesen Worten charakterisierte seinerzeit der Verf. die Richtung des ersten Teiles der „Untersuchungen“, der i. J. 1901 erschien (München, F. Straub). Sie gelten ebenso für den jetzt nach neun Jahren vorliegenden zweiten Teil. Damals waren die Eigenbewegungen der Sterne und ihre Benutzung für die Ableitung des Apex der Sonnenbewegung Gegenstand kritischer Prüfung, diesmal sind es auch die anderen Charaktere der Sterne.

In einem ersten Kapitel setzt Anding Grundbegriffe, Konstanten und Einheiten fest, die er seinen Rechnungen unterlegt, und behandelt dann (Kap. II) in eingehender und erläuternder Weise Gedankengang und Resultate von F. G. W. Struves „Études d'astronomie stellaire“ (Petersburg 1847). Die Annahme einer interstellaren Extinktion, zu der Struve sich schließlich gedrängt glaubt, diskutiert das folgende Kapitel (III), das zwei Tafeln der Extinktion enthält, zum Überblick und zur Rechnung gleich bequem. Kap. IV stellt den Zusammenhang von Entfernung und Größenklasse dar; die Beziehung der Sternzahlen zur Milchstraße wird noch außer Acht gelassen und nur das Wachstum der Sternzahlen mit der Größenklasse und dessen Variabilität betrachtet. Der Abschnitt enthält viele interessante Bemerkungen zur Photo-

1) Mitteil. d. Verein. von Freunden d. Astron. 22 (1912) 24.

metrie der Gestirne. Zu einer Deutung der beobachteten statistischen Tatsachen kommt der Verf. hier noch nicht; zu dem Ende nimmt er vielmehr wieder das Studium der Eigenbewegungen auf (Kap. V), deren Verteilung er allgemein ohne Beziehung auf einen errechneten Apex betrachtet. Durch die Entwicklungen des Kap. VI werden die Funktionen, die in den stellarstatistischen Formelkomplexen auftreten, auf Besselsche Funktionen rein imaginären Argumentes zurückgeführt; die beigegebene Tafel ist so eingerichtet und abgestuft, daß die Interpolation möglichst einfach werden soll. Das Kap. VII rechnet noch eine Annahme für die Verteilungsfunktion der Eigenbewegungen und ihre Gruppierungen durch, und im Kap. VIII können dann die Versuche des künstlichen Aufbaues der Erscheinungen auf Grund des bearbeiteten Materials begonnen, vorläufige Resultate abgeleitet werden.

Das geschieht mit einer großen Vorsicht, die dem Verf. wie auch an andern Stellen seiner scharfsinnigen Untersuchungen überall wieder die Möglichkeit von Fehlschlüssen oder doch zu weitreichenden Schlüssen aufdeckt. Auf dem Wege über die Eigenbewegungen hinweg gelangt Anding hier zu einem Verteilungsgesetz der Leuchtkräfte, dessen Charakteristik beim Aufbau der Konstitution des Fixsternraumes eine wesentliche Rolle spielt. Das Gesetz, das vom Verf. schon i. J. 1902 ohne Beweis und Anwendung veröffentlicht wurde, hält auch einer Prüfung an Sternhaufen stand. In der vorläufigen Diskussion dieses Verteilungsgesetzes (Kap. IX) zeigt der Verf. weiter, wie das Verteilungsgesetz der Leuchtkräfte übergeht in ein Verteilungsgesetz der Radien der Sterne. Dadurch läßt sich das Gesetz auch nach unten hin beliebig ausdehnen und deuten, insofern als mit abnehmenden Radien die dunklen Körper immer häufiger werden und eine interstellare Extinktion erzeugen, von der sich allerdings herausstellt, daß sie praktisch keine Bedeutung gewinnt. Das Schlußkapitel (X) beschäftigt sich noch mit der Verknüpfung von Größenklasse, Eigenbewegung und Parallaxe; es behandelt die von Gylden und Kapteyn gefundenen Parallaxenformeln und weist im Anschluß daran einige Willkürlichkeiten nach, denen gemeinhin die Auswahl der auf Parallaxe zu beobachtenden Sterne unterliegt.

Andings Werk ist nicht leicht zu lesen, und die Kritik an den bisherigen Methoden, deren Zurückführung auf ihre wahre Bedeutung wirkt bisweilen überraschend. In weiteren Abschnitten will der Verf. seine Untersuchungen fortsetzen und hierbei wohl mehr als bisher auch dem Wiederaufbau des Fixsternsystems seine Aufmerksamkeit zuwenden. Nach den beiden Vorarbeiten des Verf. darf man seiner Entwicklung der Konstitution des Weltalls mit Spannung entgegensehen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Neue Bücher.

Analysis.

S. 6, 58, 59, 64.

Astronomie, Geodäsie.

1. BALL, L. de, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Leipzig 1912, Engelmann.
M 20.—; geb. in Leinw. *M* 21.50.
2. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. VI, 2. Astronomie. Red. v. K. Schwarzschild. 4. Lfg. Leipzig 1912, Teubner. *M* 3.—.
3. HAMMER, E., Meß- und Rechenübungen zur praktischen Geometrie. 5. Aufl. Stuttgart 1912, Metzler. A. Ausgabe für Bau-Ingenieure. Geb. in Halbleinw. *M* 4.—. B. Ausgabe f. Maschinen-Ingenieure u. Architekten. Geb. in Halbleinw. *M* 2.40.
4. Jahresbericht, Astronomischer, begründet von Walt. F. Wislicenus. Mit Unterstützung der astronom. Gesellschaft bearb. im kgl. astronom. Rechen-Institut zu Berlin. 12. Bd. Die Literatur des J. 1910. Berlin 1912, Reimer. *M* 20.—.
5. KRÜGER, L., Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. (Veröffentlgn. des kgl. preuß. geodät. Instituts. Neue Folge Nr. 52.) Potsdam 1912. (Leipzig, Teubner). *M* 9.—.
6. LÖSCHNER, H., Triangulierung e. Stadt. Einführung in die Ausgleichung und Berechnung e. kleinen selbständ. Triangulierung. Berlin 1912, Parey. *M* 1.60.
7. PTOLEMÄUS, Des CLAUDIUS, Handbuch der Astronomie. I. Bd. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von Karl Manitius. Leipzig 1912, Teubner. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 8.60.

S. auch 10, 47, 64.

Darstellende Geometrie.

8. GEHLER, CHR. P., Das Erscheinungsbild. Eine philosophisch-perspektiv. Studie. Zugleich e. kritische Beleuchtung der subjektiven Perspektive Haucks. Grimma 1912, Lorenz. *M* 1.80; geb. in Halbleinw. *M* 2.40.
9. GROSSMANN, M., Einführung in die darstellende Geometrie. Leitfaden f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. 2., neu bearb. Aufl. Basel 1912, Helbing & Lichtenbahn. *M* 2.80.
10. HUGERSHOFF, Das Photogrammometer Heydescher Konstruktion. Kurze Anleitung zum Gebrauche desselben nebst e. Einführung in die Phototachymetrie für Ingenieure u. Geographen. Stuttgart 1912, Wittwer. *M* 1.—.
11. KLEIBER, MAX, Angewandte Perspektive. Nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion u. Spiegelbilder. 5. durchges. Aufl. Leipzig 1912, Weber. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
12. KRIEGER, K., Lehrbuch der angewandten darstellenden Geometrie für den Maschinen- und Dampfkesselbau. (Methode Hittenkofer.) Strelitz 1912, Hittenkofer. Geb. in Halbleinw. *M* 3.60.

13. MEYDENBAUER, A., Handbuch der Meßbildkunst in Anwendung auf Baudenkmäler u. Reise-Aufnahmen. Halle 1912, Knapp. *M* 11.60; geb. in Leinw. *M* 12.40.
 14. ROSENBERG, KARL, Beiträge zur Stereoskopie und zur stereoskopischen Projektion. Wien u. Leipzig 1912, Hölder.
 15. WENDLING, EUGEN, Der Fundamentalsatz der Axonometrie. Zürich 1912, Speidel. *M* 1.60.

S. auch 62, 64.

Geschichte.

16. CARLBACH, JOS., Die Geschichte des Trägheitssatzes im Lichte des Relativitätsprinzips. Progr. Berlin 1912, Weidmann. *M* 1.—.
 S. auch 7, 22, 30, 40, 43, 57.

Mechanik.

17. ARNSTEIN, K., Einflußlinien statisch unbestimmter, elastisch gelagerter Tragwerke in allgemeiner auch f. veränderlichen Querschnitt geltender Behandlung. Berlin 1912, Ernst & Sohn. *M* 6.—, geb. *M* 7.—.
 18. BRILL, A., Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 1.20.
 19. EIFFEL, G., Der Luftwiderstand und der Flug. Versuche, im Laboratorium des Marsfeldes ausgeführt. Nach der 2. durchgeseh. u. verm. Aufl. übersetzt von Fritz Huth. Berlin 1912, Schmidt & Co. Geb. in Leinw. *M* 20.—.
 20. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome IV, vol. 2. Mécanique générale. Rédigée pour ce qui concerne la mécanique sous la direction scientifique de Paul Appell. Rédigée dans l'édition allemande sous la direction de F. Klein et C. H. Müller. Fasc. 1. Leipzig 1912. *M* 8.40.
 21. LANDSBERG, TH., Das Verfahren der Einflußlinien. Nach Vorträgen. 6. verm. Aufl. Berlin 1912, Ernst & Sohn. *M* 5.50; geb. *M* 6.—.
 22. MACH, ERNST, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch dargestellt. 7. verb. u. verm. Aufl. Leipzig 1912, Brockhaus. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 9.—.
 23. MEHRTENS, GEO. CHRISTOPH, Vorlesungen üb. Ingenieur-Wissenschaften, I. Tl.: Statik u. Festigkeitslehre. III. Bd. 1. Hälfte. Gewölbe u. Stützmauern. 2. umgearb. u. stark verm. Aufl. Leipzig 1912, Engelmann. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 9.50.
 24. MÜLLER-BRESLAU, HEINR., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Bd. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte; Spannungen in geraden Stäben. Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen. 5. verm. Aufl. Leipzig 1912, Kröner. *M* 20.—; geb. in Halbfrz. *M* 22.—.
 25. POLSTER, HANS, Kinematik. (Sammlung Göschen Nr. 584.) Berlin 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
 26. SCHWENGLER, JOHS., Elastizitätstheorie u. der Eisenbau. Ein Lehrbuch f. die Berechnung statisch unbestimmter Systeme f. Studierende u. Konstrukteure. Strelitz 1912, Hittenkofer. Geb. in Leinw. *M* 6.—.
 27. WEBSTER, ARTHUR GORDON, The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. (Teubners Sammlung Bd. XI.) 2d ed. Leipzig 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 14.—.
 S. auch 37, 44, 63, 64.

Physik.

28. BÖRNSTEIN, R., Einleitung in die Experimentalphysik. (Aus Natur- und Geisteswelt, 371. Bändchen.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.

29. BÖTTCHER, H., Physik. Zum Gebrauch bei physikal. Vorlesungen in höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 1. Bd. Mechanik, Wärmelehre, Akustik. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 15.—; geb. in Leinw. *M* 16.50.
30. CURIE, Mme. P., Die Entdeckung des Radiums. Rede, gehalten am 11. Dez. 1911 in Stockholm bei Empfang des Nobelpreises für Chemie. Autorisierte deutsche Ausgabe. Leipzig 1912, Akademische Verlagsgesellschaft.
31. DRUDE, PAUL, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage. 2. Aufl. Neu bearb. v. Walt. König. Stuttgart 1912, Enke.
M 16.—; geb. in Leinw. *M* 17.40.
32. EULERI, LEONH., opera omnia. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticae edenda curaverunt Ferd. Rudio, Adf. Krazer, Paul Stäckel. Series III. Opera physica, miscellanea, epistolae. Vol. IV. Dioptrica. Ed. Emil Cherbuliez. Vol. 2. Leipzig 1912, Teubner. Geb. *M* 24.—.
33. Fortschritte, Die, der Physik im Jahre 1911. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellsch. 67. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikal. Chemie. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 28.—.
34. GRAETZ, L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 7. verm. Aufl. Stuttgart 1912, Engelhorn's Nachf. Geb. in Leinw. *M* 3.50
35. JANET, P., Allgemeine Elektrotechnik. Hochschul-Vorlesungen. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Fritz Süchting und Ernst Riecke. I. Bd. Grundlagen. Gleichströme. Bearb. von Fritz Süchting nach der 3. französischen, verb. u. verm. Aufl. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner.
M 6.—; geb. in Leinw. *M* 7.—.
36. PLOTNIKOW, JOH., Photochemische Versuchstechnik. Leipzig 1912, Akadem. Verlagsgesellschaft. *M* 11.—.
37. RIECKE, EDUARD, Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium u. zum Gebrauche bei Vorlesungen. Zwei Bände. I. Mechanik, Molekularerscheinungen u. Akustik. Optik. II. Magnetismus u. Elektrizität. Wärme. 5. verb. u. verm. Aufl. Leipzig 1912, Veit & Comp. *M* 26.—; geb. *M* 28.—.
38. SACKUR, OTTO, Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik. Berlin 1912, Springer. *M* 12.—; geb. *M* 13.—.
39. SCHOTT, G. A., Electromagnetic radiation and the mechanical reactions arising from it. Being an Adams prize Essay in the university of Cambridge. Cambridge 1912, University Press.
40. SMITH, SIGURD, Søren Hjorth, inventor of the dynamo-electric principle. Published by „Elektroteknisk Forening“ at the expense of the Carlsberg foundation. København 1912, Jørgensen & Co.
41. THOMSON, Sir J.-J., Passage de l'électricité à travers les gaz. Traduit d'après la deuxième édition anglaise par R. Fric et A. Faure. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 24.—.
42. UFFENBORN, FRDR., Lehrbuch der Photometrie. Nach dem Tode des Verfassers bearb. u. hrsg. v. Berth. Monasch. München 1912, Oldenbourg.
Geb. in Leinw. *M* 15.—
43. VOIGT, WOLDEM., Physikal. Forschung u. Lehre in Deutschland während der letzten 100 Jahre. Festrede. Göttingen 1912, Vandenhoeck & Ruprecht. *M* —.40.
44. WIEGNER, G. und STEPHAN, P., Lehr- und Aufgabenbuch der Physik. I. Teil. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Mechanik. (Teubners Unterrichtsbücher für maschinentechnische Lehranstalten 1.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner.
kart. *M* 3.—,
45. WINDMÜLLER, KONRAD, Meßmethoden zur Bestimmung von Stromstärke, Spannung und Widerstand bei Gleichströmen. Prüfverfahren für Meßinstrumente. Wittenberg 1912, Herrosé. *M* 1.20.

S. auch 14, 16, 18, 19, 27, 53, 60, 61, 63.

Tafeln.

46. GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige trigonometrische u. polygonometrische Tafeln f. Maschinenrechnen. Teilung der Quadranten in 90 Grade zu 60 Min. 2. Aufl. Stuttgart 1912, Wittwer. Geb. in Leinw. *M* 7.—.
47. JORDAN, W., Hilfstafeln f. Tachymetrie. 5. Aufl. Stuttgart 1912, Metzler. *M* 8.—; geb. *M* 8.60.
48. JUDT, ALFR., Logarithmographische Tabellen f. Kanalisation. München 1912, Oldenbourg. *M* 6.50
49. PROEDEL, H., Funktionsmaßstäbe f. Quadrate, Kuben, Quadrat- u. Kubikwurzeln, Kreisumfänge, Kreisinhalt, natürliche u. Briggsche Logarithmen, sowie für Kreisdezimalteilung, Bogenlängen und Winkelfunktionen. Charlottenburg 1912, Heydenreich. *M* —.30
50. RÖHR, HENRY A., Schnellrechentafeln, enth. die Produkte v. 2×1 bis 9×9999 . Hamburg (30, Hegestr. 50) 1912, Selbstverlag *M* 1.60.
51. ROHRBACH, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. 6. Aufl. Gotha 1912, Thienemann. Geb. *M* 1.—.
52. SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 6. Aufl. Mit einem Anhang chemischer und physikalischer Konstanten revidiert von Karl Scheel. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 2.—; geb. in Leinw. *M* 2.40.
53. Tables annuelles de constantes et données numériques de Chimie, de Physique et de Technologie. Publiées sous le patronage de l'Association internationale des Académies par le Comité international nommé par le VII^e Congrès de Chimie appliquée. Vol. I, année 1910. Paris 1912, Gauthier-Villars. *M* 21.50.

Verschiedenes.

54. Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen, veranlaßt u. hrsg. vom deutschen Ausschuß f. technisches Schulwesen. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Bd. III, Arbeiten auf dem Gebiete des technischen niederen Schulwesens. *M* 10.—.
55. — Dasselbe. Bd. IV. Berichte aus dem Gebiete des technischen Hochschulwesens. Ebenda. *M* 4.—.
56. Beretning om den anden skandinaviske Matematikerkongres i Kjøbenhavn 1911, udgivet af Niels Nielsen. Kjøbenhavn 1912, Nordisk Forlag.
57. DARBOUX, GASTON, Éloges académiques et discours. Volume publié par le Comité du Jubilé scientifique de M. Gaston Darboux. Paris 1912, Hermann et fils.
58. EBNER, F., Technische Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung), mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Berlin 1912, Salle. *M* 2.40; geb. *M* 2.80.
59. HERMITE, CHARLES, Oeuvres. Publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Émile Picard. T. III. Paris 1912, Gauthier-Villars Fr. 18.—.
60. Jahrbuch der Naturwissenschaften 1911—1912. 27. Jahrg. Unter Mitwirkung von Fachmännern hrsg. v. Joseph Plassmann. Freiberg i. B., Herder. Geb. in Leinw. *M* 7.50.
61. KNESER, ADL., Mathematik u. Natur. Rektoratsrede. Breslau 1912, Trewendt & Granier. *M* —.50.
62. TIMEHLING, H. E., Die Erziehung der Anschauung. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 4.80; geb. in Leinw. *M* 5.60.
63. Verhandlungen der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft am 3.—5. November 1911 zu Göttingen. Im Auftrage der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik zusammengestellt von L. Prandtl. München u. Berlin 1912, Oldenbourg. *M* 3.50.

64. WEBER, HEINR., u. WELLSTEIN, JOS., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. (In 3 Bdn.) 3. Bd. Angewandte Elementarmathematik. II. Tl. Darstellende Geometrie, graph. Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, polit. Arithmetik u. Astronomie. Bearb. v. Jos. Wellstein, Heinr. Weber, Heinr. Bleicher u. Jul. Bauschinger. 2. Aufl. Leipzig 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 14.—.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

ABHANDLUNGEN über den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internation. Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner.

Bd. V, Heft 3. Der mathem. Unterricht an den Volksschulen u. Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten in Süddeutschland. Mit Ausführungen von Hensing üb. Hessen, Cramer über Baden, Geck über Württemberg, Kerschens- steiner u. Bock üb. Bayern. Mit einem Einführungswort v. P. Treutlein.

M 5.—.

Bd. II, Heft 6. Der mathem. Unterricht an den höheren Schulen in den thüringischen Staaten, v. Carl Hossfeld.

M —, 80,

Bd. III, Heft 6. Die Geschichte der Mathematik im mathem. Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands, dargestellt vor allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher u. der Programmabhandlungen höherer Schulen v. Martin Gebhardt.

M 4.80

Bd. III, Heft 7. Mathematik und philosophische Propädeutik, von Alex. Wernicke.

M 4.—,

— u. Berichte üb. technisches Schulwesen, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 54.

ALT, EUGEN, Das Klima. (Bücher der Naturwissenschaft Bd. 12.) Leipzig, Reklam jun.

Geb. *M* —, 80.

BEHRENDSEN, O., u. GÖTTING, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Oberstufe Ausgabe A für Gymnasien sowie für Oberlyzeen u. Studien- anstalten gymnasialen Charakters. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner.

Geb. *M* 3.60.

—, Dasselbe. Oberstufe Ausgabe B für Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie für Studienanstalten realen Charakters. Ebenda.

Geb. *M* 4.—.

BERGHOLZ, OTTO ANDR., Kennzeichnung der n -Potenz-Differenzen als Impotenzen. Erläuterung u. Ergänzung der „Lösung des Fermatschen Problems“. Dessau 1912, Artl.

M 1.50.

BÖRNSTEIN, R., Einleitung in die Experimentalphysik, s. N. B. 28.

BONOLA, ROBERTO, Non-Euclidean Geometry. A critical and historical study of its development. Authorised english translation with additional appendices by H. G. Carslaw. With an introduction by Federigo Enriques. Chicago, The Open Court Publishing Company 1912.

§ 2.—.

BRILL, A., Das Relativitätsprinzip, s. N. B. 18.

BURALI-FORTI, C., et MARCOLONGO, R., Analyse vectorielle générale. I. Transformations linéaires. Traduit de l'italien par P. Baridon. Pavie 1912. Mattei & Cie.

BURKHARDT, HEINRICH, Funktionentheoretische Vorlesungen. Bd. I, Heft 2. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 4. durchgesehene Aufl. Leipzig 1912, Veit & Comp.

M 7.—; geb. in Ganzleinen *M* 8.—.

- CURIE, Mme P., Die Entdeckung des Radiums, s. N. B. 30.
- EBNER, F., Technische Infinitesimalrechnung, s. N. B. 58.
- d'ENNO, JOSEF Graf ALBERTI, Eine sehr bedeutende mathematische Erfindung, nämlich die Lösung des großen Fermatschen Satzes und die vollständige Erweiterung und Verallgemeinerung des berühmten Theorems. Trient 1911, Moucher.
- , Ein neues Verfahren zur Lösung des großen Fermatschen Satzes. Trient 1912, Monauni.
- , Ein ganz elementares Verfahren zur Lösung des großen Fermatschen Satzes wie auch zur vollständigen Erweiterung des berühmten Theorems, mit Übungen u. Anwendungen auf die Geometrie für die höheren Klassen der Mittelschulen. Ebenda.
- FORSYTH, A. R., Lectures on the differential geometry of curves and surfaces. Cambridge 1912, University Press. 21 s.
- , Lehrbuch der Differentialgleichungen, mit den Auflösungen der Aufgaben von Hermann Maser. 2. autorisierte Aufl., nach der dritten des englischen Originals besorgt u. mit einem Anhang von Zusätzen vers. v. Walter Jacobsthal. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 20.—; in Leinw. *M* 21.50.
- GLÖSER, MORITZ, Lehrbuch der Arithmetik f. d. dritte Klasse der Gymnasien, Realgymnasien u. Realschulen. 6., neu bearb. Aufl. Wien 1912, Pichlers Wwe. u. Sohn. Geb. K. 2.—.
- GROSSMANN, M., Einführung in die darstellende Geometrie, s. N. B. 9.
- HÄRUSSELER, J. W., Geometrischer u. algebraischer Beweis des Fermatschen Satzes durch Ausziehen der n ten Wurzel und durch Ableitung des Satzes als ganzzahlige Ungleichung. Berlin 1912, Krayn. *M* 1.50.
- HERMITE, CH., Oeuvres, t. III, s. N. B. 59.
- HESSENBERG, GERHARD, Transzendenz von e und π . Ein Beitrag z. höheren Mathematik vom elementaren Standpunkte aus. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 3.—.
- HILBERT, DAVID, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Fortschritte der mathem. Wissensch. Heft 3.) Leipzig und Berlin 1912, Teubner.
- HOFFMANN, FRANZ, Die Perpetuum mobile-Theorie oder die selbsttätige Vermehrung der Energie im Haushalt des Menschen. Leipzig 1912, Schlemminger. *M* 1.50.
- INTERNATIONAL ASSOCIATION for promoting the study of Quaternions and allied systems of mathematics. June 1912. Lancaster 1912.
- Jahrbuch der Naturwissenschaften 1911—1912, s. N. B. 60.
- JANET, P., Allgemeine Elektrotechnik, s. N. B. 35.
- JUNKER, FR., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 147.) 3. verbess. Aufl. Leipzig 1912, Göschen. Geb. *M* —.80.
- KRÜGER, L., Konforme Abbildung des Erdellipsoids, s. N. B. 5.
- LOTS, ALFRED, Der Beweis des großen Fermatschen Satzes. Altenburg, Selbstverlag.
- MILTHALER, JULIUS, Niedere Analysis. Zum Unterricht und zum Selbststudium. Berlin 1912, Salle. *M* 1.60.
- MÜLLER, FELIX, Gedenktagebuch für Mathematiker, 3. Aufl. Mit einem Bildnis des Verfassers. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 2.—.
- NIELSEN, N., Beretning om den anden skandinaviske Matematikerkongres, s. N. B. 56.
- PASCHE, MORITZ, Vorlesungen über neuere Geometrie. 2., mit Zusätzen versehene Ausg. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 6.—; geb. in Leinw. *M* 7.—.
- PLASSMANN, J., Der gestirnte Himmel. Ein Volksbüchlein. (Naturwissenschaftl.-technische Volksbücher. Nr. 13—16.) Leipzig, Thomas. *M* —.80.
- PLOTNIKOW, J., Photochemische Versuchstechnik, s. N. B. 36.
- PROLEMÄUS, Des CLAUDIUS, Handbuch der Astronomie, s. N. B. 7.
- RIECKE, E., Lehrbuch der Physik, I, II, s. N. B. 37.

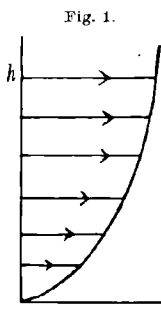
- ROHRBACH, C., Vierstellige Tafeln, s. N. B. 51.
- ROSENBERG, K., Beiträge zur Stereoskopie, s. N. B. 14.
- SACKUR, O., Lehrbuch der Thermochemie u. Thermodynamik, s. N. B. 38.
- SCHALLER, J. GEORG, Beweis der Richtigkeit des „großen Fermatschen Satzes“
Nebst Anhang. Grabow i. Meckl. Selbstverlag.
- SCHIRMER, ALFRED, Der Wortschatz der Mathematik nach Alter u. Herkunft untersucht. (Zeitschr. f. deutsche Wortforschung, Beiheft zum 14. Band.) Straßburg 1912, Trübner. *M* 3.20.
- SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige Tafeln, s. N. B. 52.
- SCHOTT, G. A., Electromagnetic radiation, s. N. B. 39.
- SCHRUTKA, EDLER VON RECHTENSTAMM, LOTHAR, Elemente der höheren Mathematik für Studierende der technischen und Naturwissenschaften. Leipzig u. Wien 1912, Deuticke. *M* 10.—.
- SCHUR, FRIEDRICH, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2., verb. u. verm. Aufl. Leipzig 1912, Veit & Comp. *M* 6.50; geb. *M* 7.50.
- SIMON, MAX, Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Göschen Nr. 89.) 3., verb. Aufl. Leipzig 1912, Göschen. Geb. *M* —.80.
- SMITH, S., Søren Hjorth, s. N. B. 40.
- SUPPANTSCHITSCH, RICH., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die V. bis VII. Klasse der Realschulen. Wien 1912, Tempsky. Geb. K. 5.—.
- SYLVESTER, JAMES JOSEPH, The collected mathematical Papers. Vol. IV. (1882—1897). Cambridge, University Press.
- TABLES ANNUELLES de constantes et données numériques, s. N. B. 53.
- TREISS, FR., Der große Fermatsche Lehrsatz. Mainz 1912, Diemer. *M* 3.—.
- THOMSON, Sir J. J., Passage de l'électricité à travers les gaz, s. N. B. 41.
- TIMERDING, H., Die Erziehung der Anschauung, s. N. B. 62.
- UNGER, ARTHUR W., Wie ein Buch entsteht. (Aus Natur u. Geisteswelt, 175. Bändchen.) 3. Aufl. Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
- VERHANDLUNGEN der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft am 3. bis 5. November 1911 in Göttingen, s. N. B. 63.
- VERWALTUNGS-BERICHT über das achte Geschäftsjahr 1910—1911 und Bericht über die achte Ausschußsitzung des unter dem Protektorate Seiner Königlichen Hoheit des Prinzen Ludwig von Bayern stehenden Deutschen Museums. München 1912, Oldenbourg.
- WEBSTER, A. G., The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, s. N. B. 27.
- WENDLING, E., Der Fundamentalsatz der Axonometrie, s. N. B. 15.
- WIEGNER, G. und STEPHAN, P., Lehr- und Aufgabenbuch der Physik, s. N. B. 44.
- WIELEITNER, H., Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. (Mathematische Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting, VII.) Leipzig und Berlin 1912, Teubner. Kart. *M* —.80.
- WINDMÜLLER, K., Meßmethoden bei Gleichströmen, s. N. B. 45.
- WITTMANN, W., Funktionen und graphische Darstellungen für den neueren Arithmetikunterricht. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Kart. *M* 1.20.
- WOLLETZ, K., Arithmetik und Algebra f. die vierte Klasse der Realschulen. Wien 1912, Pichlers Wwe. u. Sohn. Geb. K. 2.20.
- ZACHARIAS, M., Einführung in die projektive Geometrie. (Mathem. Bibliothek, 6.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* —.80.

Über den Auftrieb im natürlichen Winde.

Von H. v. SANDEN in Göttingen.

O. Lilienthal hat bei seinen klassischen Versuchen über Widerstand und Auftrieb ebener und gekrümmter Platten eine merkwürdige Tatsache beobachtet: Wenn er eine Platte am Rundlaufapparat mit einer gewissen Geschwindigkeit durch die Luft führte, erhielt er einen anderen Wert für den Auftrieb, als wenn er dieselbe Platte, einem Winde von gleicher Geschwindigkeit wie beim Rundlaufversuch aussetzte. Im letzteren Falle beobachtete er stets einen erheblich größeren Auftrieb. Es schien dem Winde an sich ein Auftrieb, eine „Aufkomponente“ innezuwohnen.

Lilienthal selbst hat jedoch bereits auf einen Weg zur Erklärung dieser Erscheinung hingewiesen, indem er darauf aufmerksam machte, daß der Wind in der Nähe der Erdoberfläche keineswegs ein gleichmäßiger Luftstrom ist, sondern daß die Geschwindigkeit der Strömung an der Erde selbst den Wert Null hat und nach oben hin zunimmt. Die Versuche am Rundlauf würden aber ihr Analogon in einem gleichmäßigen Luftstrom haben, dessen Geschwindigkeit überall die gleiche ist. Herr Reg.-Baum. Lilienthal hat erneut auf diese Möglichkeit der Erklärung des im Winde vergrößerten Auftriebs hingewiesen in einem Vortrag, der in der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt¹⁾ abgedruckt ist.



Wir werden zeigen, daß sich in der Tat auch theoretisch hieraus die Ursache des vergrößerten Auftriebs im Winde ableiten läßt.

Die Geschwindigkeitsverteilung in einem über die Erde wehenden Winde wird nun ungefähr die in Fig. 1 angedeutete sein, wo als Abszissen die Größen der Geschwindigkeit und als Ordinaten die Höhen über dem Erdboden dargestellt sind. Um das Problem der mathema-

1) Jahrgang II, 1911, Heft Nr. 4 und 5.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 61. Band. 1912. Heft 3.

tischen Behandlung leichter zugänglich zu machen, legen wir unseren Untersuchungen jedoch die in Fig. 2 dargestellte Geschwindigkeitsverteilung zugrunde, die als eine erste Annäherung an die Wirklichkeit wird gelten können.

§ 1.

Die mathematische Formulierung des Problems ist dann die folgende:

In der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit soll die Geschwindigkeit in horizontalen Ebenen überall die gleiche sein und die Geschwindigkeit in den einzelnen Ebenen soll proportional sein deren Abstand von einer horizontalen Ebene (die wir kurz den Erdboden nennen wollen). Die Richtung der Geschwindigkeit soll überall die gleiche sein.

Die x -Achse eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems legen wir auf dem Erdboden parallel zur Richtung der Geschwindigkeit des Windes fest. Die Richtung des Windes über dem Erdboden bestimme in gleichem Sinne die positive Richtung der x -Achse. Senkrecht zum Erdboden, positiv nach oben stehe die y -Achse. Senkrecht zu beiden die z -Achse. Wir betrachten im folgenden nur Strömungsbilder

die in jeder Ebene $z = \text{const.}$ den gleichen Verlauf zeigen, also eine zweidimensionale Strömung zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$.

Die Stromfunktion ξ der ungestörten Strömung ist dann:

$$\xi = \frac{a}{2} \cdot y^2$$

und die Geschwindigkeit ist

$$v = |\text{grad } \xi| = a \cdot y.$$

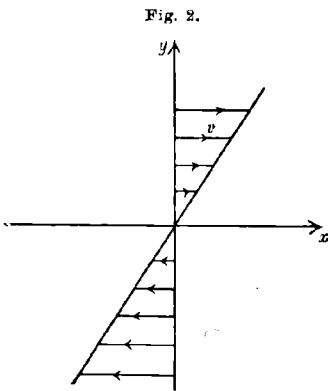


Fig. 2 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung, d. h. die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Höhe zu. Wir lassen für die Rechnung auch negative Werte von y zu, die allerdings keine reelle Bedeutung haben.

Die Strömung ist *nicht wirbelfrei*, denn $\Delta \xi$ ist gleich der Konstanten a . Wir haben es also mit einer Strömung von *konstantem Wirbel* zu tun. In der Nähe des Erdbodens trifft diese Annahme für die tatsächlichen Verhältnisse mit genügender Annäherung zu.

In dieses Strömungsfeld bringen wir nun einen Zylinder, dessen Erzeugende der z -Achse parallel sind und der von den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ begrenzt wird und fragen nach der Strömung von konstantem Wirbel um diesen Zylinder, die sich in genügender Entfernung der oben beschriebenen ungestörten Strömung nähert.

Bezeichnen wir mit ω die Kontur des Zylinderquerschnittes, so ist das mathematische Problem dieses: Eine Funktion ψ von x und y , die

Stromfunktion, zu finden, die auf ω Null ist und sich im Unendlichen wie $\frac{a}{2} \cdot y^2$ verhält. Ist dies gelungen, so können wir längs einer Stromlinie $\psi = \text{const.}$ die Druckgleichung der Hydrodynamik:

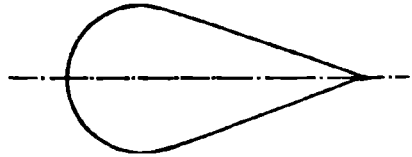
$$p = \text{const} - \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad (p \text{ Druck, } \rho \text{ Dichte})$$

anwenden, und so zu einer Bestimmung der Kräfte gelangen.

Die Bestimmung von ψ führt nun auf die Randwertaufgabe, eine harmonische Funktion φ (also $\Delta \varphi = 0$) zu finden, die im Unendlichen regulär ist und die auf der Kontur ω die Werte $-\frac{a}{2} \cdot y_\omega^2$ annimmt, wo y_ω den Abstand eines Randpunktes der Kontur von der x -Achse, mit andern Worten, die Höhe jedes Randpunktes über dem Erdboden bedeutet. Haben wir φ gefunden, so ist die gesuchte Stromfunktion

$$\psi = \varphi + \frac{a}{2} \cdot y^2.$$

Fig. 3.



Zunächst handelte es sich um die Wahl eines geeigneten Querschnittes ω des Zylinders. Es wurde für ω ein Kreis mit 2 Tangenten gewählt (s. Fig. 3).

(Die in späteren Rechnungen zugrunde gelegten Abmessungen sind: Länge 160 mm, Durchmesser des Kreises: 80 mm.)

Die Symmetrieebene dieses Zylinders ist horizontal angenommen. Dieser Querschnitt hat einmal eine Form, die ähnlich der eines Aeroplanflügels ist, und im folgenden soll daher auch immer kurz von „dem Flügel“ die Rede sein. Andererseits ist bei einem Zylinder mit diesem Querschnitt und in dieser Lage ein Auftrieb in einer Potentialströmung nicht vorhanden, da keine Zirkulation stattfindet. Der sich etwa ergebende Auftrieb muß dann also im Wirbel der Strömung begründet sein. Es wird sich übrigens zeigen, daß die erhaltenen Resultate auch für Zylinder mit innerhalb weiter Grenzen beliebigen Formen des Querschnitts, sofern dieselben eine Symmetrieebene haben, welche horizontal liegt, ihre qualitative Gültigkeit behalten. Die Bestimmung der Funktion φ für diesen Rand wird zurückgeführt auf die Bestimmung der Greenschen Funktion $g(xy)$ für das Äußere des Bereiches ω . Denn ist diese gefunden, so wird φ für jeden Punkt durch das Integral

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi_\omega \cdot \frac{\partial g}{\partial n} \cdot ds \quad [\text{über die Kontur } \omega]$$

wo φ_ω die Randwerte $-\frac{a}{2} \cdot y_\omega^2$ sind, geliefert.

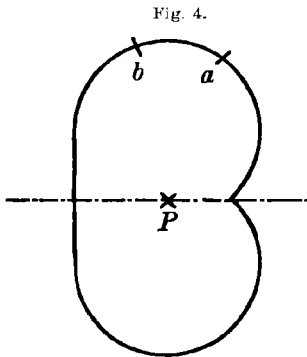
Eine analytische Darstellung der Greenschen Funktion für einen Bereich wie ω im vorliegenden Falle, dürfte recht umständlich werden und so wurde das von Prof. Runge angegebene graphische Verfahren hierfür benutzt. Da dasselbe hier zum ersten Male zur Anwendung gelangt, soll über die hierbei gesammelten Erfahrungen, auch in Einzelheiten, ausführlicher berichtet werden. Das Verfahren selbst ist in einer Abhandlung¹⁾ von Prof. Runge auseinander gesetzt, worauf hier unmittelbar Bezug genommen wird.

§ 2.

Es erschien zunächst zweckmäßig den Bereich ω durch eine Transformation reziproker Radien in einen Bereich ω' überzuführen, für dessen Inneres dann die Greensche Funktion zu bestimmen war. Der Pol der Transformation wurde auf der Symmetrielinie von ω gerade in der Mitte angenommen, wodurch ω' in der in Fig. 4 gezeichneten Gestalt herauskommt.

Die „Quelle“ für die Greensche Funktion des Inneren von ω' fällt dann in den Pol P der Transformation.

Es wurde nun von freier Hand ein Entwurf für das Netz der Greenschen Funktion in ω' hinein gezeichnet. Unter Benutzung der von P auslaufenden Tangenten der Quellstromlinien usw. Es mag hier gleich bemerkt werden, daß sich dieser erste Entwurf als sehr fehlerhaft erwies. Eine bei dem richtigen Netz in a mündende Quellstromlinie (Fig. 4) wurde beim ersten Entwurf als in b mündend angenommen. Der Grund für eine grob unrichtige Annahme ist darin zu suchen, daß der Abstand der einzelnen Randpunkte von der Quelle zwischen weiten Grenzen variiert. Der Flächeninhalt eines „Quadrats“ von einem Strich Seitenlänge kann dabei an der einen Stelle 50 Mal so groß sein, wie an einer andern, die näher an der Quelle liegt, wodurch die Übersicht sehr erschwert wird. Es wird sich in solchen Fällen als notwendig zeigen, neben dem gerade vorliegenden Bereich auch dessen Abbild durch reziproke Radien in Betracht zu ziehen. Den vom Nullpunkt (der Quelle) auslaufenden Tangenten entsprechen dann Asymptoten der Quellstromlinien, wie solche in Fig. 7 gestrichelt angedeutet sind. Die Benutzung von Polarkoordinatenpapier ist für die Transformation durch



1) Göttinger Nachrichten 1911. Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta u = 0$.

reziproke Radien zwar günstig, hat jedoch beim ersten Entwurf den Nachteil durch optische Täuschungen zu stören.

Im vorliegenden Fall wurde, wie weiter unten gezeigt wird, schließlich nur noch mit dem ursprünglichen Bereich ω gearbeitet. Denn die Zirkulation um diesen Querschnitt herum ist leichter aufzufassen als die Zirkulation im Innern des Bereiches ω' . Am Vorder- und Hinterende des Flügels nähert sich das Strömungsbild der Zirkulation (d. i. die Greensche Funktion) den bekannten Lösungen einer Potential-Strömung um einen Zylinder und um eine Ecke, was den ersten Entwurf erleichtert. Dem ersten Entwurf wurden nun die Randwerte u_r und v_r der Funktionen u_r und v_r von g_1 entnommen. Dabei ist:

$$u_r = \log \left(\frac{r}{\alpha} \right) \quad \text{und} \quad v_r = g_1 = \varphi_r \text{ gesetzt}^1),$$

wenn r und φ_r die Polarkoordinaten eines Randpunktes sind, in den die Quellstromlinie g_1 mündet und α eine Konstante bedeutet.

Um nach dem ersten Entwurf oder nach einer der später gerechneten Näherungen ohne Zeitverlust v_r auftragen zu können, ist es zweckmäßig, sich ein Nomogramm herzustellen, das v_r sofort mit dem Zirkel abzugreifen gestattet. Es bleibt für alle Aufgaben dieser Art gültig. Ferner ist es zweckmäßig, den Wert von

$$u_r = \log \left(\frac{r}{\alpha} \right)$$

als Funktion des Winkels φ_r der Randpunkte von ω aufzutragen, um auch den Wert von u_r als Funktion von g_1 ohne weiters abgreifen zu können. Diese Figur ist für jeden Bereich gesondert herzustellen. In Fig. 5 sind strichpunktiert die Kurven u_r und v_r als Funktionen von g_1 aufgetragen, wie sie aus dem ersten Entwurf entnommen sind. Und zwar sind die u -Kurven diejenigen mit zwei, die v -Kurven die Kurven mit einem Wendepunkt.

Beide Kurven sind nur für die Werte g_1 von 0 bis 128 Achtelstrich gezeichnet, dies genügt, da der Bereich ω eine Symmetrielinie hat. Für diese ist $g_1 = 0$ bzw. 128 angenommen und die Werte von g_1 im positiven Drehungssinne (entgegen dem Uhrzeiger) als wachsend. Die Stromlinie $g_1 = 0$ soll durch die Ecke des Bereiches ω gehen. Das Netz der Greenschen Funktion wird offenbar auch dieselbe Symmetrieachse haben wie ω , daraus folgt, daß die Randwerte u_r im Intervall von g_1 128 bis 256 dieselben sein werden, wie im Intervall 0 bis 128. Die Reihenfolge der Werte von u_r , wenn g_1 das Intervall 128 bis 256 durchläuft, wird

1) Die Bezeichnungen, sowie die zu Grunde gelegten Maßeinheiten sind die gleichen wie in der Abhandlung von Herrn Runge.

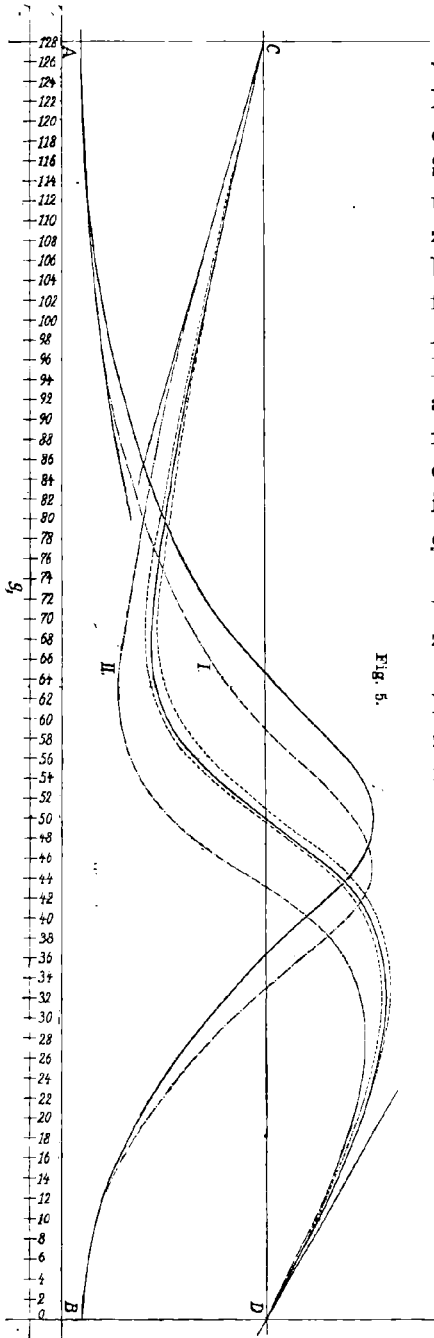


Fig. 5.

die gleiche sein, als wenn das Intervall 0 bis 128 im umgekehrten Sinne, also von 128 bis 0 durchlaufen wird. Wir haben also die Kurven u_r in Fig. 5 an der Geraden AC zu spiegeln und die Skala der g_1 fortlaufend zu denken, um den ganzen Verlauf der u -Kurven zu beherrschen. Das Intervall 128 bis 256 der v -Kurven erhält man ebenfalls durch Spiegelung an der Geraden AB , nur muß das dadurch entstehende Kurvenstück noch an der Abszissenachse CD gespiegelt werden. Denn ist für einen Randpunkt von ω oberhalb der Symmetrieachse $g_1 - \varphi_r > 0$, so ist für den symmetrischen Punkt unten $g_1 - \varphi_r < 0$ und umgekehrt.

Um diesen Entwurf zu verbessern, wurden nun die Polarkoordinaten einzelner Netzpunkte berechnet.

Dies kommt im wesentlichen darauf hinaus, die Mittelwerte von u_r und v_r zu bestimmen, wobei u_r und v_r nicht mehr als Funktionen von g_1 sondern als solche von g_1^* anzusehen sind, wo g_1^* mit g_1 durch die Abbildung des Kreises auf sich selbst zusammenhängt. Die Integrale

$$\int_0^{256} u_r dg_1^* \quad \text{und} \quad \int_0^{256} v_r dg_1^*$$

wurden approximiert durch die Summen

$$\Delta g_1^* \sum u_r \quad \text{und} \quad \Delta g_1^* \sum v_r.^1)$$

Δg_1^* wurde hier, je nach der Dichte der Skalenteile auf den Streifen, die die Beziehung zwischen g_1 und g_1^* repräsentieren, gleich einem Achtelstrich,

1) Diese Summen geben bei periodischen Funktionen die Genauigkeit der Simpsonschen Regel.

gleich fünfem oder gleich einem halben gewählt. Die *Summation der Ordinaten* u_r und v_r wurde in der Weise durchgeführt, daß dieselben mit einem „*Kurvimeter*“ durchlaufen wurden. Das Kurvimeter ist eine einfache scharfrandige Rolle mit Zählwerk, welches die Länge eines mit der Rolle durchfahrenen Liniestückes abzulesen gestattet. Werden die Ordinaten nacheinander mit diesem Instrument durchfahren (wobei zweckmäßig eine Reißschiene benutzt wird), so kann die *Summe* direkt am Zählwerk abgelesen werden. Die Genauigkeit ist ausreichend, da sich bei wiederholter Messung eines Integrals ein Fehler von etwa 0,2% ergab. Nach Ermittlung des Mittelwerts der Integrale ergeben sich die Polarkoordinaten r und φ der Netzpunkte durch eine kurze mit der Rechenmaschine und vierstelligen Logarithmen ausgeführte Rechnung. Mit diesem Verfahren ist es möglich die Polarkoordinaten eines Netzpunktes der Greenschen Funktion in 25 Minuten zu berechnen.

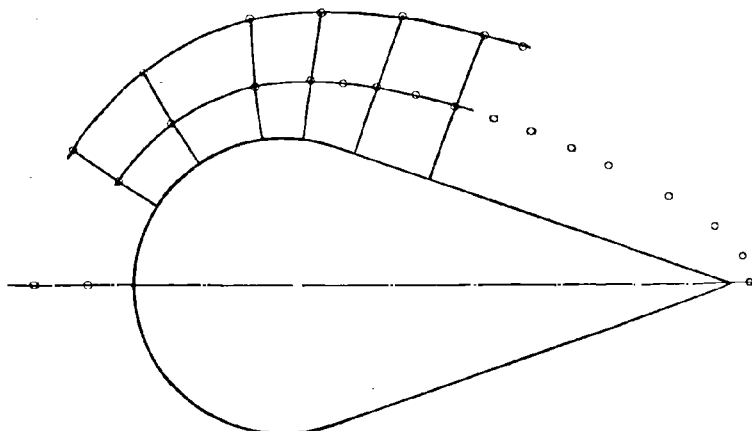
Zunächst wurden die um einen Strich auseinanderliegenden Netzpunkte (8, 16, . . .) auf der achten Zirkulationsstromlinie gerechnet. Die neuen Punkte lagen nie mehr als 2 mm von den alten des Entwurfs entfernt. Dies ist durchaus erklärlich: denn angenommen man würde alle unendlich vielen Punkte des Netzes aus den Randwerten der ersten Näherung rechnen, so würde man auf ein neues Netz kommen, dessen Quellstromlinien in genau die Stellen des Randes einmünden, wo bereits die Stromlinien des ersten Entwurfs aufsetzen. Diese Tatsache äußert sich bei den gerechneten Punkten in der Nähe des Randes darin, daß die korrigierten Netzpunkte doch wieder in die Nähe der Punkte des ersten Entwurfes zu liegen kommen. Ihre Lage gibt allerdings einen Fingerzeig, in welchem Sinne das Netz zu verbessern ist.

Es wurden hierauf die Punkte der 32ten Zirkulationsstromlinie, die um einen Strich auseinanderliegen, gerechnet. Auch hier war die Korrektur nicht erheblich, allerdings bedeutet eine kleine Verschiebung der Punkte relativ genommen in der Nähe der Quelle eine viel bedeutendere Korrektur. Durch die so gerechneten Punkte wurde ein neues Netz gelegt, die Randwerte von u und v bestimmt und eine neue Korrektur gerechnet. Es ergaben sich Korrekturen von ungefähr derselben Größe wie beim ersten Mal. Dies Verfahren wurde mehrmals wiederholt, stets mit gleichem Resultat. Es zeigte sich später, daß am ersten Entwurf die Randpunkte an den Stellen, die weit von der Quelle abliegen, um etwa das Zwanzigfache zu verschieben waren, damit sie in die richtige Lage kamen. Die Netzpunkte in der Nähe der Quelle, die vom Rande ziemlich unabhängig sind, konnten zu einer so starken Änderung auch keinen Hinweis bieten.

Es wurde jetzt das Netz mitsamt dem Bereich ω' durch reziproke Radien so transformiert, daß ω' wieder in den ursprünglichen Bereich ω

(den Flügel) übergang. Das zuletzt gerechnete Netz der Greenschen Funktion, das im Innern von ω' ganz brauchbar aussah, gab nach der Transformation das in Fig. 6 wiedergegebene Bild. Hier sieht man sofort an der Verzerrung der Quellstromlinien das Fehlerhafte des Netzes, und es wurde ersichtlich, daß die Korrekturen ganz erheblich größer zu nehmen waren als bisher. Ja man kann direkt den Einfluß abschätzen, den eine bestimmte Verschiebung der Randpunkte auf die Punkte der einzelnen Zirkulationsstromlinien ausübt und die Korrektur danach so bemessen, daß die Quellstromlinien orthogonal auf den Rand aufsetzen. Denn nur für die richtigen Randwerte gibt die Integration auch am Rande ein orthogonales Kurvensystem, so daß darin ein Kriterium für die Brauchbarkeit des Netzes gewonnen war. Für die

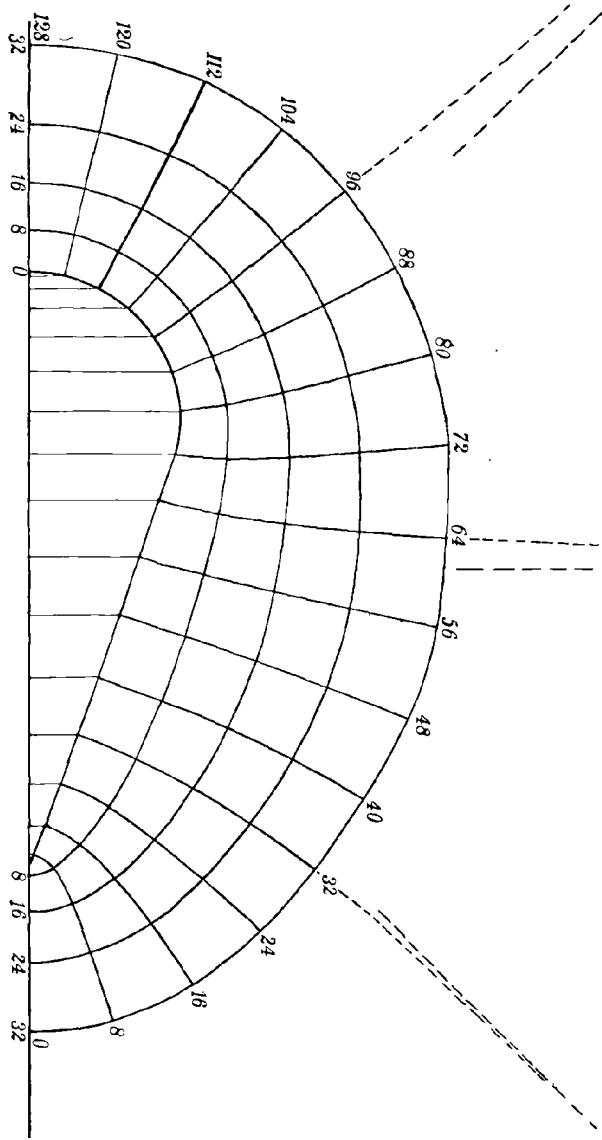
Fig. 6.



Punkte in der Nähe des Randes gilt das Prinzip der Iteration in der Weise, daß man genügend voneinander entfernte Teile des Randes für sich korrigieren kann, ohne die übrigen wesentlich zu beeinflussen. In diesem Sinne wurde mit der Verbesserung fortgefahren. Die erste Verbesserung wurde so stark gemacht, daß die daran anschließende Rechnung eine Korrektur im entgegengesetzten Sinne ergab. Es wird sich überhaupt stets empfehlen, nicht durch die berechneten Netzpunkte selbst ein neues Netz zu legen, sondern im Sinne der letzten Korrektur etwas darüber hinauszugehen; das beschleunigt das Verfahren und gibt, wenn die nächste Korrektur eine Änderung im entgegengesetzten Sinne als die vorherige erfordert, ein Kriterium dafür, daß die richtige Lage des Netzes zwischen den beiden letzten liegt.

Hier wurde schließlich das in Fig. 7 dargestellte Netz erreicht, die Kurven der zugehörigen Randwerte sind in Fig. 5 ausgezogen. Deren

Integration gibt keine merkliche Abweichung von dem Netz der Fig. 7 mehr. Zur Kontrolle wurden die Randpunkte, wie die einzelnen Netzpunkte etwas nach der einen und dann nach der anderen Seite abgeändert, wozu die gestrichelten Kurven in Fig. 5 gehören. Die Integration der gestrichelten Kurven gibt für die einzelnen Netzpunkte Korrekturen in dem Sinne, daß die Punkte nach einer Mittellage, die zwischen den zur Kontrolle angenommenen Lagen liegt, zu korrigiert werden. D. h. die richtige Lage der Punkte ist eine zwischen den beiden zur Kontrolle angenommenen. Nehmen wir die halbe mittlere Breite des Streifens zwischen den gestrichelten Linien zu 3 mm an, so können wir schließen, daß die Netzpunkte in ihrem Polarwinkel φ einen Fehler von höchstens einem Grad haben können. Wenigstens in der Nähe des Randes, worauf es hier an-

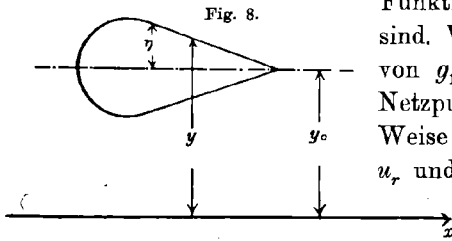


kommt. Die Zirkulationsstromlinien hingegen liegen bis auf Strichbreite richtig, denn die Radiivektoren der einzelnen Netzpunkte ändern sich bei den zuletzt erwähnten Kontrollrechnungen gerade so weit, daß die Punkte auf den Zirkulationsstromlinien verschoben werden, ohne sie zu verlassen.

Da eine größere Genauigkeit auf dem bisherigen Wege nicht zu erreichen und die vorliegende für die folgenden Zwecke ausreichend war, wurde das Netz der Fig. 7. als definitives festgehalten.

§ 3.

Nach der Bestimmung der Greenschen Funktion für das Äußere des Bereiches ω sind wir imstande, den Wert einer harmonischen Funktion in jedem Netzpunkte zu bestimmen, sofern die Randwerte der



Funktion auf der Kontur von ω vorgegeben sind. Wir haben diese Randwerte als Funktion von g_1 (bzw. g_1^*) aufzutragen und für jeden Netzpunkt die Integration in genau derselben Weise auszuführen, wie es bei den Funktionen u_r und v_r bei der Konstruktion der Greenschen Funktion der Fall war.

In unserem Falle ist jedem Punkte des Randes der Wert $\frac{a}{2} \cdot y^2$ zugeordnet, wo y die Höhe des Punktes über dem Erdboden (sein Abstand von der x -Achse ist). (S. Fig. 8.)

Der Wert der Funktion φ , die jene Randwerte haben soll (s. § 1), wird dann als Mittelwert aus den Randwerten durch das Integral:

$$\varphi = \frac{1}{256} \cdot \int_0^{256} \left(\frac{a}{2} \cdot y_r^2 \right) \cdot dg_1^*$$

für jeden Punkt p des Netzes geliefert. Der Wert der gesuchten Stromfunktion ist dann in dem Punkte:

$$\psi = \frac{a}{2} \cdot \left\{ y_p^2 - \frac{1}{256} \int_0^{256} (y_r^2) dg_1^* \right\}$$

wo y_p die Höhe des Punktes p über dem Erdboden ist.

Würde man in dieser Weise ψ bilden, so erhielte man die Lösung für eine ganz bestimmte Höhenlage des Flügels. Um den Verlauf der Strömung um den Flügel für verschiedene Höhen zu übersehen, führen wir die Höhe y_0 der Symmetrieebene des Flügels über dem Erdboden ein. Bezeichnen wir mit η den Abstand eines Punktes von der Symmetrieebene, so daß η positiv ist für Punkte oberhalb der Symmetrieebene, so ist das vorher auftretende y die Summe von y_0 und η , also $y = y_0 + \eta$. Die Randwerte werden damit:

$$\frac{a}{2} \cdot y_r^2 = \frac{a}{2} \cdot (\eta_r^2 + 2y_0 \cdot \eta_r + y_0^2)$$

und das Integral für φ zerfällt in drei Integrale:

$$\varphi = \frac{a}{2 \cdot 256} \cdot \left\{ \int_0^{256} \eta_r^2 dg_1^* + 2 \cdot y_0 \int_0^{256} \eta_r dg_1^* + \int_0^{256} y_0^2 dg_1^* \right\}$$

ebenso setzen wir für den Punkt p :

$$\frac{a}{2} \cdot y_p^2 = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta_p^2 + 2 \eta_0 \cdot \eta_p + y_0^2 \}.$$

η_r^2 und η_r werden als Funktionen von g_1 aufgetragen. Die Integration wird wieder mit Hilfe von Streifen und Meßrad ausgeführt. Für jeden Netzpunkt erhalten wir 2 Mittelwerte, die wir mit M_1 und M_2 bezeichnen wollen:

$$M_1 = \frac{1}{256} \cdot \int_0^{256} \eta_r^2 dg_1^* \quad M_2 = \frac{1}{256} \int_0^{256} \eta_r dg_1^*.$$

Für die Stromfunktion ψ erhält man in dieser Schreibweise:

$$\psi = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta_p^2 - M_1 + 2 y_0 \cdot (\eta_p - M_2) \}.$$

Der Mittelwert von y_0 ist y_0 selbst und hebt sich weg.

Die Ergebnisse der Integrationen sind in Tabelle Nr. 1 zusammengestellt (s. nächste Seite), wobei die auf S. 227 angegebenen Dimensionen des Flügels zugrunde gelegt sind. Die Integration wurde ausgeführt für die Punkte 0, 8, 16, 24, . . . 120, 128 der achten Zirkulationsstromlinie.

Die erste Zeile der Tabelle enthält die Mittelwerte M_1 , die zweite enthält die Werte von M_2 . Die dritte und vierte Zeile gibt die auf der Zeichnung gemessenen Werte η_p und η_p^2 der betreffenden Netzpunkte der achten Zirkulationsstromlinie. Darunter stehen in der Tabelle dann die Differenzen $\eta^2 - M_1$ und $\eta - M_2$. Für die Netzpunkte 128, 136, . . . 248,0 der achten Stromlinie, die unterhalb der Symmetrieebene zu den Punkten 0, 8, . . . 128 symmetrisch liegen, haben η_p^2 und M_1 die gleichen Werte. η_p dagegen auf der unteren Seite das entgegengesetzte Vorzeichen wie beim korrespondierenden Punkt auf der Oberseite. Ebenso liefert die Integration für symmetrische Punkte denselben Betrag von M_2 , jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Stromfunktion für den Fall $y_0 = 0$, wo die Symmetrieebene des Flügels auf dem Erdboden liegt, ist:

$$\psi_0 = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta^2 - M_1 \}.$$

Betrachten wir in der Tabelle die Werte von ψ_0 für die Punkte der achten Zirkulationsstromlinie, so finden wir, daß ψ_0 zwischen den

Tabelle Nr. 1.

Netzpunkt (g_1)	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
M_1	118,0	123,5	151,3	207,1	297,4	432,0	610,5	816,8	1021,5	1189,2	1200,0	1140,8	951,1	718,4	487,9	332,3	284,4
M_2	0	2,1	4,8	8,1	12,0	16,2	20,5	24,6	28,2	30,2	31,2	29,5	25,8	20,0	14,8	7,2	0
Ortswert von η	0	6,0	13,2	20,8	28,0	31,6	41,0	46,2	50,5	52,5	52,0	48,3	42,3	33,5	23,5	11,8	0
" "	0	36,0	174,2	432,6	784,0	1197,2	1681,0	2134,4	2550,3	2756,3	2704,0	2332,9	1789,3	1122,1	552,2	139,6	0
$\eta^2 - M_1$	-118,0	-87,5	+22,9	225,5	486,6	765,2	1070,5	1317,6	1528,8	1567,1	1504,0	1192,1	838,2	408,7	62	-193	-284
$\eta - M_2$	0	3,9	8,4	12,7	16,0	18,4	20,5	21,6	22,3	22,3	20,8	18,8	16,6	13,5	9,2	4,9	0

Tabelle Nr. 2.

Netzpunkt (g_1)	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
$\alpha = \frac{\partial}{\partial n} (\eta^2 - M_1)$		-20	+2	16	29	43	58	74	95	116	122	105	70	33	3	-18	-27
$\beta = \frac{\partial}{\partial n} (\eta - M_2)$	0	0,65	0,80	0,87	0,94	1,04	1,12	1,21	1,37	1,68	1,84	1,80	1,59	1,27	0,90	0,48	0
$\gamma =$		21,20	12,31	8,93	7,65	7,19	6,93	7,11	7,70	9,41	10,33	11,22	11,86	12,32	12,60	12,75	12,75

Punkten 8 und 16 ferner zwischen 112 und 120 auf der oberen Seite und auf der Unterseite entsprechend zwischen den Punkten 240 und 248 sowie zwischen 136 und 144 sein Vorzeichen wechselt. Zwischen diesen Punkten gehen offenbar die Stromlinien hindurch, auf denen $\psi_0 = 0$ ist. Das sind die Stromlinien, die auf den Flügel in den sog. „Staupunkten“ aufsetzen. Während wir jedoch bei der Potentialströmung deren zwei haben, sind es hier vier.

Wir wollen den Sachverhalt an einem einfacheren Beispiel verfolgen. In die Strömung mit konstantem Wirbel bringen wir einen Kreiszylinder vom Radius R (s. Fig. 9).

Zunächst liege die Achse des Zylinders auf dem Erdboden. Die entsprechende Stromfunktion für den Zylinder sei χ_0 und es ist:

$$\chi_0 = \frac{a}{2} \cdot \left\{ r^2 \cdot \sin^2 \varphi - \frac{R^2}{2} + R^2 \cdot \frac{\cos 2\varphi}{2r^2} \right\}$$

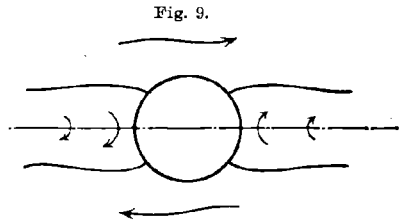
wenn (r, φ) wie bisher die Polarkoordinaten eines Punktes sind. Setzen

wir $\chi_0 = 0$ und noch zur Vereinfachung $R = 1$, so erhalten wir die Gleichung der „Nullstromlinien“ (auf denen $\chi_0 = 0$ ist).

$$\sin^2 \varphi = \frac{r^2 - 1}{2r^2 - 2}.$$

Zunächst gibt dies einen unbestimmten Wert für φ auf den Randpunkten des Kreiszylinders selbst, wo ja $r = 1$ ist. Für $r = \infty$ wird $\sin \varphi = 0$ und $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180^\circ$. Für endliche Werte von r , wo $r > 1$, erhalten wir jedesmal vier Werte von φ , also vier Punkte der Stromlinie, die rechts und links vom Zylinder und außerdem zur x -Achse symmetrisch liegen, so daß wir ungefähr das in Fig. 9 gezeichnete Bild erhalten. Die Nullstromlinien setzen da auf den Zylinder auf, wo

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{4}, \text{ also } \varphi = \begin{pmatrix} + 30^\circ \\ - 30^\circ \\ + 150^\circ \\ - 150^\circ \end{pmatrix} \text{ ist.}$$



Wir schreiben noch den Ausdruck für die Geschwindigkeit an der Zylinderoberfläche hin. Es ist:

$$v = \frac{\partial \chi_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right)_{r=1} = \frac{a}{2} \cdot \{ 4 \sin^2 \varphi - 1 \}.$$

Bei dem Aeroplanflügel werden wir etwas Analoges zu erwarten haben, und in der Tat bedeutet der viermalige Vorzeichenwechsel der Größe $(\eta^2 - M_1)$ das Ausgehen von vier Nullstromlinien vom Rande des Querschnittes. Wie ändern sich nun diese Verhältnisse, wenn wir den Flügel vom Boden erheben? Beim Flügel drücken wir die Erhebung durch Variation von y_0 aus. Zu der Stromfunktion:

$$\psi_0 = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta^2 - M_1 \}$$

tritt dann additiv eine Funktion:

$$\psi_1 = a \cdot y_0 \cdot (\eta - M_2)$$

hinzu.

Diese können wir ansehen als Stromfunktion einer Potentialströmung um den Querschnitt, die im Unendlichen die Geschwindigkeit $a \cdot y_0$ hat, so daß sich die Strömung von konstantem Wirbel um den Flügel in der Höhe y_0 darstellt als Superposition der Strömung ψ_0 und einer Potentialströmung, deren ungestörte Geschwindigkeit von y_0 abhängt.

Dasselbe können wir beim Zylinder machen, dessen Potentialströmung durch:

$$\chi_1 = c \cdot \sin \varphi \cdot \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

gegeben ist, so daß dessen allgemeine Stromfunktion wird:

$$\chi = \frac{a}{2} \left(r^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2r^2} \right) + c \cdot \sin \varphi \left(r - \frac{1}{r} \right).$$

Zwischen der Konstanten c und der Höhe y_0 besteht die Beziehung $a \cdot y_0 = c$. Um den Verlauf der vier Nullstromlinien zu übersehen, auf denen $\chi = 0$, betrachten wir die Werte von χ etwa auf dem Kreise vom Radius $1 + \varepsilon$ und fragen insbesondere nach den Werten von φ , wo $\chi = 0$ wird. Gehen wir mit ε zur Grenze 0 über, so ist:

$$\chi(1 + \varepsilon) = \chi(1) + \frac{\partial}{\partial r} \chi(1) \cdot \varepsilon = 0,$$

da $\chi(1) = 0$ ist, erhalten wir für φ die Gleichung:

$$4 \sin^2 \varphi + 4 y_0 \cdot \sin \varphi - 1 = 0$$

und:

$$\sin \varphi = \frac{-y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 1}}{2}.$$

Die oberen Nullstromlinien setzen mit wachsender Höhe y_0 immer näher der horizontalen Symmetrieebene des Zylinders auf, wie sich ja das Strömungsbild überhaupt bei großen Höhen dem der Potentialströmung nähert. Die unteren Nullstromlinien setzen in Punkten auf, für die:

$$\sin \varphi = -\frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 1}}{2}$$

ist. Sie rücken immer mehr nach unten bei wachsendem y_0 , fallen zusammen und verschwinden schließlich, sobald $y_0 > \frac{3}{4}$ wird, sobald also die Achse des Kreiszyinders um das Dreiviertelfache des Radius über den Erdboden erhoben wird.

Ein ähnliches Ergebnis finden wir bei unserm Flügel wieder: Die Vorzeichenwechsel von

$$\psi = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta^2 - M_1 + 2y_0 \cdot (\eta - M_2) \}$$

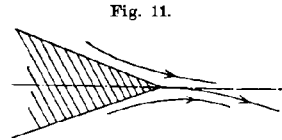
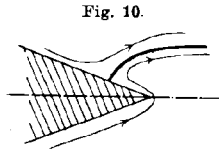
zwischen den unteren Punkten 136 und 248 der achten Zirkulationsstromlinie verschwinden (s. Tabelle Nr. 1), sobald $y_0 > 35$ mm ist. Die halbe Breite ist 40 mm. Die Verhältnisse beim Flügel sind also nicht wesentlich von denen beim Kreiszyinder verschieden. Die Punkte, in denen die oberen Nullstromlinien auf den Flügel aufsetzen, rücken mit wachsender Höhe nach der Symmetrieebene zu. Es ist nun unwahrscheinlich, daß beim tatsächlichen Verlauf der Strömung die Nullstromlinie am hinteren Ende anderswo aufsetzt, als gerade an der Ecke. Der Strömungsverlauf in der Nähe der Ecke wird nicht wie in Fig. 10, sondern wie in Fig. 11 aussehen.

Wir können aber unsere Stromfunktion durch Addition einer Zirkulation um den Flügel so abändern, daß die betreffende Nullstromlinie gerade an der Ecke auf den Flügel aufsetzt.

Die Zirkulation ist durch die Zirkulationsstromlinien $g = \text{const.}$ der Greenschen Funktion gegeben. Nennen wir die Stromfunktion der Zirkulation C , so ist:

$$C = \lambda \cdot \frac{a}{2} \cdot g$$

zu setzen, wo λ so zu bestimmen ist, daß die Nullstromlinie die ge-



wünschte Lage erhält. Wir finden den Wert von λ durch folgende Überlegung: In den Punkten $P_8 P_{16} \dots$, in denen die Zirkulationsstromlinien $g = 8 \dots 32$ die Symmetrieachse des Flügels in der Nähe der Ecke schneiden, berechnete sich die Stromfunktion ψ , d. h. ohne Zirkulation einfach zu:

$$\psi_P = - \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{256} \int_0^{256} \eta^2 dg_1^* = - \frac{a}{2} \cdot M_1,$$

und zwar unabhängig von der Höhe y_0 . Denn η ist für die Symmetrieachse Null und ebenfalls die Mittelwerte M_2 in diesen Punkten.

Die Werte von M_1 für die Punkte $P_8 \dots P_{32}$ sind:

Die Zirkulation bekommt in diesen Punkten die Werte: $\lambda \cdot g = \lambda \cdot 8 \dots \lambda \cdot 32$.

Würde die Nullstromlinie, die wir nach der Ecke bringen wollen, in der Symmetrieachse bleiben, so müßte es einen Wert λ geben, der die vier Gleichungen:

P_8	118,0
P_{16}	216,2
P_{24}	301,4
P_{32}	370,2

$$\lambda \cdot 8 = 118,0; \quad \lambda \cdot 16 = 216,2; \quad \lambda \cdot 24 = 301,4; \quad \lambda \cdot 32 = 370,2$$

befriedigt. Dies ist nun nicht der Fall, sondern die Gleichungen geben verschiedene Werte von λ , die wir $\lambda_8 \dots \lambda_{32}$ nennen wollen.

Es werden:

$$\lambda_{32} = 11,57$$

$$\lambda_{24} = 12,55$$

$$\lambda_{16} = 13,51$$

$$\lambda_8 = 14,77$$

Aus Analogie mit dem Beispiel des Kreiszyinders schließen wir auf reguläres Verhalten des Quotienten $\frac{M_1}{g}$ und extrapolieren hieraus für den Wert λ_0 an der Ecke selbst $\lambda_0 = 16,2$.

Die Addition einer Zirkulation:

$$C = \frac{a}{2} \cdot 16,2 \cdot g,$$

wo $g = \text{const.}$ die Zirkulationsstromlinien der Greenschen Funktion sind, bewirkt also, daß die betreffende Nullstromlinie den Flügel an der Ecke verläßt. An der Vorderseite des Flügels bleibt die Nullstromlinie über der Symmetrieachse.

Die vollständige Stromfunktion, die Ψ genannt werden möge, ist also:

$$\Psi = \frac{a}{2} \cdot \{ \eta^2 - M_1 + 2 \cdot y_0 \cdot (\eta - M_2) + 16,2 g \}.$$

Die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flügels ist gleich dem Gradienten $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ der Stromfunktion an der betreffenden Stelle. Zur Abkürzung setzen wir:

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial n} (\eta^2 - M_1)$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial n} (\eta - M_2)$$

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial n} (16,2 \cdot g).$$

Dann wird die Geschwindigkeit v :

$$v = \frac{a}{2} \cdot \{ \alpha + 2y_0 \cdot \beta + \gamma \}.$$

Hierin ist offenbar $\frac{a}{2} \cdot \alpha$ die Geschwindigkeit, die ohne Zirkulation in der Höhe $y_0 = 0$ entstehen würde. $a \cdot y_0 \cdot \beta$ ist als Geschwindigkeit der überlagerten Potentialströmung anzusehen, und $\frac{a}{2} \cdot \gamma$ rührt von der Zirkulation her.

Für zwei symmetrische Punkte an der oberen und unteren Fläche des Flügels haben alle drei Größen α, β, γ den gleichen absoluten Betrag, oben wie unten. α und γ haben auch das gleiche, β jedoch oben und unten das entgegengesetzte Vorzeichen.

Der Druck an der Oberfläche in einem Punkte ist nach der Druckgleichung:

$$p = p_n - \frac{\rho}{2} \cdot v^2,$$

wo p_n eine Konstante ist.

Nennen wir p_0 und p_u die Drucke an zwei symmetrischen Punkten (s. Fig. 12), so bleibt für den Auftrieb der Druck $p_u - p_0$ übrig. Nun ist

$$v^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \{ \alpha^2 + 4y_0^2 \cdot \beta^2 + \gamma^2 + 4 \cdot y_0 \cdot \alpha \cdot \beta + 4y_0 \cdot \beta \cdot \gamma + 2 \cdot \alpha \cdot \gamma \},$$

damit wird:

$$p_u - p_0 = \frac{\rho \cdot a^2}{4} \cdot \{ 8y_0 \cdot \beta(\alpha + \gamma) \} = \rho \cdot a^2 \cdot y_0 \cdot \beta(\alpha + \gamma),$$

und zwar ist für β der positive Wert einzusetzen. Nennen wir δ den Winkel zwischen der Flächennormale und der vertikalen, so wird der gesamte Auftrieb für die Längeneinheit des Flügels:

$$A = \varrho \cdot a^2 \cdot y_0 \cdot \int_1^2 \beta(\alpha + \gamma) \cos \delta \cdot ds,$$

wo das Integral vom Punkte 1 (am Hinterende) über den oberen Teil der Kontur bis zum Punkte 2 (vorne) zu erstrecken ist.

Bezeichnen wir mit ξ die auf der Symmetrieachse von 1 nach 2 gemessene Länge, so wird $d\xi = \cos \delta \cdot ds$ und es empfiehlt sich $\beta \cdot (\alpha + \gamma)$ als Funktion von ξ aufzutragen. Die Größen α, β, γ können so bestimmt werden, daß der Wert der Funktionen ψ_0 und ψ_1 auf den Punkten der achten Zirkulationsstromlinie durch Integration mit Skalen und Meßrad bestimmt und dann durch den Abstand der Punkte von der Oberfläche dividiert wird.

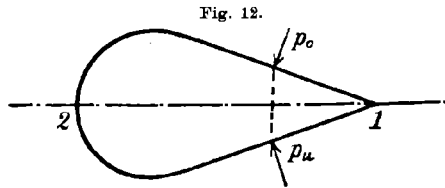


Fig. 12.

Dies Verfahren ist jedoch nur zulässig, wenn $\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0$ auf der Randkurve ist. Um eine Kontrolle zu haben, vergleichen wir die graphisch gefundene Stromfunktion, an den beiden Enden des Flügels mit den analytischen Lösungen, die für eine Strömung um eine Ecke und um den Kreiszyylinder bekannt sind. Zunächst die Potentialfunktion

$$\psi_1 = a \cdot (\eta - M_2).$$

Für die Strömung um die Ecke ist der analytische Ausdruck:

$$\bar{\psi} = P \cdot r^\varepsilon \cdot \sin \frac{\pi}{\varepsilon} \cdot \varphi.$$

Hierin ist φ der Winkel zwischen dem von der Ecke 1 auslaufenden Radiusvektor und der geradlinigen Begrenzung des Flügels.

r ist die Länge des Radiusvektor $\overline{1p}$ und ε der Winkel zwischen der Flügelkante und der Horizontalen. ($\varepsilon = 160,58^\circ$)

Für die Netzpunkte 8, 16, 24 usw. auf der 8. Zirkulationsstromlinie vergleichen wir die graphisch gefundenen Werte von ψ_1 mit den Werten von $\bar{\psi} = P \cdot r^\varepsilon \cdot \sin \frac{\pi}{\varepsilon} \cdot \varphi$, wo P noch unbestimmt ist. Wir werden die analytische Lösung soweit benutzen können, solange der Quotient:

$$P = \frac{\psi_1}{r^\varepsilon \cdot \sin \frac{\pi}{\varepsilon} \cdot \varphi}$$

merklich denselben Wert behält. An den Punkten 8, 16, 24 und 32 erhalten wir für P die Werte: 0,525; 0,525; 0,529; und 0,54. Also mindestens bis zum Punkte 24 können wir die analytische Lösung benutzen.

Die aus dieser gefundenen Werte der Geschwindigkeit stimmen übrigens mit den früher ermittelten noch in der zweiten Dezimale überein. Dies ist zu erwarten, da, soweit $\bar{\psi}$ benutzt werden kann, $\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial n^2} = 0$ ist.

Analog verfahren wir an der Vorderseite des Flügels. Die Strömung um den Kreiszyylinder wird gegeben durch die Stromfunktion:

$$\bar{\psi} = Q \cdot \sin \varphi \left(r - \frac{R^2}{r} \right),$$

wo R der Radius des Zylinders, r und φ Polarkoordinaten sind. Vergleicht man jetzt die graphischen und gerechneten Werte der Stromfunktion für die Punkte 128; 120; 112; ... so erhält man bis zum Punkte 88 für Q den Wert 0,97. (Für den Punkt 80 wurde $Q = 1,02$) Die Geschwindigkeit wird durch:

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right)_{r=R} = 2 \cdot 0,97 \cdot \sin \varphi$$

gegeben.

Da $\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial n^2} \neq 0$, sondern negativ ist, würden die auf die frühere Methode bestimmten Werte der Geschwindigkeit am Vorderende zu klein sein, und wir müssen die aus der analytischen Lösung abgeleiteten benutzen. Beim mittleren Teile des Flügels kann man genauere Werte für die Geschwindigkeit dadurch erhalten, daß man die Stromfunktion auch für Punkte der 16. und 24. Zirkulationsstromlinie berechnet und als Funktion der Bogenlänge der Quellstromlinien aufträgt und so den Gradienten an der Flügeloberfläche ermittelt.

Die so ermittelten Werte müssen sich an die analytisch gefundenen anschließen.¹⁾

Für die Geschwindigkeit γ der Zirkulation gelten dieselben Betrachtungen. $\psi_1 = P_1 \cdot r^{\frac{\pi}{\varepsilon'}} \cdot \sin \frac{\pi}{\varepsilon'} \cdot \varphi$ liefert die Strömung um die Ecke, sofern für ε' der richtige Winkel ($> \pi$) eingeführt wird. Da auch hier $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} = 0$ am Flügel ist, gibt das auf Seite 241 angegebene Verfahren zur Bestimmung von γ (nämlich $\gamma = \frac{\Delta \psi}{\Delta n}$) die Werte von γ hinreichend genau. Am Vorderende ist die analytische Funktion:

$$\psi_2 = Q_1 \cdot \log \left(\frac{r}{R} \right)$$

1) Unsere Methode erscheint so als eine graphische „Interpolation“ zwischen bekannten Lösungen der Differentialgleichung.

zu benutzen. Da $\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial n^2}\right)_{r=R} = -\frac{1}{R^2}$ ist, müssen hier die Werte von ψ_1 aus der Funktion ψ_2 bestimmt werden.

Für die Werte von α , welche die Geschwindigkeit ausdrücken, die vom Wirbel allein ($y_0 = 0$) herrührt, läßt sich eine Kontrolle nicht so bequem ausführen. Die analytische Lösung ist zwar für das Vorderende bekannt:

$$\psi_3 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi - \frac{R^2}{2} + R^2 \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{2r^2},$$

aber der Anschluß der graphischen an die analytische Lösung ist kein guter, weil die Werte der Funktion ψ_0 , die durch Integration erhalten werden, klein sind, und daher durch die nicht auf dem Kreise liegenden Randwerte η_r^2 stark beeinflußt werden. Für die Strömung um die Ecke mit konstantem Wirbel ist eine analytische Lösung nicht bekannt.

Die Werte von α sind daher durch Benutzung der graphisch gewonnenen Werte von ψ_0 auf den Netzpunkten der 8. und 16. Zirkulationsstromlinien gefunden und können um 5% fehlerhaft sein.

Die endgültigen Werte von α , β , γ sind in der Tabelle Nr. 2 zusammengestellt.

Im Integral für den Auftrieb:

$$A = \rho \cdot a^2 \cdot y_0 \int_1^2 \beta (\alpha + \gamma) \cos \delta ds$$

ist β durchweg positiv, nur an den Enden Null. $(\alpha + \gamma)$ ist positiv bis auf ein kleines Stück am Vorderende. Das liegt daran, daß die Zirkulation so gewählt wurde, daß die Nullstromlinie am Hinterende gerade an der Ecke aufsetzt. Am Vorderende liegt die Aufsatzstelle oberhalb der Symmetrieachse, daher rührt der Vorzeichenwechsel von $(\alpha + \gamma)$.

Ohne Zirkulation würde derselbe auch am Hinterende eintreten, ohne den Auftrieb erheblich zu beeinflussen.

Da β die Dimension Null hat, α und γ die Dimension einer Länge, so können wir sagen, daß der Auftrieb proportional ist der Dichte, der Höhe über dem Erdboden und dem Quadrat des Wirbels. Bei geometrisch ähnlichen Querschnitten ist er dem Volumen des Flügels proportional.

Um die in der Symmetrieachse des Flügels wirkende Kraft zu ermitteln, haben wir die Drucke p_0 und p_u an symmetrischen Punkten der Ober- und Unterseite zu addieren, mit dem Sinus des auf Seite 241 eingeführten Winkels δ zu multiplizieren und über die Oberfläche vom Punkte 1 bis zum Punkte 2 zu integrieren.

Bilden wir $p_0 + p_u$, so fallen im Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit die Glieder weg, die β linear enthalten, und es wird:

$$p_0 + p_u = \text{Const} - \frac{a^2 \cdot \varrho}{4} \cdot \{ \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \gamma + 4y_0^2 \beta^2 \},$$

bilden wir:

$$B = \int_1^2 (p_0 + p_u) \sin \delta \, ds,$$

so fällt zunächst die Konstante in der Druckgleichung weg, ferner ist:

$$\int_1^2 4y_0^2 \cdot \beta^2 \cdot \sin \delta \, ds = 0,$$

denn diesen Ausdruck würde man für den von einer Potentialströmung ausgeübten Schub, der bekanntlich Null ist, erhalten. Es bleibt also das Integral übrig:

$$B = \frac{a^2 \cdot \varrho}{4} \cdot \int_1^2 (\alpha + \gamma)^2 \sin \delta \, ds.$$

Es empfiehlt sich, das Quadrat $(\alpha + \gamma)^2$ nicht aufzulösen, da $(\alpha + \gamma)$ an der Ecke endlich bleibt, während dies für α und γ einzeln nicht der Fall ist. Nennen wir wie früher η_r den Abstand eines Randpunktes von der Symmetrieebene, so ist:

$$d\eta_r = \sin \delta \, ds,$$

und wir tragen daher zweckmäßig den Integranden als Funktion von η_r auf. Der Wert des Integrals erweist sich als von Null verschieden, und wir bekommen eine Kraft, welche auf den Flügel in der Richtung vom Vorder- nach dem Hinterende zu wirkt und zwar in einer Größe:

$$B = \frac{a^2 \cdot \varrho}{4} \cdot \int_1^2 (\alpha + \gamma)^2 d\eta_r.$$

Dieser Ausdruck enthält y_0 nicht und gibt also denselben Effekt wieder, als wenn der Flügel in der Höhe $y_0 = 0$ von der Strömung mit konstantem Wirbel und der Zirkulation umströmt wird.

Ohne Zirkulation haben wir es mit vier Nullstromlinien zu tun.

Die Zirkulation bringt die beiden in der Nähe der Ecke aufsetzenden Nullstromlinien in die Ecke selbst hinein, genügt aber nicht, um auch die beiden vorderen Nullstromlinien zu vereinigen. Wie dies aus der Tabelle I hervorgeht. Dadurch bleibt die Geschwindigkeit am Vorderende gering und der dadurch bedingte Druck schiebt den Flügel zurück. Würden wir den Flügel vom Erdboden erheben und mit der Kante gegen den Wind richten, so hätten wir die paradoxe Erscheinung, daß die Kraft den Flügel gegen den Wind bewegen würde. In den Gleichungen

haben wir y_0 negativ anzunehmen, um diesen Fall darzustellen. Während der Auftrieb von einer Neigung des Flügels, d. h. seiner Symmetrieebene gegen die horizontale Richtung qualitativ nicht so stark beeinflußt wird (die Zirkulation wird stark zunehmen), werden sich die Verhältnisse für die horizontale Kraftkomponente sofort erheblich ändern. Ebenso bei anderer (gekrümmter) Form des Flügels, so daß die Horizontalkraft hier keine wesentliche Rolle spielt.

Um einen Überblick für die wirkliche Größe der Kräfte zu haben, sind diese ausgerechnet für einen Flügel, dessen Querschnitt dem bisher betrachteten ähnlich, aber von der zehnfachen linearen Dimension ist. Die Breite des Flügels ist zu 3 m angenommen, während die Tiefe 1,6 m wird. Die Windgeschwindigkeit sei in 10 m Höhe 10 m sec.^{-1} und y_0 sei auch 10 m. a wird 1 sec.^{-1} . Die Dichte der Luft sei $\frac{\gamma}{g} = 0,125 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{sec.}^2$.

α und γ gelten jetzt in cm, die Integrale geben cm^2 bzw. cm^3 .

Dann wird der Auftrieb:

$A \text{ kg} = 0,125 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{sec}^2 \cdot 1 \cdot \text{sec}^{-2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 1,544 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ m} = 5,8 \text{ kg}$,
während als Kraft in horizontaler Richtung:

$$B = 0,62 \text{ kg}$$

auftritt.

Zum Vergleich bemerken wir, daß eine ebene Platte von 4,8 qm (d. i. ungefähr die Tragfläche des Flügels) bei einem Gleitwinkel von 10^0 einen Auftrieb von 17,4 kg ergeben würde. Berücksichtigt man die unverhältnismäßige Dicke des von uns betrachteten Flügels, so geht aus unserer Betrachtung eine Erklärung der von Lilienthal beobachteten Erscheinung hervor, die in der Größenordnung übereinstimmt.

Wie aus den vorstehenden Rechnungen ersichtlich ist, bleibt eine Bestimmung des horizontalen Schubes auf diesem Wege erheblichen Unsicherheiten ausgesetzt. Der Gradient der Stromfunktion und damit die Geschwindigkeit und der Druck der Strömung lassen sich in der Nähe von den Staupunkten (wo die Nullstromlinien aufsetzen) auf graphischem Wege allein nur ungenau bestimmen und können nur durch Anschluß an bekannte analytische Lösungen verbessert werden, was hier am hinteren Ende des Flügels nicht möglich war. — Der Auftrieb dagegen läßt sich sehr wohl mit genügender Genauigkeit bestimmen, und auch für Zylinder von anderen Querschnitten, als dem hier zugrunde gelegten, ist Auftrieb zu erwarten.

Die einmal für diesen Querschnitt bestimmte Greensche Funktion gestattet die Rechnung auch für eine andere (genoigte) Lage des Zylinders nach demselben Schema auszuführen.

Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens.

Von Dipl.-Ing. RUDOLF MAYER in Karlsruhe.

§ 1. Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen über die Formänderung, Beanspruchung und Stabilität kreisförmiger Stäbe haben die Aufstellung gebrauchsfertiger Gleichungen für häufig vorkommende und gewissermaßen typische Belastungen zum Ziele. Die unmittelbare technische Anwendbarkeit der Ergebnisse, wie sie angestrebt war, ließ sich schwerlich anders erreichen als durch eine Darstellung, die bei der Behandlung der einzelnen Probleme mehr in die Breite ging, als dies vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus geboten gewesen wäre.

Eine weitere Folge, die durch den vorgegebenen Zweck bedingt wurde, war die Durchführung der Untersuchungen als Annäherungsrechnungen im Sinne der *Theorie des elastischen Drahtes*. Hierdurch wurden die verhältnismäßig einfachen Rechnungsergebnisse, von denen der Konstrukteur gerne Gebrauch machen wird, erzielt und für eine große Zahl von praktisch vorkommenden Belastungsarten eine Möglichkeit gefunden, durch den Gebrauch einer Tabelle bisher recht zeitraubende Rechnungen nicht allein stark zu vereinfachen, sondern auch durch bequeme Ermittlung der ganzen Deformationslinie zu vervollständigen.

Den Näherungsrechnungen ist ganz wesentlich die Voraussetzung zugrunde gelegt, daß gegenüber den Formänderungen, die ein elastischer Draht durch die in irgend einem Querschnitte stattfindende Beugung oder den dort herrschenden Drall erfährt, die durch Schiebung zweier Nachbarquerschnitte und durch Längenänderung des elastischen Elementes entstehenden Formänderungen zu vernachlässigen seien. Diese Voraussetzung ist umso eher berechtigt, je mehr die radiale Dicke des Drahtes gegenüber dem Krümmungsradius ρ der Zentrallinie verschwindet und je kleiner die Deformationen selbst sind.

Weiter wird verlangt, daß eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze an jeder Stelle des Drahtes infolge der Beanspruchung ausgeschlossen sei. Für den Fall der Beanspruchung des Kreisringes durch Kräfte, welche in der Ebene seiner Zentrallinie wirken, setzen wir

schließlich noch voraus, daß der Ring solche Abmessungen besitze, daß keine räumliche Deformation seiner Zentrallinie eintritt.¹⁾

Den Ring beziehen wir entweder auf ein rechtwinkliges, recht-sinniges Koordinatensystem $OXYZ$, dessen XY -Ebene die Zentrallinie enthält, oder auf ein Polarkoordinatensystem, dessen X -Achse OX in der Ebene der Zentrallinie liegt und durch den Kreismittelpunkt O als Koordinatenursprung geht.

Die positiven Achsenrichtungen entsprechen positiven Richtungen für die Kraftkomponenten, die Komponenten der Momente, für die Verschiebungen Δx , Δy , Δz eines Punktes und die Winkeldrehungen β_x , β_y , β_z eines Drahtelementes. Blickt man daher von der positiven Z -Achse aus nach der XY -Ebene, so erscheint als der positive Drehsinn von β_z und M_z der der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzte.

Unter den an einer beliebigen Stelle φ des Stabes wirksamen Kräften und Momenten, durch welche sich die Spannungen im Querschnitte φ ersetzen lassen, wollen wir fortan immer die Kräfte und Momente verstehen, welche der kleineren Werten von φ zugehörige Stabteil auf den mit wachsenden φ folgenden Teil überträgt.

I. Abschnitt.

Die elastische Linie des kreisförmigen Stabes bei kleinen Biegungs-Deformationen in der Kreisebene.

§ 2. Die angenäherte Differentialgleichung der elastischen Linie.

(Figur 1.)

Auf Grund des Hookschen Gesetzes und der Bernoullischen Hypothese gilt für jeden von Haus aus krummen Stab die nachstehende Beziehung zwischen der Krümmungsänderung $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ in einem Punkte P der Zentrallinie und dem dort herrschenden Biegemomente M :

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \pm \frac{M}{EJ},$$

wo E den Elastizitätsmodul des Materials und J das Trägheitsmoment des Querschnittes P in bezug auf eine zur Achse des Biegemomentes parallele Achse durch den Punkt P bedeutet.

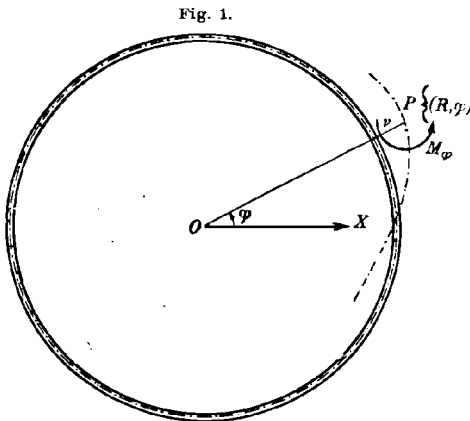
Gl. (1) ist die Differentialgleichung der elastischen Linie, deren strenge Integration schon beim geraden Stabe auf elliptische Integrale

1) Eine allgemeine Theorie dieser Stabilität fehlt bisher; für den geraden Stab wurden Beispiele berechnet durch: A. G. M. Michell, *Phil. Mag.* (Ser. 5) vol. 48 (1899) und L. Prandtl, „Kipperscheinungen“, Nürnberg 1899 (Diss.).

führt. Wie man nun beim geraden Stabe bei Beschränkung auf kleine Deformationen die Gl. (1) durch die auf elementarem Wege integrable Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}$$

für technische Rechnungen genau genug annähern kann, so läßt sich auch die Differentialgleichung der elastischen Linie eines in seiner



Ebene gebogenen kreisförmigen Stabes näherungsweise ohne elliptische Funktionen integrieren.

Zu dem Ende beziehen wir den Stab, dessen Radius im spannungsfreien Zustande mit r bezeichnet sein möge, auf ein Polarkoordinatensystem, dessen Achse OX durch den Mittelpunkt O des die Zentrallinie darstellenden Kreises geht; dann ist

$$(3) \quad r = \text{const.}$$

die Gleichung der neutralen Faser.

Infolge der Biegung (vgl. Fig. 1) gehe der Kreis $r = \text{const.}$ in eine Kurve über, deren Gleichung wir in der Form ansetzen

$$(4) \quad R = r + \nu.$$

Hierin ist R der Radiusvektor der elastischen Linie, ν die in der Normalen zum Kreise r — positiv in der Richtung von \overline{OP} — gemessene Entfernung¹⁾ beider Kurven voneinander; es ist sonach $\nu = \nu(\varphi)$ eine Funktion des Arguments φ , von der vorausgesetzt werden soll, daß sie nebst ihren beiden ersten Ableitungen $\frac{d\nu}{d\varphi}$ und $\frac{d^2\nu}{d\varphi^2}$ so klein sei, daß die Quadrate und Produkte aus diesen drei Größen gegenüber r vernachlässigt werden dürfen.

Der Ausdruck für die Krümmung in einem Punkte $P\{(R, \varphi)$ der elastischen Linie lautet

$$(5) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 - R \cdot \frac{d^2R}{d\varphi^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

1) Im allgemeinen erfährt ein Punkt der Zentrallinie bei der Deformation sowohl radiale als auch tangentielle Verschiebungen; die hier als Rechnungsgröße eingeführte Strecke ν hat mit der wirklichen Verschiebung nichts gemein.

Nach Gl. (4) ist $\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dv}{d\varphi}$ und $\frac{d^2R}{d\varphi^2} = \frac{d^2v}{d\varphi^2}$, wodurch aus Gl. (5) die Näherungsgleichung

$$(6) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{r + v - \frac{d^2v}{d\varphi^2}}{(r + v)^2}$$

folgt. Entwickelt man noch $\frac{1}{(r + v)^2}$ in eine Reihe, so erhält man

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} - \frac{v}{r^2} - \frac{d^2v}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

woraus sich die Krümmungsänderung

$$(8) \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r^2} \left(v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)$$

ergibt.

Aus Gl. (1) und Gl. (8) folgt nun:

$$(9) \quad v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = \pm \frac{Mr^2}{EJ}.$$

Über das Vorzeichen ist noch eine Entscheidung zu treffen; wirkt an der Stelle φ ein positives Moment, so tritt ersichtlich eine Verminderung der Krümmung ein, weshalb $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} > 0$ wird. Unsere Differentialgleichung der elastischen Linie¹⁾ lautet daher

$$(10) \quad v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = \frac{Mr^2}{EJ}.$$

Man bemerkt leicht, daß die für den geraden Stab gültige Differentialgleichung (Gl. (2)) dem besonderen Falle $r = \infty$ entspricht. Hierfür erhält man nämlich aus Gl. (10)

$$\frac{d^2v}{(r d\varphi)^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

wie es sein muß.

Die Integration der Gl. (10) führt auf die Gleichung der elastischen Linie:

$$(11) \quad v = \left[C_1 - \int \frac{Mr^2}{EJ} \sin \varphi d\varphi \right] \cos \varphi + \left[C_2 + \int \frac{Mr^2}{EJ} \cos \varphi d\varphi \right] \sin \varphi.$$

Ist insbesondere, wie dies im Folgenden angenommen wird, $EJ = \text{const.}$, so wird:

$$(12) \quad v = \left[C_1 - \frac{r^2}{EJ} \int M \sin \varphi d\varphi \right] \cos \varphi + \left[C_2 + \frac{r^2}{EJ} \int M \cos \varphi d\varphi \right] \sin \varphi.$$

1) Die Ableitung dieser Differentialgleichung wurde wohl erstmals von J. Boussinesq gegeben; vgl. Comptes Rendus t. 97 (1883), p. 843.

Die Berechnung der elastischen Linie gestaltet sich nun unter Benützung der nebenstehend angegebenen Integraltabelle sehr einfach: Man führt zunächst für irgend einen Schnitt des Ringes die als Ersatz der Schnittspannungen dort wirksamen stereostatisch¹⁾ unbestimmten Kräfte und ihr Schnittmoment ein und stellt dann für einen laufenden Schnitt (φ) des Ringes M als Funktion von φ auf. Die Tabelle gibt alsdann zu Funktionen Φ , aus welchen sich die Funktion M in den meisten Fällen additiv wird aufbauen lassen, die zugehörigen Funktionen $\frac{EJ}{r^2} \cdot \nu$, aus denen sich die Gleichung der elastischen Linie ebenso herstellen läßt wie M aus den Φ . Außerdem ordnet sie in zwei weiteren Spalten jeder der Funktionen Φ einen Wert $\frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}$ und das Integral $\frac{EJ}{r^2} \cdot \int_0^\varphi \nu d\varphi$ zu, wodurch es möglich wird, die Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten C_1 und C_2 und die stereostatisch unbestimmten Größen sofort anzuschreiben.

§ 3. Geometrische Interpretation des Integrales ν .

Um zu einer anschaulichen Deutung der Strecke ν zu gelangen, gehen wir zunächst von der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\nu}{d\varphi^2} + \nu = 0$$

aus, welche dem besonderen Falle $M = 0$ in Gl. (10) entspricht. Für $M = 0$ ist aber wegen $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = 0$ der Krümmungsradius ρ der elastischen Linie an jeder Stelle gleich dem Kreisradius r , wie es auch sein muß, da der Ring in diesem Falle keine Biegung erfährt.

Das der Differentialgleichung $\frac{d^2\nu}{d\varphi^2} + \nu = 0$ zugehörige Integral

$$(13) \quad \nu = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

entspricht daher, solange die C_1 und C_2 von Null verschieden, im übrigen aber klein von der Ordnung der ν sind, einer deformations-

1) Ich gebrauche im Folgenden grundsätzlich den Ausdruck „stereostatisch unbestimmt“ für die Größen, welche aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte am *starrten Körper* nicht zu ermitteln sind; die Bezeichnung „statisch unbestimmt“ ist wenig glücklich, da doch diese Größen immer aus bekannten Eigenschaften der Gleichgewichtsfigur des Drahtes (also eben gerade statisch!) bestimmt werden.

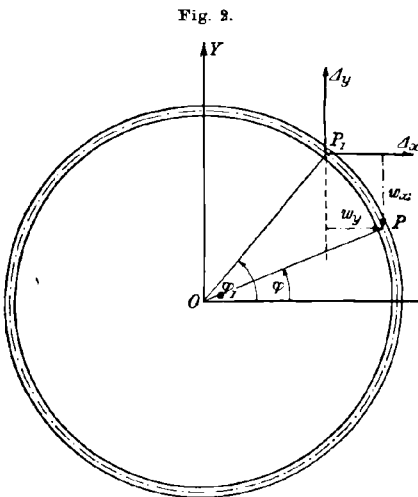
Tabelle 1.
Integrale zur Berechnung der elastischen Linie kreisförmiger Stäbe.

Φ	$\frac{EJ}{r^3} \cdot \psi$	$\frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}$	$\frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\varphi \psi d\varphi$
1	1	0	φ
φ	φ	1	$\frac{\varphi^2}{2}$
$\sin \varphi$	$\frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$	$\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi$	$-\cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi$
$\cos \varphi$	$\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi$	$\frac{1}{2} (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)$	$\frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$
$\sin^2 \varphi$	$\frac{1}{3} (1 + \cos^2 \varphi)$	$-\frac{2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$	$\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6} \sin \varphi \cos \varphi$
$\cos^2 \varphi$	$\frac{1}{3} (1 + \sin^2 \varphi)$	$\frac{2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$	$\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6} \sin \varphi \cos \varphi$
$\sin \varphi \cos \varphi$	$\frac{1}{3} \sin \varphi - \frac{1}{3} \cos \varphi$	$\frac{1}{3} (\cos \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$	$-\frac{1}{3} \cos \varphi - \frac{1}{6} \sin^2 \varphi$
$\varphi \sin \varphi$	$\frac{1}{4} (-\varphi^2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi)$	$\frac{\varphi^2}{4} \sin \varphi - \frac{\varphi}{4} \cos \varphi + \frac{1}{8} \sin \varphi$	$-\frac{\varphi^2}{4} \sin \varphi - \frac{3}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{7}{8} \sin \varphi$
$\varphi \cos \varphi$	$\frac{1}{4} (\varphi^2 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi)$	$\frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi + \frac{\varphi}{4} \sin \varphi + \frac{1}{8} \cos \varphi$	$-\frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi + \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{7}{8} \cos \varphi$

losen Verschiebung des ganzen Ringes. Für $\varphi = 0$ erhält man mit $v_0 = C_1$ die Verschiebung im Sinne der X -Achse, während durch den für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgenden Wert $v_{\frac{\pi}{2}} = C_2$ die Verschiebung im Sinne der Y -Achse gegeben ist.

Ist nun $M \neq 0$, so folgt aus dem allgemeinen Integral (Gl. (11)) für einen Punkt P_1 (vgl. Fig. 2), der durch $\varphi = \varphi_1$ bestimmt ist,

$$v_1 = \left[C_1 - \int_0^{\varphi_1} \frac{M r^2}{EJ} \sin \varphi d\varphi \right] \cos \varphi_1 + \left[C_2 + \int_0^{\varphi_1} \frac{M r^2}{EJ} \cos \varphi d\varphi \right] \sin \varphi_1.$$



Dieser Ausdruck läßt eine anschauliche Deutung zu, wenn man in den Integranden die sog. Wirkungsarme¹⁾ w_x und w_y einführt. Für P_1 als Wirkungspunkt und ein durch die laufende Koordinate φ gegebenes elastisches Element von der Länge $r \cdot d\varphi = ds$ im Punkte P wird:

$$(14) \begin{cases} w_x = r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi \\ w_y = r \cos \varphi - r \cos \varphi_1 \end{cases}$$

wonach in den Integranden

$$r \sin \varphi = r \sin \varphi_1 - w_x$$

$$r \cos \varphi = r \cos \varphi_1 + w_y$$

gesetzt werden kann. Man erhält so:

$$v_1 = \left[C_1 + \int_0^{\varphi_1} \frac{M w_x ds}{EJ} \right] \cos \varphi_1 + \left[C_2 + \int_0^{\varphi_1} \frac{M w_y ds}{EJ} \right] \sin \varphi_1.$$

In dieser Form läßt sich nun die Entstehung von v_1 unschwer übersehen: C_1 und C_2 haben wie zuvor die Bedeutung einer kleinen Verschiebung des ganzen Ringes ohne Deformation im Sinne der X -Achse

bzw. der Y -Achse, während die Integrale $\int_0^{\varphi_1} \frac{M w_x ds}{EJ}$ und $\int_0^{\varphi_1} \frac{M w_y ds}{EJ}$ die-

jenigen x - bzw. y -Verschiebungen angeben, welche im Punkte P_1 infolge der Biegung stattfinden, wenn nur diese allein und nicht auch die de-

1) Vgl. E. Brauer, Festigkeitslehre, Leipzig 1905, S. 84.

formationslosen Verschiebungen C_1 und C_2 ihren Einfluß geltend machten. Bezeichnet man

$$\left[C_1 + \int_0^{\varphi_1} \frac{M w_x ds}{EJ} \right] \text{ mit } \Delta x_1$$

$$\left[C_2 + \int_0^{\varphi_1} \frac{M w_y ds}{EJ} \right] \text{ mit } \Delta y_1,$$

so stellt

$$(15) \quad v_1 = \Delta x_1 \cos \varphi_1 + \Delta y_1 \sin \varphi_1$$

nichts anderes dar als die Projektion der geometrischen Summe $\overline{\Delta x_1 + \Delta y_1}$ auf den Radiusvektor unter φ_1 .

II. Abschnitt.

Die regelmäßige Beanspruchung des geschlossenen Kreisringes durch Kräfte in der Ringebene.

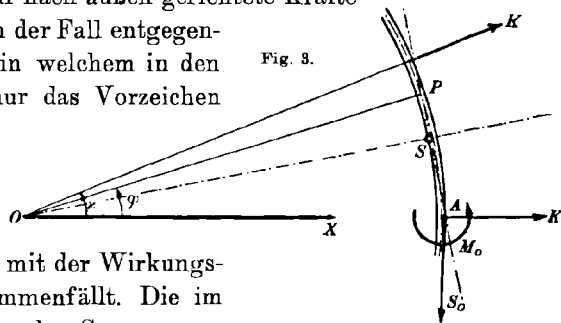
§ 4. Der geschlossene Kreisring bei regelmäßiger Belastung.

Unter regelmäßiger Belastung sei hier die Beanspruchung eines Kreisringes durch n gleiche, radial gerichtete, in den Ecken des regelmäßigen n -Ecks angreifende Kräfte von der Intensität K verstanden; die Untersuchung wird für nach außen gerichtete Kräfte durchgeführt, womit auch der Fall entgegengesetzter Krafttrichtung, in welchem in den abzuleitenden Formeln nur das Vorzeichen von K zu wechseln ist, seine Erledigung findet.

Wir legen die X -Achse des Polarkoordinatensystems so, daß sie mit der Wirkungslinie einer Kraft K zusammenfällt. Die im Schnitt A (s. Fig. 3) wirkenden Spannungen lassen sich ersetzen durch das stereostatisch unbestimmte Moment M_0 und die stereostatisch unbestimmte Schnittkraft S_0 ; außer diesen Größen wirkt in A noch die Kraft $\frac{K}{2}$. In dem durch den Winkel φ bestimmten Punkte P des Ringes hat das Biegemoment M_φ den Wert:

$$(16) \quad M_\varphi = M_0 + \frac{Kr}{2} \cdot \sin \varphi - S_0 r (1 - \cos \varphi),$$

solange $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ist, unter α den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Kräften K verstanden.



Die in der Gleichung der elastischen Linie auftretenden Funktionen Φ_I und Φ_{II} werden

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \int -M_\varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + C_1 \\ &= M_0 \cdot \cos \varphi + \frac{K \cdot r}{4} \cdot (\sin \varphi \cos \varphi - \varphi) - S_0 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \varphi \right) + C_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II} &= \int +M_\varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + C_2 \\ &= M_0 \cdot \sin \varphi + \frac{K \cdot r}{4} \cdot \sin^2 \varphi - S_0 \cdot r \cdot \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \right) + C_2, \end{aligned}$$

wonach sich die Gleichung der elastischen Linie

$$(17) \quad \frac{E \cdot J}{r^2} \cdot \nu = M_0 + \frac{K \cdot r}{4} (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi) - S_0 \cdot r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi \right) + C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi$$

ergibt. Die Unbekannten M_0 und S_0 sowie die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen sich aus folgenden Bedingungen:

a) Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \kappa$ wird ν ein Maximum, für $\varphi = \frac{\kappa}{2}$ ein Minimum; das heißt

$$(18) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0; \quad (19) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\kappa}{2}} = 0; \quad (20) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\kappa} = 0.$$

b) Da die Gleichung der elastischen Linie nur mit Rücksicht auf die Krümmungsänderung, also unter Vernachlässigung der durch die Schnittkraft S_φ entstehenden Dehnung sowie der von der Scherkraft T_φ herrührenden Schiebung des elastischen Elementes $r \cdot d\varphi$ aufgestellt wurde, so ist die Längenänderung der Zentrallinie des Ringes bei der Deformation gleich Null. Bei kleinen Deformationen ν ist aber die Bogenlänge der elastischen Linie

$$s = \int_0^\kappa R \cdot d\varphi = \int_0^\kappa (r + \nu) \cdot d\varphi$$

und die Länge des Kreisbogens $s_0 = r \cdot \kappa$, woraus

$$(21) \quad s - s_0 = \int_0^\kappa \nu \cdot d\varphi = 0 \quad \text{folgt.}$$

Bildet man aus Gl. (17) durch Differentiation:

$$\frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + \frac{S_0 r}{2} (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi$$

und setzt der Reihe nach $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\kappa}{2}$, $\varphi = \kappa$, so erhält man:

$$(18a) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 = C_2$$

$$(19a) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\kappa}{2}} = 0 = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \frac{\kappa}{2} \cdot \sin \frac{\kappa}{2} + \frac{S_0 r}{2} \left(\frac{\kappa}{2} \cdot \cos \frac{\kappa}{2} + \sin \frac{\kappa}{2} \right) - C_1 \cdot \sin \frac{\kappa}{2}$$

$$(20a) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\kappa} = 0 = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \kappa \cdot \sin \kappa + \frac{S_0 r}{2} (\kappa \cdot \cos \kappa + \sin \kappa) - C_1 \cdot \sin \kappa.$$

Multipliziert man Gl. (19a) mit $4 \cos \frac{\alpha}{2}$ und Gl. (20a) mit (-1) , so erhält man

$$(19b) \quad 0 = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{S_0 r}{2} \left(2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \alpha \right) - 2 C_1 \cdot \sin \alpha,$$

$$(20b) \quad 0 = - \frac{K \cdot r}{4} \cdot \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{S_0 r}{2} (-\alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha) + C_1 \cdot \sin \alpha,$$

woraus durch Addition folgt:

$$0 = \frac{S_0 r}{2} \left(2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \right) - C_1 \cdot \sin \alpha.$$

Ersetzt man hierin $\cos \alpha$ durch $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, so erhält man:

$$(22) \quad 0 = \frac{S_0 \cdot r}{2} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - C_1 \cdot \sin \alpha.$$

Aus Gl. (20 b) erhält man nach Division mit $\sin \alpha$:

$$(23) \quad 0 = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \alpha + \frac{S_0 r}{2} (1 + \alpha \cdot \cotg \alpha) - C_1.$$

Aus Gl. (21) und Gl. (22) erhält man schließlich:

$$(24) \quad S_0 = \frac{K}{2} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2},$$

sowie

$$(25) \quad C_1 = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \frac{\alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Für die Bedingung unveränderlicher Bogenlänge bilden wir aus Gl. (17) das Integral:

$$(21 a) \quad \int_0^{\alpha} v \cdot d\varphi = 0 = M_0 \cdot \alpha + \frac{K r}{4} \cdot (2 - 2 \cos \alpha - \alpha \cdot \sin \alpha) + S_0 \cdot r \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \alpha \right) + C_1 \sin \alpha.$$

Hierin wird:

$$S_0 r \cdot \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \alpha \right) = \frac{K r}{4} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \alpha \right) \\ = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \alpha \cdot \sin \alpha \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

$$C_1 \cdot \sin \alpha = \frac{K \cdot r}{4} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

$$\frac{K r}{4} (2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) = \frac{K r}{4} \cdot \frac{(2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} \\ = \frac{K r}{4} \cdot \frac{2 - 4 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \alpha \sin \alpha + \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

wonach Gl. (21a)

$$0 = M_0 \alpha + \frac{Kr}{4} \cdot \frac{4 - 4 \cos \alpha - 2 \alpha \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Die Auflösung nach M_0 ergibt schließlich:

$$(25) \quad M_0 = K \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Nummehr wird die Gleichung der elastischen Linie:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^3} \cdot v &= K \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{Kr}{4} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \\ &+ \frac{Kr}{2} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\varphi}{2} \sin \varphi - 1 \right) + \frac{Kr}{4} \cdot \frac{\alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

oder

$$(27) \quad v = \frac{K \cdot r^3}{4 EJ} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha - \varphi) + \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) + (\alpha - \varphi) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi}{1 - \cos \alpha} - \frac{4}{\alpha} \right).$$

Das an einer beliebigen Stelle φ wirkende Biegemoment wird:

$$M_\varphi = \frac{K \cdot r}{2} \cdot \left(\sin \varphi + \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \varphi - \frac{2}{\alpha} \right).$$

Die Resultierende R aus S_0 und $\frac{K}{2}$ hat die Größe

$$R = \sqrt{\frac{K^2}{4} + S_0^2} = \frac{K}{2} \cdot \sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

sie fällt mit der Drucklinie des Kreisbogens zusammen. Setzt man $M_\varphi = R \cdot \xi_\varphi$, so ist ξ_φ der Abstand eines Punktes der neutralen Faser von der Drucklinie; für ξ_φ erhält man aber den Wert:

$$\xi_\varphi = r \cdot \frac{\sin \varphi + \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \varphi - \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}},$$

$$\xi_\alpha = r \cdot \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right) - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right].$$

Dies ist die Gleichung der Kreislinie in bezug auf die durch den Schwerpunkt S des Bogens α gehende kürzeste Sehne. Die Drucklinie geht also durch den Schwerpunkt des Bogens, wie es zufolge der Beziehung $\int_0^\alpha d\beta = 0$ sein muß, und der Kreisbogen entspricht der Mo-

mentenlinie. M_0 ist der negative Größtwert von M_φ . Für $\varphi = \frac{\kappa}{2}$ erhält man das größte positive Moment im Betrage:

$$M_{\frac{\kappa}{2}} = \frac{K \cdot r}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\kappa}{2}} - \frac{2}{\kappa} \right).$$

Wir hatten die Größen $S_0, M_0, M_{\frac{\kappa}{2}}, C_1$ bezüglich zu

$$S_0 = K \cdot \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\kappa}{2} \right), \quad M_0 = K \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{\kappa} \right),$$

$$M_{\frac{\kappa}{2}} = K \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\kappa}{2}} - \frac{1}{\kappa} \right), \quad C_1 = K \cdot r \cdot \left(\frac{\kappa + \sin \kappa}{4 \cdot (1 - \cos \kappa)} \right)$$

ermittelt. Setzt man

$$S_0 = K \cdot a, \quad M_0 = K \cdot r \cdot b,$$

$$M_{\frac{\kappa}{2}} = K \cdot r \cdot c, \quad C_1 = K \cdot r \cdot d,$$

so ergeben sich für die nur von κ abhängigen Zahlen a, b, c, d die in Tabelle 2 zusammengestellten Werte.

Tabelle 2.

n	a	b	c	d
2	0,0000	- 0,3183	0,1817	0,3927
3	0,2885	- 0,1890	0,0999	0,4934
4	0,5000	- 0,1366	0,0705	0,6427
5	0,6882	- 0,1076	0,0548	0,7988
6	0,8660	- 0,0889	0,0451	0,9566
7	1,0382	- 0,0761	0,0382	1,1151
8	1,2071	- 0,0661	0,0334	1,2739
9	1,3738	- 0,0587	0,0295	1,4329
10	1,5389	- 0,0527	0,0264	1,5919

§ 5. Der Fall $n = \infty$ der regelmäßigen Belastung.

Die im § 4 abgeleiteten Gleichungen gelten für jeden Wert $n > 2$. Wächst jedoch die Zahl n über jedes Maß, so wird eine besondere Untersuchung nötig.

Da nämlich $\lim_{(n \rightarrow \infty)} \kappa = \lim_{(n \rightarrow \infty)} \frac{2\pi}{n} = 0$ ist, so wird aus Gleichung (26)

$$M_0 = K \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{\kappa} \right)$$

der Wert von M_0 für $\kappa = 0$ von der Form $(\infty - \infty)$; nach einem bekannten Verfahren der Differentialrechnung wird daher

$$\begin{aligned} \lim_{(\kappa=0)} M_0 &= K \cdot r \cdot \lim_{(\kappa=0)} \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{\kappa} \right) \\ &= K \cdot r \cdot \lim_{(\kappa=0)} \frac{\kappa - 2 \cdot \tg \frac{\kappa}{2}}{2 \cdot \kappa \cdot \tg \frac{\kappa}{2}} \\ &= K \cdot r \cdot \lim_{(\kappa=0)} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\kappa}{2}}}{2 \cdot \tg \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{\cos^2 \frac{\kappa}{2}}} = K \cdot r \cdot \lim_{(\kappa=0)} \frac{\cos^2 \frac{\kappa}{2} - 1}{\kappa + \sin \kappa} \\ &= K \cdot r \cdot \left(\frac{-2 \cdot \sin \frac{\kappa}{2} \cdot \cos \frac{\kappa}{2}}{1 + \cos \kappa} \right)_{(\kappa=0)} = 0. \end{aligned}$$

Es verschwindet daher das Biegemoment an der Stelle $\varphi = 0$ für $n = \infty$; da aber in diesem Falle keine Stelle φ gegenüber der Stelle $\varphi = 0$ ausgezeichnet ist, so verschwindet auch M_φ an jeder Stelle. *Der Ring wird daher biegunsfrei.* Dieses übrigens triviale Ergebnis war nach den auf S. 26 angestellten Überlegungen vorauszusehen, da die Resultierende R der im Punkte A wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt S des Bogens κ geht, dieser aber mit verschwindendem κ mit A selber zusammenfällt.

Da für die in einem Punkte P wirkende Scherkraft T_φ die Beziehung gilt:

$$T_\varphi = \frac{dM_\varphi}{ds} = \frac{dM_\varphi}{r \cdot d\varphi},$$

so verschwindet auch T_φ über den ganzen Ring. Dieser ist also *auch frei von Schubspannungen* und unterliegt nur einer Zugbeanspruchung durch $S_0 = S_\varphi$.

Bezeichnen wir die Kraft K , die für $n = \infty$ selbst verschwindend klein werden muß, mit p , deren Intensität wir in Kilogrammen für die Längeneinheit des Kreisumfanges messen, so folgt S_0 einfach aus der Gleichgewichtsbedingung für eine Ringhälfte

$$S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = p \cdot r.$$

Vergleicht man diesen Wert von S_0 mit dem von Gl. (24), so folgt $K = 2pr \cdot \tg \frac{\kappa}{2}$.

Für $\alpha = 0$ folgt aus Gl. (19b)

$$C_1 = \frac{S_0 \cdot r}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right)$$

oder, da $\lim_{(\alpha=0)} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 0$ ist,

$$C_1 = \frac{S_0 \cdot r}{2} = \frac{p r^2}{2}.$$

Setzt man die Werte für M_0 , K , S_0 und C_1 in Gl. (17) ein und beachtet, daß $\lim_{(\alpha=0)} \varphi = 0$ wird, so folgt:

$$\lim_{(\alpha=\varphi=0)} v = \frac{p r^2}{E J} \cdot \left(-1 + \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi + \cos \varphi \right) = 0,$$

wie es sein muß, da die durch die Zugkraft S_0 entstehende Formänderung des Ringes bei Aufstellung der Gleichung der elastischen Linie vernachlässigt wurde.

Wirken die Kräfte p von außen nach innen, so gelten alle vorstehenden Entwicklungen mit dem einzigen Unterschiede, daß der Ring durch S_0 auf Druck beansprucht wird. Der Ring bleibt kreisrund, jedoch befindet er sich in einem je nach Größe von p stabilen oder labilen Gleichgewichtszustande, der im Abschnitt VI noch eingehender untersucht werden soll.

III. Abschnitt.

Beanspruchung des geschlossenen Ringes durch stetig verteilte Kräfte in der Ringebene.

§ 6. Der um seinen Durchmesser rotierende Ring. (Fig. 4.)

Wir legen die X-Achse des Polarkoordinatensystems so, daß sie mit der Drehachse des Ringes zusammenfällt.

Ist γ das Gewicht der Längeneinheit des Ringumfanges und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, so ist die Fliehkraft dZ eines durch den Winkel ξ bestimmten Ringelementes $r \cdot d\xi$, durch welche der rotierende Ring beansprucht wird, durch den Ausdruck gegeben:

$$dZ = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \sin \xi \cdot r \cdot d\xi.$$

Die im Punkte A wirkende Schnittkraft S_0 ist

$$S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dZ = \frac{\gamma}{g} \cdot r^2 \cdot \omega^2,$$

womit die Gleichung für dZ übergeht in

$$dZ = S_0 \cdot \sin \xi \cdot d\xi$$

Mit Einführung des stereostatisch unbestimmten Momentes M_0 erhält man

$$M_\varphi = M_0 - S_0 \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) + S_0 r \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} (\cos \xi - \cos \varphi) \sin \xi \cdot d\xi,$$

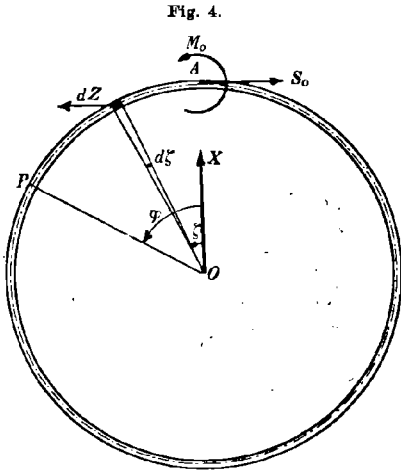


Fig. 4.

woraus sich

$$(28) \quad M_\varphi = M_0 - \frac{S_0 \cdot r}{2} \sin^2 \varphi$$

ergibt.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = \frac{r^2}{EJ} \cdot \left(M_0 - \frac{S_0 r}{2} \cdot \sin^2 \varphi \right)$$

und ihr Integral ist nach Tabelle 1:

$$(29) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot v = M_0 + \frac{S_0 \cdot r}{6} (-1 - \cos^3 \varphi) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Zur Bestimmung von M_0, C_1, C_2 dienen die Gleichungen

$$(30) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 \quad (31) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (32) \quad \int_0^\pi v \cdot d\varphi = 0.$$

Man erhält aus Gl. (29) durch Differentiation

$$\frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r}{3} \sin \varphi \cos \varphi - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi,$$

wonach

$$(30a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 = C_2 \quad (30b) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 = C_1$$

folgt; für M_0 ergibt sich

$$(32a) \quad \int_0^\pi v \cdot d\varphi = 0 = M_0 \cdot \pi + S_0 r \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3\pi}{2} \right),$$

woraus

$$M_0 = \frac{S_0 \cdot r}{4} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^3}{4}.$$

Die Gleichung der elastischen Linie wird jetzt

$$\frac{EJ}{r^2} \cdot v = \frac{S_0 r}{4} - \frac{S_0 r}{6} \cdot (1 + \cos^3 \varphi) = \frac{S_0 r}{12} \cdot (1 - 2 \cos^3 \varphi) \quad \text{oder}$$

$$(33) \quad v = -\frac{\gamma \cdot r^5 \cdot \omega^2}{12 EJg} \cdot \cos^3 \varphi.$$

Das Biegemoment an der Stelle φ ist

$$M_\varphi = \frac{S_0 \cdot r}{4} (1 - 2 \sin^2 \varphi) \quad \text{oder}$$

$$(34) \quad M_\varphi = \frac{\gamma}{4g} \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi.$$

Wie aus Gl. (33) und (34) hervorgeht, ist die Deformation ν für ein und denselben Ring an jeder Stelle φ dem dort herrschenden Biegemomente proportional; *die elastische Linie eines rotierenden Ringes ist also zugleich auch seine Momentenlinie.*

Die Maxima und Minima von ν und M_φ treten auf für $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und ihre Absolutwerte sind gleich groß:

$$|M_{\max}| = \frac{\gamma}{4g} \cdot r^3 \cdot \omega^2,$$

$$|\nu_{\max}| = \frac{\gamma \cdot r^5 \cdot \omega^2}{12g EJ}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ verschwinden M und ν .

§ 7. Der im tiefsten Punkte gestützte Kreisring unter Wirkung seines Eigengewichtes. (Fig. 5.)

Die Beanspruchung und die Formänderung eines Ringes durch seine Schwere zu kennen, ist nicht ohne praktisches Interesse. So spielt z. B. die erstere eine Rolle bei der Verlegung von Wasserleitungsrohren, wie solche bei neueren Wasserkraftanlagen in bedeutenden Abmessungen ausgeführt worden sind, die Kenntnis der Formänderungen dagegen ist von Wert, wo es sich darum handelt, etwa zu entscheiden, ob ein großer Maschinenzylinder auf einer Horizontalbohrmaschine bearbeitet werden kann, ohne daß hierbei die Dichtung durch Kolbenringe in Frage gestellt wird.

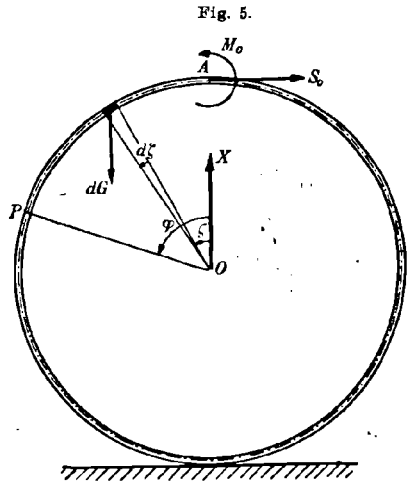
Die X-Achse des Polarkoordinatensystems möge der Lotrichtung entgegengerichtet sein. Ist wieder γ das Gewicht der Längeneinheit des Umfanges, so kommt dem Ringelement $r \cdot d\xi$ das Gewicht $dG = \gamma r d\xi$ zu.

Führt man die im Scheitel A wirkende Schnittkraft mit S_0 und das dort herrschende Moment mit M_0 ein, so wird das Moment an der Stelle φ :

$$M_\varphi = M_0 - S_0 r \cdot (1 - \cos \varphi) - \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} \gamma \cdot r^2 \cdot (\sin \varphi - \sin \xi) \cdot d\xi,$$

oder nach Auswertung des Integrales:

$$(35) \quad M_\varphi = M_0 - S_0 r (1 - \cos \varphi) - \gamma r^2 \cdot (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1).$$



Das Integral von $\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = \frac{M_\varphi \cdot r^2}{EJ}$ bildet man nach Tabelle 1:

$$(36) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot v = M_0 + S_0 r \cdot \left(\frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi - 1 \right) + \gamma \cdot r^2 \cdot \left(1 + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi \right) \\ + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

M_0 , S_0 , C_1 und C_2 bestimmen sich aus den vier Gleichungen:

$$(37) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (38) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=\pi} = 0$$

$$(39) \quad \int_0^\pi v \cdot d\varphi = 0 \qquad (40) \quad (v)_{\varphi=\pi} = 0,$$

von denen Gl. (40) der Stützung im Punkte B Rechnung trägt. Aus Gl. (36) folgt

$$\frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r}{2} (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \gamma r^2 \left(\frac{5}{8} \sin \varphi - \frac{\varphi}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi^2}{4} \sin \varphi \right) \\ - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi,$$

wonach

$$(37a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 = C_2$$

und

$$(38a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=\pi} = 0 = -\frac{\pi}{2} \cdot S_0 r + \frac{\pi}{4} \gamma r^2$$

mit

$$S_0 = \frac{1}{2} \gamma r$$

folgt. Weiter wird

$$(39a) \quad \int_0^\pi v d\varphi = 0 = M_0 \cdot \pi - S_0 r \frac{\pi}{2} + \gamma r^2 \left(\pi - \frac{2\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right),$$

woraus

$$M_0 = \frac{1}{2} \gamma r^2.$$

Führt man die gefundenen Werte in Gl. (36) ein, so erhält man

$$(40a) \quad (v)_{\varphi=\pi} = 0 = \gamma r^2 \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{\pi^2}{4} \right) - C_1,$$

woraus

$$C_1 = \gamma r^2 \cdot \frac{9 - 2\pi^2}{8}.$$

Nun lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$(41) \quad v = \frac{\gamma \cdot r^4}{EJ} \cdot \left(1 + \cos \varphi + \frac{\varphi^2 - \pi^2}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right).$$

Das an der Stelle φ herrschende Biegemoment

$$(42) \quad M_\varphi = \gamma r^2 \left(1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \right)$$

erreicht seinen Maximalwert für

$$\frac{dM_\varphi}{d\varphi} = 0 = -\varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi$$

oder

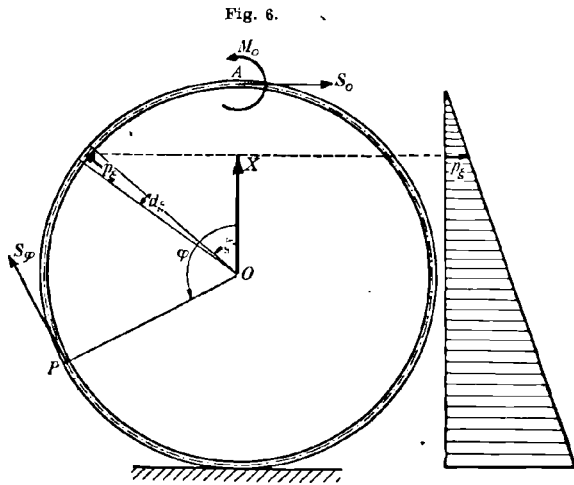
$$\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

was einem Winkel von $105^\circ 13' 45''$ entspricht; der maximale Wert von M_φ wird:

$$M_{\varphi_{\max}} = \gamma r^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}\right) = -0,64\ 075 \gamma r^2.$$

§ 8. Beanspruchung eines Kreisringes durch Flüssigkeitsdruck bei druckfreiem Scheitel und Stützung im tiefsten Punkte.¹⁾ (Fig. 6.)

Diese Untersuchung ergänzt gewissermaßen die vorausgegangene, indem sie zeigt, wie z. B. bei einem Wasserleitungsrohr der nach dem Pascalschen Gesetze mit der Höhe linear veränderliche Druck der füllenden Flüssigkeit die Form und Beanspruchung des Rohres beeinflusst. Einer ähnlichen Beanspruchung unterliegt auch ein unter Wasser untergetauchtes Rohr, dessen Achse horizontal ist und dessen Scheitel den Wasserspiegel berührt; der einzige Unterschied ist der, daß im ersten Falle der radial gerichtete Flüssigkeitsdruck von innen nach außen wirkt, im zweiten Falle von außen nach innen.



Die Achse OX des Polarkoordinatensystems sei dem Lote entgegengerichtet, und es sei γ_w das spezifische Gewicht der füllenden Flüssigkeit. Ist der Druck im Scheitel A Null, so gilt für den Druck dp auf das an der Stelle ξ befindliche Element von der Länge $r \cdot d\xi$ und der achsialen Breite 1:

$$dp = \gamma_w \cdot r \cdot (1 - \cos \xi) \cdot r d\xi.$$

Das von dp an der Stelle φ ausgeübte Moment dM_φ^w wird ^

$$dM_\varphi^w = \gamma_w \cdot r^3 \cdot (1 - \cos \xi) \cdot \sin(\varphi - \xi) \cdot d\xi,$$

1) Vgl. Ph. Forchheimer, „Festigkeit weiter Rohre“, Zeitschrift des österr. Ing. u. Architektenvereins 1904, S. 133 ff.

woraus man durch Integration erhält:

$$M_{\varphi}^w = \gamma_w \cdot r^3 \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi\right).$$

Die im Scheitel A herrschenden Spannungen sind durch die stereostatisch unbestimmte Schnittkraft S_0 und das stereostatisch unbestimmte Moment M_0 zu ersetzen, wonach sich das Moment an der Stelle φ zu

$$(44) \quad M_{\varphi} = M_0 - S_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^3 \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi\right)$$

berechnet. Die Gleichung der elastischen Linie wird dann nach Tabelle 1:

$$(45) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \nu = M_0 - S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) + \gamma_w \cdot r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi\right) \\ + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi,$$

Zur Bestimmung von M_0 , S_0 , C_1 , C_2 dienen die Gleichungen:

$$(46) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (47) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = 0$$

$$(48) \quad \int_0^{\pi} \nu d\varphi = 0 \qquad (49) \quad (\nu)_{\varphi=\pi} = 0.$$

Aus Gl. (45) folgt durch Differentiation:

$$\frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = S_0 \cdot \left(\frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi\right) + \gamma_w \cdot r^3 \left(\frac{\varphi}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi^2}{8} \sin \varphi - \frac{9}{16} \sin \varphi - \frac{5}{8} \varphi \cos \varphi\right) \\ - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi,$$

wonach

$$(46a) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 = C_2,$$

$$(47a) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = 0 = \gamma_w r^3 \frac{3\pi}{8} - S_0 r \cdot \frac{\pi}{2}; \quad S_2 = \frac{3}{4} \gamma_w \cdot r^2.$$

Durch Integration erhält man aus Gl. (45)

$$(48a) \quad \int_0^{\pi} \nu d\varphi = 0 = M_0 \pi + \gamma_w \cdot r^3 \cdot \frac{\pi}{8} - S_0 r \cdot \frac{\pi}{2},$$

wonach

$$M_0 = \frac{1}{4} \gamma_w \cdot r^3.$$

Die Gleichung der elastischen Linie wird jetzt

$$\frac{EJ}{r^3} \cdot \nu = \gamma_w r^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - \frac{\varphi}{4} \sin \varphi\right) + C_1 \cos \varphi,$$

bis auf die Konstante C_1 bestimmt, welche aus

$$(49a) \quad (\nu)_{\varphi=\pi} = 0 = \gamma_w r^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{16}\right) - C_1$$

mit

$$C_1 = \frac{\gamma_w r^3}{2} \cdot \frac{9 - \pi^2}{8}$$

folgt. Nach Einführung dieses Wertes lautet die Gleichung der elastischen Linie:

$$(50) \quad v = \frac{\gamma_w \cdot r^5}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4 + \varphi^2 - \pi^2}{8} \cos \varphi - \frac{\varphi}{4} \sin \varphi \right).$$

Das an der Stelle φ herrschende Biegemoment wird nach Gl. (44):

$$(51) \quad M_\varphi = \frac{\gamma_w r^3}{2} \left(1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \right),$$

sein Maximum tritt ein für $\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$ und hat den Wert

$$M_{\varphi_{\max}} = -0,32038 \gamma_w r^3.$$

Vergleicht man die Formeln für die Deformation, die wir für die Einwirkung des Flüssigkeitsdruckes gefunden haben, mit denen des vorigen Paragraphen, so ergibt sich der vielleicht überraschende Satz:

Wird ein Kreisring vom Radius r einmal durch sein Eigengewicht (γ für die Längeneinheit des Umfanges), ein andermal durch Flüssigkeitsdruck (spez. Gewicht γ_w) beansprucht, so verhalten sich an jeder Stelle die Formänderungen und die Biegemomente wie $\gamma_w \cdot r$ zu 2γ .

Für den Fall des untergetauchten Rohres, dessen Scheitel die Oberfläche berührt, ist in den obigen Formeln γ_w durch $-\gamma_w$ zu ersetzen.

§ 9. Der im tiefsten Punkte gestützte Kreisring unter Wirkung seines Eigengewichtes und des hydrostatischen Druckes bei druckfreiem Scheitel.

Die vorliegende Beanspruchung geht aus den in § 7 und 8 untersuchten durch Kombination hervor.

Wir erhalten mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen für das Biegemoment an der Stelle φ den Ausdruck:

$$(52) \quad M_\varphi = M_0 - S_0 r (1 - \cos \varphi) - \gamma r^2 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1) \\ - \gamma_w r^2 \cdot \left(\cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - 1 \right).$$

Die Gleichung der elastischen Linie lautet:

$$(53) \quad \frac{E \cdot J}{r^3} \cdot v = M_0 - S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi \right) \\ + \gamma_w r^2 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi \right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Für M_0 , S_0 , C_1 , C_2 ergeben sich die Werte:

$$C_2 = 0; \quad S_0 = \frac{1}{2} \gamma r + \frac{3}{4} \gamma_w r^2; \quad M_0 = \frac{1}{2} \gamma r^2 + \frac{1}{4} \gamma_w r^3;$$

$$C_1 = \frac{9 - 2\pi^2}{8} \left(\gamma r^2 + \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \right).$$

Führt man diese Werte in die Gl. (53) ein, so erhält man:

$$(54) \quad \nu = \frac{r^4}{EJ} \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot r \right) \cdot \left(1 + \frac{4 + \varphi^2 - \pi^2}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right).$$

Das an der Stelle φ herrschende Biegemoment

$$(55) \quad M_\varphi = r^2 \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2} \gamma_w r \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right)$$

erreicht sein Maximum für $\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$ mit

$$M_{\varphi_{\max}} = -0,64075 r^2 \left(\gamma + \frac{1}{2} \gamma_w r \right).$$

Wendet man die vorstehenden Formeln auf ein schwimmendes Rohr an, dessen Scheitellkante den Wasserspiegel berührt, so ist zunächst wegen der Umkehrung des Flüssigkeitsdruckes γ_w durch $-\gamma_w$ zu ersetzen. Dadurch wird:

$$S_0 = \frac{r}{2} \cdot \left(\gamma - \frac{3}{2} \gamma_w \cdot r \right)$$

$$M_0 = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2} \gamma_w \cdot r \right)$$

$$\nu = \frac{r^4}{EJ} \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2} \gamma_w r \right) \cdot \left(1 + \frac{4 + \varphi^2 - \pi^2}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right)$$

$$M_\varphi = r^2 \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2} \gamma_w r \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right).$$

Zwischen γ und γ_w besteht hierbei noch eine Beziehung, welche das Gleichgewicht der vertikalen Komponenten der an dem schwimmenden Rohre angreifenden Kräfte ausdrückt:

$$\gamma \cdot \pi r + \int_0^\pi \gamma_w \cdot r \cdot (1 - \cos \xi) \cdot \cos \xi \cdot r \cdot d\xi = 0$$

oder

$$\gamma \cdot \pi r - \gamma_w r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,$$

woraus

$$\gamma = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot r.$$

Führt man diesen Wert von γ in die Gleichungen für S_0 , M_0 , ν , M_φ ein, so erhält man:

$$S_0 = -\gamma \cdot r \quad (\text{Druckbeanspruchung!})$$

$$M_0 = 0$$

$$\nu = 0$$

$$M_\varphi = 0.$$

Das Rohr ist daher in diesem Falle frei von Biegung und von Schub-

beanspruchungen und nur dem Druck S_φ unterworfen, der sich aus der Momentengleichung für den Punkt A bestimmt:

$$(57) \quad \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} \gamma_w r^3 (1 - \cos \xi) \sin \xi d\xi + \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} \gamma r^2 \sin \xi d\xi + S_\varphi \cdot r (1 - \cos \varphi) = 0$$

$$\gamma_w r^3 (1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi) + \gamma r^2 (1 - \cos \varphi) + S_\varphi \cdot r (1 - \cos \varphi) = 0,$$

woraus mit $\gamma_w \cdot r = 2\gamma$

$$(58) \quad \begin{aligned} - S_\varphi (1 - \cos \varphi) &= \gamma r (3 - 3 \cos \varphi - \sin^2 \varphi) \\ - S_\varphi &= \gamma r (2 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Das Maximum von S_φ ist $S_{\varphi_{\max}} = -3\gamma r$ für $\varphi = \pi$.

Mit großer Annäherung gilt alles, was für das getauchte Rohr bewiesen wurde, auch für einen in der Luft schwebenden kreiszylindrischen Körper, dessen Eigengewicht über den ganzen Umfang gleichmäßig verteilt ist (z. B. für ein Luftschiff, wenn von dessen Beanspruchung durch das Gewicht der Gondel abgesehen wird). Zum Beweise genügt es, zu zeigen, daß auch hier der zur Wand normale Druck mit der Höhe linear veränderlich ist.

Sei p der Druck eines Gases in kg/qm, v in cbm/kg sein spezifisches Volumen, T seine absolute Temperatur und R die Gaskonstante, so bestehen für die Drucke in verschiedenen Höhen z die beiden Beziehungen

$$(59) \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{v}$$

und

$$(60) \quad pv = RT,$$

woraus durch Division

$$(61) \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dz}{RT}.$$

Für geringe Höhenunterschiede kann man T als konstant betrachten und erhält das Integral von Gl. (61)

$$\log \text{nat} \frac{p_1}{p_0} = \frac{z_0 - z_1}{RT},$$

wonach sich die Druckänderung nach z als logarithmische Linie ergibt, wenn die Temperatur unveränderlich ist. Steht der Gasraum eines Luftschiffes, das mit reinem Wasserstoff gefüllt sein möge, im tiefsten Punkte z_0 mit der Atmosphäre in Verbindung, so ist dort $p_i = p_a \sim 10000$ kg/qm, wenn wir mit den Indices i und a den inneren und äußeren Druck unterscheiden; die Druckdifferenz ist dort gleich Null. Für eine Höhendifferenz $z_1 - z_0 = 18$ m zwischen dem tiefsten und höchsten Punkt des

Ballons, wie dies beim Luftschiff „Schütte-Lanz“ zutrifft, $R_i = 420,0$ und $R_a = 29,26$ und $T = 273^0$ abs. ergibt sich für den höchsten Punkt z_1 :

$$p_i = 9998,4 \text{ kg/qm}$$

$$p_a = 9977,5 \text{ kg/qm},$$

wonach der innere Überdruck des Ballons sich im höchsten Punkte zu 20,9 kg/qm ergibt. Beachtet man, daß die Drucke p_i und p_a sich um weniger als 0,3% ändern, so kann wegen der Proportionalität, die zwischen den Logarithmen wenig voneinander verschiedener Zahlen besteht, die logarithmische Änderung von p_i und p_a durch eine lineare Änderung dieser Größen ersetzt werden. Demnach folgt auch die Druckdifferenz $\Delta p = p_i - p_a$ dem linearen Gesetze, was zu beweisen war.

Ein wie angegeben belasteter Ballon ist daher biegungsfrei und frei von Schubbeanspruchungen. Er unterliegt nur einer Zugbeanspruchung, die im höchsten Punkte mit

$$S_0 = 3 \gamma r$$

ihren Maximalwert erreicht.

Über die Beanspruchung eines Ballonversteifungsringes, der außerdem noch durch das Gondelgewicht beansprucht wird, vgl. Seite 294 ff.

§ 10. Der im tiefsten Punkte gestützte Kreisring unter Wirkung von Flüssigkeitsdruck bei Überdruck im Scheitel. (Figur 7.)

Der Überdruck der Flüssigkeit im Scheitel des Ringes entspreche dem Drucke einer Flüssigkeitssäule von der Höhe $AC = h$; der Druck variiert darnach zwischen $\gamma_w \cdot h$ und $\gamma_w \cdot (h + 2r)$ linear.

Ist die achsiale Abmessung des Ringes wiederum gleich 1, so ist der Druck auf das durch ξ bestimmte Flächenelement von der Länge $r \cdot d\xi$ durch

$$dp = \gamma_w \cdot (h + r \cdot [1 - \cos \xi]) \cdot r \cdot d\xi$$

gegeben; sein an der Stelle φ ausgeübtes Moment wird

$$dM_\varphi^w = \gamma_w \cdot r^2 \cdot (h + r [1 - \cos \varphi]) \cdot \sin(\varphi - \xi) \cdot d\xi,$$

woraus durch Integration folgt:

$$M_\varphi^w = \gamma_w r^2 h (1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right).$$

Nach Einführung der in A wirkenden stereostatisch Unbestimmten S_0 und M_0 wird das Moment an der Stelle φ :

$$(62) \quad M_\varphi = M_0 + (\gamma_w r^2 h - S_0 r)(1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right).$$

Man findet nach Tabelle 1 als Gleichung der elastischen Linie:

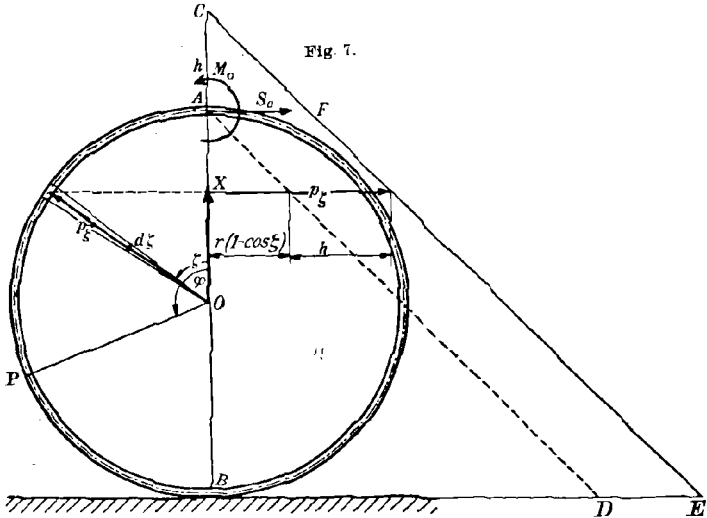
$$(63) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot v = M_0 + (\gamma_w \cdot h r^2 - S_0 r) \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) + \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Aus den Gleichungen

$$(64) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0, \quad (65) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = 0,$$

$$(66) \quad \int_0^\pi r d\varphi = 0, \quad (67) \quad (v)_{\varphi=\pi} = 0$$

ergeben sich die Unbekannten M_0, S_0, C_1, C_2 .



Man erhält aus Gl. (63) durch Differentiation:

$$\frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \left(\frac{S_0 r}{2} - \frac{\gamma_w r^2 h}{2}\right) (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - \gamma_w r^3 \cdot \left(\frac{\varphi^2}{8} \sin \varphi + \frac{9}{16} \sin \varphi + \frac{3}{8} \varphi \cos \varphi\right) - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi,$$

wonach

$$(64a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 = C_2,$$

$$(65a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = 0 = \left(\frac{S_0 r}{2} - \frac{\gamma_w r^2 h}{2}\right) \cdot \pi + \gamma_w r^3 \cdot \frac{3}{8} \pi,$$

woraus

$$S_0 = \gamma_w r \cdot \left(h + \frac{3}{4} r\right).$$

Durch Integration erhält man aus Gl. (63):

$$(66a) \quad \int_0^\pi \nu \cdot d\varphi = 0 = M_0 \pi + (\gamma_w h r^2 - S_0 r) \cdot \frac{\pi}{2} + \gamma_w r^3 \cdot \frac{\pi}{8},$$

woraus

$$M_0 = \frac{1}{4} \gamma_w r^3$$

folgt.

Nach Einführung von C_2 , S_0 , M_0 in Gl. (63) ergibt sich:

$$(67a) \quad (\nu)_{\varphi=\pi} = 0 = M_0 - S_0 r + \gamma_w r^2 h + \gamma_w r^3 \left(1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{16}\right) - C_1,$$

woraus

$$C_1 = \frac{\gamma_w \cdot r^3}{2} \cdot \frac{9 - 2\pi^2}{8}.$$

Die Gleichung der elastischen Linie lautet jetzt:

$$(68) \quad \nu = \frac{\gamma_w \cdot r^5}{2 E J} \left(1 + \cos \varphi \cdot \frac{4 + \varphi^2 - \pi^2}{4} - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right),$$

und das Biegemoment an der Stelle φ wird:

$$(69) \quad M_\varphi = \frac{\gamma_w \cdot r^3}{2} \left(1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi\right).$$

Es mag zunächst auffallen, daß die Formeln für ν und M_φ sichtlich von der Größe des Überdruckes $h \cdot \gamma_w$, der im Scheitel A herrscht, gar nicht abhängen und mit den in § 8 für den Fall des druckfreien Scheitels abgeleiteten Werten ν und M_φ übereinstimmen. Eine einfache Überlegung jedoch zeigt, daß diese Erscheinung ganz natürlich ist.

Zieht man nämlich (Fig. 7) in dem Druckdiagramm CEB die Hilfslinie $AD \parallel CE$ durch den Scheitel A , so zerfällt man damit das Druckdiagramm in zwei Teile: das Parallelogramm $AFED$, welches einer über den ganzen Umfang konstanten Pressung $h \cdot \gamma_w$ entspricht, und das Dreieck ABD , durch welches die Druckverteilung nach § 8 dargestellt wird. Der Beanspruchung durch den konstanten Druck $h \cdot \gamma_w$ entspricht aber nach § 5 $\nu = 0$ und $M_\varphi = 0$, so daß auch bei Überdruck im Scheitel eine Vergrößerung der Deformation und der Biegebeanspruchung durch den Überdruck $h \cdot \gamma_w$ nicht erwartet werden kann. Hingegen wird die Schnittkraft S_0 im Scheitel und an jeder anderen Stelle durch eben jenen Betrag $h \cdot \gamma_w \cdot r$ vermehrt, der als Schnittkraft im Ring auftreten würde, wenn er allein durch den konstanten Druck $h \cdot \gamma_w$ beansprucht wäre.

Wird die Druckhöhe h sehr groß gegenüber dem Ringdurchmesser $2r$, so gewinnt die Zugbeanspruchung des Ringes an Bedeutung und die Biegebeanspruchung tritt hinter der ersteren zurück, worin die Gepflogenheit der Praxis, z. B. Dampfkessel ausschließlich auf Zug zu berechnen, ihre Rechtfertigung findet.

§ II. Beanspruchung eines bis zu halber Höhe in Erde gebetteten Kreisringes durch hydrostatischen Druck bei druckfreiem Scheitel.¹⁾
(Figur 8.)

Bei der vorliegenden Beanspruchung wird es erforderlich, über die Richtung und Größe der vom Erdreich an irgend einer Stelle auf den Ring übertragenen Reaktion Annahmen zu machen. Die von Ph. Forchheimer gemachten Annahmen haben, abgesehen davon, daß sie sich von der Wirklichkeit wohl nur wenig entfernen, den Vorteil, die Rechnung sehr einfach zu gestalten.

Legt man die X-Achse des Polarkoordinatensystems in die Richtung des Lotes, so wirkt der Erddruck auf den Bogen $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$; sein Betrag an der Stelle ξ sei p_e für die Längeneinheit des

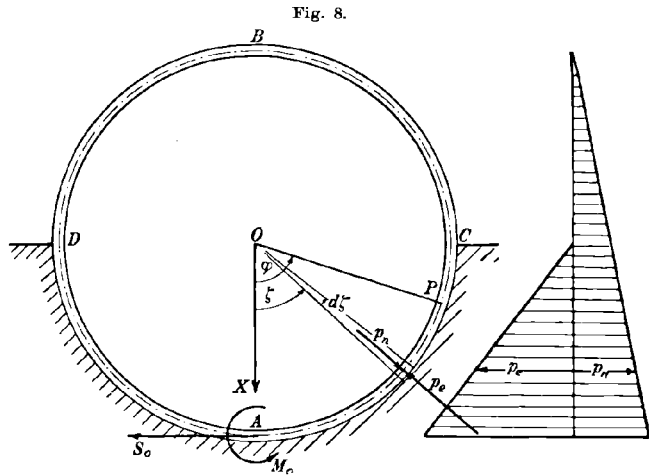


Fig. 8.

Bogenumfanges. Die Richtung von p_e kann von der Wandnormalen im Punkte (r/ξ) nur um einen Betrag abweichen, der höchstens gleich dem Reibungswinkel φ ist; bezüglich seiner Größe läßt sich aussagen, daß p_e für $\xi = 0$ ein Maximum haben muß, während er für $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ verschwindet.

Man wird der tatsächlich bestehenden Verteilung des Erddruckes nahe kommen, wenn man unter Vernachlässigung der Reibung annimmt, daß p_e überall normal zur Wand wirke und dem Gesetze $p_e = c \cdot \cos \xi$ innerhalb der Grenzen $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ gehorche. Hierbei bedeutet c , der im Punkte $\xi = 0$ herrschende Erddruck, eine Konstante, deren Größe aus der Gleichgewichtsbedingung für die vertikalen Kräfte folgt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos^2 \xi \cdot d\xi = \gamma_w \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\frac{\pi}{2} cr = \gamma_w \pi r^2$$

$$c = 2 \gamma_w r.$$

1) Vgl. Ph. Forchheimer a. a. O.

Es wird demnach der Erddruck an der Stelle ξ durch

$$(70) \quad p_e = 2 \gamma_w r \cos \xi$$

gegeben. An derselben Stelle ist aber der Druck p_w des Wassers auf die Innenwand

$$(71) \quad p_w = \gamma_w r (1 + \cos \xi),$$

so daß sich der resultierende (innere) Überdruck p_ξ zu

$$p_\xi = p_w - p_e = \gamma_w r (1 - \cos \xi)$$

berechnet. Nun ist aber der innere Überdruck $p_{(\pi-\zeta)}$, den die Wasserfüllung an der senkrecht über dem Punkte (r/ξ) gelegenen Stelle ausübt, ebenso groß wie p_ξ , woraus sich ergibt, daß der Ring einer Beanspruchung unterliegt, die sowohl hinsichtlich des vertikalen als auch des horizontalen Durchmessers symmetrisch ist. Hieraus folgt, daß von den Größen M_0 und S_0 , durch welche sich die Spannungen im Punkte A ersetzen lassen, nur das Moment M_0 stereostatisch unbestimmt ist; S_0 folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen Kräfte:

$$(72) \quad S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma_w \cdot r^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \gamma_w r^2.$$

Hiernach wird das Moment M_φ an der Stelle φ :

$$M_\varphi = M_0 - \frac{1}{2} \gamma_w r^3 (1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^3 \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} (1 - \cos \xi) \cdot \sin (\varphi - \xi) \cdot d\xi$$

$$M_\varphi = M_0 - \frac{1}{2} \gamma_w r^3 (1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right),$$

oder

$$(73) \quad M_\varphi = M_0 + \frac{1}{2} \gamma_w r^3 (1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi).$$

Man erhält nach Tabelle 1 die Gleichung der elastischen Linie:

$$(74) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \nu = M_0 + \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi \right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Zur Bestimmung von M_0 , C_1 , C_2 dienen die drei Gleichungen

$$(75) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0, \quad (76) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (77) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \nu d\varphi = 0.$$

Aus (74) erhält man durch Differentiation:

$$\frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(-\frac{\varphi}{4} \cos \varphi - \frac{5}{8} \sin \varphi - \frac{\varphi^3}{4} \sin \varphi \right) - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi,$$

wonach

$$(75a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 = C_2 \quad \text{und}$$

$$(76) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 = \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(-\frac{5}{8} - \frac{\pi^3}{16} \right) - C_1$$

mit

$$C_1 = -\frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{\pi^3}{16} \right)$$

folgt.

Durch Einführung von C_1 und C_2 in Gl. (74) und Integration bestimmt sich M_0 aus

$$(77a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} v d\varphi = 0 = M_0 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{\pi^3}{16} \right)$$

zu

$$M_0 = \gamma_w \cdot r^3 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right).$$

Die Gleichung der elastischen Linie wird jetzt:

$$(78) \quad v = \frac{\gamma_w \cdot r^5}{2 EJ} \cdot \left(\frac{4}{\pi} + \frac{4\varphi^2 - \pi^2 - 12}{16} \cdot \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi \right)$$

und das Biegemoment an der Stelle φ :

$$(79) \quad M_\varphi = \frac{1}{2} \gamma_w r^3 \cdot \left(\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right).$$

Für $\varphi \cos \varphi = 0$ hat M_φ Maxima und Minima; diese Stellen sind im ersten Quadranten:

$$\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad M_\varphi = 0,13662 \gamma_w \cdot r^3$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad M_\varphi = -0,14878 \gamma_w \cdot r^3$$

und entsprechend wegen der Symmetrie in den anderen Quadranten.

§ 12. Beanspruchung eines bis zu halber Höhe in Erde gebetteten Kreisringes durch hydrostatischen Druck bei Überdruck im Scheitel.

Der Überdruck des Wassers im Scheitel entspreche dem Drucke $\gamma_w \cdot h$ einer Wassersäule von der Höhe h . Machen wir über die Verteilung des Erddruckes wieder dieselben Annahmen wie in § 11, so ist

wieder $p_e = c \cdot \cos \xi$ zu setzen; die Konstante c wird aus der Gleichgewichtsbedingung für die vertikalen Kräfte:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p_e \cdot \cos \xi \cdot r d\xi = \int_0^{2\pi} \gamma_w (h + r \cdot [1 - \cos \xi] \cdot -\cos \xi \cdot r d\xi)$$

oder

$$\frac{\pi}{2} cr = \gamma_w \cdot r^2 \cdot \pi$$

zu

$$c = 2 \gamma_w \cdot r$$

erhalten.

An der Stelle ξ wird jetzt der Erddruck:

$$p_e = 2 \gamma_w r \cdot \cos \xi,$$

und der Druck des Wassers:

$$p_w = \gamma_w (h + r [1 + \cos \xi]),$$

woraus sich der (innere) Überdruck p_ξ an dieser Stelle zu

$$p_\xi = \gamma_w (h + r [1 - \cos \xi])$$

berechnet.

An der Stelle $(\pi - \xi)$ wirkt ausschließlich Wasserdruck, wenn $\xi \leq \frac{\pi}{2}$ ist; seine Intensität ist durch

$$p_{(\pi-\xi)} = \gamma_w \cdot (h + r [1 + \cos (\pi - \xi)])$$

oder

$$p_{(\pi-\xi)} = \gamma_w (h + r [1 - \cos \xi])$$

gegeben; es ist also auch bei Überdruck im Scheitel der Kreisring doppelsymmetrisch beansprucht.

Die Schnittkraft S_0 folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen Kräfte:

$$S_0 = \gamma_w r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h + r [1 - \cos \xi]) \sin \xi d\xi$$

$$S_0 = \gamma_w \cdot r \left(h + \frac{1}{2} r \right).$$

Beachten wir nun, daß der Überdruck $\gamma_w \cdot (h + r [1 - \cos \xi])$ aus dem konstanten Betrag $\gamma_w h$ und dem veränderlichen Betrage $\gamma_w \cdot r (1 - \cos \xi)$, sich zusammensetzt, dessen Einfluß in § 11 untersucht wurde. Da der konstante Druck $\gamma_w h$ weder zur Formänderung noch zur Biegebungsbeanspruchung eines Kreisringes beiträgt, so wird auch hier:

$$(80) \quad v = \frac{\gamma_w \cdot r^5}{2 E J} \left(\frac{4}{\pi} + \frac{4\varphi^2 - \pi^2 - 12}{16} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi \right)$$

die Gleichung der elastischen Linie und

$$(81) \quad M_\varphi = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot r^3 \left(\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right)$$

das Biegemoment mit dem Maximalwert

$$M_\varphi = -0,14878 \gamma_w r^3 \text{ bei } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

IV. Abschnitt.

Der kreisförmige Bogenträger.

Die im folgenden Abschnitt durchgeführten Berechnungen eines kreisförmigen Bogenträgers sind allgemein behandelt für einen Bogen vom Zentriwinkel 2α ; eine Folge dieser Verallgemeinerung ist, daß die technisch interessierenden stereostatisch unbestimmten Größen, sowie die in die Gleichung der elastischen Linie eingehenden Integrationskonstanten sich als Funktionen von α ergeben. Nur in einigen wenigen Fällen waren diese Funktionen so beschaffen, daß eine explizite Berechnung der Unbekannten für die praktischen Anwendungen zweckmäßiger zu sein schien, als die Lösung des Systems der linearen Bestimmungsgleichungen für bestimmte praktisch vorgegebene Werte von α .

Die X-Achse des Polarkoordinatensystems, dessen Ursprung der Mittelpunkt des Kreises ist, wurde hier durchgängig in die Symmetrieachse des Bogens gelegt.

§ 13. Der Bogenträger unter Wirkung einer im Scheitel angreifenden Einzelkraft K . (Fig. 9.)

Führt man als Ersatz für die im Scheitel A herrschenden Spannungen die stereostatisch unbestimmte Druckkraft S_0 und das stereostatisch unbestimmte Moment M_0 ein, so erhält man für das Moment M_φ an beliebiger Stelle:

$$M_\varphi = M_0 + S_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{Kr}{2} \sin \varphi,$$

wozu nach Tabelle 1 die elastische Linie:

$$(82) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot v = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \frac{Kr}{4} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

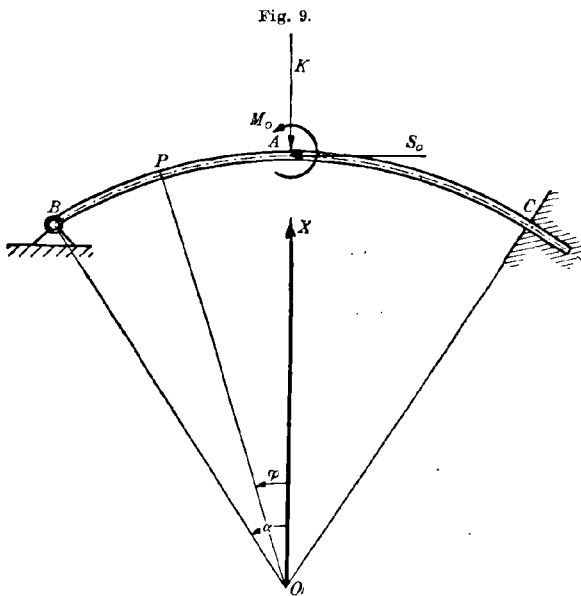
gehört. Aus Gl. (82) folgt durch Differentiation:

$$(83) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \left(\frac{dv}{d\varphi} \right) = -S_0 r \left(\frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) - \frac{Kr}{4} \cdot \varphi \sin \varphi - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und durch Integration:

$$(84) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\alpha v d\varphi = M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) - \frac{Kr}{4} (2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha).$$

Wir unterscheiden nun hier wie auch in den folgenden Untersuchungen zwei verschiedene Befestigungen des Bogenträgers, die „gelenkige“, worunter schlechthin eine Befestigung beider Enden mit idealen Gelenken verstanden werde, welche einer Drehung des Bogens um den



Gelenkbolzen einen verschwindend kleinen Widerstand bieten, und die „tangentreue“, welche eine Drehung des Bogenendes an der Befestigungsstelle überhaupt ausschließt.

a) Gelenk-Befestigung.

M_0, S_0, C_1, C_2 sind durch die Bedingungen bestimmt:

$$(85) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$$

$$(86) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$(87) \quad \int_0^{\alpha} v d\varphi = 0$$

$$(88) \quad M_{\alpha} = 0.$$

Daher lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$(85a) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 = C_2$$

$$(86a) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0 = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) - \frac{Kr}{4} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + C_1 \cos \alpha$$

$$(87a) \quad \int_0^{\alpha} v d\varphi = 0 = M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) - \frac{Kr}{4} (2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + C_1 \sin \alpha$$

$$(88a) \quad M_{\alpha} = 0 = M_0 + S_0 r (1 - \cos \alpha) - \frac{Kr}{2} \sin \alpha.$$

Nach Elimination von M_0 aus Gl. (86a) und (87a) vermöge Gl. (88a) erhält man für die Unbekannten die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \frac{Kr}{4} (\alpha + \operatorname{tg} \alpha) + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) + C_1 = 0 \\ \frac{Kr}{2} \left(\frac{3}{2} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}\right) + S_0 r \left(\frac{3}{2} \alpha \operatorname{cotg} \alpha - \frac{1}{2}\right) + C_1 = 0 \\ M_0 = \frac{Kr}{2} \sin \alpha - S_0 r (1 - \cos \alpha). \end{cases}$$

b) Tangententreue Befestigung.

Die Unbekannten M_0, S_0, C_1, C_2 bestimmen sich wie zuvor, nur tritt an Stelle der Bedingung $M_\alpha = 0$ die Bedingung $\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\alpha} = 0$. Demnach lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) - \frac{K r}{4} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) - \frac{K r}{2} \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ \frac{S_0 \cdot r}{2} (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) + \frac{K r}{4} \alpha \cdot \sin \alpha - C_1 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

§ 14. Der Kreisbogen unter Wirkung eines gleichförmig verteilten Normaldruckes. (Fig. 10.)

Es sei p der konstante Normaldruck auf die Längeneinheit des Umfanges bezogen. Dann ist das Biegemoment an der Stelle φ , welches von den Außendrücken $p \cdot r \cdot d\xi$ ausgeübt wird:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= -p \cdot r^2 \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} \sin(\varphi - \xi) \cdot d\xi \\ &= -p r^2 (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Führt man als Ersatz der Spannungen im Scheitel A die stereostatisch unbestimmten Größen M_0 und S_0 ein, so wird das Moment M_φ :

$$\begin{aligned} M_\varphi &= M_0 + S_0 r (1 - \cos \varphi) \\ &\quad - p r^2 (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$(89) \quad M_\varphi = M_0 + (S_0 r - p r^2) (1 - \cos \varphi).$$

Nach Tabelle 1 lautet demnach die Gleichung der elastischen Linie:

$$(90) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot v = M_0 + (S_0 r - p r^2) \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi,$$

woraus durch Differentiation

$$(91) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r - p r^2}{2} \cdot (-\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und durch Integration

$$(92) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\alpha v d\varphi = M_0 \alpha + (S_0 r - p r^2) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha)$$

sich ergibt.

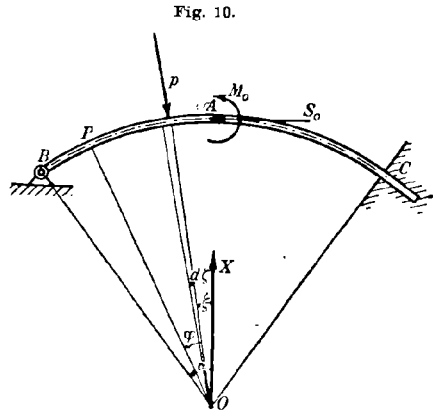


Fig. 10.

a) Gelenk-Befestigung.

Die Unbekannten unterliegen den vier Bedingungen

$$(93) \quad M_\alpha = 0 \qquad (94) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$$

$$(95) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0 \qquad (96) \quad \int_0^\alpha v d\varphi = 0$$

oder

$$(93a) \quad M_0 = (pr^2 - S_0r)(1 - \cos \alpha)$$

$$(94a) \quad C_2 = 0$$

$$(95a) \quad M_0 + (S_0r - pr^2)\left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0$$

$$(96a) \quad M_0\alpha + (S_0r - pr^2)\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0.$$

Eliminiert man M_0 durch Gl. (93a) aus den Gl. (95a) und (96a), so folgt

$$(95b) \quad (S_0r - pr^2)\left(1 - \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) + C_1 = 0$$

$$(96b) \quad (S_0r - pr^2)\left(\frac{3}{2} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha - \frac{1}{2}\right) + C_1 = 0,$$

woraus

$$\begin{array}{ll} S_0 = pr & M_0 = 0 \\ C_1 = 0 & M_\varphi = 0 \end{array}$$

und als Gleichung der elastischen Linie

$$v = 0$$

folgt.

b) Tangententreue Befestigung.

Hierfür bleiben die Bedingungen (94) bis (96) erhalten, während die Bedingung (93) zu ersetzen ist durch

$$(97) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Die vier Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten M_0, S_0, C_1, C_2 lauten daher:

$$(94a) \quad C_2 = 0$$

$$(95a) \quad M_0 + (S_0r - pr^2)\left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0$$

$$(96a) \quad M_0\alpha + (S_0r - pr^2)\left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0.$$

$$(97a) \quad \frac{S_0r - pr^2}{2} (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + C_1 \sin \alpha = 0.$$

Aus (96a) und (97a) folgt durch Subtraktion:

$$M_0 = (S_0 r - p r^2) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1 \right).$$

Mit diesem Werte gehen die Gl. (95a) und (96a) über in

$$(S_0 r - p r^2) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right) + C_1 \cos \alpha = 0$$

$$(S_0 r - p r^2) \cdot \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) + C_1 \sin \alpha = 0,$$

woraus wiederum

$$S_0 = p r \qquad M_0 = 0$$

$$C_1 = 0 \qquad M_\varphi = 0$$

und als Gleichung der elastischen Linie $v = 0$ folgt.

Der Kreisbogenträger ist demnach bei gelenkiger wie bei tangentialtreuer Befestigung der Enden *biegungsfrei* und frei von *Schubbeanspruchungen*, wenn er durch gleichförmig verteilten Normaldruck beansprucht wird; er unterliegt nur der vom Zentriwinkel 2α ganz unabhängigen und über den ganzen Umfang konstanten, tangential wirkenden Kraft $S_\varphi = p \cdot r$.

Für den besonderen Fall, wo $2\alpha = 2\pi$ wird, d. h. für den Kreisring, waren diese Ergebnisse bereits in § 5 bewiesen worden.

Es ist jedoch auch hier zu bemerken, daß diese Beanspruchung, bei welcher der Bogen keine Deformation erleidet, nicht unter allen Umständen auch einem stabilen Gleichgewichtszustande entspricht, worauf im VI. Abschnitt noch näher eingegangen werden soll.

§ 15. Der Kreisbogen unter Wirkung seines Eigengewichtes. (Fig. 11.)

Bezeichnet man mit γ das Gewicht der Längeneinheit des Umfanges, so ist die Belastung des Elementes $r \cdot d\xi$ mit $k = \gamma r d\xi$ gegeben. Ihr Moment an der Stelle φ ist:

$$M_k = -\gamma r^2 \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} (\sin \varphi - \sin \xi) d\xi$$

$$= -\gamma r^2 \cdot (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1).$$

Mit Einführung der stereostatisch unbestimmten Größen M_0 und S_0 als Ersatz der Spannungen im Scheitel A wird das Biegemoment M_φ :

$$(98) \quad M_\varphi = M_0 + S_0 r \cdot (1 - \cos \varphi) - \gamma r^2 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1),$$

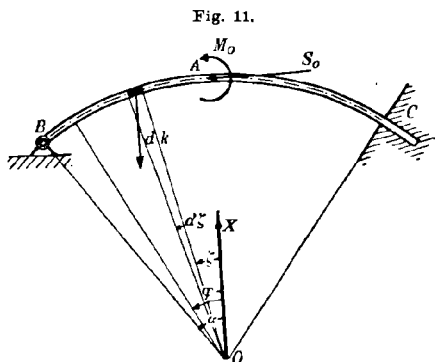


Fig. 11.

wozu nach Tabelle 1 die elastische Linie durch

$$(99) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot v = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

gegeben ist. Aus Gl. (99) folgt durch Differentiation

$$(100) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r}{2} (-\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + \gamma r^2 \cdot \left(-\frac{\varphi^2}{4} \sin \varphi - \frac{5}{8} \sin \varphi - \frac{\varphi}{4} \cos \varphi\right) - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und durch Integration:

$$(101) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot \int_0^\alpha v d\varphi = M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) + \gamma r^2 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha).$$

a) Gelenk-Befestigung.

Die Unbekannten M_0 , S_0 , C_1 , C_2 unterliegen den vier Bedingungen:

$$(102) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (103) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$(104) \quad \int_0^\alpha v d\varphi = 0 \qquad (105) \quad M_\alpha = 0$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} (102a) \quad C_2 = 0 \\ (103a) \quad M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha - \frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (104a) \quad M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (105a) \quad M_0 + S_0 r (1 - \cos \alpha) - \gamma r^2 (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1) = 0. \end{array} \right.$$

b) Tangententreue Befestigung.

Die Bedingung Gl. (105) ist hier zu ersetzen durch

$$(106) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\alpha} = 0,$$

so daß die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$\left\{ \begin{array}{l} (102b) \quad C_2 = 0 \\ (103a) \quad M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha - \frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (104a) \quad M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \cos \alpha\right) + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (106a) \quad \frac{S_0 r}{2} (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + \gamma r^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha + \frac{5}{8} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha\right) - C_1 \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Für $\alpha = \pi$ ergeben diese Gleichungen die aus § 7 bekannten Werte für M_0 , S_0 und C_1 , wie es sein muß.

§ 16. Der Kreisbogen mit Übermauerung.

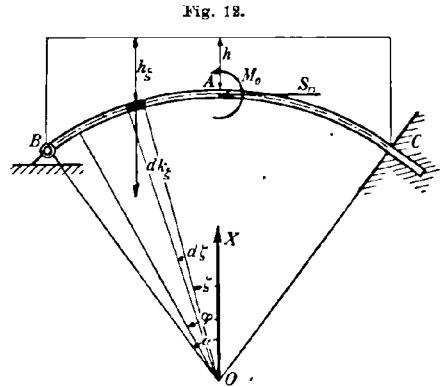
Unter dieser Bezeichnung sei die Belastung des Kreisbogens durch eine nach Figur 12 über den Bogen gelagerte Schicht verstanden, deren obere Begrenzungsebene horizontal ist und vom Scheitel des Bogens den Abstand h hat. Ist γ das Gewicht der Raumeinheit dieser Schicht, so ist für einen Bogen von der achsialen Breite 1 der lotrechte Druck über dem Elemente $r \cdot d\xi$ durch

$$\gamma \cdot r \cdot (h + r[1 - \cos \xi]) d\xi$$

gegeben, und sein Moment an der Stelle φ durch

$$M_\gamma = -\gamma r^2 \cdot \int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} (h + r[1 - \cos \xi]) \cdot (\sin \varphi - \sin \xi) d\xi$$

$$M_\gamma = -\gamma r^2 \cdot (h + r)(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1) + \frac{\gamma r^3}{2} \sin^2 \varphi.$$



Führt man noch die stereostatisch unbestimmten Größen M_0 und S_0 als Ersatz der Spannungen im Scheitel A ein, so wird

$$(107) M_\varphi = M_0 + S_0 r(1 - \cos \varphi) - \gamma r^2 (h + r)(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1) + \frac{\gamma r^3}{2} \sin^2 \varphi.$$

Hierzu gehört nach Tabelle 1 die Gleichung der elastischen Linie:

$$(108) \frac{EJ}{r^3} \cdot v = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) + \gamma r^2 (r + h) \left(1 + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi\right) + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Durch Differentiation folgt aus Gl. (108):

$$(109) \frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r}{2} (-\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \gamma r^2 (r + h) \left(-\frac{\varphi^2}{4} \sin \varphi - \frac{\varphi}{4} \cos \varphi - \frac{5}{8} \sin \varphi\right) - \frac{\gamma r^3}{6} \sin 2\varphi - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und durch Integration:

$$(110) \frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\alpha v d\varphi = M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{8} \sin 2\alpha\right) + \gamma r^2 (r + h) \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha).$$

a) Gelenkige Befestigung.

M_0, S_0, C_1, C_2 sind den vier Bedingungen unterworfen:

$$(111) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (112) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$(113) \quad \int_0^\alpha v d\varphi = 0 \qquad (114) \quad M_\alpha = 0$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} (111a) \quad C_2 = 0 \\ (112a) \quad M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 (r+h) \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha - \frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{3} \cos 2\alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (113a) \quad M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 (r+h) \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{3} \sin 2\alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (114a) \quad M_0 + S_0 r (1 - \cos \alpha) - \gamma r^2 (r+h) (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1) + \frac{\gamma r^3}{2} \sin^2 \alpha = 0. \end{array} \right.$$

b) Tangententreue Befestigung.

Hierfür gelten ebenfalls die Bedingungen (111a) bis (113a), während an die Stelle der Gleichung (114a) die Bedingung

$$(115) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\alpha} = 0$$

tritt. Demgemäß bestimmen sich die vier Unbekannten aus den Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (111a) \quad C_2 = 0 \\ (112a) \quad M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 (r+h) \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha - \frac{1}{8} \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{3} \cos 2\alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (113a) \quad M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) + \gamma r^2 (r+h) \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha - \frac{11}{8} \sin \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos \alpha\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\gamma r^3}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{3} \sin 2\alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (115a) \quad \frac{S_0 r}{2} (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + \gamma r^2 (r+h) \left(\frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha + \frac{5}{8} \sin \alpha\right) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\gamma r^3}{6} \sin 2\alpha + C_1 \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

§ 17. Der Kreisbogen unter Wirkung einer nach der Kosinusfunktion veränderlichen Belastung.

Die hier untersuchte Beanspruchung kann etwa zur Berechnung kreisbogenförmiger Dachbinder auf Schneelast herangezogen werden. Wir setzen das Belastungsgesetz in der Form an:

$$p_{\zeta} = p_0 \cdot (\cos \zeta - \cos \alpha).$$

Hierin bedeutet p_0 den im Scheitel A (Fig. 13) herrschenden Druck pro Flächeneinheit, p_{ζ} dieselbe Größe für die Stelle ζ . Die so bestimmte Funktion p_{ζ} hat die Eigenschaften:

1. Symmetrie der Belastung in bezug auf die X -Achse.
2. Stetige Abnahme von p_{ζ} von dem Größtwerte p_0 im Scheitel A bis zu den Nullstellen in den Kämpfern $B(+\alpha)$ und $C(-\alpha)$.

Betrachtet man einen Bogen von der achsialen Länge 1, so ist die an dem Elemente $r \cdot d\zeta$ wirkende Kraft:

$$p_{\zeta} \cdot r \cdot d\zeta = p_0 (\cos \zeta - \cos \alpha) \cdot r \cdot d\zeta,$$

und das durch diese Belastung an der Stelle φ ausgeübte Biegemoment:

$$M_{\varphi} = -p_0 r^2 \int_{\zeta=0}^{\zeta=\varphi} (\cos \zeta - \cos \alpha) (\sin \varphi - \sin \zeta) d\zeta$$

$$M_{\varphi} = -p_0 r^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \alpha [1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi] \right).$$

Nach Einführung von S_0 und M_0 als Ersatz für die Scheitelspannungen wird

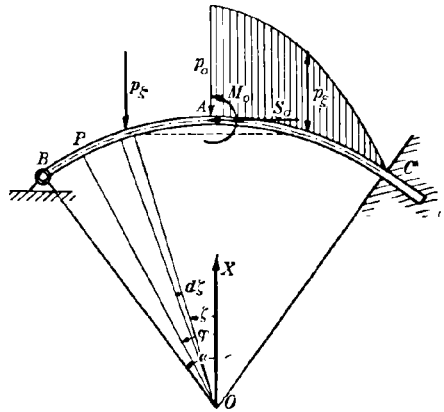
$$(116) \quad M_{\varphi} = M_0 + S_0 r (1 - \cos \varphi) - p_0 r^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \alpha [1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi] \right)$$

das Moment an beliebiger Stelle φ .

Man findet nach Tabelle 1 die Gleichung der elastischen Linie zu

$$(117) \quad \frac{EJ}{r^2} \cdot \nu = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - p_0 r^2 \left\{ \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right. \\ \left. + \cos \alpha \left[1 - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cos \varphi \right] \right\} \\ + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi.$$

Fig. 13.



Hieraus leitet man her durch Differentiation:

$$(118) \frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{S_0 r}{2} (-\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + p_0 r^2 \left\{ \frac{1}{6} \sin 2\varphi + \cos \alpha \left[\frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{5}{8} \sin \varphi \right] \right\} - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und durch Integration

$$(119) \frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\alpha \nu d\varphi = M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) - p_0 r^2 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{31}{24} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos^2 \alpha + \alpha \cos \alpha \right) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha).$$

a) Gelenk-Befestigung.

M_0, S_0, C_1, C_2 bestimmen sich aus den vier Bedingungen:

$$(120) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (121) \quad \nu_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$(122) \quad \int_0^\alpha \nu d\varphi = 0 \qquad (123) \quad M_\alpha = 0$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} (120 \text{ a}) \qquad \qquad \qquad C_2 = 0 \\ (121 \text{ a}) \quad M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right) - p_0 r^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \alpha - \frac{1}{6} \cos 2\alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \cos^2 \alpha \right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (122 \text{ a}) \quad M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) - p_0 r^2 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{31}{24} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos^2 \alpha + \alpha \cos \alpha \right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (123 \text{ a}) \quad M_0 + S_0 r (1 - \cos \alpha) - p_0 r^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \cos \alpha - \cos^2 \alpha - \alpha \sin \alpha \cos \alpha \right) = 0. \end{array} \right.$$

b) Tangententreue Befestigung.

Hier tritt an die Stelle der Bedingung (123) die Gleichung

$$(124) \quad \left(\frac{d\nu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} = 0,$$

so daß die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned}
 (120a) \quad & C_2 = 0 \\
 (121a) \quad & M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) \\
 & - p_0 r^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \alpha - \frac{1}{6} \cos 2\alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} \alpha \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \cos^2 \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\
 (122a) \quad & M_0 \alpha + S_0 r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) \\
 & - p_0 r^2 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{31}{24} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha^3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{5}{4} \alpha \cos^2 \alpha + \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\
 (124a) \quad & \frac{S_0 r}{2} (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) \\
 & - p_0 r^2 \left\{ \frac{1}{8} \sin 2\alpha + \cos \alpha \left[\frac{5}{8} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha \right] \right\} - C_1 \sin \alpha = 0.
 \end{aligned} \right\}$$

§ 18. Beanspruchung eines nach oben gewölbten Bogens durch hydrostatischen Druck. (Fig. 14).

Ist h die Höhe des Wasserspiegels über dem Scheitel A des Kreisbogens, so ist bei einem Bogen von der achsialen Länge 1 der Druck p_ξ auf das Bogenelement $r \cdot d\xi$ durch

$$p_\xi = \gamma_w \cdot (h + r[1 - \cos \xi]) \cdot r \cdot d\xi$$

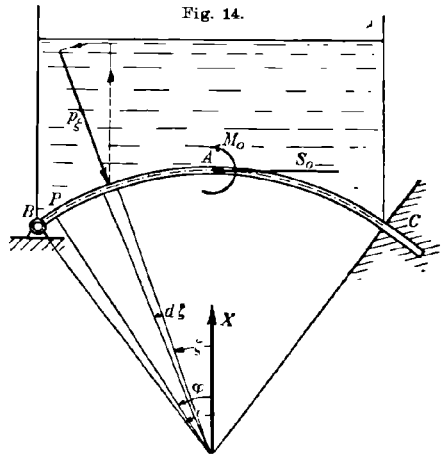
gegeben, worin γ_w das spezifische Gewicht des Wassers bezeichnet. Das von dem Wasserdruck an der Stelle φ ausgeübte Biegemoment wird

$$\begin{aligned}
 M_\varphi &= -\gamma_w r^2 \\
 &\int_{\xi=0}^{\xi=\varphi} (h + r \cdot [1 - \cos \xi]) \sin(\varphi - \xi) d\xi, \\
 M_\varphi &= -\gamma_w r^2 h(1 - \cos \varphi) \\
 &\quad - \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right).
 \end{aligned}$$

Führt man noch die in A wirkenden stereostatisch unbestimmten Größen M_0 und S_0 ein, so erhält man für M_φ den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (125) \quad M_\varphi &= M_0 + S_0 r (1 - \cos \varphi) - \gamma_w r^2 h (1 - \cos \varphi) \\
 &\quad - \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right),
 \end{aligned}$$

der mit Gl. (62) auf S. 268 bis auf die Vorzeichen von S_0 und γ_w übereinstimmt. Man erhält daher unter Beachtung des Vorzeichenwechsels sofort die Gleichung der elastischen Linie:



$$(126) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot v = M_0 + S_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) - \gamma_w r^2 h \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) \\ - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

sowie den Differentialquotienten

$$(127) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{S_0 r - \gamma_w r^2 h}{2} (-\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) \\ - \gamma_w r^3 \left(-\frac{\varphi^2}{8} \sin \varphi - \frac{9}{16} \sin \varphi - \frac{3}{8} \varphi \cos \varphi\right) - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

und das Integral

$$(128) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \int_0^\alpha v d\varphi = M_0 \alpha + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) \\ - \gamma_w r^3 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha - \frac{15}{16} \sin \alpha + \frac{7}{8} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha + C_2 (1 - \cos \alpha).$$

a) Gelenk-Befestigung.

Die Unbekannten M_0 , S_0 , C_1 , C_2 bestimmen sich aus:

$$(129) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0 \qquad (130) \quad (v)_{\varphi=\alpha} = 0$$

$$(131) \quad \int_0^\alpha v d\varphi = 0 \qquad (132) \quad M_\alpha = 0$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} (129a) \quad C_2 = 0 \\ (130a) \quad M_0 + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) \\ \quad - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{5}{8} \alpha \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (131a) \quad M_0 \alpha + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) \\ \quad - \gamma_w r^3 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha - \frac{15}{16} \sin \alpha + \frac{7}{8} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (132a) \quad M_0 + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) (1 - \cos \alpha) - \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha\right) = 0. \end{array} \right.$$

b) Tangententreue Befestigung.

Die Bedingungen (129a) bis (131a) bleiben hierfür bestehen, während an Stelle der Bedingung $M_\alpha = 0$ die Gleichung

$$(133) \quad \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_{\varphi=\alpha} = 0$$

zu setzen ist. Demnach lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (129a) \quad C_2 = 0 \\ (130a) \quad M_0 + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) \\ \quad - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{5}{8} \alpha \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ (131a) \quad M_0 \alpha + (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) \\ \quad - \gamma_w r^3 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha - \frac{15}{16} \sin \alpha + \frac{7}{8} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ (133a) \quad \frac{\gamma_w r^2 h - S_0 r}{2} (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) + \gamma_w r^3 \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha + \frac{9}{16} \sin \alpha + \frac{3}{8} \alpha \cos \alpha\right) \\ \quad - C_1 \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Läßt man für den Fall b) insbesondere $\alpha = \pi$ werden, so erhält man die Werte

$$\begin{array}{ll} C_2 = 0; & M_0 = -\frac{\gamma_w r^3}{4}; \\ S_0 = \gamma_w r \left(h + \frac{3}{4} r\right); & C_1 = \gamma_w r^3 \cdot \frac{2\pi^2 - 9}{16}, \end{array}$$

welche, wie zu erwarten steht, in die auf S. 269 und 270 berechneten Werte übergehen, wenn man das Vorzeichen von S_0 und γ_w wechselt.

§ 19. Beanspruchung eines nach unten gewölbten Bogens durch hydrostatischen Druck. (Fig. 15.)

Mit Beibehaltung der in § 18 gewählten Bezeichnungen ist hier für eine achsiale Länge 1 des Bogens der Druck p_ξ an der Stelle ξ durch

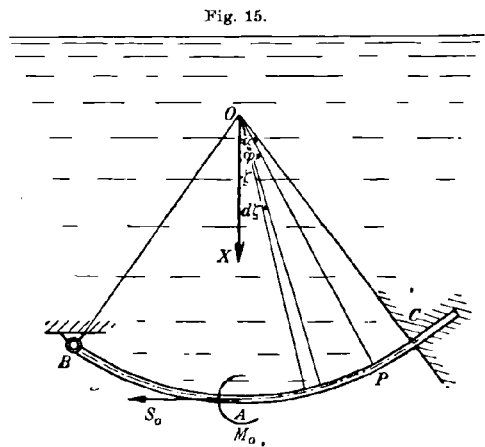
$$p_\xi = \gamma_w \cdot (h - r[1 - \cos \xi])$$

gegeben, wonach mit Einführung von M_0 und S_0 das Moment M_φ durch

$$(134) \quad M_\varphi = M_0 - S_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma_w r^2 h (1 - \cos \varphi) - \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right)$$

bestimmt wird.

Da sich die Gl. (134) von Gl. (125) nur durch das Vorzeichen von S_0 und h unterscheidet, so können die Gleichungen für die elastische Linie und die zur Bestimmung der vier Unbekannten M_0, S_0, C_1, C_2 mit Beachtung des Vorzeichenunterschiedes aus § 18 übernommen werden.



Es wird demnach

$$(135) \quad \frac{EJ}{r^3} \cdot \nu = M_0 - (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\varphi^3}{8} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi\right) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

die Gleichung der elastischen Linie.

a) Gelenk-Befestigung.

Die Bestimmungsgleichungen für M_0 , S_0 , C_1 , C_2 lauten:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ M_0 - (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{5}{8} \alpha \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ M_0 \alpha - (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) - \gamma_w r^3 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha - \frac{15}{16} \sin \alpha + \frac{7}{8} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ M_0 - (S_0 r^2 - \gamma_w r^2 h) (1 - \cos \alpha) - \gamma_w r^3 \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) = 0. \end{array} \right.$$

b) Tangententreue Befestigung.

Hier bestimmen sich M_0 , S_0 , C_1 , C_2 aus den vier Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ M_0 - (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha\right) - \gamma_w r^3 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{5}{8} \alpha \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha\right) + C_1 \cos \alpha = 0 \\ M_0 \alpha - (S_0 r - \gamma_w r^2 h) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha\right) - \gamma_w r^3 \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha - \frac{15}{16} \sin \alpha + \frac{7}{8} \alpha \cos \alpha\right) + C_1 \sin \alpha = 0 \\ \frac{S_0 r - \gamma_w r^2 h}{2} (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) + \gamma_w r^3 \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin \alpha + \frac{9}{16} \sin \alpha + \frac{3}{8} \alpha \cos \alpha\right) - C_1 \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

V. Abschnitt.

Einige besondere Beanspruchungen des geschlossenen Kreisringes bei ebener und räumlicher Formänderung.

Das bisher benützte Rechnungsverfahren, die Beanspruchung mit Hilfe der elastischen Linie zu bestimmen, wird unbequem, wenn, wie dies bei den folgenden Aufgaben vorliegt, das Biegemoment M_φ für

verschiedene Teile des Ringes durch verschiedene Funktionen dargestellt werden muß. Man löst die stereostatische Unbestimmtheit in diesen Fällen mit geringerem rechnerischem Aufwand, indem man die an irgend einer Stelle bekannten Formänderungen als Funktionen des Kräftesystems einschließlich der stereostatisch unbestimmten Größen aufstellt.

Dieses Verfahren empfiehlt sich auch im Falle der räumlichen Formänderung, welche daher passend zusammen mit den besonderen ebenen Problemen hier behandelt werden soll.

§ 20. Beanspruchung eines Kreisringes durch zwei entgegengesetzte Momente, deren Achsen zur Kreisebene senkrecht stehen. (Figur 16.)

Wir legen die X-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems so, daß sie Symmetrieachse für die Beanspruchung wird; der Ursprung 0 sei der Kreismittelpunkt, $\pm \alpha$ seien die zu den Achsen A und A' der Momente $\pm M$ gehörigen Winkel.

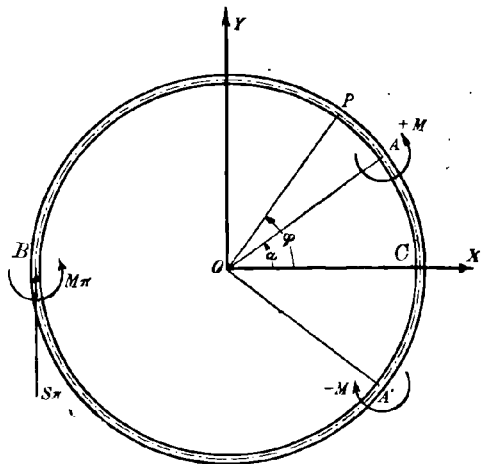
Denkt man den Punkt C des Ringes gegenüber dem Koordinatensystem tangential festgehalten und den Ring im Punkte B geschnitten, so bestimmen sich die in B wirkenden stereostatisch unbestimmten Größen M_π und S_π aus den für diesen Punkt bekannten geometrischen Bedingungen

$$\sum \beta_z = 0 \quad \text{und} \quad \sum \Delta y = 0,$$

wobei durch das Summenzeichen die Drehungen β_z und die Verschiebungen Δy für den Punkt B

je durch die drei Größen M, M_π, S_π zusammengefaßt sein sollen, deren Wirkungen einzeln berechnet werden.

Fig. 16.



a) Wirkungen von M:

$$\beta_z = \frac{M}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} r d\varphi = \frac{Mr}{EJ} \cdot \alpha$$

$$\Delta y = - \frac{M}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} r^2 \cdot (1 + \cos \varphi) d\varphi = - \frac{Mr^3}{EJ} (\alpha + \sin \alpha).$$

b) Wirkungen von M_π :

$$\beta_s = \frac{M_\pi}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} r d\varphi = \frac{M_\pi r}{EJ} \cdot \pi$$

$$\Delta y = - \frac{M_\pi}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} r^2 (1 + \cos \varphi) d\varphi = - \frac{M_\pi r^2}{EJ} \pi.$$

c) Wirkungen von S_π :

$$\beta_s = - \frac{S_\pi}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} r^2 (1 + \cos \varphi) d\varphi = - \frac{S_\pi r^2}{EJ} \pi$$

$$\Delta y = \frac{S_\pi}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} r^3 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{S_\pi r^3}{EJ} \cdot \frac{3\pi}{2}.$$

Hiernach lauten die Bestimmungsgleichungen für M_π und S_π :

$$(136) \quad M \cdot \alpha + M_\pi \cdot \pi - S_\pi \cdot r\pi = 0$$

$$(137) \quad M(\alpha + \sin \alpha) + M_\pi \cdot \pi - S_\pi \cdot r \frac{3\pi}{2} = 0,$$

woraus sich

$$M_\pi = M \cdot \frac{2 \sin \alpha - \alpha}{\pi}$$

$$S_\pi = M \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\pi r}$$

ergibt.

Für $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ wird demnach das Biegemoment

$$\begin{aligned} M_\varphi &= M_\pi - S_\pi r (1 + \cos \varphi) \\ &= \frac{M}{\pi} (2 \sin \alpha - \alpha - 2 \sin \alpha [1 + \cos \varphi]) \end{aligned}$$

oder

$$M_\varphi = \frac{M}{\pi} (-\alpha - 2 \sin \alpha \cos \varphi).$$

Für $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ist

$$M_\varphi = M_\pi + M - S_\pi \cdot r (1 + \cos \varphi)$$

oder

$$M_\varphi = \frac{M}{\pi} (\pi - \alpha - 2 \sin \alpha \cos \varphi).$$

Insbesondere ist für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die Achsen A und A' der Momente $\pm M$ in den Enden eines Durchmessers liegen:

$$M_\varphi = \frac{M}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} - 2 \cos \varphi\right), \text{ solange } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$$

$$M_\varphi = \frac{M}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \cos \varphi\right), \text{ solange } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

und es werden die Momente M_0 und M_π in den Endpunkten des Durchmessers BC entgegengesetzt gleich:

$$M_0 = M \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right) = - 0,13662 M$$

$$M_\pi = - M \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right) = + 0,13662 M.$$

§ 21. Beanspruchung eines seitlich gestützten Ringes durch sein Eigengewicht.¹⁾ (Fig. 17.)

Die Untersuchung des Einflusses einer seitlichen Stützung ist von Bedeutung für die Beurteilung der Beanspruchung von elektrischen Maschinen, bei denen diese Stützung bevorzugt wird. Die Stützung geschehe durch kurze Ansätze von der Stütz-Länge a , welche an den Enden des horizontalen Durchmessers angegossen sind und als steif vorausgesetzt sein sollen.

Legt man die X-Achse durch den tiefsten Punkt A , der gleichzeitig dem rechtwinkligen Koordinatensystem gegenüber tangential-treu festgehalten werden soll, und denkt sich den Ring in C geschnitten, so sind die in C wirkenden stereostatisch unbestimmten Größen M_π und S_π aus den geometrischen Bedingungen zu bestimmen

$$\sum \beta_x = 0 \quad \text{und} \quad \sum Ay = 0.$$

Die Summation faßt die Wirkungen des Eigengewichtes (γ für die Längeneinheit des Ringumfanges), der Auflagerreaktion K und der Größen M_π und S_π zusammen.

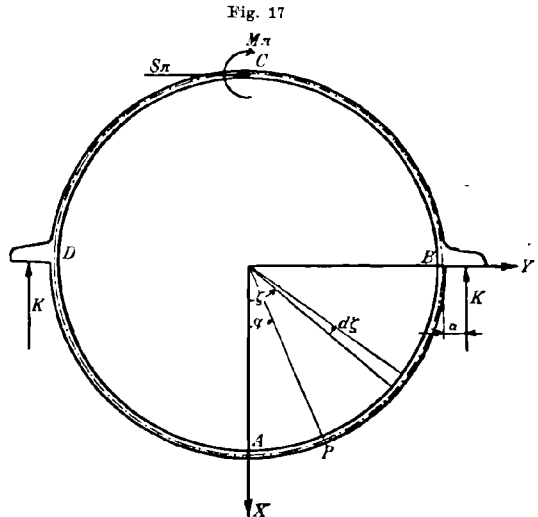
a) Wirkungen des Eigengewichtes:

Das vom Eigengewicht an der Stelle φ ausgeübte Moment ist

$$M_\gamma = - \gamma r^2 \cdot \int_{\xi=\varphi}^{\xi=\pi} (\sin \xi - \sin \varphi) d\xi$$

$$M_\gamma = \gamma r^2 (\sin \varphi [\pi - \varphi] - \cos \varphi - 1).$$

1) Vgl. auch J. Schenk, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen; Leipzig, Teubner, 1903.



Darnach wird:

$$\beta_s = \frac{\gamma r^3}{EJ} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (\sin \varphi [\pi - \varphi] - \cos \varphi - 1) \cdot d\varphi = \frac{\gamma r^3}{EJ} (2\pi - \pi - 0 - \pi) = 0$$

$$\Delta y = \frac{\gamma r^4}{EJ} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (1 + \cos \varphi - \sin \varphi [\pi - \varphi]) (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

$$= \frac{\gamma r^4}{EJ} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi - \sin \varphi [\pi - \varphi] + \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi [\pi - \varphi]) d\varphi$$

$$= \frac{\gamma r^4}{EJ} \cdot \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\gamma r^4}{EJ} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

b) Wirkungen der Auflagerreaktion K :

Das von K an der Stelle φ ausgeübte Moment ist

$$M = K \cdot (a + r [1 - \sin \varphi]).$$

Also wird

$$\beta_s = \frac{Kr}{EJ} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} (a + r [1 - \sin \varphi]) d\varphi = \frac{Kr}{EJ} \left(a \cdot \frac{\pi}{2} + r \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \right)$$

$$\Delta y = - \frac{Kr^3}{EJ} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} (a + r [1 - \sin \varphi]) (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

$$= - \frac{Kr^3}{EJ} \left(a \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] + r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \varphi - \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \right)$$

$$= - \frac{Kr^3}{EJ} \left(a \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] + r \left[\frac{\pi}{2} + 1 - 1 - \frac{1}{2} \right] \right)$$

$$\Delta y = - \frac{Kr^3}{EJ} \left(a \cdot \frac{\pi + 2}{2} + r \cdot \frac{\pi - 1}{2} \right).$$

c) Wirkungen von M_π :

$$\beta_z = - \frac{M_\pi r}{EJ} \cdot \pi$$

$$\Delta y = \frac{M_\pi r^2}{EJ} \cdot \pi.$$

Wirkungen von S_π :

$$\beta_z = - \frac{S_\pi r^2}{EJ} \cdot \pi$$

$$\Delta y = \frac{S_\pi r^3}{EJ} \cdot \frac{3\pi}{2}.$$

Die Bestimmungsgleichungen für M_π und S_π lauten jetzt:

$$(138) \quad M_\pi + S_\pi \cdot r - K \left(\frac{a}{2} + \frac{r}{2} - \frac{r}{\pi} \right) = 0$$

$$(139) \quad M_\pi + S_\pi \cdot r - \frac{3}{2} K \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} + \frac{r}{2} - \frac{r}{2\pi} \right) + \frac{\gamma r^2}{4} = 0$$

woraus man durch Subtraktion erhält:

$$S_\pi \cdot \frac{r}{2} - K \left(\frac{a}{\pi} + \frac{r}{2\pi} \right) + \frac{\gamma r^2}{4} = 0.$$

Nun ist aber K als Auflagerdruck durch

$$K = \gamma \cdot \pi r$$

gegeben, womit

$$S_\pi = \frac{2}{r} \cdot \left(\gamma r a + \frac{\gamma r^2}{2} - \frac{\gamma r^2}{4} \right)$$

oder

$$(140) \quad S_\pi = \gamma \left(2a + \frac{r}{2} \right)$$

folgt. Aus Gl. (138) findet man jetzt

$$M_\pi = \gamma r \left(\frac{\pi a}{2} + \frac{\pi r}{2} + r - 2a - \frac{r}{2} \right)$$

oder

$$(141) \quad M_\pi = \gamma r \cdot \frac{r - (4 - \pi)(a + r)}{2}.$$

Für die Untersuchung des Biegemomentes M_φ an der Stelle φ ist die Stelle $\varphi = \frac{\pi}{2}$ besonders zu beachten.

$$1) \text{ Sei } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

so ist:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= -M_\pi - S_\pi r (1 + \cos \varphi) - \gamma r^2 (1 + \cos \varphi - \sin \varphi [\pi - \varphi]) \\ &\quad + K (a + r [1 - \sin \varphi]) \\ &= -\gamma r \cdot \frac{r - (4 - \pi)(a + r)}{2} - \gamma r \left(2a + \frac{r}{2} \right) (1 + \cos \varphi) \\ &\quad - \gamma r^2 (1 + \cos \varphi - \sin \varphi [\pi - \varphi]) + \gamma \pi r (a + r [1 - \sin \varphi]). \end{aligned}$$

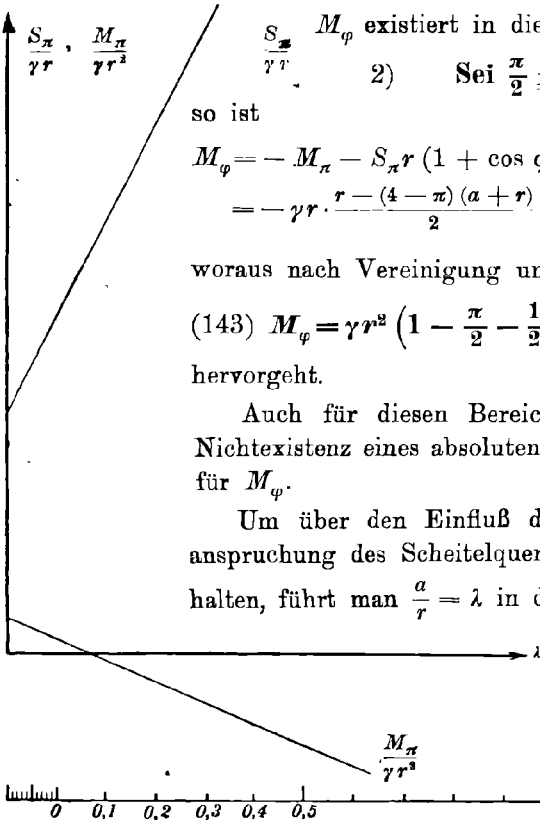
Dieser Ausdruck vereinfacht sich zu:

$$M_\varphi = \gamma r \left(\frac{\pi}{2} [a + r] - r \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \left[2a + \frac{3}{2} r \right] \right),$$

wofür man mit Einführung des Verhältnisses $\frac{a}{r} = \lambda$ auch schreiben kann:

$$(142) \quad M_\varphi = \gamma r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \lambda - 2 \lambda \cos \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right).$$

Fig. 18.



Ein absolutes Maximum oder Minimum von $\frac{S_\pi}{\gamma r}$ existiert in diesem Bereiche nicht.

2) Sei $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$,

so ist

$$M_\varphi = -M_\pi - S_\pi r (1 + \cos \varphi)$$

$$= -\gamma r \cdot \frac{r - (4 - \pi)(a + r)}{2} - \gamma r \left(2a + \frac{r}{2}\right) (1 + \cos \varphi),$$

woraus nach Vereinigung und Einführung von $\frac{a}{r} = \lambda$

(143) $M_\varphi = \gamma r^2 \left(1 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \lambda - 2 \lambda \cos \varphi\right)$

hervorgeht.

Auch für diesen Bereich von φ ergibt sich die Nichtexistenz eines absoluten Maximums oder Minimums für M_φ .

Um über den Einfluß der Stützweite auf die Beanspruchung des Scheitelquerschnittes Aufschluß zu erhalten, führt man $\frac{a}{r} = \lambda$ in die Gleichungen (140) und

(141) ein und erhält:

(140a) $\frac{S_\pi}{\gamma r} = \frac{1}{2} + 2 \lambda$

(141a) $\frac{M_\pi}{\gamma r^2} = 0,0708$
 $- 0,4292 \lambda$

Dies sind die Gleichungen der in Figur 18 dargestellten Geraden;

für $\lambda = 0$ ist $\frac{S_\pi}{\gamma r} = 0,5$ und $\frac{M_\pi}{\gamma r^2} = 0,0708$

für $\lambda = 1$ ist $\frac{S_\pi}{\gamma r} = 2,5$ und $\frac{M_\pi}{\gamma r^2} = - 0,3584$.

Die Figur zeigt, daß für die bei Ausführungen üblichen Werte λ kleine Scheitelbeanspruchungen auftreten.

§ 22. Beanspruchung kreisförmiger Spanten bei einem Luftschiff.

(Fig. 19.)

Es sei für die vorliegende Untersuchung γ das auf die Längeneinheit des Umfanges bezogene Eigengewicht des Ballontragkörpers einschließlich der Bespannung, p_z der ebenfalls auf die Längeneinheit bezogene Überdruck des Füllgases und K die an der Stelle $\pm \alpha$ auf die Spanten übertragene Zugkraft, welche von der Gondel und deren Be-

lastung herrührt; die Richtung von K falle in die Tangente im Punkte α , so ist $K = \frac{G}{2 \sin \alpha}$, wenn G das Gewicht der Gondel und ihrer Belastung bedeutet.

Wir legen die X -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems durch den tiefsten Punkt A , der dem System OXY gegenüber tangential festgehalten werden soll. Die Berechnung beschränkt sich wegen der Symmetrie gegen die X -Achse auf eine Ringhälfte, und es bestimmen sich die als Ersatz der Spannungen im Scheitel C einzuführenden Größen M_π und S_π aus den für diesen Punkt bekannten Deformationsbedingungen:

$$\sum \beta_s = 0 \quad \text{und} \quad \sum \Delta y = 0;$$

β_s und Δy für den Punkt C sind zunächst zu bestimmen.

a) Wirkungen des Eigengewichtes.

Das vom Eigengewichte an der Stelle φ ausgeübte Moment M_γ wird

$$M_\gamma = -\gamma r^2 \int_{\xi=\varphi}^{\xi=\pi} (\sin \xi - \sin \varphi) d\xi$$

oder

$$M_\gamma = -\gamma r^2 \cdot (1 + \cos \varphi - [\pi - \varphi] \sin \varphi),$$

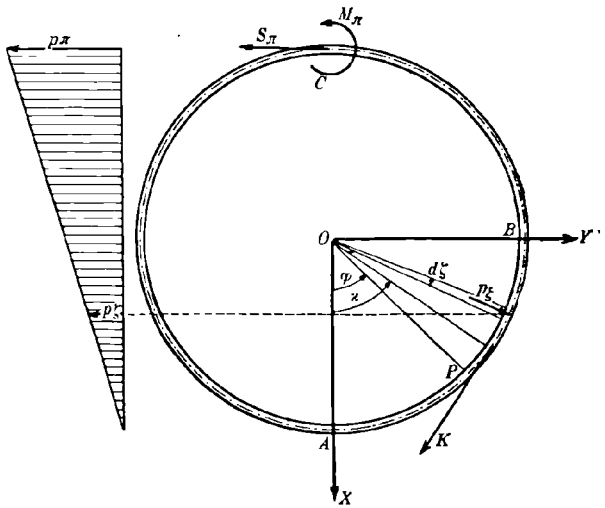
wonach sich ergibt:

$$\beta_s = -\frac{\gamma r^3}{EJ} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi - [\pi - \varphi] \sin \varphi) d\varphi = -\frac{\gamma r^3}{EJ} (\pi - 2\pi + \pi) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\gamma r^4}{EJ} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi - [\pi - \varphi] \sin \varphi) (1 + \cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{\gamma r^4}{EJ} \int_0^\pi (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi - [\pi - \varphi] \sin \varphi - [\pi - \varphi] \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{\gamma r^4}{EJ} \cdot \left(\pi + \frac{\pi}{2} - 2\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{\gamma r^4}{EJ} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Fig. 19.



b) Wirkungen des Gasüberdruckes.

Es ist $p_{\xi} : p_{\pi} = r(1 - \cos \xi) : 2r$ oder $p_{\xi} = \frac{p_{\pi}}{2}(1 - \cos \xi)$. Das Moment M_p an der Stelle φ wird daher:

$$\begin{aligned} M_p &= -\frac{p_{\pi} r^3}{2} \int_{\xi=\varphi}^{\xi=\pi} (1 - \cos \xi) \sin(\xi - \varphi) d\xi \\ &= -\frac{p_{\pi} r^3}{2} \cdot \int_{\varphi}^{\pi} (\sin \xi \cos \varphi - \cos \xi \sin \varphi - \sin \xi \cos \xi \cos \varphi + \cos^2 \xi \sin \varphi) d\xi \\ M_p &= -\frac{p_{\pi} r^3}{2} \left(1 + \cos \varphi + \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi\right). \end{aligned}$$

Hiernach wird:

$$\begin{aligned} \beta_s &= -\frac{p_{\pi} r^3}{2 E J} \int_0^{\pi} \left(1 + \cos \varphi + \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi\right) d\varphi \\ &= -\frac{p_{\pi} r^3}{2 E J} \left(\pi + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4} \frac{p_{\pi} r^3}{E J} \\ \Delta y &= \frac{p_{\pi} r^4}{2 E J} \int_0^{\pi} \left(1 + \cos \varphi + \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi\right) (1 + \cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{p_{\pi} r^4}{2 E J} \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\pi - \varphi}{2} \sin \varphi \cos \varphi\right) d\varphi \\ &= \frac{p_{\pi} r^4}{2 E J} \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{17\pi}{16} \frac{p_{\pi} r^4}{E J}. \end{aligned}$$

c) Wirkungen der Tangentialkraft K .

Das von K an der Stelle φ ausgeübte Moment ist, wenn $\varphi \leq \alpha$ durch

$$M_k = -K r (1 - \cos[\alpha - \varphi])$$

gegeben, wonach:

$$\begin{aligned} \beta_s &= -\frac{K r^3}{E J} \int_0^{\alpha} (1 - \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) d\varphi \\ &= -\frac{K r^3}{E J} \cdot (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha [1 - \cos \alpha]) = -\frac{K r^3}{E J} (\alpha - \sin \alpha) \\ \Delta y &= \frac{K r^3}{E J} \int_0^{\alpha} (1 - \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) (1 + \cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{K r^3}{E J} \int_0^{\alpha} (1 - \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi + \cos \varphi - \cos \alpha \cos^2 \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= \frac{K r^3}{E J} \left(\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha\right] - \frac{1}{2} \sin^3 \alpha\right) \\ \Delta y &= \frac{K r^3}{E J} \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

d) Wirkungen von M_π und S_π .

Das von M_π und S_π an der Stelle φ ausgeübte Moment ist

$$M = M_\pi + S_\pi \cdot r(1 + \cos \varphi),$$

wonach

$$\beta_z = \frac{M_\pi r + S_\pi r^2}{EJ} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi r}{EJ} (M_\pi + S_\pi r)$$

$$\Delta y = - \frac{M_\pi r^2}{EJ} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) d\varphi - \frac{S_\pi r^3}{EJ} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi$$

$$\Delta y = - \frac{\pi r^2}{EJ} \left(M_\pi + S_\pi r \frac{3}{2} \right).$$

Nun lauten die Bestimmungsgleichungen für M_π und S_π :

$$(144) \quad M_\pi + S_\pi r - \frac{3}{4} p_\pi r^3 - \frac{Kr}{\pi} (\alpha - \sin \alpha) = 0$$

$$(145) \quad M_\pi + S_\pi r \frac{3}{2} - \frac{17}{16} p_\pi r^3 - \frac{1}{4} \gamma r^2 - \frac{Kr}{\pi} \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = 0,$$

woraus

$$(146) \quad S_\pi = \frac{K}{4\pi} (\sin \alpha - \cos \alpha) + \frac{\gamma r}{2} + \frac{5p_\pi r}{8}$$

$$(147) \quad M_\pi = \frac{Kr}{4\pi} (4\alpha - 5 \sin \alpha + \alpha \cos \alpha) - \frac{\gamma r^2}{2} + \frac{p_\pi r^3}{8}.$$

Im gegebenen Falle sind die Größen K , γ und p_π nicht voneinander unabhängig, sondern noch durch eine weitere Gleichung verknüpft, welche dem Gleichgewichte der Vertikalkräfte am ganzen Luftschiffe Rechnung trägt. Für $K = 0$ ergeben die Gleichungen (146) und (147) in Verbindung mit der Gleichgewichtsbedingung für die Vertikalkräfte, die in § 9 nachgewiesene Biegeungsfreiheit der Spanten.

Aus (146) und (147) folgt

1. für $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$S_\pi = \frac{K}{4\pi} + \frac{\gamma r}{2} + \frac{5p_\pi r}{8} = 0,07707 K + 0,5 \gamma r + 0,625 p_\pi r$$

$$M_\pi = \frac{Kr}{4\pi} (2\pi - 5) - \frac{\gamma r^2}{2} + \frac{p_\pi r^3}{8} = 0,10811 Kr - 0,5 \gamma r^2 + 0,125 p_\pi r^3.$$

2. für $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$S_\pi = \frac{K\sqrt{2}}{8\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\gamma r}{2} + \frac{5p_\pi r}{8} = 0,01207 K + 0,5 \gamma r + 0,625 p_\pi r$$

$$M_\pi = \frac{Kr}{4\pi} \left(\pi + \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{4} - 5 \right] \right) - \frac{\gamma r^2}{2} + \frac{p_\pi r^3}{8} = 0,01282 Kr - 0,5 \gamma r^2 + 0,125 p_\pi r^3.$$

Nach Lösung der stereostatischen Unbestimmtheit ist die Beanspruchung einer beliebigen Stelle unschwer zu ermitteln; von ihrer Ermittlung im allgemeinen Falle soll jedoch hier abgesehen werden, da die Versteifung starrer Luftschiffe durch kreisförmige Spanten, welche die Beanspruchungen *in sich* aufnehmen, praktische Bedeutung kaum erlangen wird. Es sei nur darauf hingewiesen, daß das bisher erfolgreichste starre Luftschiff, das des *Grafen Zeppelin*, mit Seilen in verschiedenen Richtungen versteifte Spanten besitzt.

§ 23. Beanspruchung eines Kreisringes durch zwei entgegengesetzte Momente, deren Achse ein Durchmesser ist. (Fig. 20.)

Legt man die *Y*-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems so, daß sie mit der Achse der in den Punkten *A* und *B* wirkenden Momente $\pm M_y$, die kurz mit $\pm M$ bezeichnet sein sollen, zusammenfällt,

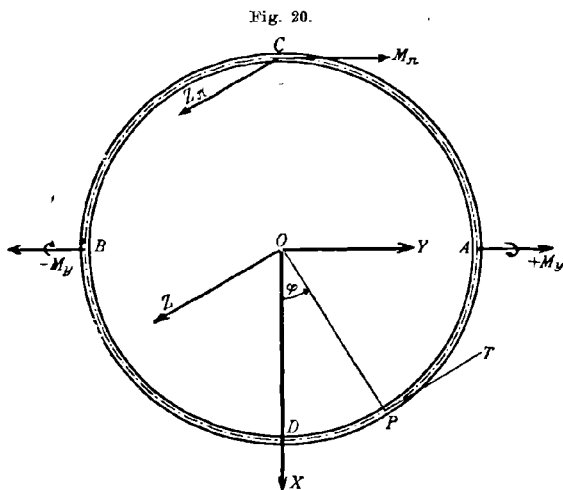


Fig. 20.

und denkt sich den Punkt *D* mit dem Koordinatensystem tangententreu verbunden, so ist wegen der Symmetrie der Beanspruchung für den Punkt *C*:

$$\sum \beta_y = 0 \quad \text{und} \quad \sum \Delta z = 0.$$

Diese beiden Bedingungen genügen zur Ermittlung der stereostatisch unbestimmten Größen M_x und Z_x , welche im Schnitte *C* wirken und deren Richtung zunächst als positiv vorausgesetzt werden möge. Für die hier auftretenden Formänderungen durch Verdrehung sollen

G für den Gleitmodul und *T* für die „Torsionsfunktion“¹⁾ als Bezeichnungen gewählt werden; bei der immer noch nicht behobenen Unge-
 wißheit über den Bau der Funktion *T* sind die von Goetzke²⁾ wieder veröffentlichten Formeln von de Saint-Venant wohl noch nicht die schlechtesten, gleichwohl empfiehlt sich in wichtigen Fällen die experimentelle Ermittlung von *T*.

Wir berechnen nun die Wirkungen von M , M_x und Z_x einzeln.

1) Vgl. E. A. Brauer, Festigkeitslehre, Leipzig 1905, S. 111.
 2) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure, 1909, S. 935.

a) Wirkungen von M .

Von dem Momente M kommen die Komponenten $M \sin \varphi$ *biegend* und $M \cos \varphi$ *drehend* in dem Elemente $r d\varphi$ zur Wirkung; beachtet man noch, daß die durch $M \sin \varphi$ entstehenden Formänderungen aus einer Rotation um die Achse OP hervorgehen, die von $M \cos \varphi$ erzeugten Formänderungen aber aus einer Rotation um die Achse PT so erkennt man, daß z. B. die Drehung β_y um die y -Achse sich aus den y -Komponenten der um die Achsen OP bzw. PT erfolgenden Drehungen zusammensetzt, welche demnach mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Achsen mit der y -Richtung einschließen, zu multiplizieren sind. Man erhält so:

$$\beta_y = \frac{Mr}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{Mr}{GT} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = Mr \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$\Delta z = \frac{Mr^2}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi + \frac{Mr^2}{GT} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 + \cos \varphi) d\varphi$$

$$\Delta z = Mr^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1 + \frac{\pi}{4}}{GT} \right).$$

b) Wirkungen von M_π .

Hierfür sind nur die Integrale unter a) zwischen den Grenzen 0 und π zu erstrecken; somit wird:

$$\beta_y = M_\pi r \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$\Delta z = M_\pi r^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right).$$

c) Wirkungen von Z_π :

Die Schnittkraft Z_π wirkt im Elemente $r d\varphi$ mit dem Moment $Z_\pi r \sin \varphi$ *biegend* und mit dem Moment $Z_\pi r (1 + \cos \varphi)$ *drehend*. Daher wird:

$$\beta_y = \frac{Z_\pi r^2}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{Z_\pi r^2}{GT} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\beta_y = Z_\pi r^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$\Delta z = \frac{Z_\pi r^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{Z_\pi r^3}{GT} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi$$

$$\Delta z = \frac{Z_\pi \cdot r^3 \cdot \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{3}{GT} \right).$$

Die Bestimmungsgleichungen für M_π und S_π lauten jetzt:

$$(148) \quad \frac{1}{2} M + M_\pi + Z_\pi r = 0$$

$$(149) \quad \frac{1}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} M + \frac{\pi}{2} M_\pi + \frac{\pi}{2} Z_\pi r \right) + \frac{1}{GT} \left(\left[1 + \frac{\pi}{4} \right] M + \frac{\pi}{2} M_\pi + \frac{3\pi}{2} Z_\pi r \right) = 0.$$

Für Gleichung (149) läßt sich, da der mit $\frac{1}{EJ}$ zu multiplizierende Klammerausdruck mit Rücksicht auf Gl. (148) verschwindet, auch schreiben:

$$(149a) \quad M \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) + M_\pi \cdot \frac{\pi}{2} + Z_\pi \cdot r \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Aus (148) und (149a) ergeben sich die Lösungen:

$$(150) \quad Z_\pi = - \frac{M}{\pi r}$$

und

$$(151) \quad M_\pi = M \cdot \frac{2 - \pi}{2\pi},$$

beide negativ; M_π und Z_π haben daher die der angenommenen Richtung entgegengesetzte Richtung.

Bezeichnen wir nun das in irgend einem Punkte P , der zum Winkel φ gehört, wirkende Biegemoment mit M_n , wobei der Index n daran erinnern soll, daß die Achse des biegenden Momentes mit der Normalen zusammenfällt, zum Unterschiede von dem Drehmomente M_t , dessen Achse in der Tangente liegt, und setzen wir noch fest, daß M_n positiv sei, wenn seine Achse nach dem Mittelpunkte zeigt, M_t dagegen positiv, wenn seine Achse in der Richtung des Teiles der Tangente liegt, dem wachsende Winkel φ benachbart sind, so gilt

a) solange $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$M_n = M \frac{\pi - 2}{2\pi} \sin \varphi + \frac{M}{\pi} \sin \varphi - M \sin \varphi$$

oder

$$M_n = - \frac{M}{2} \sin \varphi,$$

$$M_t = - M \frac{\pi - 2}{2\pi} \cos \varphi - \frac{M}{\pi} (1 + \cos \varphi) + M \cos \varphi$$

oder

$$M_t = M \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{\pi} \right);$$

b) solange $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$:

$$M_n = M \frac{\pi - 2}{2\pi} \sin \varphi + \frac{M}{\pi} \sin \varphi$$

oder

$$M_n = \frac{M}{2} \sin \varphi,$$

$$M_t = -M \frac{\pi - 2}{2\pi} \cos \varphi - \frac{M}{\pi} (1 + \cos \varphi)$$

oder

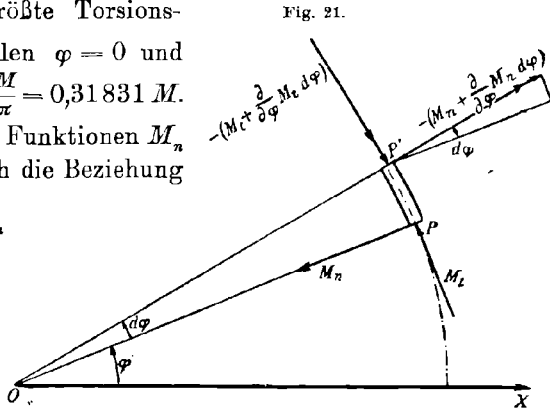
$$M_t = -M \cdot \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \right).$$

Das maximale Biegemoment tritt auf an der Stelle $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und hat die Größe $\frac{1}{2} M$. Das größte Torsionsmoment ist an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ und hat die Größe $\frac{M}{\pi} = 0,31831 M$.

Man bemerkt, daß die Funktionen M_n und M_t miteinander durch die Beziehung

$$\frac{\partial M_t}{\partial \varphi} = M_n$$

verknüpft sind; dies trifft nicht nur bei der vorliegenden Aufgabe zu, sondern entspricht, wie aus Fig. 21 zu ersehen ist,



einer Gleichgewichtsbedingung für ein Element $PP' = r d\varphi$. Soll dieses Element im Gleichgewichte sein, so muß die algebraische Summe der Projektionen der Biegemomente M_n und $-(M_n + \frac{\partial M_n}{\partial \varphi} d\varphi)$, sowie der Torsionsmomente M_t und $-(M_t + \frac{\partial M_t}{\partial \varphi} d\varphi)$ auf die Richtung der Tangente in P verschwinden, also

$$M_t + \left(M_n + \frac{\partial M_n}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi - \left(M_t + \frac{\partial M_t}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi = 0$$

sein, woraus unter Vernachlässigung des von 2. Ordnung unendlich kleinen Gliedes $\frac{\partial M_n}{\partial \varphi} d\varphi^2$ die obige Beziehung hervorgeht.

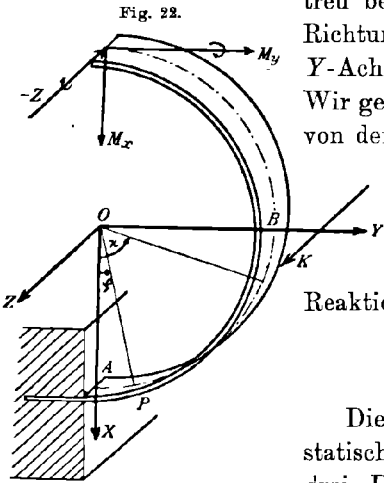
Ein analoger Zusammenhang besteht bekanntlich auch zwischen dem Biegemoment M_n und der Transversalkraft T_φ , für welche

$$\frac{\partial M_n}{\partial \varphi} = T_\varphi \cdot r$$

ist.

§ 24. Der halbkreisförmige „Balkonträger“. ¹⁾ (Figur 22.)

Der der XY -Ebene angehörige Kreisbogen sei in den Endpunkten A und C des Durchmessers gegenüber dem Koordinatensystem tangential befestigt und durch Kräfte, welche in der Richtung der Z -Achse wirken, beansprucht. Die Y -Achse sei Symmetrieachse des Halbkreises. Wir gehen zur Untersuchung der Beanspruchung von dem Falle aus, daß nur eine einzige Kraft K , deren Angriffspunkt durch den Winkel α bestimmt sei, auf den Träger einwirke. Dann gilt für die Reaktion an der Einspannstelle C und das dort wirkende Reaktionsmoment:



$$\begin{matrix} X = 0 & Y = 0 & -Z \neq 0 \\ M_x \neq 0 & M_y \neq 0 & M_z = 0. \end{matrix}$$

Die Aufgabe ist demnach dreifach stereostatisch unbestimmt, und es sind zur Lösung drei Deformationsbedingungen für den unter dem Einflusse von K , $-Z$, M_x und M_y verschieblichen Punkt C zu ermitteln. Diese lauten:

$$\sum \beta_x = 0; \quad \sum \beta_y = 0; \quad \sum \Delta z = 0.$$

Wir berechnen wieder die Wirkungen β_x , β_y und Δz einzeln.

a) Wirkungen von K :

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{Kr^2}{EJ_0} \int_0^\alpha \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi - \frac{Kr^2}{GT} \cdot \int_0^\alpha (1 - \cos[\alpha - \varphi]) \sin \varphi d\varphi \\ &= Kr^2 \cdot \left\{ \frac{1}{EJ_0} \int_0^\alpha (\sin \alpha \cos^2 \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{GT} \int_0^\alpha (\sin \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \sin \alpha \sin^2 \varphi) d\varphi \right\} \\ &= Kr^2 \left\{ \frac{1}{EJ} \left[\sin \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right) - \cos \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{GT} \left[1 - \cos \alpha - \cos \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \sin \alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right] \right\} \\ &= Kr^2 \left\{ \frac{\frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{EJ} - \frac{1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{GT} \right\}, \end{aligned}$$

1) Vgl. J. Stutz, Zur Theorie der halbringförmigen Balkonträger. Zeitschrift des öster. Ing. u. Arch.-Vereines 1904, S. 682.

$$\begin{aligned}
 \beta_y &= \frac{Kr^2}{EJ} \int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi + \frac{Kr^2}{EJ_0} \int_0^{\alpha} (1 - \cos[\alpha - \varphi]) \cos \varphi d\varphi \\
 &= Kr^2 \cdot \left\{ \frac{1}{EJ} \int_0^{\alpha} (\sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin^2 \varphi) d\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{GT} \int_0^{\alpha} (\cos \varphi - \cos \alpha \cos^2 \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \right\} \\
 &= Kr^2 \cdot \left\{ \frac{1}{EJ} \left[\sin \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \cos \alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{GT} \left[\sin \alpha - \cos \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \sin \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right] \right\} \\
 &= Kr^2 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right), \\
 dz &= \frac{Kr^3}{EJ} \int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi + \frac{Kr^3}{GT_0} \int_0^{\alpha} (1 - \cos[\alpha - \varphi]) (1 + \cos \varphi) d\varphi \\
 &= Kr^3 \left\{ \frac{1}{EJ} \int_0^{\alpha} (\sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \cos \alpha \sin^2 \varphi) d\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{GT_0} \int_0^{\alpha} (1 + \cos \varphi - \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \cos^2 \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \right\} \\
 &= Kr^3 \cdot \left\{ \frac{1}{EJ} \left[\sin \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \cos \alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{GT} \left[\alpha + \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \sin \alpha \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right] \right\} \\
 &= Kr^3 \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{EJ} + \frac{\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{GT} \right\}.
 \end{aligned}$$

b) Wirkungen von $-Z$:

$$\begin{aligned}
 \beta_x &= -\frac{Zr^2}{EJ} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{Zr^2}{GT_0} \int_0^{\pi} (\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{Zr^2}{GT} \cdot 2 \\
 \beta_y &= -\frac{Zr^2}{EJ} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{Zr^2}{GT_0} \int_0^{\pi} (\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = -\frac{Zr^2 \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right) \\
 dz &= -\frac{Zr^3}{EJ} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{Zr^3}{GT_0} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \\
 &= -\frac{Zr^3}{EJ} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{Zr^3}{GT} \cdot \frac{3\pi}{2} = -\frac{Zr^3 \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{3}{GT} \right).
 \end{aligned}$$

c) Wirkungen von M_x :

$$\beta_x = \frac{M_x r^2}{EJ} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{M_x r^2}{GT} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{M_x \cdot r^2 \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$\beta_y = M_x r \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GT} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= -\frac{M_x r^2}{EJ} \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{M_x r^2}{GT} \int_0^\pi (\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= -\frac{M_x r^2}{GT} \cdot 2. \end{aligned}$$

d) Wirkungen von M_y :

$$\beta_x = M_y r \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \left(\frac{1}{EJ} - \frac{1}{GT} \right) = 0$$

$$\beta_y = \frac{M_y r}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{M_y r}{GT} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{M_y r \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$\Delta z = \frac{M_y r^2}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{M_y r^2}{GT} \int_0^\pi (\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{M_y r^2 \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right).$$

Nun ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für M_x , M_y und Z in der Form:

$$(152) \quad \sum \beta_x = 0 = Kr \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} \sin \alpha}{EJ} - \frac{1 - \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha}{GT} \right\} + \frac{Zr^2}{GT} + \frac{M_x \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right)$$

$$(153) \quad \sum \beta_y = 0 = Kr \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right\} - Zr \cdot \frac{\pi}{2} + M_y \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(154) \quad \begin{aligned} \sum \Delta z = 0 &= Kr \left\{ -\frac{\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \cos \alpha}{EJ} + \frac{\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \cos \alpha}{GT} \right\} \\ &\quad - \frac{Zr \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right) - \frac{M_x \pi}{GT} + \frac{M_y \pi}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GT} \right). \end{aligned}$$

Multipliziert man die Gleichungen (152) und (154), in denen ersichtlich das Verhältnis $\delta = \frac{EJ}{GT}$ der Deformationswiderstände gegen Biegung und Drehung eine Rolle spielt, mit EJ , so lauten die Gleichungen:

$$(152a) \quad Kr \left\{ \frac{\pi}{2} \sin \alpha - \delta \left[1 - \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha \right] \right\} + 2\delta Zr + \frac{\pi}{2} (1 + \delta) M_x = 0$$

$$(153a) \quad Kr \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right\} - Zr \frac{\pi}{2} + M_y \frac{\pi}{2} = 0$$

$$(154a) \quad Kr \left\{ \frac{1}{2} \sin \kappa - \frac{\kappa}{2} \cos \kappa + \delta \left[\kappa - \frac{1}{2} \sin \kappa - \frac{\kappa}{2} \cos \kappa \right] \right\} \\ - Zr \frac{\pi}{2} (1 + 3\delta) - 2\delta M_x + \frac{\pi}{2} (1 + \delta) M_y = 0.$$

Subtrahiert man jetzt Gl. (153a) von Gl. (154a), so folgt:

$$(155) \quad Kr \left[\kappa - \frac{1}{2} \sin \kappa - \frac{\kappa}{2} \cos \kappa \right] - \frac{3\pi}{2} Zr - 2M_x + \frac{\pi}{2} M_y = 0,$$

eine Gleichung, welche von δ frei ist und durch abermalige Subtraktion von Gl. (153a) noch vereinfacht wird zu:

$$(156) \quad Kr (\kappa - \sin \kappa) - \pi Zr - 2M_x = 0.$$

Man hat so zur Bestimmung der stereostatisch Unbestimmten die drei verhältnismäßig einfachen Beziehungen:

$$(156) \quad Kr (\kappa - \sin \kappa) - \pi Zr - 2M_x = 0$$

$$(153a) \quad Kr (\sin \kappa - \kappa \cos \kappa) - \pi Zr + \pi M_y = 0$$

$$(152a) \quad Kr \left\{ \frac{\kappa}{2} \sin \kappa - \delta \left[1 - \cos \kappa - \frac{\kappa}{2} \sin \kappa \right] \right\} + 2\delta Zr + \frac{\pi}{2} (1 + \delta) M_x = 0,$$

von welchen nur noch die letzte von dem Verhältnis δ abhängt.

$$\text{Für } \kappa = 0 \text{ folgt hieraus } Z = 0; \quad M_x = 0; \quad M_y = 0$$

$$\text{„ } \kappa = \pi \text{ „ „ } -Z = -K; \quad M_x = 0; \quad M_y = 0,$$

Ergebnisse, die ohne Rechnung hätten angegeben werden können.

$$\text{Für } \kappa = \frac{\pi}{2} \text{ wird } Z = \frac{K}{2}; \quad M_x = -\frac{Kr}{2}; \quad M_y = Kr \frac{\pi - 2}{2\pi}.$$

Für alle anderen Laststellungen hängen M_x , M_y und Z außer von κ auch noch von δ ab.

Sehr häufig wird übrigens der Balkenträger so belastet sein, daß die Symmetrieachse Y des Trägers auch eine Symmetrieachse der Belastung darstellt; dann greift von den zwei gleichen Kräften K die eine im Punkte κ , die andere im Punkte $(\pi - \kappa)$ an, und es sind

$$Z = K \quad \text{und} \quad M_x = -Kr \sin \kappa$$

statisch bestimmt. Das Moment M_y aber setzt sich zusammen aus den Momenten M'_y und M''_y , welche die in κ bzw. $(\pi - \kappa)$ wirkenden Kräfte K an der Stelle C hervorrufen würden, wenn sie je einzeln wirkten; nun ist nach Gl. (153a):

$$Kr (\sin \kappa - \kappa \cos \kappa) - \pi Z'r + \pi M'_y = 0$$

und

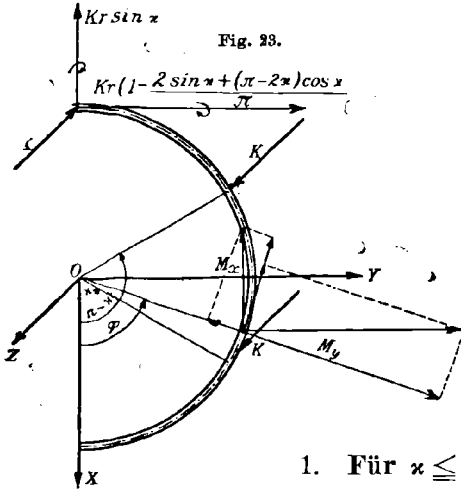
$$Kr (\sin \kappa + [\pi - \kappa] \cos \kappa) - \pi Z''r + \pi M''_y = 0,$$

woraus durch Addition:

$$-Kr (2 \sin \kappa + [\pi - 2\kappa] \cos \kappa) + \pi (Z' + Z'') r = \pi (M'_y + M''_y).$$

Mit $(Z' + Z'') = K$ und $(M'_y + M''_y) = M_y$ folgt sodann:

$$(157) \quad M_y = Kr \left(1 - \frac{2 \sin \alpha + (\pi - 2\alpha) \cos \alpha}{\pi} \right).$$



Aus Figur 23, welche die stereostatisch unbestimmten Größen in ihrer tatsächlichen Richtung zeigt, ergeben sich die Biegemomente M_n und die Torsionsmomente M_t für jede beliebige Stelle des durch zwei Kräfte symmetrisch belasteten Balkenträgers, wobei die Untersuchung sich wegen der Symmetrie auf den Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ beschränkt.

1. Für $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} M_n &= Kr \sin \alpha \cos \varphi - Kr \left(1 - \frac{2 \sin \alpha + (\pi - 2\alpha) \cos \alpha}{\pi} \right) \sin \varphi \\ &\quad + Kr \sin \varphi - Kr \sin (\pi - \alpha - \varphi) \\ &= Kr \left(\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi + \frac{2 \sin \alpha \sin \varphi + (\pi - 2\alpha) \cos \alpha \sin \varphi}{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \right), \end{aligned}$$

$$M_n = \frac{2 Kr \sin \varphi}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

Der Größtwert von M_n tritt bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ auf im Betrage

$$M_{n \max} = \frac{2 Kr}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

Für das Torsionsmoment ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_t &= Kr \sin \alpha \sin \varphi + Kr \left(1 - \frac{2 \sin \alpha + (\pi - 2\alpha) \cos \alpha}{\pi} \right) \cos \varphi \\ &\quad - Kr (1 + \cos \varphi) + Kr (1 - \cos [\pi - \alpha - \varphi]) \\ &= Kr \left(\sin \alpha \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{2 \sin \alpha \cos \varphi + (\pi - 2\alpha) \cos \alpha \cos \varphi}{\pi} \right. \\ &\quad \left. - 1 - \cos \varphi + 1 + \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \right), \end{aligned}$$

$$M_t = \frac{2 Kr \cos \varphi}{\pi} (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Das Torsionsmoment M_t nimmt von der Stelle $\varphi = \alpha$ ständig ab und verschwindet für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2. Für $0 \leq \varphi \leq \alpha$:

Für diesen Bereich vermehren sich die unter 1. berechneten Momente um die von der bei α gelegenen Kraft K ausgeübten Momente; daher wird:

$$M_n = \frac{2 Kr \sin \varphi}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - Kr \sin (\alpha - \varphi)$$

das biegende Moment und

$$M_t = \frac{2 Kr \cos \varphi}{\pi} (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) + Kr (1 - \cos [\alpha - \varphi]).$$

Man bemerkt, daß auch hier die oben abgeleitete allgemeine Beziehung $\frac{\partial M_t}{\partial \varphi} = M_n$ erfüllt ist.

Die obigen Ausführungen über die Wirkungen zweier am Balkenträger symmetrisch angreifender gleicher Kräfte gelten nach dem Superpositionsgesetze ohne weiteres auch für eine Beanspruchung durch ein System von $2n$ Kräften, von denen je zwei gleich groß und symmetrisch zur y -Achse gelegen sind; insbesondere gelten sie auch für den als Grenzfall $n = \infty$ sich ergebenden Fall, für die Beanspruchung durch eine zur y -Achse symmetrische stetig verteilte Belastung.

Bezeichnen wir für diesen besonderen Fall die veränderliche Intensität der Belastung mit k , so wird nach den auf S. 305 und 306 aufgestellten Gleichungen:

$$(158) \quad Z = \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{\pi}{2}} k r \cdot d\xi$$

$$(159) \quad M_x = - \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{\pi}{2}} k r^2 \sin \xi d\xi$$

$$(160) \quad M_y = \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{\pi}{2}} k r^2 \left(1 - \frac{2 \sin \xi + (\pi - 2\xi) \cos \xi}{\pi} \right) d\xi.$$

Ist das Verteilungsgesetz $k = k(\xi)$ der Belastung bekannt, so sind die Größen Z , M_x und M_y durch die Gleichungen (158) bis (160) leicht zu berechnen.

Beispiel für stetige Belastung.

Wir wählen den einfachen Fall gleichförmiger Belastung, wo $k = k_0 = \text{constans}$.

Hier wird

$$Z = \frac{\pi}{2} k_0 r; \quad M_x = -k_0 r^2; \quad M_y = k_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right).$$

Für eine beliebige Stelle φ ist sodann:

$$\begin{aligned} M_n &= k_0 r^2 \cos \varphi - k_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \sin \varphi + \frac{\pi}{2} k_0 r^2 \sin \varphi - k_0 r^2 \int_{\xi=\varphi}^{\xi=\pi} \sin (\xi - \varphi) d\xi \\ &= k_0 r^2 \left(\cos \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \varphi + \frac{4}{\pi} \sin \varphi + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - 1 - \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

oder

$$(161) \quad M_n = k_0 r^2 \left(\frac{4}{\pi} \sin \varphi - 1 \right)$$

das Biegemoment und

$$\begin{aligned} M_t &= k_0 r^2 \sin \varphi + k_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \cos \varphi - \frac{\pi}{2} k_0 r^2 (1 + \cos \varphi) \\ &\quad + k_0 r^2 \int_{\xi=\varphi}^{\xi=\pi} (1 - \cos [\xi - \varphi]) d\xi \\ &= k_0 r^2 \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\pi}{2} \cos \varphi - \frac{4}{\pi} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \pi - \varphi - \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

oder

$$(162) \quad M_t = k_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{4}{\pi} \cos \varphi \right)$$

das Torsionsmoment.

Für $\varphi = 0$ erhält man die Größtwerte von M_n und M_t mit

$$\begin{aligned} M_n &= -k_0 r^2 \\ M_t &= k_0 r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right). \end{aligned}$$

VI. Abschnitt.

Die Stabilität des kreisförmigen Stabes unter Wirkung eines konstanten Normaldruckes.

Bei der Untersuchung des geschlossenen Kreisringes und des gelenkig befestigten, sowie des tangententreu befestigten Kreisbogenträgers von beliebigem Mittelpunktswinkel 2α hatte sich ergeben, daß unter Wirkung eines konstanten Normaldruckes von der Intensität p kg/Längeneinheit keine Biegungsbeanspruchung auftritt. Wir hatten schon oben auf die Tatsache hingewiesen, daß sich der Stab in diesem Falle in einem Gleichgewichtszustande befindet, der nicht unter allen Umständen stabil ist. Zwischen einem so beanspruchten kreisförmigen Stabe und einem durch eine achsiale Druckkraft beanspruchten geraden Stabe, der

ja bekanntlich den von L. Euler¹⁾ erstmals aufgestellten Stabilitätsbedingungen unterliegt, besteht eine so vollkommene Analogie, daß sich die Eulerschen Formeln als Spezialfälle ($r = \infty$) der für Kreisbögen zu entwickelnden Bedingungen ergeben werden.

Die erste Behandlung des Stabilitätsproblems für den geschlossenen Kreisring verdankt man M. Lévy.²⁾ In seiner Abhandlung „Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et une de ses applications“ stellt er die Gleichung der Bogenlänge s und der elastischen Linie $r = r(\varphi)$ des unter Flüssigkeitsdruck ausknickenden dünnen Kreisringes unter Anwendung elliptischer Funktionen auf; er unterwirft sodann s und r den beiden Bedingungen des Problems, wonach

$s = s_0$ dem Ringumfange während des Knickens gleich bleiben,

$r = r(\varphi)$ eine periodische Funktion mit der Periode $\varphi_{00} = \frac{2\pi}{n}$, und n

irgend eine positive ganze Zahl sein muß, wenn der Ring geschlossen bleiben soll.

Indem Lévy sodann die nicht integrierbaren Funktionen s und r in Grenzen einschließt, findet er, daß die Stabilitätsbedingung durch die Ungleichung $\frac{EJ}{pr^3} > \frac{4}{9}$ in praktischen Fällen genügend gut beschrieben sei, während für einen Ring von mathematisch exakter Kreisform die Bedingung $\frac{EJ}{pr^3} > \frac{3}{9}$ bereits ausreiche.

M. Halphen³⁾ hat sodann die von Lévy aufgestellten Gleichungen strenge gelöst und als Stabilitätsbedingung $\frac{EJ}{pr^3} > \frac{3}{9}$ gefunden.

Eine umfassende Diskussion der beim geschlossenen Ring möglichen elastischen Linien gibt A. G. Greenhill⁴⁾ auf Grund der angeführten Untersuchungen.

Schließlich hat J. Boussinesq⁵⁾ eine Lösung mit elementaren Hilfsmitteln für den geschlossenen Ring gegeben, welche der folgenden Darstellung auch für den Bogen vom Zentriwinkel 2α zugrunde gelegt ist.

1) In dem Anhang „De curvis elasticis“ seiner Abhandlung „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes“. Lausanne und Genf 1744; deutsch von H. Linsenbarth, Ostwalds Klassiker, Leipzig 1910.

2) Journal de Mathématiques pures et appliquées (Liouville) 3. Série, Tome X. (1884), p. 5—42.

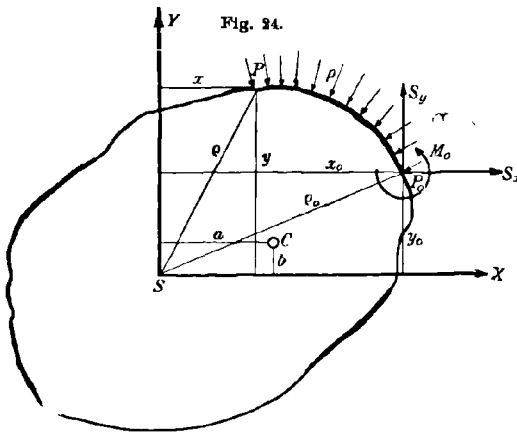
3) „Sur une courbe élastique“, Comptes Rendus, Paris, t. 98 (1884) p. 422—425.

4) „The elastic curve under uniforme normal pressure“, Mathematische Annalen Bd. 52 (1899), S. 465—500.

5) „Résistance d'un anneau à la flexion etc.“ Comptes Rendus, Paris, t. 97 (1883), p. 843

§ 25. Beanspruchung eines dünnen geschlossenen Ringes von beliebiger Form und beliebiger Wandstärke durch gleichförmig verteilten Normaldruck.¹⁾ (Fig. 24.)

Wiewohl die hier zu führende Untersuchung, wenn sie von vornherein auf symmetrische Ringe sich beschränkte, wesentlich einfacher



sich gestaltete, soll das vorliegende Problem mit Rücksicht auf seine große Bedeutung für technische Aufgaben in voller Allgemeinheit in Angriff genommen werden.

Es liege ein dünner geschlossener Ring in der XY -Ebene vor, dessen neutrale Faser durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ in bezug auf ein noch zu wählendes Koordinatensystem SXY gegeben sei. Ist ds ein Bogenelement

der neutralen Faser, E der Youngsche Modul des dort vorliegenden Materials und J das Trägheitsmoment, so stellt $\frac{ds}{EJ}$ die Biegsamkeit des Elementes ds dar, die wir abkürzend mit de bezeichnen, wobei der Buchstabe e an das Wort Elastizität erinnern mag.

Es bereitet keine Schwierigkeit, sich die von Ort zu Ort veränderliche Größe de als eine Art von Gewicht, das man etwa als „Biegsamkeitsgewicht des Elementes ds “ bezeichnen könnte, vorzustellen. Es ist dann, wenn L die ganze Länge der neutralen Faser bedeutet, durch $\int_0^L de = e$ das Biegsamkeitsgewicht des ganzen Ringes gegeben. Wir denken uns den Schwerpunkt S und die Trägheitshauptachsen für das System der de bestimmt und wählen diese Achsen als Koordinatenachsen. Kraft dieser Wahl ist sodann:

$$\int_0^L x de = 0; \quad \int_0^L y de = 0; \quad \int_0^L xy de = 0.$$

1) Vgl. Marbec, „Sur l'équilibre d'un anneau fermé“ in L'Association Technique Maritime, 1908, wo diese Theorie auf vorwiegend synthetischem Wege entwickelt wird.

Ferner schreiben sich durch Einführung von Trägheitsradien, deren Bedeutung aus den Indizes leicht ersichtlich ist, die Integrale:

$$\int_0^L x^2 de = i_y^2 e; \quad \int_0^L y^2 de = i_x^2 e; \quad \int_0^L (x^2 + y^2) de = \int_0^L \rho^2 de = i_{\rho}^2 e$$

$$\int_0^L (x^2 + y^2) x de = \int_0^L \rho^2 x de = i_{\rho, y}^3 e$$

und

$$\int_0^L (x^2 + y^2) y de = \int_0^L \rho^2 y de = i_{\rho, x}^3 e$$

einfach als Vielfache von e .

Wird nun der Ring, dessen achsiale Abmessung wir gleich der Längeneinheit annehmen, einem überall normal zu ds wirkenden Druck von p kg/Längeneinheit ausgesetzt, der von außen nach innen gerichtet sei, so lassen sich die in einem beliebigen aber für die Dauer der Untersuchung festgehaltenen Punkte $P_0(x_0/y_0)$ wirkenden Spannungen durch zwei Komponenten S_x und S_y und ein Moment M_0 ersetzen; diese drei Größen sind stereostatisch unbestimmt. Ihre Ermittlung ergibt sich aus den drei für den Punkt P_0 bekannten Deformationsbedingungen:

$$\sum \beta_i = 0; \quad \sum \Delta x = 0; \quad \sum \Delta y = 0,$$

wobei das Summenzeichen die Wirkungen von S_x , S_y , M_0 und p zusammenfassen möge.

Nun ist aber das in dem laufenden Punkte $P(x, y)$ herrschende Biegemoment M durch

$$M = M_0 + S_y(x_0 - x) + S_x(y_0 - y) - \frac{p}{2} (x_0^2 - 2x_0x + x^2 + y_0^2 - 2y_0y + y^2)$$

oder

$$M = M_0 + S_y(x_0 - x) + S_x(y_0 - y) - \frac{p}{2} (\rho^2 - \rho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0)$$

gegeben. Aus

$$\sum \beta_i = \int_0^L M de = 0, \quad \sum \Delta x = \int_0^L M(y_0 - y) de = 0$$

und

$$\sum \Delta y = \int_0^L M(x_0 - x) de = 0$$

wird daher mit obigem Werte von M :

$$\sum \beta_s = M_0 e + S_y \int_0^L (x_0 - x) de + S_x \int_0^L (y_0 - y) de - \frac{p}{2} \int_0^L (\varrho^2 + \varrho_0^2 - 2x x_0 - 2y y_0) de = 0$$

$$\begin{aligned} \sum \Delta x = & M_0 \int_0^L (y_0 - y) de + S_y \int_0^L (x_0 y_0 - x_0 y - x y_0 + x y) de + S_x \int_0^L (y_0^2 - 2y_0 y + y^2) de \\ & - \frac{p}{2} \int_0^L (y_0 \varrho^2 + y_0 \varrho_0^2 - 2x x_0 y_0 - 2y y_0^2 - y \varrho^2 - y \varrho_0^2 + 2x x_0 y + 2y^2 y_0) de = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \Delta y = & M_0 \int_0^L (x_0 - x) de + S_y \int_0^L (x_0^2 - 2x_0 x + x^2) de + S_x \int_0^L (x_0 y_0 - x_0 y - x y_0 + x y) de \\ & - \frac{p}{2} \int_0^L (x_0 \varrho^2 + x_0 \varrho_0^2 - 2x x_0^2 - 2y x_0 y_0 - x \varrho^2 - x \varrho_0^2 + 2x^2 x_0 + 2x y y_0) de = 0. \end{aligned}$$

Beachtet man bei der Integration die oben angeführten Beziehungen und führt die Trägheitsradien ein, so gehen diese Gleichungen über in:

$$(163) \quad M_0 + S_y x_0 + S_x y_0 - \frac{p}{2} (i_p^2 + \varrho_0^2) = 0$$

$$(164) \quad M_0 y_0 + S_y x_0 y_0 + S_x (y_0^2 + i_x^2) - \frac{p}{2} (y_0 i_p^2 + y_0 \varrho_0^2 - i_{\varrho,x}^3 + 2y_0 i_x^2) = 0$$

$$(165) \quad M_0 x_0 + S_y (x_0^2 + i_y^2) + S_x x_0 y_0 - \frac{p}{2} (x_0 i_p^2 + x_0 \varrho_0^2 - i_{\varrho,y}^3 + 2x_0 i_y^2) = 0.$$

Multipliziert man Gl. (163) mit y_0 bzw. x_0 und subtrahiert diese Gleichungen bezügl. von (164) und (165), so folgt:

$$S_x i_x^2 = \frac{p}{2} (2y_0 i_x^2 - i_{\varrho,x}^3)$$

$$S_y i_y^2 = \frac{p}{2} (2x_0 i_y^2 - i_{\varrho,y}^3),$$

woraus sich die Komponenten S_x und S_y zu:

$$S_x = p \left(y_0 - \frac{i_{\varrho,x}^3}{2i_x^2} \right)$$

$$S_y = p \left(x_0 - \frac{i_{\varrho,y}^3}{2i_y^2} \right)$$

ergeben.

Die Quotienten $\frac{i_{\varrho,x}^3}{2i_x^2}$ und $\frac{i_{\varrho,y}^3}{2i_y^2}$ haben die Dimension von Strecken, deren geometrische Bedeutung noch zu erläutern sein wird; schreiben wir abkürzend:

$$\frac{\int_0^L (x^2 + y^2) y \, de}{2 \int_0^L y^2 \, de} = b$$

$$\frac{\int_0^L (x^2 + y^2) x \, de}{2 \int_0^L x^2 \, de} = a,$$

so wird

$$(166) \quad S_x = p(y_0 - b); \quad (167) \quad S_y = p(x_0 - a).$$

Mit Einführung dieser Werte in Gl. (163) folgt:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{p}{2} (i_p^2 + \varrho_0^2) - p(x_0 - a)x_0 - p(y_0 - b)y_0 \\ &= \frac{p}{2} (i_p^2 + \varrho_0^2 - 2x_0^2 + 2ax_0 - 2y_0^2 + 2by_0) \end{aligned}$$

$$(168) \quad M_0 = \frac{p}{2} (i_p^2 - \varrho_0^2 + 2ax_0 + 2by_0).$$

Die in Gl. (168) ausgesprochene Beziehung läßt eine sehr einfache geometrische Deutung zu. Addiert man nämlich zu Gl. (168) die Identität

$$0 \equiv \frac{p}{2} (a^2 + b^2 - a^2 - b^2),$$

so folgt:

$$M_0 = \frac{p}{2} (i_p^2 + a^2 + b^2 - \varrho_0^2 - a^2 - b^2 + 2ax_0 + 2by_0).$$

Nun ist aber $i_p^2 + a^2 + b^2 = i_c^2$ nichts anderes als das Quadrat des Trägheitsradius i_c in bezug auf eine durch den Punkt $C\{a/b\}$ gehende zur XY -Ebene normale Achse; daher ist

$$M_0 = \frac{p}{2} (i_c^2 - \varrho_0^2 - a^2 - b^2 + 2ax_0 + 2by_0).$$

Zieht man nun um $C\{a/b\}$ den Kreis mit dem Radius i_c , so hat die Potenz des Punktes $P_0\{x_0/y_0\}$ in bezug auf diesen Kreis den Wert (vgl. Fig. 25):

$$\begin{aligned} \overline{P_0 T}^2 &= \overline{CT}^2 - \overline{CP_0}^2 \\ &= i_c^2 - (x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 - 2by_0 + b^2) \\ &= i_c^2 - \varrho_0^2 + 2ax_0 - a^2 + 2by_0 - b^2. \end{aligned}$$

Dies ist aber der Faktor von $\frac{p}{2}$ in der Gleichung für M_0 ; daher wird:

$$(169) \quad M_0 = \frac{p}{2} \cdot \overline{P_0 T}^2.$$

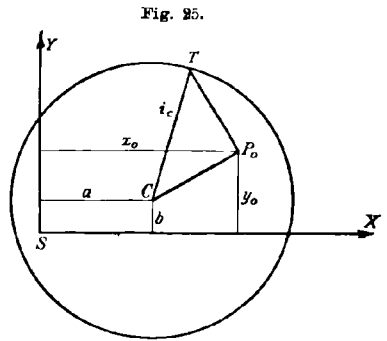


Fig. 25.

Die Resultierende aus S_x und S_y wird durch

$$R_0^2 = S_x^2 + S_y^2 = p^2[(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2] = p^2 \cdot \overline{CP_0^2}$$

bestimmt. Es ist also die Schnittkraft R_0 :

$$(170) \quad R_0 = p \cdot \overline{CP_0}.$$

Marbec nennt den ausgezeichneten Kreis um C mit i_c als Radius „cercle des noeuds“, was wir mit „Knotenkreis“ übersetzen wollen.

Beachtet man noch, daß die Größen $(x_0 - a)$ und $(y_0 - b)$ mit den Koordinaten des Punktes P_0 in bezug auf das nach C parallel verschobene Koordinatensystem $CX'Y'$ identisch sind, so ergeben sich folgende Sätze:

1. Für einen unter gleichförmigem Normaldruck p stehenden Ring existiert ein für die Beurteilung seines Spannungszustandes wichtiger Kreis (Knotenkreis).
2. Sein Mittelpunkt C hat in bezug auf das Hauptachsenkreuz des Systems der Biegsamkeitsgewichte $de = \frac{ds}{EJ}$ die Koordinaten:

$$a = \frac{\int_0^L \varrho^2 x de}{2 \int_0^L x^2 de} \quad b = \frac{\int_0^L \varrho^2 y de}{2 \int_0^L y^2 de};$$

sein Radius ist durch $i_c^2 = i_p^2 + a^2 + b^2$ bestimmt, wo i_p den Trägheitsradius für das polare Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerachse bedeutet.

3. Das Biegemoment an der Stelle P_0 ist gleich der mit $\frac{p}{2}$ multiplizierten Potenz von P_0 in bezug auf den Knotenkreis; es ist positiv, wenn P_0 innerhalb des Knotenkreises liegt, Null, wenn P_0 auf dem Knotenkreis, und negativ, wenn P_0 außerhalb des Knotenkreises liegt.
4. Die in P_0 wirkenden stereostatisch unbestimmten Komponenten S_x und S_y sind gleich den mit p multiplizierten Koordinaten $(y_0 - b)$ bzw. $(x_0 - a)$ des Punktes P_0 in bezug auf das nach C parallel verschobene Koordinatenkreuz.
5. Die Resultierende R_0 der Spannungen in P_0 ist gleich dem mit p multiplizierten Abstand P_0C des Punktes P_0 vom Mittelpunkt C des Knotenkreises und steht auf P_0C senkrecht.

Besondere Vereinfachungen treten für die Berechnung des Knotenkreises ein, wenn der Ring bezüglich einer der Trägheitshauptachsen

symmetrisch ist; dann liegt C auf dieser Achse. Insbesondere fällt bei Symmetrie bezüglich beider Achsen C in den Schwerpunkt S .

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß alle diese Beziehungen mit Vertauschung des Vorzeichens auch für Innendruck gelten.

§ 26. Stabilität des geschlossenen Kreisringes.

Der geschlossene Kreisring ist für konstantes EJ zweifach symmetrisch; sein Knotenkreismittelpunkt C fällt daher mit dem Mittelpunkte M des Kreisringes als dem Schwerpunkte des Systems der Biegsamkeitsgewichte zusammen.

Aus Gleichung (168) folgt daher

$$M = \frac{p}{2} (i_p^2 - r^2).$$

Da nun in § 5 gezeigt wurde, daß $M = 0$ ist, so folgt die Gleichung $i_p = r$ hieraus sofort.

Wir nehmen nun an, daß der Flüssigkeitsdruck p eine noch zu bestimmende Größe p_k , den kritischen Wert erreiche, bei dem eben der Kreisring zu knicken beginnt, und setzen die Gleichung seiner Zentralinie für diesen Fall in der Form an:

$$r_\varphi = r + \nu,$$

wo ν wie früher eine Funktion von φ ist, die gegenüber r als klein von der ersten Ordnung vorausgesetzt wird.

Ist die Kurve r_φ ebenfalls zweifach symmetrisch, so liegt auch ihr Knotenkreismittelpunkt in aller Strenge im Mittelpunkte des Kreisringes, ist sie es nicht, so wird immerhin der Mittelpunkt des Knotenkreises nur um eine kleine Strecke von der Ordnung der ν sich aus der Kreismitte entfernen, so daß auch in diesem Falle $i_p = r$ für die deformierte Kurve r_φ erhalten bleibt, während $r + \nu$ den Abstand eines laufenden Punktes vom Kreismittelpunkt O bedeutet. Somit erhält man für das Biegemoment M den Ausdruck

$$M = \frac{p}{2} (i_p^2 - [r + \nu]^2) = \frac{p}{2} (r^2 - [r + \nu]^2),$$

welcher mit Vernachlässigung von $\frac{p}{2} \nu^2$, als klein von höherer Ordnung in

$$M = -p r \nu$$

übergeht.

Damit schreibt sich aber die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 \nu}{d\varphi^2} + \nu = -\frac{p r^3 \nu}{EJ}$$

oder

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + n^2 v = 0,$$

wo

$$n^2 = 1 + \frac{p r^3}{E J}.$$

Differentialgleichungen von diesem Typus sind aber aus der Mechanik, wo sie harmonische Bewegungen darstellen, bekannt; wir schreiben ihr Integral in der dort gebräuchlichen Form an:

$$(171) \quad v = v_0 \sin(n\varphi + \alpha_0),$$

worin v_0 und α_0 die Integrationskonstanten sind.

Wie nun auch übrigens die Knickfigur des Kreisringes aussehen mag, so ist jedenfalls von ihr zu verlangen, daß sie eine geschlossene Kurve sei. Diese Forderung ist identisch mit der Forderung, daß die Funktion v periodisch ist mit der Periode 2π oder mit einer kleineren Periode φ_{00} der Beschaffenheit, daß der Quotient $\frac{2\pi}{\varphi_{00}}$ eine von Null verschiedene positive ganze Zahl wird. Dieser Forderung genügt die Reihe der Werte der Zahlen $n = \sqrt{1 + \frac{p r^3}{E J}}$:

$$n \longrightarrow 1, 2, 3 \dots$$

oder

$$n^2 = 1 + \frac{p r^3}{E J} \longrightarrow 1, 4, 9 \dots$$

Der kleinste Wert in dieser Reihe entspricht dem kleinsten Druck p , bei welchem das Ausknicken des Ringes eintritt; dieser Wert ist also p_k , der kritische Druck.

Der Wert $n = 1$ führt auf das widersinnige Ergebnis, daß der Ring bereits für $p = 0$ knickt, wobei doch gleichzeitig das Biegemoment

$$M = -p r v = 0$$

verschwindet.

Nimmt man den nächst größeren Wert $n = 2$, so folgt dagegen

$$(172) \quad p_k = \frac{3 E J}{r^3}$$

und dies ist der kritische Druck.

Der für $n = 1$ aufgetretene Widerspruch findet seine Erklärung, wenn wir uns an die in § 3 gegebene Deutung der elastischen Linie erinnern. Wir hatten uns dort davon überzeugt, daß die dem Werte $M = 0$ entsprechende elastische Linie

$$v = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$$

nichts anderes darstellt als eine deformationslose Verschiebung des ganzen Ringes. Der Fall $n = 1$ entspricht also einer im mathematischen Sinne *möglichen* elastischen Linie, woraus noch nicht geschlossen werden kann, daß diese auch *wirklich* sei im physikalischen Sinne; in der Tat befindet sich ja auch das Kräftesystem des unter Flüssigkeitsdruck stehenden Ringes im Zustande des statischen Gleichgewichtes, wobei eine Translation oder Rotation des Ringes unmöglich ist.

Nachdem ein Mißverständnis bei den Voraussetzungen, auf denen die Eulerschen Untersuchungen für den geraden Stab beruhten, in neuerer Zeit zu einem lange in Fachzeitschriften und Broschüren fortgeführten Meinungswechsel über die „Unvollkommenheiten der Eulerschen Theorie“ und über die „wahre Knickformel“ geführt hat, muß darauf hingewiesen werden, daß alle derartigen Stabilitätsbedingungen lediglich den Grenzwert zu berechnen gestatten, bei dem ganz sicher der Knickvorgang einsetzt, wenn er nicht schon vorher aus anderen Gründen, die sich der Rechnung entziehen, eingetreten ist. Woraus sich die praktische Regel ergibt, Stabilitätsbedingungen mit entsprechenden Sicherheitsgraden anzuwenden.

§ 27. Stabilität des Kreisbogens.

Auch der Kreisbogen läßt sich als geschlossener Ring auffassen, für welchen alle in § 25 entwickelten Beziehungen Geltung behalten, wenn man nämlich nur die Befestigungsstellen der Bogenenden sich durch einen Stab geschlossen denkt, der in aller Strenge undeformierbar ist. In der Tat wird durch diese Auffassung an dem elastischen Problem gar nichts geändert. Es gibt also auch für den elastischen Kreisbogen einen Knotenkreis, durch welchen dessen Beanspruchungszustand übersichtlich dargestellt wird; seine Lage und Größe ist leicht bestimmt, nachdem wir in § 14 erwiesen haben, daß für den Kreisbogen, gleichviel ob er gelenkig oder tangential befestigt ist, das durch gleichförmig verteilten Normaldruck hervorgerufene Biegemoment an jeder Stelle des Bogens verschwindet. Das Biegemoment in einem unter Flüssigkeitsdruck stehenden Ringe ist aber Null in den Schnittpunkten des Knotenkreises mit der neutralen Faser. Daher fällt beim Kreisbogen der Knotenkreis mit dem Kreise der neutralen Faser zusammen, und es ist wie beim geschlossenen Kreisringe so auch beim Bogen für kleine Deformationen v :

$$M = -prv,$$

wozu auch wieder die Gleichung der elastischen Linie gehört:

$$v = v_0 \sin(n\varphi + \alpha_0),$$

mit ν_0 und α_0 als Integrationskonstanten und

$$n^2 = 1 + \frac{pr^3}{EJ}.$$

Wir unterscheiden die beiden Befestigungsarten des Bogens wie früher:

a) Der Bogen sei gelenkig befestigt:

Die Linie des ausgeknickten Bogens verläuft wellenförmig um die ursprüngliche neutrale Faser und so, daß $\nu = 0$ für $\varphi = \pm \alpha$ und $\varphi = 0$. Die Stelle $\varphi = 0$ trennt gleichzeitig den Bereich, wo $\nu < 0$ ist, von dem Gebiete $\nu > 0$. Daher ist die Funktion ν periodisch mit der Periode 2α . Diesem Verhalten genügt die Bedingung

$$n = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Daher wird für den gelenkig befestigten Bogen vom Zentriwinkel 2α der kritische Druck durch

$$(173) \quad p_k = \frac{EJ}{r^3} \left[\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]$$

bestimmt.¹⁾

Offenbar geht Gl. (173) für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in Gl. (172) über, wie ja auch der geschlossene Ring beim Knicken in derselben Weise deformiert wird wie der Ringbogen vom Zentriwinkel π , dessen Enden gelenkig befestigt sind.

Schreibt man Gl. (173) in der Form:

$$p_k \cdot r = EJ \left[\left(\frac{\pi}{r\alpha} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right]$$

und beachtet, daß $p_k \cdot r$ die im ganzen Bogen konstante Druckkraft P_k bedeutet (§ 14 und § 25) während $r\alpha = \frac{b}{2}$ die halbe Bogenlänge ist, so wird

$$P_k = EJ \left[\frac{4\pi^2}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right].$$

Läßt man r über jedes Maß wachsen, so folgt hieraus für $r = \infty$

$$(174) \quad P_k = 4\pi^2 \frac{EJ}{b^2},$$

die Eulersche Formel für die Knickkraft eines gelenkig befestigten geraden Stabes von der Länge b , dessen Mitte nicht ausknicken kann.

1) Die Stabilität des Kreisbogens wurde von E. Hurlbrink auf Grund der hier nunmehr bestätigten Hypothese untersucht, daß M_φ eine Kosinusfunktion sei. Vgl. Schiffbau, 1908, 640 ff.

b) Der Bogen sei tangententreu befestigt:

Hier ändert sich nur die Periode der Funktion ν . Da auch hier die Druckkraft über den ganzen Bogen konstant ist, so kann in Analogie zu dem tangententreu eingespannten geraden Stabe die Periode von ν zu $\frac{2}{3}$ des Bogens 2α erschlossen werden, wie für die Knicklinie des Stabes von der Länge b die Periode $\frac{2}{3}b$ ist. Diese Periode von ν wird erreicht durch die Bedingung $n \frac{4}{3} \alpha = 2\pi$ oder

$$n = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\alpha},$$

womit

$$(175) \quad p_k = \frac{EJ}{r^3} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]$$

als Grenzdruck für den Zustand stabilen Gleichgewichtes folgt. Formt man diese Gleichung durch Multiplikation mit r um und läßt $r = \infty$ werden, so folgt

$$P_k = 9\pi^2 \frac{EJ}{b^2},$$

eine Gleichung, welche die Eulersche Knicklast für einen beiderseits tangententren befestigten geraden Stab von der Länge b darstellt, der in seiner Mitte am Ausknicken verhindert ist.

Literatur.

A. Grundlegende Arbeiten.

- L. Euler, *Additamentum „De curvis elasticis“* zu der Abhandlung „*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*“. Lausanne und Genf 1744; deutsch von H. Linsenbarth, *Ostwalds Klassiker*, Leipzig 1910.
 Barré de Saint-Venant, *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts, auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens*. *Comptes Rendus, Paris*. Tome 17 (1843) p. 942 et 1020.
 Thomson & Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Part II, Oxford 1883.
 Bresse, *Cours de Mécanique Appliquée*, I. Partie, Ch. IV et V, Paris 1886.

B. Spezielle Untersuchungen.

- Hoppe, R. *Biegung eines Ringes durch gleichmäßigen Druck nach außen*, *Zeitschrift f. Math. u. Physik*, Bd. 9 (1862), S. 37.
 Peschka, G. A. *Über die Formveränderungen prismatischer Stäbe durch Biegung*, *Zeitschrift f. Math. u. Physik*, Bd. 13 (1866), S. 38.
 Lamb, H. *On the Flexure and the Vibrations of a Curved Bar*, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 19 (1888), p. 365.
 Heimann, H. *Die durch das Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreiszyinders*, *Zeitschrift f. Math. u. Physik*, Bd. 49 (1902), S. 348.

- Linsenmann, H. Die elastische Linie der Gehäuse von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern, Elektrotechnische Zeitschrift, Bd. 23 (1902), S. 81 u. 103 und Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 53 (1906), S. 245.
- Forchheimer, Ph. Zur Festigkeit weiter Rohre, Zeitschrift des österr. Ing. u. Architektenvereins Bd. 56 (1904), S. 133 u. 149.
- Stutz, J. Theorie des halbkreisförmigen Balkenträgers, Zeitschrift des österr. Ing. und Architektenvereins Bd. 56 (1904), S. 622.
- Leon, A. Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von innen erwärmt werden, unter Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 52 (1905), S. 174.
- Timpe, A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 52 (1905), S. 348.
- Weitbrecht, Th. Über die elastische Deformation des kreisförmigen Ringes, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 52 (1905), S. 383.
- Leon, A. Schornsteinwärmespannungen, Z. d. V. d. I. 1907, S. 1315.
- Federhofer, Dr. K. Theorie des elastischen Kreisbogens, Zeitschrift für Architektur u. Ing.-Wesen 1910, S. 459.¹⁾

Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine.

Von Dr. LOTHAR VON SCHRUTKA in Brünn.

1. Einleitung. Der Hauptzweck der Rechenmaschinen liegt zwar unstreitig in der Erleichterung des Rechnens mit vielstelligen Zahlen, indes gibt es auch einzelne Fälle, in denen sich die Maschinen verwenden lassen, um Rechnungen mit kleineren Zahlen, bei denen gewisse Operationen sehr oft wiederkehren, bequemer zu gestalten. In den folgenden Zeilen will ich auf einige solche Fälle aufmerksam machen.

Eine Erleichterung der genannten Art ist meines Erachtens nicht gering anzuschlagen, vielleicht höher, als man auf den ersten Blick anzunehmen geneigt wäre. Das Operieren mit einer Entwicklung z. B., in der nur die Koeffizienten 1, 0, — 1 auftreten, führt eben wegen der immer wiederkehrenden Operationen zu rascher Abstumpfung, und, was noch schlimmer ist, zu einem Gefühl des Mißtrauens gegen die errechneten Resultate. Es fehlt, wenn ich mich so ausdrücken darf, jene persönliche Beziehung des Rechners zu den Daten der Rechnung, die sich „charaktervollen“, d. h. untereinander verschiedenen Zahlen gegenüber bald einzustellen pflegt und manche Verwechslung hintanzuhalten vermag.

¹⁾ Während der Drucklegung dieser Abhandlung erschien: Federhofer, Dr. K. Zur Berechnung des Kreisringes, Zeitschrift für Architektur u. Ing.-Wesen 1912, S. 303.

I.

2. Operieren mit ganzen Funktionen mit kleinen ganzzahligen Koeffizienten. Sind

$$A = \Sigma a_i x^i, \quad B = \Sigma b_i x^i, \dots$$

gegeben und wird die Entwicklung

$$F = \Phi(A, B, \dots) = \Sigma f_i x^i$$

gesucht, so kann man, wenn man sich irgendwie die Überzeugung verschafft hat, daß die f_i sämtlich kleiner als eine ganze Zahl g bleiben, $x = g$ setzen, A, B, \dots mithin als Zahlen im g -adischen Zahlensystem ansehen, F aus ihnen berechnen und die „Ziffern“ f_i daraus entnehmen.¹⁾

Die Koeffizienten a_i, b_i, \dots sind zwar zunächst stillschweigend als positiv vorausgesetzt worden, indes können auch negative zugelassen werden, wenn man die Zahlen A, B, \dots (soweit nicht beim Rechnen mit der Maschine die negativen Ziffern verwendbar sind), in die übliche Form verwandelt, F berechnet und jetzt wieder negative Ziffern einführt. In diesem Falle ist g größer als der größte der Werte $|f_i| + |f_{i+1}|$ zu wählen, damit eine Vermengung von Nachbarstellen ausgeschlossen bleibe. Ein anderes Mittel wäre die Vermehrung aller Koeffizienten um denselben Betrag; dies führt aber zu umständlichen Rechnungen.

Als Basis g wird wohl in der Regel eine dekadische Einheit, 10 oder 100, oder auch $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ die geeignetste sein. Nur wenn etwa der Minimalwert von g z. B. wenig über 10 zu liegen kommt, wäre eine andere einfache Zahl, etwa 20, in Betracht zu ziehen.

Um z. B. die ersten Glieder der Entwicklung

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

(deren Koeffizienten die Anzahl der Zerlegungen in die beliebig oft genommenen Summanden 1, 2, 3 angeben, also gewiß positiv sind), zu bestimmen, berechne man zunächst den Nenner; hier kann $g = 10$ gesetzt werden:

$$\bar{11} \cdot 10\bar{1} \cdot 100\bar{1} = 9 \cdot 99 \cdot 999 = 890109 = \bar{11}\bar{1}011\bar{1},$$

also

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6.$$

1) Auf einem ähnlichen Gedanken beruht Kroneckers Übertragung der Methode der Faktorenzerlegung von Funktionen mit einer Variablen auf solche mit mehreren Variablen (siehe: Grundzüge einer arithmetischen Theorie algebraischer Größen, Crelles Journal Bd. 92 (1882), S. 11).

Nun dividiere man:

$$\frac{1}{890109} = 1123457, \text{ Rest } 813187,$$

also ist

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + \dots$$

II.

3. Entwicklung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch.
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen. Bei der Entwicklung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch oder bei der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen, zwei Aufgaben, die bekanntlich durch ein und dasselbe Rechenverfahren, den Euklidischen Algorithmus, gelöst werden, kann man unter gewissen Voraussetzungen über die Stellenzahl, die ausdrücklich zu formulieren wohl überflüssig ist, eine große Ersparnis an Einstellungen durch eine Rechenmethode erzielen, die im folgenden an dem Beispiel 2754, 791 vorgeführt wird. Es ist hierbei eine Rechenmaschine mit 6 Stellen im Schaltwerk, 7 Stellen im Quotienten und 12 Stellen im Zählwerk vorausgesetzt. Die eingerahmten Zahlen beziehen sich auf das Schaltwerk, die nicht eingerahmten auf das Zählwerk, die links beigetzten auf den Quotienten. Die überzähligen Nullen sind zumeist weggelassen. Der Quotient ist nach jeder zweiten Division auszulöschen (durch * angedeutet).

	000002754791
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000791</div>
3	381791
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000381</div>
3002*	381029
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000029</div>
1	091029
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000029</div>
13	004029
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000004</div>
13007*	004001
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">000001</div>
4	000001

(Bei den letzten Operationen würde man natürlich zum Kopfrechnen übergehen). Also sind die Teilnenner des Kettenbruchs

$$3, 2, 13, 7, 4$$

und die beiden Zahlen sind teilerfremd.

4. Bestimmung der Näherungswerte eines Kettenbruchs. Der Umstand, daß die Zähler und die Nenner der Näherungsbrüche in gleicher Weise rekurrent gebildet werden, nur mit verschiedenen Anfangszahlen, kann für die Berechnung mit der Maschine nutzbar gemacht werden. Dies möge an dem Beispiel aus Nr. 3 gezeigt werden. Man beginne mit den Paaren 1, 0 und 3, 1. Man stellt 1, 0 an der vierten und ersten Stelle im Zählwerk, 3, 1 an der vierten und ersten im Schaltwerk ein, addiert zweimal und findet 7, 2. Nun löscht man im Zählwerk aus, addiert einmal, bringt dann das vorhergehende Resultat 7, 2 ins Schaltwerk, löscht im Quotienten aus, addiert 13 mal, usw. Die eingeklammerten Zahlen bilden sich im Quotienten, sind aber ohne Bedeutung.

	000000001000
	003001
2	007002* 000000
	003001
(3)*	003001
	007002
1	073021
	007002
13	094027* 000000
	007002
(14)*	007002
	094027
7	665191* 000000
	094027
(8)*	094027
	665191
4	2754791

Die Näherungswerte von $\frac{2754}{791}$ sind also

$$\begin{matrix} 3 & 7 & 94 & 665 & 2754 \\ 1' & 2' & 27' & 191' & 791 \end{matrix}$$

Man kann bemerken, daß während des Kurbelns auch die Neben-
näherungswerte erscheinen, so z. B. zwischen $\frac{665}{191}$ und $\frac{2754}{791}$ die Brüche:

$$\begin{matrix} 759 & 1424 & 2089 \\ 218' & 409' & 600 \end{matrix}$$

Beim Teilnenner 13 müßte man freilich, wenn man auch die Neben-
näherungswerte erhalten wollte, die Verlegung des Zählwerks (oder
Schaltwerks) vermeiden.

III.

5. Bestimmung der quadratischen Reste für einen Modul. Die
quadratischen Reste für einen Modul m lassen sich bestimmen, indem
man die ungeraden Zahlen sukzessive summiert und, sobald man über
den Modul m hinauskommt, diesen abzieht. Es genügt, bis zur un-
geraden Zahl $2E\left(\frac{m}{2}\right) + 1$ zu gehen. Eine ähnliche Anordnung, wie
sie in Nr. 3 beschrieben wurde, ermöglicht eine vorteilhafte Benützung
der Rechenmaschine.

Es werde $m = 31$ gewählt. Man stelle im Schaltwerk 000001 ein,
addiere an der vierten, und subtrahiere an der ersten Stelle von rechts,
im Zählwerk erscheint dann

000000000999.

Nun lösche man im Quotienten aus, bringe 031001 ins Schaltwerk
und addiere 1, 3, 5, usw. Die Subtraktionen von 31 werden durch Ver-
legung um drei Stellen ohne weitere Einstellung möglich gemacht, da-
bei wird ein Einfluß der rechts von 31 eben eingestellten Zahl durch
die zu Anfang ins Zählwerk gebrachten drei Neuner verhindert.

Die Rechnung ist im folgenden dargestellt; die Zeichen + und -
bei den Schaltwerkszahlen deuten die Stellung des Hebels für die
Operationen an.

000000000999	186005986
+ 031001	+ 031013
031001999	217018986
+ 031003	+ 031015
062004999	248033986
+ 031005	- 031015
093009999	248002971
+ 031007	+ 031017
124016999	279019971
+ 031009	+ 031019
155025999	310038971
+ 031011	- 031019
186036999	310007952
- 031011	+ 031021
186005986	341028952

$ \begin{array}{r} 341028952 \\ + \boxed{031023} \\ \hline 372051952 \\ - \boxed{031023} \\ \hline 372020929 \\ + \boxed{031025} \\ \hline 403045929 \\ - \boxed{031025} \\ \hline 403014904 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 403014904 \\ + \boxed{031027} \\ \hline 434041904 \\ - \boxed{031027} \\ \hline 434010877 \\ + \boxed{031029} \\ \hline 465039877 \\ - \boxed{031029} \\ \hline 465008848 \end{array} $
--	--

Die quadratischen Reste von 31 sind demnach

1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 20, 25, 28.

Vom Zählwerk haben nur die vierte und fünfte Stelle Bedeutung; man könnte zum bequemern Ablesen die übrigen Stellen verdecken.

In der zweiten Hälfte der Rechnung häufen sich die Subtraktionen von 31 sehr. Diesem Übelstand könnte man begegnen, indem man nur die ungeraden Zahlen bis 15 summiert, dann aber statt 17, 19, 21, ... zu addieren, 14, 12, 10, ... subtrahiert, und, wenn es notwendig wird, 31 addiert. Statt 999 wäre in diesem Fall etwa 500 ins Zählwerk zu bringen.

Das Ende der Rechnung gibt sich von selbst kund, indem bei der ersten Methode der Summand 31, bei der zweiten der Subtrahend 0 auftritt.

Wien, am 11. Juni 1911.

Kleinere Mitteilungen.

Ein neuer Rechenapparat für Maschinenbau und Elektrotechnik.

Von der bekannten Firma Karl Schleicher und Schüll in Düren (Rheinland) ist ein neuer, für die besonderen Zwecke des Maschinenbaues und der Elektrotechnik bestimmter Rechenapparat in den Handel gebracht worden, der infolge seiner äußeren Ausführung und der ihm zugrunde liegenden — wenn auch nicht neuen — Gedanken allgemeiner Beachtung verdient.

Die äußere Form des neuen Rechenhilfsmittels ist (Fig. 1) die eines logarithmischen Rechenschiebers in Kreisform (sog. Rechenscheibe), und zwar in derjenigen Ausführung¹⁾, bei der drehbare Skalen gegen feste Skalen verschoben werden können. Der die festen Skalen tragende Teil des Apparates ist in einem 16 auf 16 cm großen Etui befestigt; die drehbaren Skalen sind auf der Unterseite einer Glasscheibe angebracht, die zur Vermeidung des Abscheuerns der Zeichnung mit Hilfe von drei Metallstiften von den festen Skalen abgehoben ist. Der Abstand der beiden die Skalen tragenden Flächen ist so gering gewählt, daß keine Beeinträchtigung der Ablesungen durch Parallaxe besteht.

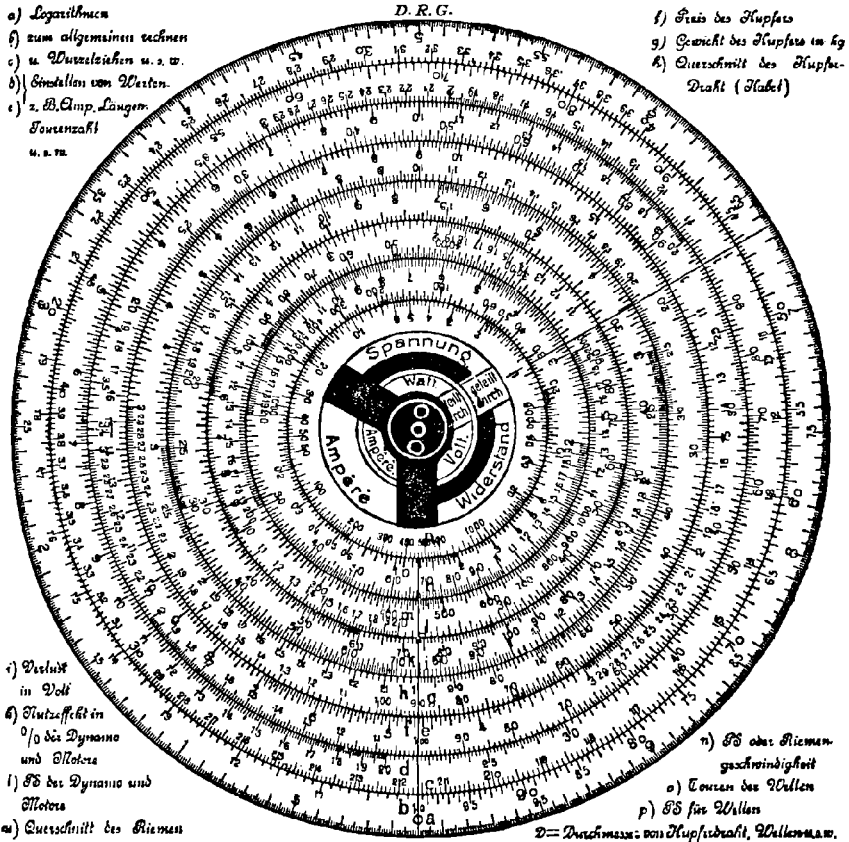
Der Gedanke, als Träger für die beweglichen Skalen einen durchsichtigen Stoff (Glas oder Glimmer) zu verwenden, ist nicht neu; er wurde u. a. angegeben bzw. benützt von Kloth (D. R. P. No. 26 695 von 1883) und von Scherer (logarithmisch-graphische Rechentafel).

Auf der Glasscheibe und dem festen Teile sind sieben Skalenpaare vorhanden, von denen das erste Paar einem ungefähr 40 cm langen Rechenschieber entspricht und zur Ausführung von allgemeinen Rechnungen benützt werden kann. Außer den sieben festen Skalen ist noch eine weitere feste Skala vorhanden, an der mit Hilfe einer radialen, auf der Glasscheibe angebrachten Geraden Logarithmen abgelesen werden können auf 0,5 Einheiten der 3. Dezimale genau.

Die übrigen Skalen dienen zur Berechnung von besonderen, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik auftretenden Gleichungen von der Form $u = \frac{x \cdot y}{z} \cdot k$ wo x , y und z veränderliche Größen und k eine konstante Größe bedeuten. Die Berechnung von solchen Ausdrücken läßt sich bei entsprechender Anordnung der Skalen mit nur einer Einstellung der Glasscheibe (beim Rechenschieber mit nur einer Einstellung der Zunge) vornehmen; die beiden hierbei zur Anwendung kommenden Grundgedanken sind für den Fall eines geraden Schiebers in Figur 2 dargestellt.

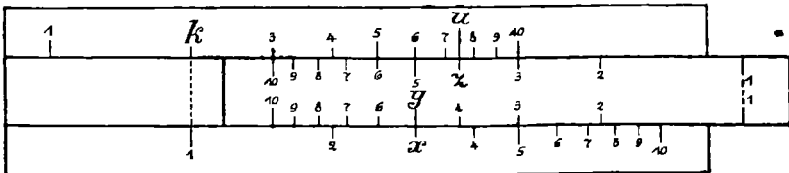
1) Vgl. Mehmkke, Numerisches Rechnen, Encyklopädie der math. Wiss. 1. Band, Seite 1060.

Fig. 1.



Die algebraische Addition der Größen $\log x$, $\log y$ und $\log z$ läßt sich in der von Ch. A. Vogler¹⁾ angegebenen Weise vornehmen, indem man auf dem Stab

Fig. 2.



die beiden Teilungen für $\log x$ und $\log u$ und auf der Zunge diejenigen für $\log y$ und $\log z$ — bei der angegebenen Gleichungsform beide in entgegengesetztem Sinn zu den Stabskalen — anbringt.

1) Zeitschrift für Vermessungswesen 1881.

Die mechanische Addition von $\log k$ erreicht man dadurch, daß man die nach u bezifferte Stabteilung um das Stück $\log k$ gegen die andere nach X bezifferte verschiebt.

Die äußere Gestaltung und Ausführung des neuen Rechenhilfsmittels, insbesondere die Zeichnung und Bezifferung der Skalen ist gut. Der Preis beträgt 20 *M.*

Straßburg i. E.

P. WERKMEISTER.

Einladung zur Subskription.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, ladet ein zur Subskription auf:

Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen,

mit Unterstützung der Gesellschaften der Wissenschaften zu Kristiania und Leipzig herausgegeben von Friedrich Engel.

Die Ausgabe ist auf 7 Bände groß Oktav im gesamten Umfang von etwa 265 Druckbogen zu 16 Seiten berechnet. Es könnte der erste Band Ende 1913 erscheinen, die ganze Ausgabe nach Verlauf von etwa 10 Jahren vollendet vorliegen. Der Subskriptionspreis ist auf 60 Pf. für den Bogen (auf rund 160 Mk. für das gesamte Werk) angesetzt worden. Mit Erscheinen des ersten Bandes wird der Preis für den Bogen auf 80 Pf., für das ganze Werk auf rund 212 Mk. erhöht werden. Die Verlagsbuchhandlung teilt mit, daß sie an das Unternehmen nur dann herantreten kann, wenn bis zum 1. April 1913 eine genügende Zahl von Subskribenten gewonnen sein wird. Möge die erwünschte Beteiligung nicht ausbleiben!

Bücherschau.

G. H. Darwin. Scientific papers. Vol. IV: Periodic orbits and miscellaneous papers. XVIII u. 592 S. 8. Cambridge 1911, University press. Geb. 15 sh.

Dieser vierte Band, mit dem der Herausgeber die Sammlung seiner wissenschaftlichen Abhandlungen vorläufig schließt, ist dem Inhalt nach nicht so einheitlich, wie das die vorhergehenden drei Bände sein konnten. Der erste Teil ist den periodischen Bahnen gewidmet. Er enthält die beiden wichtigen großen Arbeiten von Darwin über diesen Gegenstand (1897, 1909, 1910), zwischen die als Übergang und zur Erklärung der Ideenfolge von der ersten zur zweiten Abhandlung eine Arbeit von S. S. Hough „Über gewisse Unstetigkeiten im Problem der periodischen Bahnen“ (1901) eingeschaltet ist. Der zweite Teil bringt unter dem Titel „The tides“ den englischen Text des schon in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ veröffentlichten Artikels „Bewegung der Hydrosphäre“ (1908).

Im dritten Teil vereinigt der Verf. seine Abhandlungen über vermischte Gegenstände. Er lenkt im Vorwort besonders die Aufmerksamkeit auf den 1889 erschienenen Aufsatz „Über die mechanischen Bedingungen eines Meteoritenschwarms“, der zu wenig Beachtung gefunden habe. Der Verf. geht darin aus von der Anschauung, daß der Urnebel von meteoritischer Konstitution gewesen sei und daß die Meteoriten sich unterschiedslos in allen Richtungen bewegten. Ferner steht hier der für die Technik wichtige Aufsatz „Über den horizontalen Druck einer Sandmasse“ (1883) und die für den Geologen interessante Arbeit „Über die Bildung von Wellenspuren im Ufersand“ (1884), beides Untersuchungen, die auf eigene Experimente sich stützen. Astronomisch bedeutsam sind die beiden kürzeren Mitteilungen „Über die Störungen eines Kometen in der Nachbarschaft eines Planeten“ (1892) und die Auseinandersetzung mit Folie über „die Eulersche Nutation der Erdachse“ (1903). Unter den Reden im fünften Teil findet man auch die schöne Vorlesung über „kosmische Entwicklung“, die Darwin 1905 vor der British association in Capstadt hielt.

Druck, Papier und Ausstattung des Bandes sind ausgezeichnet. Es ist lebhaft zu begrüßen, daß jetzt die über viele Jahrgänge verschiedener Zeitschriften zerstreuten Arbeiten Darwins bequem zusammengefaßt vorliegen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Neue Bücher.

Arithmetik und Analysis.

1. **BERLINER, S.**, Politische Arithmetik. I. Renten und Anleihen. Leipzig 1912, Poeschel. *M* 4.80.

Astronomie, Geodäsie.

2. **FRANZ, JULIUS**, Der Mond. (Aus Natur u. Geisteswelt, 90. Bändchen.) 2. Aufl. Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
3. **HUGERSHOFF, R.**, Kartographische Aufnahmen und geographische Ortsbestimmung auf Reisen. (Sammlung Göschen Nr. 607.) Berlin und Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
4. **LEICK, W.**, Astronomische Ortsbestimmungen mit besonderer Berücksichtigung der Luftschiffahrt. Leipzig 1912, Quelle & Meyer. *M* 2.80; geb. *M* 3.50.
5. **MARCUSE, Adolf**, Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. (Aus Natur und Geisteswelt, 378. Bändchen.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. 1.25.
6. **MARTUS, H. C. E.**, Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Kleine Ausg. 3. Aufl. Dresden u. Leipzig 1912, Koch. Geb. *M* 3.40.
7. **MESSERSCHMITT, J. B.**, Physik der Gestirne. (Bücher der Naturwissenschaft, 13. Bd.) Leipzig 1912, Reclam jun.
8. **METH, PAUL**, Theorie der Planetenbewegung. (Mathematische Bibliothek, VIII.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Kart. *M* —.80.
9. **OPPENHEIM, S.**, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. (Aus Natur und Geisteswelt, 110. Bändchen.) 2. Aufl. Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. *M* 1.25.
10. **PTOLEMÄUS, Des CLAUDIUS**, Handbuch der Astronomie, 2. Bd. Aus dem Griechischen übersetzt u. mit erklärenden Anmerkungen versehen v. Karl Manitius. Leipzig 1913, Teubner. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 8.60.
11. **REINHERTZ, C.**, Geodäsie. (Sammlung Göschen Nr. 102.) 2. Aufl., neu bearb. v. G. Förster, Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
12. **SCHIFFNER, FRANZ**, Praktisch-geometrische Schülerübungen f. die unteren Klassen der Mittelschulen, Wien u. Leipzig 1912, Deuticke.
13. **VOGLER, Ch. Aug.**, Geodätische Übungen f. Landmesser u. Ingenieure. 3. Aufl. 2. Tl.: Winterübungen. Berlin 1913, Parey. geb. in Leinw. *M* 7.—.

Darstellende Geometrie.

14. **MÜLLER, EMIL**, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Zweiter Band. Erstes Heft. Leipzig und Berlin 1912, Teubner. *M* 4.40.
15. **MÜLLER, H.**, u. **BALTIN, R.**, Graphische Darstellungen. Graphische Behandlung der Gleichungen. Grundlehren von den Kegelschnitten. (H. Möllers mathem. Unterrichtswerk, Ausg. f. Seminare u. Präparandenanstalten.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 1.25.

16. SCHMID, THEODOR, Darstellende Geometrie. I. Band. (Sammlung Schubert LXV.) Berlin u. Leipzig 1912, Göschen.
17. VORLÄNDER, MAX C., Leitfaden zur Gestaltenbildung mathematischen Modellierens v. Seeschiffskörpern. Minden 1912, Hufeland. *M* 1.50.
18. VUIBERT, H., Les anaglyphes géométriques. Paris (1912), Vuibert.

Geschichte.

19. BRUNS, HEINR., Von Ptolemäus bis Newton. Rektoratsrede. Leipzig 1912, Edelmann. *M* —.75.
20. Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, gesammelt v. F. Klein u. M. Brendel. Heft II. C. F. Gauß; Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus den Jahren 1797—1799. Heft III. Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie. Von L. Schlesinger. Leipzig 1912, Teubner. *M* 4.40.
21. PADOA, ALESSANDRO, La logique déductive dans sa dernière phase de développement. Avec une préface de Giuseppe Peano. Paris 1912, Gauthiers-Villars. Fr. 3.25.
22. RUBENS, HEINR., Die Entwicklung der Atomistik. Festrede. Berlin 1913, Hirschwald. *M* 1.—.
23. ZEUTHEN, H. G., Die Mathematik im Altertum u. im Mittelalter. („Die Kultur der Gegenwart“, III. Tl., 1. Abtlg., 1. Lfg.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 3.—.

Mechanik.

24. BUDAU, ARTH., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Hydraulik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Hydrometrie, f. Ingenieure, Studierende höherer techn. Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. Wien 1913, Fromme. *M* 11.60.
25. HENKEL, OTTO, Graphische Statik, mit besond. Berücksichtigung der Einflußlinien. (Sammlung Göschen Nr. 603.) I. Teil. Zusammensetzung u. Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Schwerpunkte. Trägheitsmomente, Spannungen in geraden Stäben. Der einfache Vollwand- und Fachwerkträger. Der Dreiecksbogen. Gewölbe. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
26. HOFMANN, A., Stau bei Flußbrücken. Begründung einer neuen Stauformel. Stuttgart 1913, Wittwer. *M* 2.—
27. — Das gelenklose Tonnengewölbe. Rechnungs- und Zeichnungsverfahren. Zum Gebrauche entwickelt. Stuttgart 1913, Wittwer. *M* 1.80.
28. MEHRTENS, GEO. CRISTOPH, Vorlesungen üb. Ingenieur-Wissenschaften. I. Tl. Statik u. Festigkeitslehre. (In 3 Bdn.) III. Bd. 2. Hälfte. Statisch unbestimmte Tragwerke. 2. umgearb. und stark verm. Aufl. Leipzig 1912, Engelmann. *M* 17.—; geb. in Leinw. *M* 18.50.
29. NEUMANN, ERNST RICHARD, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie. (Preisschriften, gekrönt und hrsg. v. der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, XLI.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 11.—.
30. PÖSCHL, THDR., u. TERZAGHI, KARL v., Berechnung v. Behältern nach neueren analytischen u. graphischen Methoden. Für Studierende u. Ingenieure. Berlin 1913, Springer. *M* 3.—.
31. PILGRIMM, HEINE., Berechnung von Rahmenkonstruktionen m. mehreren Mittelstücken sowie vollständige Durchführung der Berechnung e. Rahmens m. Eiseninlagen u. e. quadratischen Platte m. Wasserbehälter aus Eisenbeton. Wiesbaden 1912, Kreidel. in Mappe *M* 2.70.

Physik.

32. ADAMI, FRANZ, Die Elektrizität. I. Teil, 2. Aufl. (Bücher der Naturwissensch. 9. Bd.) II. Teil (Bücher der Naturwissensch. 14. Bd.) Leipzig (1912), Reclam jun. Beide Teile zusammen geb. in Leinw. *M* 1.50.

33. BJERKNES, V., Dynamische Meteorologie u. Hydrographie, v. B. u. verschiedenen Mitarbeitern. Deutsche Ausg. der v. der Carnegie Institution of Washington hrsg. Dynamic meteorology and hydrography. 1. Tl. Statik der Atmosphäre u. der Hydrosphäre. Von V. Bjerknæs u. J. W. Sandström. Deutsche Übersetzung v. F. Kirchner. Mit e. Anh., enth. meteorolog. u. hydrograph. Tab. u. e. Atlas v. 60 Taf. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn.
Geb. u. in Halbleinw. Mappe *M* 36.—
34. BOLTZMANN, LUDW., Vorlesungen über Gastheorie. 2. Tl. Theorie van der Waals'; Gase m. zusammengesetzten Molekülen; Gasdissociation; Schlußbemerkungen. 2., unveränd. Abdr. Leipzig 1912, Barth. *M* 7.—; geb. *M* 8.—
35. BUCHWALD, EBERHARD, Einführung in die Kristalloptik. (Sammlung Göschen Nr. 619.) Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
36. Bureau des Longitudes, Réception des signaux radiotélégraphiques transmis pas la tour Eiffel, 1^o pour donner l'heure (T. M. G.) (signaux horaires), 2^o pour permettre de comparer avec une grande précision les pendules astronomiques ou les chronomètres placés en des points compris dans la zone d'action de la station radiotélégraphique de la tour Eiffel. Paris 1912, Gauthier-Villars.
37. DRUDE, PAUL, Lehrbuch der Optik. 3., erw. Aufl., hrsg. v. C. Gehrcke. Leipzig 1912, Hirzel. *M* 12.—; geb. *M*. 13.
38. KAYSER, H., Handbuch der Spektroskopie. 6. Bd. Leipzig 1912, Hirzel. *M* 60.—; geb. *M* 64.—.
39. KLEIBER, JOHANN, u. SCHINNERL, MARTIN, Physik f. höhere Mädchenschulen. Ausgabe A f. Realschulen, Gymnasien u. Realgymnasien. Unter besonderer Berücksichtigung der Kgl. Bayer. Lehrpläne vom 8. April 1911. München 1912, Oldenbourg.
40. LANG, ROBERT, Experimentalphysik. I. Mechanik der festen, flüssigen u. gasigen Körper. (Sammlung Göschen Nr. 611.) Berlin u. Leipzig 1912, Göschen.
Geb. in Leinw. *M* —.80.
41. MAHLER, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) 4., verb. Aufl. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.80.
42. PLANK, MAX, Über neuere thermodynamische Theorien (Nernstsches Wärmetheorem u. Quantenhypothese). Vortrag, gehalten am 16. Dezember 1911 in der Deutschen chemischen Gesellschaft in Berlin. Leipzig 1912, Akadem. Verlagsgesellschaft.
43. POHL, ROBERT, Die Physik der Röntgenstrahlen. („Die Wissenschaft“, Heft 45.) Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 5.—; geb. in Leinw. *M* 5.80.
44. ROHR, M., VON, Das Auge u. die Brille. (Aus Natur u. Geisteswelt Nr. 372.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
45. ROTH, A., Grundlagen der Elektrotechnik. (Aus Natur u. Geisteswelt, 301. Bänden.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
46. SCHULZE, PAUL, Lehrbuch der Physik f. höhere Lehranstalten II. Teil. Oberstufe. Bielefeld u. Leipzig 1912, Velhagen & Klasing. Geb. *M* 2.40.
47. SCHWEYDAR, WILHELM, Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht. (Veröffentlichg. des Kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 54.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 3.50.
48. WAALS, J. D. VAN DER, Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht v. Systemen in gasförmig-flüssigen Phasen. Nach Vorlesungen bearb. v. Ph. Kohnstamm. 2. (Schluß-) Tl. Leipzig 1912, Barth.
Geb. in Leinw. *M* 24.—.
49. WALTZ, EMIL, Wechselstrom-Arbeitsdiagramme. Das Rechnen m. umlauf. Vektoren nach der symbol. Methode u. die Grundzüge der analyt. u. graph. Behandlung techn. Wechselstromkreise einschließlich der Diagramme f. Transformatoren u. Asynchronmotoren. Berlin 1912, Meusser.
M 22 50; geb. *M* 24.—.

50. WIENER, OTTO, Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. I. Abhandlung. Die Mittelwertsätze für Kraft, Polarisation und Energie. (Abhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wiss. Bd. XXXII Nr. VI.) *M* 4.—.

Tafeln, mathematische Instrumente.

51. GALLE, A., Mathematische Instrumente. (Mathematische-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende, 15.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 4.40; geb. *M* 4.80.
52. GUILLEMIN, AUGUSTE, Tables de logarithmes à 3 quatrades et nombres correspondants avec 12—13 chiffres. Système normal. Ouvrage honoré d'une subvention de l'Association française pour l'avancement des sciences, précédé d'une introduction donnant la construction et l'usage des tables, suivi d'une note complémentaire montrant leur utilité éventuelle. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 6.—.
53. PETERS, J., Fünfstellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen f. jede Zeitekunde des Quadranten, Berlin 1912, Reimer. Geb. in Halbleinw. *M* 7.—.
54. RIEFLER, S., Tabellen der Luftgewichte γ^p , der Druckäquivalente β^p und der Gravitation g . Tables des poids de l'air γ^p , des équivalents barométriques β^p et de la gravité g . Tables of the Weight of Air γ^p , of the Air-Pressure Equivalents β^p and of the Gravity g . Berlin 1912, Springer. Geb. *M* 6.—.
55. STAMPFER, S., Sechstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst Hilfstafeln, e. Anh. u. e. Anweisung zum Gebrauche der Tafeln. Neu bearb. v. Eduard Doležal. 21. Aufl. Ausg. f. Praktiker. Wien 1912, Gerolds Sohn. Geb. in Leinw. *M* 8.—.
56. SCHEWIOR, GEO., Graphische Tafel f. Drainrohrweiten. Leipzig 1912, Voigt. *M* —.75.

Verschiedenes.

57. ANNUAIRE pour l'an 1913, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
58. BENDERMANN, F., Luftschrauben-Untersuchungen. Berichte der Geschäftsstelle f. Flugtechnik des Sonderausschusses der Jubiläumstiftg. der deutschen Industrie f. 1911—1912. München 1912, Oldenbourg. *M* 2.50.
59. BLOCK, WALTER, Maße und Messen. (Aus Natur u. Geisteswelt, 385. Bändchen,) Leipzig 1913, Teubner. *M* 1.—, geb. in Leinw. *M* 1.25.
60. DORNIER, CLAUDE, Beitrag zur Berechnung der Luftschrauben unter Zugrundelegung der Rateauschen Theorie. Berlin 1912, Springer. *M* 5.—.
61. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. VI, 1 B. Geodäsie u. Geophysik. 3. Heft. Leipzig 1912, Teubner. *M* 1.80.
62. GHERSI, J., Matematica dilettevole e curiosa. (Manuali Hoepli.) Milano 1913. Hoepli. L. 9.50.
63. MANNES, HERM., Die Berechnung v. Rohrnetzen städtischer Wasserleitungen. 2. Aufl. München 1912, Oldenbourg. *M* 1.60.
64. MICHAELIS, LEONOR, Einführung in die Mathematik f. Biologen u. Chemiker. Berlin 1912, Springer. *M* 7.—; geb. *M* 7.80.
65. TIERDING, H. E., Die Fallgesetze, ihre Geschichte u. ihre Bedeutung. (Mathem. Bibl. Nr. 5.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* —.80.
66. VALENTINER, STEGFRIED, Vektoranalysis. (Sammlung Göschen Nr. 354,) 2., umgearb. Aufl. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.50.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ADAMI, FR., Die Elektrizität, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 32.
 ANNUAIRE pour l'an 1913, s. N. B. 57.
 BARDEY, E., Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra u. Analysis. Reformausgabe A: für Gymnasien. 1. Teil: Unterstufe. Hrsg. v. W. Lietzmann. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.
 ——— Dasselbe. Reformausgabe B: für Realanstalten. 1. Teil. Unterstufe. Ebenda, Geb. in Leinw. *M* 2.—.
 BERLINER, S., Politische Arithmetik, I, s. N. B. 1.
 BLOCK, W., Maße u. Messen, s. N. B. 59.
 BCUFFALL, STANISLAUS A. F. DE, Deuxième démonstration complète du grand théorème de Fermat. Varsovie 1912, Imprimerie scientifique, 8, rue Mazowiecka.
 BUCHWALD, E., Kristalloptik, s. N. B. 35.
 Bureau des Longitudes, Réception des signaux radiotélégraphiques transmis par la tour Eiffel, s. N. B. 36.
 CARONNET, TH., Cours de trigonométrie à l'usage des candidats au baccalauréat, à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr et à l'institut agronomique. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 4.50.
 Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1911. Vol. IX. Cambridge, Mass., U. S. A.
 CZUBER, EMANUEL, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. Dritte, sorgfältig durchgesehene Auflage. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.
 DORNIER, CL., Beitrag zur Berechnung der Luftschrauben, s. N. B. 60.
 DUGAN, RAYMOND SMITH, The Algol-system Z Draconis. Photometric researches. Contributions from the Princeton University Observatory Nr. 2. Princeton, N. J. 1912, published by the Observatory.
 DRUDE, P., Lehrbuch der Optik, s. N. B. 37.
 FINZEL, ANTON, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 1.20.
 FRANZ, J., Der Mond, s. N. B. 2.
 GALLE, A., Mathematische Instrumente, s. N. B. 51.
 GHERSI, J., Matematica dilettevole e curiosa, s. N. B. 62.
 GRASSMANN, HERMANN, Projektive Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. Zweiter Band: Ternäres. Erster Teil. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 18.—; geb. in Leinw. *M* 19.—.
 GUILLEMIN, A., Tables de Logarithmes, s. N. B. 52.
 HENKEL, O., Graphische Statistik, s. N. B. 25.
 HUGERSHOFF, R., Kartographische Aufnahmen u. geographische Ortsbestimmung auf Reisen, s. N. B. 3.
 Hundert Jahre deutscher Präzisions-Mechanik 1812—1912, Denkschrift, hrsg. v. dem Reichenbachschen math.-mech. Institut T. Ertel & Sohn, G. m. b. H. in München. München (1912), K. Hofu.-Universitätsdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.
 De JANS, C., Les multiplicatrices de Clairant. Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes. Gand 1912, Hoste. Fr. 5.—.
 Inhalts-Verzeichnis der Jahrgänge 1901 bis einschl. 1910 (XXI bis XXX) vom Zentralblatt der Bauverwaltung, hrsg. im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Berlin 1912, Ernst & Sohn.
 KLEIBER, JOH. u. SCHINNERL, MARTIN, Physik für höhere Mädchenschulen, s. N. B. 39.

- KOWALEWSKI, GERHARD, Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. (Aus Natur u. Geisteswelt, 197. Bändchen.) Leipzig 1913, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
- LANG, R., Experimentalphysik, s. N. B. 40.
- LEICK, W., Astronomische Ortsbestimmungen, s. N. B. 4.
- LEWENT, LEO, Konforme Abbildung, Hrsg. v. Eugen Jahnke, m. einem Beitrag v. Wilhelm Blaschke. (Mathem.-physikal. Schriften f. Ingenieure u. Studierende. 14.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 2.80.
- LIEBMANN, HEINRICH, Nichteuclidische Geometrie. (Sammlung Schubert XLIX) Zweite neubearbeitete Auflage. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. *M* 6.50.
- LIEZMANN, WALTHER, Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland, ein Literaturbericht. (Abhandlungen üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein, Band V Heft 2.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 2.80.
- MAC NEISH, HARRIS FRANKLIN, Linear polars of the k -hedron in n -space. Diss. Univ. of Chicago. Chicago (1912), The University of Chicago Press. (Leipzig, Stauffer.)
- MAHLER, G., Physikalische Formelsammlung, s. N. B. 41.
- MARCUSE, A., Astronomie, s. N. B. 5.
- MARTUS, H. C. E., Astronomische Erdkunde, s. N. B. 6.
- MATERIALIEN f. eine wissenschaftliche Biographie v. Gauß, s. N. B. 20.
- MESSERSCHMITT, J. B., Physik der Gestirne, s. N. B. 7.
- METH, P., Theorie der Planetenbewegung, s. N. B. 8.
- MEYER, W. FRANZ, Differential- und Integralrechnung Erster Band, Differentialrechnung. (Sammlung Schubert X.) Zweite, durchgesehene u. erweiterte Auflage. Berlin u. Leipzig 1912, Göschen. Geb. *M* 9.—.
- MICHAELIS, L., Mathematik f. Biologen u. Chemiker, s. N. B. 64.
- MÜLLER, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie f. technische Hochschulen, s. N. B. 14.
- MÜLLER, H., u. BALTIN, R., Graphische Darstellungen, s. N. B. 15.
- NEUMANN, B. E., Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, s. N. B. 29
- OPPENHEIM, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit, s. N. B. 9.
- OSGOOD, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Band, 2. Aufl. (Teubners Sammlung von Lehrbüchern, Bd. XX:1) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 17.—; geb. in Leinw. *M* 18.—.
- PADOA, Logique déductive, s. N. B. 21.
- PERRON, OSKAR, Die Lehre von den Kettenbrücken. (Teubners Sammlung Band XXXVI.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubners. *M* 20.—; geb. in Leinw. *M* 22.—.
- PLANCK, M., Über neuere thermodynamische Theorien, s. N. B. 42.
- PENNDORF, B., Rechnen u. Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten. (Abhandlungen üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, Bd. IV, Heft 7.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 3.—.
- PETERS, J., Fünfstellige Logarithmentafel, s. N. B. 53.
- POHL, R., Physik der Röntgenstrahlen, s. N. B. 43.
- PTOLEMÄUS, DES CLAUDIUS, Handbuch der Astronomie II, s. N. B. 10.
- REINHERTZ, C., Geodäsie, 2. Aufl., s. N. B. 11.
- RIEFLER, S., Tabellen der Luftgewichte, der Druckäquivalente u. der Gravitation, s. N. B. 54.
- ROHR, M. VON, Das Auge u. die Brille, s. N. B. 44.
- ROTH, A., Grundlagen der Elektrotechnik, s. N. B. 45.
- SASSENFELD, MAX, Aus dem Luftmeer. Meteorologische Betrachtungen f. mittlere u. reife Schüler. (Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek, 17.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
- SCHIFFNER, FR., Praktisch-geometrische Schülerübungen. s. N. B. 12.

- SCHMID, TH. Darstellende Geometrie, I, s. N. B. 16.
- SCHULZE, P., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 46.
- SCHWEYDAR, W., Untersuchungen üb. die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht s. N. B. 47.
- SÉGUIER, J.-A. de, Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes de substitutions. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 10.—.
- TIMERDING, H. E., Die Fallgesetze, s. N. B. 65.
- VALENTINER, S., Vektoranalysis, 2. Aufl., s. N. B. 66.
- Verlagskatalog, B. G. Teubners, auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Grenzwissenschaften. Große (102.) Ausgabe. Mit einem Titelbilde Leonhard Eulers sowie Bildnistafeln zur Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, der Kultur der Gegenwart und zur Reform des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. April 1908 — Juli 1912. Leipzig u. Berlin 1912. Teubner.
- VUIBERT, H., Anaglyphes géométriques, s. N. B. 18.
- WEBER, HEINRICH, Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande. Braunschweig 1912, Vieweg & Sohn. *M* 14.—; geb. in Leinw. *M* 15.—.
- WIENER, O., Theorie des Mischkörpers f. das Feld der stationären Strömung s. N. B. 50.
- WITTING, ALEXANDER, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Mit zwei Porträtafeln. (Mathematische Bibliothek 9.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. Kart. *M* — .80.



Zur Theorie der Reibung starrer Körper.

Von JULIUS WELLSTEIN in Dresden.

	Inhalt.	Seite
Einleitung		
§ 1. Problemstellung		338
§ 2. Literatur.		340
I. Allgemeiner Teil.		
§ 3. Aufstellung der linearen Gleichung		343
§ 4. Hilfsformeln aus der Differentialgeometrie		345
§ 5. Kinematik		348
§ 6. Diskussion der linearen Gleichung		351
§ 7. Die lineare Gleichung für die ebene Bewegung		354
II. Durchführung eines Beispiels.		
§ 8. Die Differentialgleichungen des Problems		356
§ 9. Die Anfangsbewegung im Intervalle τ		359
§ 10. Abschätzung des Intervalles τ		361
§ 11. Eintritt der Selbstsperrung		364

Eine genaue Theorie der Reibung wird allen Gebieten der Physik angehören müssen, jede Beschränkung auf engeren Rahmen bedeutet eine Einengung der Gültigkeit der Theorie. Man darf somit von einer *stereodynamischen* Theorie der Reibung keine allzuweite Anwendbarkeit verlangen, und es stellt sich von selbst die Aufgabe ein, bei jedem, doch nur in speziellen Versuchsanordnungen ermittelbaren Reibungsgesetz zu prüfen, inwieweit es sich theoretisch und praktisch allgemeiner verwenden läßt.

Die erste theoretische Untersuchung in diesem Sinne hat Painlevé beim Coulombschen Reibungsgesetze angestellt und gezeigt, daß dieses Gesetz schon in verhältnismäßig einfachen Fällen *prinzipiell* versagt; er hat dann eine neue Theorie aufgestellt, die diesen Mangel nicht zeigt. An diese Mitteilung knüpfen eine Reihe von Abänderungsvorschlägen anderer Autoren an, die zwar in einzelnen Beispielen zum Ziele führen, aber zum Teil eben nur auf spezielle Fälle zugeschnitten sind, teils auch der experimentellen Bestätigung bedürfen; daß die Elastizitätstheorie die Schwierigkeiten bei diesen Problemen in weiterem Umfange beseitigt, ist von vornherein zu erwarten. Man wird jedoch zunächst versuchen müssen, *im Rahmen der Stereodynamik* die Bedingungen aufzusuchen,

unter denen ein Reibungsgesetz wenigstens in bestimmten Gruppen von Problemen stets anwendbar bleibt, und wird nach Möglichkeit die Bedingungen so formulieren, daß sie der experimentell zu ermittelnden Form des Reibungsgesetzes nur geringe Einschränkungen auferlegen.

Einen Vorschlag zu einem solchen Gesetze hat unlängst v. Mises gegeben, und die vorliegende Arbeit will diesen Ansatz auf seine theoretische Durchführbarkeit untersuchen, zugleich aber an einem Beispiel zeigen, daß er mit experimentellen Beobachtungen übereinstimmt und durch sie bestätigt wird.

Einleitung.

§ 1. Problemstellung.

1. Wird ein System von n starren Körpern an Bedingungen gebunden, die die Zahl seiner Freiheitsgrade von $6n$ auf k vermindern mögen, so verwirklicht man bekanntlich die Bedingungen durch sogenannte Reaktionskräfte, die als Unbekannte in das Problem eingehen. Das System heißt *vollkommen*¹⁾, wenn bei allen virtuellen Verschiebungen die Reaktionen²⁾ keine Arbeit leisten. In diesem Falle kann man den Bewegungsverlauf ohne Kenntnis der unbekanntenen Kräfte darstellen, wenn man sich der sogenannten „Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art“ bedient; ihre Zahl ist k , und die „generalisierten Kräfte“ enthalten die Reaktionen nicht.

Bei *Systemen mit Reibung* dagegen, wo also die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte nicht verschwindet, lassen sich die Reaktionen nicht eliminieren, im Gegenteil wird ihre *Bestimmung zur Hauptaufgabe*. Zu deren Lösung kann man etwa folgenden Weg einschlagen:

Von den $6n$ Koordinaten q_i ($i = 1, 2, \dots, 6n$) der n starren Körper sind nur k von einander unabhängig, die übrigen lassen sich durch diese ausdrücken in der Form:

$$q_r = Q_r(q_1 | q_2 | \dots | q_k) \quad r = k+1, k+2, \dots, 6n.$$

Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit erhält man hieraus $6n - k$ Gleichungen, die in den \ddot{q}_i linear, in den \dot{q}_i quadratisch sind. Nun führe man die Reaktionen ein und setze als Differentialgleichungen

1) Dieser Ausdruck stammt von C. Neumann (Leipz. Ber. 1887, S. 184); *reibungsfrei* heißt das System, wenn man noch die Haftreibung ausschließt. Vgl. *Enz. d. math. Wiss.* IV 10 (R. v. Mises) Anm. 34.

2) Diese von Painlevé in den „Leçons sur le frottement“ S. 2 gegebene Definition faßt den Begriff der Reaktionskraft anders als sonst in der Systemmechanik üblich (vgl. G. Hamel, *Math. Annalen* 66 S. 380); unter Reaktion ist bei Painlevé die Resultante aus Normaldruck und Reibung zu verstehen.

der Bewegung die Schwerpunkts- und Flächengleichung für jeden der n Körper an. Dies sind, skalar gezählt, je 6 Gleichungen, und man hat in ihnen die \ddot{q}_i linear ausgedrückt durch die Kräfte; diese Werte setze man in die eben gefundenen $6n - k$ Gleichungen ein, wodurch man zur Bestimmung der Reaktionen $6n - k$ lineare Gleichungen erhält. Die Zahl der Unbekannten steht noch nicht fest, man wird aber verlangen dürfen, daß es gerade $6n - k$ seien, damit sie sich aus den Gleichungen berechnen lassen.¹⁾ Um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, nehmen wir nunmehr an: Die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, sollen ausschließlich darin bestehen, daß Körper des Systems andere Körper des Systems oder im Raum feste oder nach gegebenen Gesetzen bewegte Körper berühren, und an den Berührungsstellen sei die relative *Gleitgeschwindigkeit* v der berührenden Körper stets von Null verschieden; wir wollen uns im folgenden stets mit der *Gleitreibung* beschäftigen. Als Reaktionskraft hat man dann den *Normaldruck* N in Richtung der Berührungsnormalen \mathbf{n} , und je nachdem \mathbf{n} nach dem betrachteten Körper hinzeigt oder nicht, ist N positiv oder negativ zu nehmen; zur Richtung von v entgegengesetzt ist die *Reibungskraft* R , also stets positiv zu zählen. Zwischen R und N besteht eine gegebene Beziehung, das *Reibungsgesetz* $R = R(N)$.

2. Nunmehr läßt sich die Hauptaufgabe schärfer so aussprechen: Wir haben $6n - k$ Berührungsbedingungen, also ihnen entsprechend $2 \cdot (6n - k)$ Unbekannte N_i und R_i , die an gegebene Ungleichungen $N \geq 0, R > 0$ geknüpft sind. Zu ihrer Bestimmung stehen zur Verfügung $6n - k$ lineare Gleichungen zwischen den N_i und R_i , sowie $6n - k$ Gleichungen der Form $R_i = R_i(N_i)$. Das Problem lautet:

Haben diese Gleichungen stets endliche, den Ungleichungen genügende Lösungen, oder auch, welche Bedingungen müssen die Funktionen $R_i(N_i)$ erfüllen, damit stets zulässige Lösungen erhalten werden?

Wir beschränken uns weiterhin auf den Fall $n = 1, k = 5, 6n - k = 1$, betrachten also den *einzelnen starren Körper* \mathfrak{R} , *der einer einzigen Berührungsbedingung unterworfen ist*. Es bedeutet keine allzugroße Einschränkung, wenn wir den von \mathfrak{R} dauernd berührten Körper als eine im Raum feste Unterlage F voraussetzen. Es wird sich zeigen, daß schon in diesem Falle die Funktion $R(N)$ weitgehenden Forderungen genügen muß, die z. B. beim Coulombschen Gesetze nicht erfüllt sind; ob sich aus unseren weiteren Überlegungen Schlüsse auf den allgemeinen Fall von n starren Körpern ziehen lassen, bleibe dahingestellt. Unsere Aufgabe hat nunmehr, wenn wir \mathbf{n} auf \mathfrak{R} hinzeigen lassen, folgende Form:

1) Andernfalls liegt ein „stereokinetisch unbestimmtes“ Problem vor, das sich mit den Mitteln der Mechanik starrer Körper überhaupt nicht lösen läßt.

Man soll untersuchen, für welche Reibungsgesetze $R(N)$ es eine endliche Lösung des Gleichungssystems

$$B \cdot N - C \cdot R = A; \quad R = R(N); \quad N \geq 0, \quad R \geq 0$$

gibt, wo A, B, C drei von N und R unabhängige, aus den mechanischen Gleichungen zu bestimmende Größen sind, die nur von der Lage und Gestalt der berührenden Flächen, sowie der Verteilung der Massen und eingepprägten Kräfte abhängen.

An diese Frage knüpft die Painlevésche Kritik an: sie zeigt, daß das Coulombsche Gesetz $R = \text{const} \cdot N$ unter Umständen zu keiner Lösung führt (vgl. § 6). Wie v. Mises angibt, ist die Forderung, für $\mu = \frac{R}{N}$ sei

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu = 0,$$

stets hinreichend, eine Lösung zu sichern; es soll also der Reibungskoeffizient μ für hinreichend große Werte von N beliebig klein werden, ohne Rücksicht auf die andern Größen, von denen μ abhängen kann, z. B. die Gleitgeschwindigkeit v .

3. Da man stets nur endliche (nicht zu große) Drucke verwirklichen kann, so liegt die v. Misessche Annahme außerhalb der unmittelbaren Erfahrung, man kann nur indirekt prüfen, ob sie zu solchen Resultaten führt, die mit der Beobachtung übereinstimmen. Nun hat die Untersuchung eines einfachen Problems¹⁾, bei dem das Coulombsche Gesetz versagt, auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht, die man als *Selbstsperrung* bezeichnet: die vorhandene Relativgeschwindigkeit an der Berührungsstelle geht unter kritischen Umständen sehr rasch in den Wert Null über. Hiervon müßte das neue Reibungsgesetz, auf diese Aufgabe angewandt, Rechenschaft geben, und das ist auch tatsächlich der Fall. Wir wollen daher nachweisen, daß mittels unseres Ansatzes

die in 2. formulierte Hauptaufgabe stets lösbar ist (Teil I)

und

bei einem durchgeführten Beispiel die Theorie auf die Selbstsperrung führt (Teil II).

§ 2. Literatur.

1. Die mathematische Durchführung von Problemen der Mechanik mit Berücksichtigung der Reibung stößt auf beträchtliche Schwierigkeiten. Die älteren Autoren haben sich daher in dem Bestreben, die auftretenden Differentialgleichungen in geschlossener Form zu integrieren, auf einfache Beispiele beschränkt. Insbesondere ist von unserem Problem,

1) H. Chaumat [vgl. § 2].

der Bewegung eines starren Körpers auf fester Unterlage, der allgemeine Ansatz nur bis zu der Erkenntnis durchgeführt, daß zur Bestimmung der sechs unbekanntenen Koordinaten und der beiden Reaktionen N und R ausreichend viele Gleichungen vorhanden sind. Soweit gelangen etwa, um nur die bedeutendsten Namen zu nennen, D. Poisson, *Traité de mécanique*, chap. III; Deutsche Ausgabe Berlin 1836, 4. Buch; Cournot, *Journal f. r. u. a. Math.* 5 S. 133, 223; 8 S. 1; C. Neumann, *Math. Annalen* 27 S. 478 = *Leipz. Ber.* 1885, doch beschäftigt sich diese Arbeit mehr mit der Wahl passender Parameter, der Umformung der Lagrange'schen Gleichungen usw., kommt somit für unsere Absicht nicht in Betracht. (Vgl. auch Vierkandt, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 3 S. 31.)

Eine scharfe *Trennung* der beiden Aufgaben: *Bestimmung der Reaktionen* aus den gegebenen Anfangsbedingungen, sowie *Integration der Differentialgleichungen*, ist erst durch die Arbeit von P. Painlevé ermöglicht (*Comptes rendus*, Paris 121 (1895) S. 112), wo die in § 1 unserer Arbeit schon erwähnte lineare Gleichung zwischen N und R nachgewiesen wird. Mittels dieser Gleichung läßt sich nun jedes Reibungsgesetz auf seine theoretische Brauchbarkeit hin untersuchen, und da hat Painlevé gezeigt, daß in gewissen, gut ausführbaren Fällen das Coulombsche Gesetz keine Bestimmung der Reaktionen gestattet oder sogar auf Zweideutigkeiten führt. (Wir werden diesen Nachweis in § 6 erbringen.) Damit entsteht naturgemäß die Aufgabe, diese Schwierigkeiten durch geeignete Abänderungen der Reibungstheorie zu beheben.

2. Am weitesten geht hierin die von Painlevé selbst aufgestellte neue Theorie der Reibung, die in seinen *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique*, Paris 1895 aufgebaut und in den *Leçons sur le frottement*, Paris 1895 auf die einzelnen Gruppen von gebundenen Bewegungen angewandt wird. Eine kurze Zusammenstellung der wesentlichen Eigenschaften seiner „Reibungskräfte“ gibt Painlevé in der Note C. R. 120 1895, S. 596; eine eingehende, bequem lesbare Darstellung der ganzen Theorie mit Erweiterungen auf beliebige Systeme findet man bei E. Daniele, *Il nuovo cimento* (5) 7 (1904) S. 109; (5) 9 (1905) S. 174, 266, 289; eine Prüfung der Theorie auf ihre Voraussetzungen und Folgen gibt G. Maggi, *Il nuovo cimento* (5) 10 (1905) S. 240; (5) 14 (1907) S. 338. Diesen Arbeiten entspricht die kurze Wiedergabe von Painlevés Theorie in der *Enzyklop. d. math. Wiss.* IV 10 (R. v. Mises) Nr. 6^b. Nach Painlevé (vgl. auch C. R. 140 S. 702) hängt die Reibung wesentlich von der Verteilung der Drucke in der Umgebung der Berührungsstelle ab, oder in anderer Formulierung: seine „Reibungskraft“ ist eine empirisch zu ermittelnde Funktion des Normaldruckes N^0 (der bei vollkommen glatter Fläche gelten würde), sowie

aller Systemparameter, der Massenverteilung usw. Diese Annahmen sind zwar frei von den Widersprüchen des Coulombschen Gesetzes, bedürfen aber noch der experimentellen Untersuchung und entfernen sich weit von den in der Stereodynamik üblichen Anschauungen über die Reaktionskräfte.

3. *Gibt man den Begriff des starren Körpers preis*, so bietet die Elastizitätstheorie natürlich eine weitgehende Möglichkeit zur Aufhebung aller Schwierigkeiten. Diesen Weg hat schon Lecornu eingeschlagen, C. R. **140** (1905) S. 635, um bei dem von Chaumat, C. R. **136** (1903) S. 1634, angegebenen und experimentell untersuchten Beispiel der exzentrischen Kreisscheibe auf ebener Unterlage die Theorie den Beobachtungen anzupassen. Er betrachtet die Unterlage als elastisch und erklärt unter dieser Voraussetzung auch die Selbstsperrung. Man muß aber wohl hier der Kritik Painlevés beipflichten, C. R. **140** S. 702, der die Annahmen als willkürlich, mit Rücksicht auf das gewünschte Resultat gemacht, bezeichnet. Dagegen fallen die von Painlevé an derselben Stelle, ferner C. R. **141** S. 401, sowie Lecornu, C. R. **140** S. 847, de Sparre, C. R. **141** S. 310 an anderen Beispielen nachgewiesenen Widersprüche nicht der stereodynamischen Theorie der Reibung zur Last; es handelt sich dabei um Abstraktionen wie: materieller Punkt, gewichtslose Stange, zweiseitige Führung eines Punktes u. a., deren Zulässigkeit bei Reibungsproblemen doch zunächst nachgewiesen werden müßte. Eines der von Painlevé mitgeteilten Beispiele hat dann F. Pfeiffer, diese Zs. f. Math. u. Phys. **58** (1910) S. 273ff. mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie behandelt, und er findet eine befriedigende Übereinstimmung mit seinen Beobachtungen; durch Grenzübergang zu unendlich großem Elastizitätskoeffizienten erhält er dann für den „starren“ Körper auch in den kritischen Fällen des Coulombschen Gesetzes eine eindeutige Entscheidung über die eintretende Bewegung, entsprechend dem Standpunkte von Prandtl, Zs. f. Math. u. Phys. **58**, S. 196, der alle Bewegungsprobleme des starren Körpers aus denen des elastischen durch einen Grenzübergang ableiten will, den man i. a. schon an den Differentialgleichungen des Problems, in einzelnen Fällen, wie dem von Pfeiffer behandelten, aber erst an ihren Lösungen vornehmen darf. Einen ähnlichen Gedankengang verfolgt auch de Sparre in seiner Abhandlung: Bull. de la soc. math. de France **34** (1903), in der er zwei Aufgaben mit Hilfe der Elastizitätstheorie löst und dann zeigt, wie das Coulombsche Gesetz, wenigstens angenähert, den Bewegungsverlauf wiedergibt. Die von Klein, Zs. f. Math. u. Phys. **58** S. 186 gegebene Erklärung der Widersprüche des genannten Gesetzes stellt nach den Ausführungen von v. Mises (an derselben Stelle) eine neue

Arbeitshypothese dar, die indessen aus der Theorie sich nicht ableiten läßt. Ganz auf dem Boden der Stereodynamik dagegen steht die Annahme von Lecornu: C. R. 140, S. 635, der Reibungskoeffizient wachse vom Augenblick der Berührung an von Null ausgehend zu einem Endwerte. Dieser Vorschlag (von de Sparre, C. R. 141, S. 310 aufgenommen und auf einige Beispiele angewandt) hilft zwar über die Schwierigkeiten des Coulombschen Gesetzes hinweg, unterliegt aber schwerwiegenden Bedenken, die seine experimentelle Bestätigung in Frage stellen; Einwände haben zuerst schon Painlevé, C. R. 141, S. 401, dann v. Mises, Zs. f. Math. u. Phys. 58, S. 193 erhoben. Mit der geringsten Zahl neuer Voraussetzungen und in engem Anschluß an die alte Theorie kommt der v. Misessche Ansatz aus, a. a. O. S. 194, der in vorliegender Arbeit näher untersucht wird.

Für weitere Literaturangaben sei auf die Enzyklopädieartikel von P. Stäckel IV 6 Nr. 6, 31, 38 und R. v. Mises IV 10 Nr. 6 verwiesen.

I. Allgemeiner Teil.

§ 3. Aufstellung der linearen Gleichung.

Die in § 1, 1 für den allgemeinen Fall angedeutete Herleitung der linearen Gleichung zwischen den Reaktionen vereinfacht sich in unserem Falle ($n = 1$, $k = 5$) zwar wesentlich, führt aber nicht ohne weiteres zur expliziten Darstellung der Koeffizienten. Wir wollen vielmehr ein Verfahren anwenden, das uns in zwei Schritten zum Ziele führt: Die Komponente der Beschleunigung des eben berührenden Punktes nach der Flächennormalen läßt sich leicht linear durch die Kräfte, also auch die Reaktionen N und R ausdrücken, gleichzeitig aber liefert eine kinematische Untersuchung einen andern Ausdruck für diese Größe (§ 5), womit dann ohne weiteres die gewünschte Beziehung hergestellt ist.

1. Wir führen ein: Das im Raum feste Koordinatensystem O (1, 2, 3) und das mit dem Körper \mathfrak{K} bewegte System G (I, II, III), dessen Achsen Hauptträgheitsachsen des Körpers für den Schwerpunkt G sein sollen. Der Ortsvektor von O nach G sei mit \mathfrak{r}^* bezeichnet, und es bedeute \mathfrak{r} den Ortsvektor von O nach einem beliebigen Punkte des starren Körpers, $\dot{\mathfrak{r}}$ seine Geschwindigkeit. Nach einem bekannten Satze läßt sich $\dot{\mathfrak{r}}$ ausdrücken durch die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{r}}^*$ des Punktes G und die instantane Drehgeschwindigkeit ω um diesen Punkt:

$$(1) \quad \dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}^* + \omega \wedge (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^*).$$

Dabei soll $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ das vektorielle, $\mathfrak{a} | \mathfrak{b}$ das skalare Produkt zweier Vektoren \mathfrak{a} und \mathfrak{b} bedeuten.

Durch Differentiation nach der Zeit folgt:

$$(2) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}^* + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) + \omega \wedge [\omega \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)].$$

Unter \mathbf{r} soll jetzt speziell der Ortsvektor nach dem Punkte von \mathfrak{K} verstanden werden, der augenblicklich die Fläche F berührt; ist \mathbf{n} der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen, so erhält man aus (2):

$$(3) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_n &= \ddot{\mathbf{x}}_n^* + \mathbf{n} |\dot{\omega} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) + \mathbf{n} | \omega \wedge [\omega \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)] \\ &= \ddot{\mathbf{x}}_n^* + \dot{\omega} | (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{n} + \mathbf{n} | \omega \wedge [\omega \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)]. \end{aligned}$$

Hier seien noch zwei später gebrauchte Abkürzungen eingeführt: es bedeute \mathbf{e} den Einheitsvektor in Richtung von $\dot{\mathbf{r}}$, und es werde:

$$(4) \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{a}, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{e} = \mathbf{b}$$

gesetzt. Dann hat man:

$$(3') \quad \ddot{\mathbf{x}}_n = \ddot{\mathbf{x}}_n^* + \dot{\omega} | \mathbf{a} + \mathbf{n} | \omega \wedge [\omega \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)].$$

2. Es sei \mathfrak{F}^0 die Summe der eingepprägten Kräfte, \mathfrak{M}^0 ihr Moment in G ; fügt man die Reaktionskräfte hinzu, so kommt als

Summe *aller äußeren Kräfte*:

$$(5) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 + N \cdot \mathbf{n} - R \cdot \mathbf{e} \quad (N > 0, R > 0).$$

Moment *aller äußeren Kräfte* in G :

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}^0 + N \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{n} - R (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{e} \\ &= \mathfrak{M}^0 + N \cdot \mathbf{a} - R \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Sind T_I, T_{II}, T_{III} die Hauptträgheitsmomente des Körpers, M seine Masse, so drücken sich die Vektoren $\ddot{\mathbf{x}}^*$ und $\dot{\omega}$ mittels Schwerpunkts- und Flächengleichung (diese in Form der sog. „Eulerschen Gleichungen“) folgendermaßen durch die Kräfte aus:

$$(7) \quad M \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathfrak{F}.$$

$$(8) \quad \begin{aligned} T_I \dot{\omega}_I + (T_{II} - T_{III}) \omega_{II} \omega_{III} &= \mathfrak{M}_I, \\ T_{II} \dot{\omega}_{II} + (T_{III} - T_I) \omega_{III} \omega_I &= \mathfrak{M}_{II}, \\ T_{III} \dot{\omega}_{III} + (T_I - T_{II}) \omega_I \omega_{II} &= \mathfrak{M}_{III}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\omega} | \mathbf{a} &\equiv \dot{\omega}_I a_I + \dot{\omega}_{II} a_{II} + \dot{\omega}_{III} a_{III} \\ &= \frac{a_I}{T_I} \{ \mathfrak{M}_I - (T_{II} - T_{III}) \omega_{II} \omega_{III} \} + \frac{a_{III}}{T_{III}} \{ \mathfrak{M}_{III} - (T_I - T_{II}) \omega_I \omega_{II} \}. \end{aligned}$$

3. Nunmehr geht Gl. (3'), falls man für \mathfrak{F} und \mathfrak{M} die Ausdrücke aus (5) und (6) einsetzt, nach N und R ordnet und das von N und R freie Glied mit $\ddot{\mathbf{x}}_n^0$ bezeichnet, in folgende Form über:

$$(10) \quad \ddot{\mathbf{x}}_n = \ddot{\mathbf{x}}_n^0 + N \cdot B - R \cdot C,$$

wo man gesetzt hat:

$$(11) \quad \begin{aligned} B &= \frac{1}{M} + \frac{a_I^2}{T_I} + \frac{a_{II}^2}{T_{II}} + \frac{a_{III}^2}{T_{III}}, \\ C &= \frac{a_I b_I}{T_I} + \frac{a_{II} b_{II}}{T_{II}} + \frac{a_{III} b_{III}}{T_{III}}, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_n^0 &= \frac{\mathfrak{S}_n^0}{M} + \mathbf{n} | \omega^\wedge [\omega^\wedge (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^*)] \\ &+ \frac{a_I}{T_I} \{ \mathfrak{M}_I^0 - (T_{II} - T_{III}) \omega_{II} \omega_{III} \} + \dots + \frac{a_{III}}{T_{III}} \{ \mathfrak{M}_{III}^0 - (T_I - T_{II}) \omega_I \omega_{II} \}. \end{aligned}$$

Wir werden in § 5 zeigen, daß wegen der Bedingung der Berührung \ddot{x}_n ausschließlich von den Geschwindigkeitsparametern $\dot{\mathfrak{r}}$ und ω , sowie Krümmung und Lage der berührenden Flächen abhängt:

$$(13) \quad \ddot{x}_n = Q^{(2)}(\dot{\mathfrak{r}} | \omega),$$

falls $Q^{(2)}$ eine homogene quadratische Funktion der Komponenten von $\dot{\mathfrak{r}}$ und ω bedeutet. Damit folgt aus (10), den Nachweis von (13) vorbehalten, die angekündigte lineare Gleichung:

$$(14) \quad N \cdot B - R \cdot C = Q^{(2)} - \ddot{x}_n^0 \equiv A,$$

die uns später noch beschäftigen wird.

§ 4. Hilfsformeln aus der Differentialgeometrie.

1. Die feste Fläche F denken wir uns in Parameterdarstellung gegeben:

$$(1) \quad x_i = x_i(u|v) \quad (i = 1, 2, 3) \text{ oder kürzer } \mathbf{x} = \mathbf{x}(u|v).$$

Setzt man

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v,$$

so sei der Einheitsvektor \mathbf{n} in Richtung der Normalen in der bekannten Weise definiert:

$$(3) \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u^\wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u^\wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Wir errichten in zwei benachbarten Punkten (u, v) und $(u + du, v + dv)$, die also auf der Richtung $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ liegen, die Normalen \mathbf{n} und \mathbf{n}' , bilden die Differenz:

$$(4) \quad d\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$$

und wollen nun untersuchen, wie dieser Vektor $d\mathbf{n}$ von dem Vektor $d\mathbf{x}$ abhängt. Offenbar kommt es für diesen rein geometrischen Zusammenhang nicht auf die Wahl der Parameter an, und um nicht zu viel Formeln der Flächentheorie heranziehen zu müssen, nehmen wir an, die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ seien die Krümmungslinien der Fläche. Allgemein ist

$$(4') \quad d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} dv,$$

aber mit unserer Annahme lassen sich jetzt die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}$ leicht deuten. Es seien \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 die Einheitsvektoren in den Hauptkrümmungsrichtungen (\mathbf{e}_1 steht auf \mathbf{e}_2 senkrecht); errichtet man dann in zwei konsekutiven Punkten von \mathbf{e}_1 mit dem gegenseitigen Abstand $d\mathbf{x}^{(1)}$ die Normalen \mathbf{n} und \mathbf{n}' , so schneiden sie sich, und zwar in dem zu \mathbf{e}_1 gehörigen Krümmungsmittelpunkt (Radius r_1), gemäß der Definition der Hauptkrümmungsrichtungen; daher liegt der Vektor $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} du$ in der Richtung $\pm \mathbf{e}_1$, und da ∂n der Winkel zwischen den Normalen ist, so hat man $r_1 \cdot \partial n = d\mathbf{x}^{(1)}$. Nimmt man den Krümmungsradius positiv oder negativ, je nachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der $+\mathbf{n}$ Richtung liegt oder nicht, so erhält man die endgültige Formel, die man durch eine einfache Überlegung, etwa an der Kugel, auf die Richtigkeit des Vorzeichens bestätigt:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u} du = - \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{r_1} \mathbf{e}_1 = - \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{r_1}.$$

Ein entsprechender Ausdruck gilt für $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v} dv$, und beachtet man, daß $d\mathbf{x}^{(1)}$ und $d\mathbf{x}^{(2)}$ die rechtwinkligen Projektionen von $d\mathbf{x}$ auf die Richtungen \mathbf{e}_1 bzw. \mathbf{e}_2 sind, so besteht zwischen der Richtung $d\mathbf{x}$ und der Normalenänderung $d\mathbf{n}$ nach (4') der Zusammenhang:

$$(5) \quad d\mathbf{n} = - \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{r_1} - \frac{d\mathbf{x}^{(2)}}{r_2}. \text{ (Formel v. Rodrigues.)}$$

2. Nunmehr sei auch die Oberfläche Φ des bewegten Körpers durch ihre Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}, \beta = \text{const.}$ dargestellt:

$$\xi_I = \xi_I(\alpha|\beta) \text{ usw., oder kürzer } \xi = \xi(\alpha|\beta).$$

Bezeichnet man mit \mathbf{e}_I und \mathbf{e}_{II} die Einheitsvektoren in den Krümmungsrichtungen, die zugehörigen Krümmungsradien mit ρ_I und ρ_{II} und definiert als Einheitsvektor der Normalen:

$$(6) \quad \mathbf{v} = \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{|\xi_\alpha \xi_\beta|},$$

so gehört zu der Fortschreitungsrichtung $d\xi$ die Normalenänderung:

$$(7) \quad d\mathbf{v} = - \frac{d\xi^{(I)}}{\rho_I} - \frac{d\xi^{(II)}}{\rho_{II}}.$$

Da sich die Flächen im Punkte (u, v) bzw. (α, β) berühren, so stimmen dort ihre Normalenrichtungen \mathbf{n} und \mathbf{v} überein; bezeichnen:

$$(8) \quad \begin{pmatrix} c_{II} & c_{I II} & c_{I II I} \\ c_{III} & c_{II III} & c_{III III} \\ c_{III I} & c_{III II} & c_{III III} \end{pmatrix}$$

die 9 Richtungskosinus des Achsenkreuzes $G(I, II, III)$ gegen $O(1, 2, 3)$ (die Matrix (8) ist im eigentlichen Sinne orthogonal), so hat man als Berührungsbedingungen:

$$x_1 = \xi_1^* + c_{I1}\xi_I + c_{I2}\xi_{II} + c_{I3}\xi_{III}$$

und zwei entsprechende Gleichungen, ferner:

$$n_1 = c_{II1}\nu_I + c_{II2}\nu_{II} + c_{II3}\nu_{III}$$

nebst zwei analogen Ausdrücken. Wegen der Beziehung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2$ sind dies bei gegebenen ξ_i^* und c (die c hängen aber nur von 3 Parametern, etwa den Eulerschen Winkeln, ab) für die Unbekannten u, v, α, β zusammen 5 Gleichungen. Es besteht also zwischen den ξ_i^* und den c eine Relation, entsprechend den 5 Freiheitsgraden des Körpers; ist diese erfüllt, so ist zu gegebener Lage des Körpers u, v, α, β bestimmt. Damit kennt man aber auch den Winkel φ , den in der Tangentialebene die Richtungen e_1 und e_2 bilden, und hat dann zur Transformation der Komponenten eines Vektors a von einem in das andere System der Krümmungsrichtungen die Formeln:

$$(9) \quad \begin{aligned} a^{(I)} &= a^{(1)} \cos \varphi + a^{(2)} \sin \varphi \\ a^{(II)} &= -a^{(1)} \sin \varphi + a^{(2)} \cos \varphi, \text{ oder aufgelöst:} \\ a^{(1)} &= a^{(I)} \cos \varphi - a^{(II)} \sin \varphi \\ a^{(2)} &= a^{(I)} \sin \varphi + a^{(II)} \cos \varphi. \end{aligned}$$

3. Will man jetzt die Gleichung (7) in Komponenten nach e_1 und e_2 zerlegen, so setze man zur Abkürzung:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{11} &= \frac{\cos^2 \varphi}{e_I} + \frac{\sin^2 \varphi}{e_{II}}; & x_{22} &= \frac{\sin^2 \varphi}{e_I} + \frac{\cos^2 \varphi}{e_{II}}; \\ x_{12} &= x_{21} = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{e_I} - \frac{1}{e_{II}} \right). \end{aligned}$$

Dann hat man:

$$(11) \quad \begin{aligned} -d\nu^{(1)} &= x_{11} d\xi^{(1)} + x_{12} d\xi^{(2)} \\ -d\nu^{(2)} &= x_{21} d\xi^{(1)} + x_{22} d\xi^{(2)}. \end{aligned}$$

Die Größen x haben übrigens folgende Bedeutung: Legt man durch die Fläche Φ Normalschnitte, die der Reihe nach die Richtungen a) e_1 ; b) e_2 ; c) die Halbierungslinie h' des rechten Winkels (e_1, e_2); d) die zu h' senkrechte Gerade h'' enthalten, so gehören zu ihnen nach dem Eulerschen Satze die Krümmungsradien:

$$(12) \quad \begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{e_1} &= \frac{\cos^2 \varphi}{e_I} + \frac{\sin^2 \varphi}{e_{II}}; & \text{b) } \frac{1}{e_2} &= \frac{\sin^2 \varphi}{e_I} + \frac{\cos^2 \varphi}{e_{II}}; \\ \text{c) } \frac{1}{e'} &= \frac{\cos^2 \psi}{e_I} + \frac{\sin^2 \psi}{e_{II}}; & \text{d) } \frac{1}{e''} &= \frac{\sin^2 \psi}{e_I} + \frac{\cos^2 \psi}{e_{II}}. \end{aligned}$$

Hier ist $\psi = 45^\circ - \varphi$, infolgedessen:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e'} - \frac{1}{e''} \right) = \frac{1}{2} \cos 2\psi \left(\frac{1}{e_I} - \frac{1}{e_{II}} \right) = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{e_I} - \frac{1}{e_{II}} \right);$$

daher haben wir die Beziehungen:

$$(12) \quad \alpha_{11} = \frac{1}{\rho_1}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right); \quad \alpha_{22} = \frac{1}{\rho_2}.$$

4. Zu der Richtung $d\alpha$ gehören die Normalenänderungen:

$$\begin{aligned} dn^{(1)} &= -\frac{da^{(1)}}{r_1} & ; & \quad dn^{(2)} = -\frac{da^{(2)}}{r_2}; \\ -dv^{(1)} &= \alpha_{11} da^{(1)} + \alpha_{12} da^{(2)}; & \quad -dv^{(2)} &= \alpha_{21} da^{(1)} + \alpha_{22} da^{(2)}; \end{aligned}$$

setzt man

$$(13) \quad \begin{aligned} k_{11} &= -\frac{1}{r_1} + \alpha_{11} = -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\rho_1}; & k_{22} &= -\frac{1}{r_2} + \alpha_{22} = -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\rho_2} \\ k_{12} &= k_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right), \end{aligned}$$

so folgt für die Differenz $\delta = dn - dv$:

$$(14) \quad \begin{aligned} \delta^{(1)} &= k_{11} da^{(1)} + k_{12} da^{(2)} \\ \delta^{(2)} &= k_{21} da^{(1)} + k_{22} da^{(2)}. \end{aligned}$$

Solange die Determinante $k = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \neq 0$, lassen sich diese Gleichungen auflösen:

$$(14') \quad \begin{aligned} k \cdot da^{(1)} &= k_{22} \delta^{(1)} - k_{12} \delta^{(2)} \\ k \cdot da^{(2)} &= -k_{21} \delta^{(1)} + k_{11} \delta^{(2)}. \end{aligned}$$

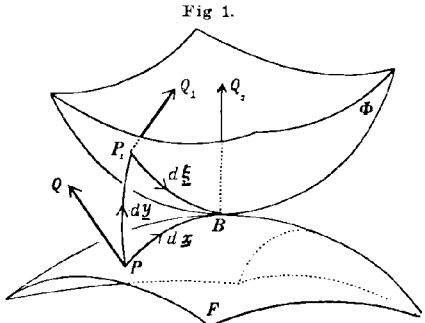
Ist aber $k = 0$, ohne daß alle $k_{\mu\nu} = 0$ sind, so gibt es stets eine nicht verschwindende Lösung der Gleichung (14) nach $da^{(1)}$ und $da^{(2)}$ mit $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0$, und für dieses $d\alpha$ ist $dn = dv$, oder da $n = v$, auch $n + dn = v + dv$; in dieser Richtung $d\alpha$ liegen somit mindestens zwei konsekutive Punkte, in denen beide Flächen dieselben Normalen haben, ihre Berührung in jener Richtung ist mindestens von der zweiten Ordnung. Sind dagegen alle $k_{\mu\nu} = 0$, so genügt jede Richtung $d\alpha$ jener Gleichung, d. h. in jeder Richtung findet Berührung von mindestens der zweiten Ordnung statt. Eine einfache Rechnung im Anschluß an die Formeln (12) und (12') zeigt, daß die $k_{\mu\nu}$ nur dann identisch verschwinden, wenn an der Berührungsstelle beide Flächen

entweder gleiche Hauptkrümmungsrichtungen und zu jeder denselben Krümmungsmittelpunkt
oder noch spezieller, einen Nabelpunkt und den gleichen Krümmungsmittelpunkt haben.

§ 5. Kinematik.

1. Nunmehr sind für die kinematische Betrachtung alle Vorbereitungen getroffen. Zur Zeit t sollen sich beide Flächen im Punkte P berühren (s. Fig. 1); die Normalen $n = v = P\vec{Q}$ fallen zusammen.

Nach Ablauf des Zeitelementes Δt ist ein anderer Punkt Berührungspunkt geworden (auf diesen Zeitpunkt bezieht sich die Figur); der jeweilige Berührungspunkt hat auf F die Bahn $\overrightarrow{P\bar{B}} = d\mathbf{x}$, auf Φ die Bahn $\overrightarrow{P_1\bar{B}} = d\xi$ beschrieben. In B fallen jetzt die Berührungsnormalen zusammen, es ist $\overrightarrow{BQ_2} = \mathbf{n} + d\mathbf{n} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, wo die Vektoren $d\mathbf{n}$ und $d\mathbf{v}$ den Fortschreitungsrichtungen $d\mathbf{x}$ bzw. $d\xi$ zugeordnet sind. Die frühere Berührungsnormale PQ ist mit Φ fest verbunden nach $\overrightarrow{P_1Q_1} = \mathbf{v}$ gekommen. Die Strecke $d\mathbf{x} = \overrightarrow{P\bar{P}_1}$ ist die Verschiebung des ehemaligen Berührungspunktes, also wenn $\dot{\mathbf{x}}$ seine Geschwindigkeit bedeutet, $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} dt$; aus der Figur entnimmt man die Beziehung $d\mathbf{x} + d\xi = d\mathbf{x}$, oder also:



$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} - \dot{\xi} = \dot{\mathbf{x}}.$$

Ferner folgt sofort:

$$\overrightarrow{Q_1Q_1} - \overrightarrow{P\bar{P}_1} = \overrightarrow{P_1Q_1} - \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{n},$$

oder wegen $\mathbf{n} + d\mathbf{n} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$:

$$\overrightarrow{Q_1Q_1} - \overrightarrow{P\bar{P}_1} = d\mathbf{n} - d\mathbf{v};$$

die Differenz links ist dadurch entstanden, daß sich die Punkte P und Q mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach P_1 bzw. Q_1 bewegt haben. Nach § 3 (1) sind die Geschwindigkeiten von zwei verschiedenen Punkten des starren Körpers mit den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} gegeben durch:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^* + \omega \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}}^* + \omega \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*), \quad \text{also} \\ \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}} = \omega \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Nimmt man $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$, so ist $\overrightarrow{P\bar{P}_1} = \dot{\mathbf{x}} dt$, $\overrightarrow{Q_1Q_1} = \dot{\mathbf{y}} dt$, somit

$$(2) \quad d\mathbf{n} - d\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_1} - \overrightarrow{P\bar{P}_1} = (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}}) dt = \omega \wedge \mathbf{n} dt.$$

In dem bezeichneten Zeitpunkte ($t + \Delta t$) habe P_1 die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}'$; dann hat nach dem eben angewandten Satze der Punkt B , der ja ebenfalls dem Körper \mathfrak{K} angehört, die Geschwindigkeit

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}' + \omega \wedge d\xi = \dot{\mathbf{x}}' + \omega \wedge \dot{\xi} dt.$$

Bedeutet $\ddot{\mathbf{x}}$ die Beschleunigung von P zur Zeit t , so ist ferner:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} dt, \quad \text{also} \\ \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} dt + \omega \wedge \dot{\xi} dt.$$

Die Geschwindigkeit des jeweiligen Berührungspunktes liegt in der zugehörigen Tangentialebene, für den Punkt P z. B. folgt dies aus (1), wo die Vektoren $\dot{\boldsymbol{x}}$ und $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ in dieser Ebene liegen. Daher steht auch $\dot{\boldsymbol{x}}$ auf $\overrightarrow{BQ_2} = \boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}$ senkrecht; es ist also:

$$0 = (\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}) | \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}) | (\dot{\boldsymbol{x}} + \ddot{\boldsymbol{x}} dt + \omega \wedge \dot{\boldsymbol{\xi}} dt);$$

da $\boldsymbol{n} | \dot{\boldsymbol{x}} = 0$ ist, so ergeben die Differentiale von der ersten Größenordnung:

$$(5) \quad \boldsymbol{n} | (\dot{\boldsymbol{x}} + \omega \wedge \dot{\boldsymbol{\xi}}) dt + d\boldsymbol{n} | \dot{\boldsymbol{x}} = 0, \text{ oder} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_n = \dot{\boldsymbol{\xi}} | \omega \wedge \boldsymbol{n} - \dot{\boldsymbol{x}} | \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}.$$

Zerlegt man ω nach den drei zu einander senkrechten Richtungen $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$:

$$(6) \quad \omega = \omega' \cdot \boldsymbol{n} + \omega_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \cdot \boldsymbol{e}_2, \text{ so kommt:} \\ \omega \wedge \boldsymbol{n} = \omega_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Daher lautet (5), in Komponenten nach \boldsymbol{e}_1 und \boldsymbol{e}_2 geschrieben, wegen § 4 (5):

$$(5a) \quad \ddot{\boldsymbol{x}}_n = \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \omega_2 - \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} \omega_1 + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{r_1} + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}}{r_2}.$$

2. Zur Bestimmung der unbekanntenen Vektoren $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ und $\dot{\boldsymbol{x}}$ dienen nach (1) und (2), sowie § 4 (11) die Gleichungen:

$$(6a) \quad \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\boldsymbol{x}} \\ \omega \wedge \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{n}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \text{ oder in Komponenten:}$$

$$(6b) \quad -\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{r_1} + \alpha_{11} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{12} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = \omega_2 \\ -\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}}{r_2} + \alpha_{21} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = -\omega_1.$$

Hieraus folgt durch Elimination mittels der Abkürzungen § 4 (13):

$$(7a) \quad k_{11} \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + k_{12} \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = \omega_2 + \alpha_{11} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{12} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} \\ k_{21} \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + k_{22} \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = -\omega_1 + \alpha_{21} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + \alpha_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}.$$

$$(7b) \quad k_{11} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + k_{12} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = \omega_2 + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}}{r_1} \\ k_{21} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} + k_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = -\omega_1 + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}}{r_2}.$$

Setzt man in (5a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\xi}}$ ein, so folgt nach (7b):

$$(5b) \quad \ddot{\boldsymbol{x}}_n = \frac{1}{r_1} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)2} + \frac{1}{r_2} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)2} + k_{11} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)2} + 2k_{12} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + k_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)2}.$$

Führt man noch $\dot{\boldsymbol{x}}^2 = \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)2} + \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)2}$ ein und bezeichnet den Krümmungsradius des Normalschnittes von F in Richtung von $\dot{\boldsymbol{x}}$ mit r , so ist nach dem Eulerschen Satze

$$(8) \quad \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)2}}{r_1} + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)2}}{r_2} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{r}, \text{ und daher} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_n = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{r} + k_{11} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)2} + 2k_{12} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} + k_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(2)2}.$$

3. Im Falle $k = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \neq 0$ kann man (7b) nach den $\dot{\xi}$ auflösen (vgl. § 4 (14')), und erhält durch Einsetzen in (8) die endgültige Formel:

$$(9) \quad \ddot{x}_n = \frac{\dot{\xi}^2}{r} + \left\{ \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1} \right\}^2 \frac{k_{22}}{k} - 2 \left\{ \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1} \right\} \left\{ -\omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{r_2} \right\} \frac{k_{12}}{k} + \left\{ -\omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{r_2} \right\}^2 \frac{k_{11}}{k}.$$

Die Normalbeschleunigung des Berührungspunktes ist, wie in § 3 vorweggenommen, eine quadratische Funktion $Q^{(2)}(\dot{\xi}, \omega)$ der Geschwindigkeitsgrößen $\dot{\xi}$ und ω ; die Koeffizienten sind durch Krümmung und Lage der berührenden Flächen bestimmt.

Falls alle $k_{\mu\nu}$ verschwinden (§ 4, 4.), folgt aus (8):

$$(9') \quad \ddot{x}_n = \frac{\dot{\xi}^2}{r}$$

als die gesuchte Formel.

Sollte schließlich die Matrix der $k_{\mu\nu}$ den Rang 1 haben, so müssen die rechten Seiten der Gleichungen (7) gewisse Bedingungen erfüllen, die sich aber nicht gut explizit wiedergeben lassen; alsdann läßt sich ein $\dot{\xi}$ berechnen, und man hat diesen Wert in (5b) einzusetzen. U. a. führen die Probleme der ebenen Bewegung auf diesen Fall, wir werden später darauf zurückkommen.

§ 6. Diskussion der linearen Gleichung.

1. Wir sind nunmehr am Ziele. Der in § 3, Ende, noch fehlende Nachweis ist erbracht; es ist in der Tat:

$$(1) \quad N \cdot B - R \cdot C = Q^{(2)} - \ddot{x}_n^0 = A$$

die gesuchte lineare Gleichung zwischen N und R .

Der Koeffizient A hängt noch von \ddot{x}_n^0 ab, d. h. von der Beschleunigung, die die eingepprägten Kräfte allein dem berührenden Punkte von \mathfrak{R} erteilen. Ist $A = 0$, also $\ddot{x}_n^0 = Q^{(2)}$, so genügt die Wirkung der eingepprägten Kräfte allein, damit sich der Körper auf der Unterlage bewegt, ohne daß sie ihm einen Widerstand zu leisten braucht. Dagegen würde im Falle $A > 0$ oder $\ddot{x}_n^0 < Q^{(2)}$ der Körper in die Unterlage eindringen, wenn sie nicht starr wäre; die eingepprägten Kräfte pressen ihn somit an die feste Unterlage an. Nur wenn $A < 0$, also $\ddot{x}_n^0 > Q^{(2)}$ ist, kann der Körper unter dem Einfluß der eingepprägten Kräfte allein sich nicht auf der festen Oberfläche bewegen, seine Beschleunigung ist zu groß, er wird sich (wenigstens für den betrachteten Augenblick), von der Unterlage abheben.

2. Es ist nun unsere Aufgabe, zu untersuchen, ob und unter welchen Umständen das Gleichungssystem:

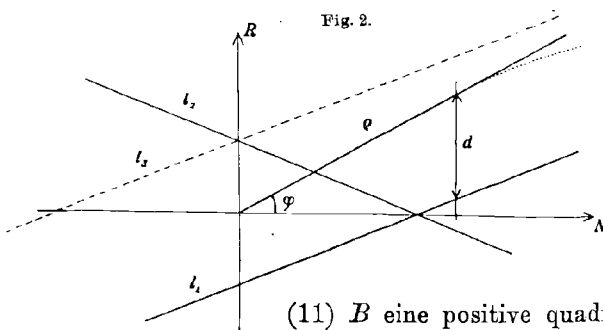
$$(2) \quad N \cdot B - R \cdot C = A, \quad R = R(N); \quad N \geq 0, \quad R \geq 0$$

endliche Lösungen N , R hat. Sollten sie nicht existieren, so bleibt immer noch die Möglichkeit, daß der Körper sich frei bewegen und von der Unterlage abheben kann; dann greifen an ihm keine Reaktionen, sondern nur die eingepprägten Kräfte an, und jetzt folgt nach unserer eben angestellten Überlegung: *Der Körper kann sich nur im Falle $A < 0$ abheben.* Deshalb können wir unsere Aufgabe schärfer so aussprechen:

Das Reibungsgesetz $R = R(N)$ ist so aufzustellen, daß für $A > 0$ stets eine Lösung des Systems (2) vorhanden ist; für $A < 0$ braucht dies nicht der Fall zu sein, der Körper hebt sich dann von der Unterlage ab.

Hier stellt sich nunmehr eine *Zweideutigkeit* ein: Wenn nämlich für $A < 0$ die Gleichungen (2) nun doch eine Lösung haben, so sind zwei Bewegungen denkbar: die eine unter *Berührung* der Unterlage ($N > 0$, $R > 0$), die andere unter *Abheben* von der Unterlage (wegen $A < 0$). Will man diese Unbestimmtheit nicht in Kauf nehmen, so muß man durch ein geeignetes Prinzip fordern, daß im Falle $A < 0$ unter allen Umständen ein Abheben des Körpers eintritt; wir wollen uns im folgenden stets auf den Fall $A > 0$ beschränken, der dann noch allein Schwierigkeiten macht. Es sei noch bemerkt, daß natürlich auch das Coulombsche Gesetz zu den erwähnten Schwierigkeiten führt, worauf später nochmals hingewiesen werden soll.

3. Trägt man in der Ebene N und R als rechtwinklige Koordinaten auf (s. Fig. 2), so stellt die lineare Gleichung (2) eine Gerade l dar, das Reibungsgesetz eine Kurve ρ , die durch den Nullpunkt $R = N = 0$ geht



und zu jeder positiven Abszisse eine positive Ordinate hat; gesucht sind solche Schnittpunkte von ρ und l , die im ersten Quadranten liegen. Die Lagen der Geraden l hängen von den Vorzeichen der Koeffizienten ab. Nun ist nach § 3

(11) B eine positive quadratische Funktion der a mit dem Minimumwert $\frac{1}{M}$, der also stets von Null verschieden ist. C verschwindet mit den a , und dies tritt ein (§ 3 (4)), wenn die Vektoren \mathbf{n} und $\mathbf{r} - \mathbf{r}^*$ parallel sind, wenn also die Normale \mathbf{n} durch den Schwerpunkt G geht; das ist z. B. der Fall, wenn der bewegte Körper eine homogene Kugel ist. Man hat dann $N = M \cdot A$, der Normaldruck wird unabhängig von der Reibung. Schließen wir noch den Fall $A = 0$ aus,

in dem sich der Körper ohnehin auf der Unterlage bewegt, so hat die Gerade l die Lagen:

$$l_1 \text{ für } C > 0; \quad l_2 \text{ für } C < 0 \quad [l_3 \text{ im Falle } A < 0, C > 0],$$

und alle diese Fälle lassen sich verwirklichen (vgl. § 8).

Die Gerade l_2 hat mit jeder Kurve ϱ eines Reibungsgesetzes einen Schnittpunkt, hier liegen keinerlei Schwierigkeiten vor.

Es bleibt nur noch die Gerade l_1 . In diesem Falle versagt das Coulombsche Gesetz $R = \text{const. } N = \mu' \cdot N$; die zugehörige Kurve ϱ ist eine Gerade durch den Nullpunkt, die mit der Achse der N den „Reibungswinkel“ $\varphi = \arctg \mu'$ einschließt. Sobald $\mu' \geq \frac{B}{C}$ ist, haben beide Geraden keinen Schnittpunkt im ersten Quadranten; dieser kritische Wert von μ' kann aber, wie später an einem Beispiel gezeigt werden wird, beliebig klein sein, sodaß die gewöhnlichen Werte des Coulombschen Koeffizienten jene Ungleichung erfüllen. (Hier werde die Bemerkung am Ende von 2. bestätigt: Bei der Geraden l_3 liefert das Coulombsche Gesetz einen Schnittpunkt für $\mu' > \frac{B}{C}$, es ist eine Bewegung unter positivem Drucke N möglich, und die besprochene Zweideutigkeit tritt wirklich ein). Das sind die Widersprüche, auf die Painlevé in der eingangs zitierten Arbeit hingewiesen hat.

Das Coulombsche Gesetz entspricht somit nicht den Forderungen, die wir an ein Reibungsgesetz gestellt haben; wir müssen vielmehr verlangen, daß die Kurve ϱ stets mit der Geraden l_1 einen Schnittpunkt liefert. Hierzu reicht die durch v. Mises vorgeschlagene Annahme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N) = 0$$

aus. Der Nachweis ist ganz einfach:

Zu der Abszisse N gehört die Differenz d der Ordinaten von ϱ und l_1 :

$$d = N \left\{ \mu - \frac{B - \frac{A}{N}}{C} \right\};$$

Die Klammer ist für $N = \frac{A}{B}$ gleich $\mu \left(\frac{A}{B} \right)$, also positiv, für einen hinreichend großen endlichen Wert N' dagegen wird $\mu + \frac{A}{NC} < \frac{B}{C}$, die Klammer wird negativ; daher gibt es mindestens einen Wert $\frac{A}{B} < N < N'$, für den d verschwindet, d. h. einen Schnittpunkt von ϱ und l_1 .

Hiermit sind wir am Ziele unserer Untersuchung. Es ist erwiesen:

Jedes der Bedingung
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(N) = 0$$

entsprechende Reibungsgesetz genügt unseren in § 1, 2. aufgestellten Forderungen; insbesondere zeigt es nicht die Mängel des Coulombschen Gesetzes.

§ 7. Die lineare Gleichung für die ebene Bewegung.

Wir wollen im zweiten Teile der Arbeit die Reibungstheorie auf ein Beispiel aus der ebenen Bewegung anwenden. Zur Bestimmung der Reaktionen dient auch da eine lineare Gleichung, die man im allgemeinen aus den Differentialgleichungen des Problems bequem ableiten können. Es erscheint aber lohnend, auszuführen, wie man sie aus den allgemeinen Überlegungen, die wir in den vorangegangenen Abschnitten angestellt haben, durch Spezialisierung erhalten kann. Die Formeln aus § 3 lassen sich ohne weiteres übertragen, dagegen bedarf die kinematische Ableitung des § 5 einer eingehenden Behandlung; entsprechend den verschiedenen Möglichkeiten des Überganges zu unserem Beispiele sollen hier zwei spezielle Fälle näher besprochen werden.

1. Körper auf ebener Unterlage.

Ist die feste Unterlage F eben, so werden ihre Krümmungsradien unendlich, die Krümmungslinien sind beliebig; wir denken uns in der Ebene zwei orthogonale Kurvenscharen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ so bestimmt, daß an der Berührungsstelle ihre Tangentenrichtungen mit den Richtungen ϵ_I bzw. ϵ_{II} zusammenfallen. Dann ist der in § 4, 2. eingeführte Winkel $\varphi = 0$, und nach § 4 (10) und (13) wird:

$$k_{I1} = \alpha_{11} = \frac{1}{\varrho_I}; \quad k_{12} = \alpha_{12} = 0; \quad k_{22} = \alpha_{22} = \frac{1}{\varrho_{II}}; \quad k = \frac{1}{\varrho_I \varrho_{II}},$$

und hiermit folgt aus § 5 (9):

$$(1) \quad \ddot{x}_n = \varrho_I \omega_2^2 + \varrho_{II} \omega_1^2.$$

Aus § 5 (7) folgt nebenbei bemerkt:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= \varrho_I \omega_2 + \dot{x}^{(1)}; & \dot{x}^{(2)} &= -\varrho_{II} \omega_1 + \dot{x}^{(2)}; \\ \dot{\xi}^{(1)} &= \varrho_I \omega_2; & \dot{\xi}^{(2)} &= -\varrho_{II} \omega_1. \end{aligned}$$

Vorausgesetzt ist bei dieser Ableitung, daß keiner der Krümmungsradien ϱ_I und ϱ_{II} unendlich ist; ist dies aber doch der Fall, etwa $\frac{1}{\varrho_{II}} = 0$, so schließen wir aus § 5 (7b):

$$(2') \quad \dot{\xi}^{(1)} = \varrho_I \omega_2; \quad 0 = -\omega_1.$$

Es muß also ω auf $e_1 = \epsilon_I$ senkrecht stehen, und diese Forderung ist plausibel, wenn man sich den Körper als Zylinder vorstellt, dessen Erzeugenden zur Richtung $e_2 = \epsilon_{II}$ parallel sind; hätte die Winkelgeschwindigkeit ω in der Ebene eine Komponente senkrecht zur Zylinderachse, so würde der Zylinder in der Ebene aufkippen, also die Berührungsbedingung verletzt sein. Aus § 5 (8) folgt nunmehr:

$$(1') \quad \ddot{x}_n = \frac{1}{\varrho_I} \cdot \dot{\xi}^{(1)2} = \varrho_I \omega_2^2,$$

und aus (7a):

$$(2') \quad \dot{x}^{(1)} = \varrho_I \omega_2 + \dot{\xi}^{(1)}.$$

Die Formeln (1') und (2') gelten ersichtlich für die Bewegung einer ebenen Kurve auf einer Geraden.

2. Die ebene Bewegung.

Wir denken uns nunmehr beide Körper als Zylinder, deren Geraden auf einer Ebene η senkrecht stehen. Die zu diesen gehörigen Krümmungsradien r_2 und ϱ_{II} sind unendlich groß; die Schnittkurven der Zylinder mit η sind die anderen Krümmungskurven. Wieder ist $\varphi = 0$, daher:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\varrho_I}, \quad k_{11} = \frac{1}{\varrho_I} - \frac{1}{r_1}; \quad \alpha_{12} = k_{12} = 0; \quad \alpha_{22} = k_{22} = 0.$$

Aus § 5 (7) folgt deshalb:

$$(3) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho_I} - \frac{1}{r_1}\right) \dot{x}^{(1)} &= \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{\varrho_I}, \quad 0 = -\omega_1, \\ \left(\frac{1}{\varrho_I} - \frac{1}{r_1}\right) \dot{\xi}^{(1)} &= \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1}, \quad 0 = -\omega_1. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\omega_1 = 0$ ist wiederum einleuchtend, um aber wirklich den Fall ebener Bewegung zu haben, müssen wir noch verlangen $\dot{\xi}^{(2)} = 0$, sowie $\omega | n = 0$, Einschränkungen, die sich aus unserer Formel natürlich nicht ergeben können; ferner folgt aus § 5 (5b):

$$(4) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_n &= \frac{\dot{\xi}^{(1)2}}{r_1} + \left(\frac{1}{\varrho_I} - \frac{1}{r_1}\right) \dot{\xi}^{(1)2}, \text{ und nach kurzer Reduktion:} \\ \ddot{x}_n &= \frac{1}{r_1 - \varrho_I} \{ \dot{\xi}^{(1)2} + r_1 \varrho_I \omega_2^2 + 2 \omega_2 \varrho_I \dot{\xi}^{(1)} \}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Wahl der Vorzeichen usw. gilt nach unseren Überlegungen folgende Regel: Die gemeinsame Normale n sei auf die bewegte Kurve zu gerichtet; der Tangente werde eine positive Richtung e so beigelegt, daß die Normale n durch positive Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) in sie übergeht; die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ des Berührungspunktes liegt in der Tangentenrichtung und soll nach e hin positiv genommen werden; entsprechend sei die Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn positiv gemessen. Die Krümmungsradien r und ϱ der festen bzw. bewegten Kurve sollen mit positivem Zeichen genommen werden, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der $+n$ Richtung liegt. Dann gilt die gesuchte Beziehung:

$$(4') \quad \ddot{x}_n = \frac{1}{r - \varrho} \{ \dot{\xi}^2 + r \varrho \omega^2 + 2 \varrho \omega \dot{\xi} \}.$$

Ist die feste Kurve eine Gerade, so ist r unendlich groß und es kommt:

$$(4a) \quad \ddot{x}_n = \varrho \omega^2,$$

genau wie in (1').

3. Nun sollen noch für die Koeffizienten A , B , C der linearen Gleichung ihre Ausdrücke bei der ebenen Bewegung abgeleitet werden (vgl. § 3). Es ist nicht nötig, über die Lagen der Koordinatenachsen in der Ebene η Annahmen zu machen; die dritten Achsen $O(3)$ und $G(III)$ stehen auf η senkrecht, wir wollen sie so orientieren, daß sie mit den oben festgelegten Richtungen \mathbf{n} und \mathbf{e} ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden. Seien p und q die Koordinaten des Schwerpunktes G bezüglich der Achsen \mathbf{e} und \mathbf{n} . Die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} (s. § 3, (4)) stehen auf η senkrecht, es ist $\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_{II} = 0$, $\mathbf{b}_I = \mathbf{b}_{II} = 0$, dagegen:

$$(5) \quad \mathbf{a}_{III} = p, \quad \mathbf{b}_{III} = q.$$

Nach einer bekannten Formel der Vektoranalysis ist:

$$\mathbf{n} | \omega^\wedge [\omega^\wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)] = [\mathbf{n} | \omega] [\omega | (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)] - [\mathbf{n} | (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)] \omega^2,$$

oder da \mathbf{n} auf ω senkrecht steht, gleich:

$$+ q \omega^2.$$

Nunmehr wird (§ 3 (11) und (12)):

$$(6) \quad B = \frac{1}{M} + \frac{p^2}{T_{III}}, \quad C = \frac{pq}{T_{III}},$$

$$\ddot{x}_n^0 = \frac{\ddot{\delta}_n^0}{M} + q \omega^2 + \frac{p}{T_{III}} \mathfrak{M}_{III}^0.$$

Weiterhin haben wir.

$$(6') \quad A = \ddot{x}_n - \ddot{x}_n^0 = \frac{1}{r-e} \{ \dot{x}^2 + r \varrho \omega^2 + 2 \varrho \omega \dot{x} \} - q \omega^2 - \frac{\ddot{\delta}_n^0}{M} - \frac{p}{T_{III}} \mathfrak{M}_{III}^0.$$

Bezeichnet s den Schwerpunktsträgheitsradius, so ist $T_{III} = Ms^2$; statt \mathfrak{M}_{III}^0 des Momentes der eingepprägten Kräfte in G , sei künftig \mathfrak{M}^0 geschrieben. Dann lautet die *gesuchte lineare Gleichung für zwei Kurven*:

$$(7) \quad N(p^2 + s^2) - Rpq = Ms^2 \frac{\dot{x}}{r-e} (\dot{x} + 2\varrho\omega) - Ms^2 \omega^2 \left(q - \frac{r\varrho}{r-e} \right) - s^2 \ddot{\delta}_n^0 - p \mathfrak{M}^0.$$

Ist die Unterlage eine starre Gerade ($r = \infty$), so geht die Gleichung über in:

$$(8) \quad N(p^2 + s^2) - Rpq = - Ms^2 \omega^2 (q - \varrho) - s^2 \ddot{\delta}_n^0 - p \mathfrak{M}^0.$$

Die Formel (7) ist übrigens schon von Chaumat für aufeinander rollende Kreise mitgeteilt worden (a. a. O. s. § 2).

II. Durchführung eines Beispiels.

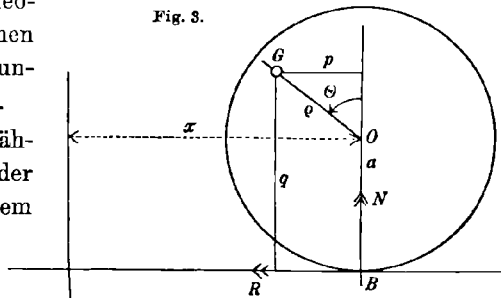
§ 8. Die Differentialgleichungen des Problems.

1. Mit der im vorangehenden aufgestellten Theorie wollen wir die von Chaumat experimentell untersuchte Aufgabe behandeln, und wir wählen solche Anfangsbedingungen, bei denen das Coulombsche Gesetz versagt:

Eine vertikal gestellte schwere Kreisscheibe mit exzentrisch gelegenen Schwerpunkte G bewege sich in ihrer Ebene auf einer horizontalen, ebenen, rauhen Unterlage; welche Bewegung tritt unter den kritischen Anfangsbedingungen ein?

Die exzentrische Lage des Schwerpunktes stellt man etwa folgendermaßen her: die Kreisscheibe vom Radius a (Mittelpunkt O) sei massiv oder auch nach Art eines Reifes gefertigt, ihre Masse sei m_1 ; in der Nähe der Peripherie werde eine schwere Masse m_2 angebracht, in Gestalt eines Kreiszyinders vom Radius r , dessen Achse senkrecht zur Scheibenebene steht und von ihr halbiert wird; der Schwerpunkt des ganzen Systems habe von O den Abstand q . Bei dieser Anordnung kann sich die Scheibe ungehindert auf der Unterlage bewegen; macht man m_2 gegen m_1 sehr groß, so wird der Schwerpunktsträgheitsradius s der ganzen Scheibe angenähert dem der Masse m_2 allein gleich, also $s = \frac{r}{2} \sqrt{2}$, und läßt sich mit r beliebig verkleinern. Der Schwerpunkt G liegt dann annähernd im Mittelpunkt des schweren Zylinders, also nahe der Peripherie der Scheibe. Für die theoretischen Überlegungen machen wir natürlich keine Voraussetzungen über die Größen q und s .

2. Die Bewegungsebene wählen wir zur (x, y) -Ebene, auf der Unterlage zählen wir von einem beliebigen Punkte aus (Fig. 3) Koordinaten x nach dem jeweiligen Berührungspunkte B ,



der Schwerpunkt habe von ihr eben den Abstand q , von der Berührungsnormalen den Abstand p . Der Strahl $OG = q$ bilde mit der Normalen augenblicklich den Winkel θ , dessen positiver Sinn dem des Uhrzeigers entgegenlaufe. Der Berührungspunkt B gleite zu Beginn auf der Unterlage nach wachsendem x , die Reibungskraft R hat dann die entgegengesetzte Richtung.

Mit Hilfe des Schwerpunkts- und Flächensatzes erhält man die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & M \frac{d^2}{dt^2} (x - p) = - R, \\
 \text{II} \quad & M \frac{d^2 q}{dt^2} = N - Mg, \\
 \text{III} \quad & Ms^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = pN - qR;
 \end{aligned}$$

dazu kommen die *geometrischen* Beziehungen:

$$\begin{aligned} p &= \rho \sin \theta \\ q &= a + \rho \cos \theta \end{aligned}$$

und das *Reibungsgesetz*

$$\mu \equiv \frac{R}{N} = \mu(N), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mu = 0,$$

im ganzen 6 Gleichungen für x, p, q, θ, R, N . Führt man in II' θ mittels

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = (q - a)\dot{\theta}; \quad \frac{d^2p}{dt^2} = -p\dot{\theta}^2 + (q - a)\ddot{\theta};$$

$$(2) \quad \frac{d(q - a)}{dt} = -p\dot{\theta}; \quad \frac{d^2(q - a)}{dt^2} = -(q - a)\dot{\theta}^2 - p\ddot{\theta}$$

ein, so erhält man:

$$(II) \quad -M((q - a)\dot{\theta}^2 + p\ddot{\theta}) = N - Mg.$$

Hierzu kommen noch die *Anfangsbedingungen*:

$$(A) \quad \text{Für } t = 0: \quad \theta = \theta_0 \neq 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \quad v = v_0 > 0,$$

wenn $v = \dot{x} + a\dot{\theta}$ die Geschwindigkeit des Punktes der Scheibe ist, der eben in B berührt. Wir haben für die Unbekannten x und θ, N und R mit dem Reibungsgesetz vier simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung; für unsere Zwecke kommt die Lösung an der Stelle $t = 0$ in Betracht.

3. Aus II und III folgt durch Elimination von $\ddot{\theta}$ die Gleichung:

$$(3) \quad N(s^2 + p^2) - Rpq = Ms^2(g - (q - a)\dot{\theta}^2).$$

Das ist aber nichts anderes als die in § 7 (8) mitgeteilte *lineare Relation zwischen N und R* , falls eine Kurve auf einer festen Geraden rollt und gleitet. Für die Kreisscheibe ist nur $\rho = a = \text{const.}$ zu setzen, das Moment \mathfrak{M}^0 der Schwerkraft in G ist Null, ihre Komponente nach n dagegen $\mathfrak{F}_n^0 = -Mg$, daher gehen beide Gleichungen ineinander über. Gibt man die Anfangslage θ_0 und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\theta}_0$ so, daß $g - (q_0 - a)\dot{\theta}_0^2 > 0$ wird, so liegt (vgl. § 6, 3.) der Fall der Geraden l_1 oder l_2 vor, je nachdem der Berührungspunkt B nach positivem oder negativem x hin gleitet; ist aber $g - (q_0 - a)\dot{\theta}_0^2 < 0$, so kommt man auf den Fall der Geraden l_3 ; damit sind die dort aufgezählten drei Fälle als ausführbar erwiesen.

Wir wollen jedoch jetzt $\dot{\theta}_0 = 0, R > 0$ annehmen, haben es also mit der Geraden l_1 zu tun; da liefert unser Reibungsgesetz aus (3) stets positive endliche Werte N und R , während das Coulombsche Gesetz $\mu = \text{const.} = \mu'$ auf einen Widerspruch führt, sobald:

$$(4) \quad \mu' \geq \frac{s^2 + p_0^2}{p_0 q_0} = \frac{s^2}{p_0 q_0} + \frac{p_0}{q_0}$$

angenommen wird. Gibt man sich zuerst θ_0 , so kann man, um diesen

Fall sicher herbeizuführen, durch geeignete Massenverteilung (vgl. § 8, 1) $s = p_0$ machen, und hat dann wegen

$$\mu' \geq \frac{2p_0}{q_0} \text{, oder } p_0 \leq \frac{1}{2} q_0 \mu' = \frac{1}{2} \mu' (a + \rho \cos \theta_0)$$

nur a hinreichend groß zu nehmen, damit die Ungleichung (4) erfüllt ist. Wir wollen jedoch zunächst nur voraussetzen, daß die Gl. (4) für irgend welche Werte s und θ_0 bestehe, und erst später zur Vereinfachung $s = p_0$ annehmen.

§ 9. Die Anfangsbewegung im Intervalle τ .

1. In bekannter Weise kann man die Gleichungen I—III mit (A) nach dem sog. Cauchy-Lipschitzschen Verfahren integrieren. Für den Moment $t = 0$ sind nach Berechnung von N und R alle äußeren Kräfte, also die zweiten Differentialquotienten von x und θ bekannt, man ermittelt aus ihnen die Werte x und θ zur Zeit $t_0 + \Delta t$, hieraus wieder die rechte Seite der Differentialgleichungen usf. Es wird sich später zeigen, daß uns die Kenntnis der Bewegung im ersten Intervalle Δt genügt; es kommt darauf an, ein Intervall τ so abzuschätzen, daß in ihm die zweiten Differentialquotienten noch wesentlich konstant bleiben, und in ihm die Anfangsbewegung festzustellen. Ist τ hinreichend klein, so darf man die entstehende Bewegung zerlegen in die anfänglich bestehende Translationsbewegung \dot{x}_0 oder v_0 (wegen $\dot{\theta}_0 = 0$) und die Bewegung, die durch die Kräfte N_0, R_0, Mg der ruhenden Scheibe erteilt wird. Es ist also die Anfangsbewegung der Scheibe unter dem Einflusse eines gegebenen Impulses zu untersuchen.

2. Wirkt auf einen starren ruhenden ebenen Körper ein Impuls J in der Ebene des Körpers, so findet man das Momentanzentrum m der Anfangsbewegung bekanntlich so (Fig. 4): Vom Schwerpunkte G fälle man auf J das Lot GF und verlängere FG um eine Strecke Gm über G hinaus, sodaß $Gm \cdot GF = s^2$ wird, wo s den Schwerpunktstrahlgadius bedeutet; m ist das gesuchte Momentanzentrum. Schlägt man um G den Kreis mit dem Radius s , so liegt m zu F negativ invers; ist umgekehrt bekannt, daß das Momentan-

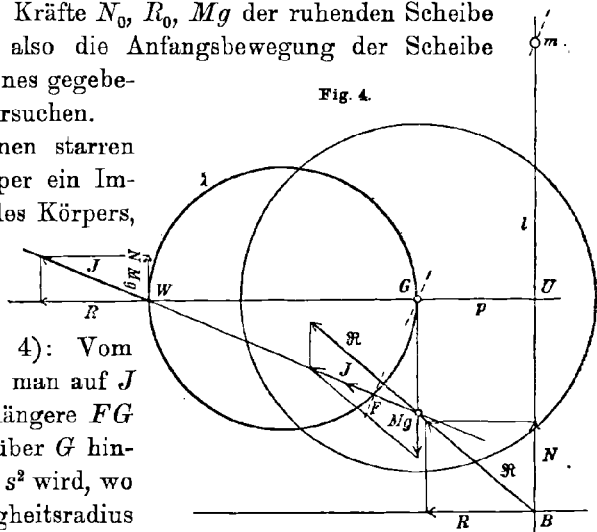


Fig. 4.

zentrum auf einer Geraden l liegt, so folgt sofort, daß F' auf dem negativ inversen Bild der Geraden l am Kreise s liegt, also auf einem Kreise λ , der durch G geht. Die Richtung des Impulses steht auf GF' in F' senkrecht, geht infolgedessen durch den Punkt W von λ , der zu G diametral liegt; ist GU das Lot von G auf l , so sind U und W bezüglich λ negativ invers.

3. In unserem Falle nun bewegt sich B auf der horizontalen Unterlage, das Momentanzentrum liegt somit auf der Berührungsnormale, der Geraden l des allgemeinen Satzes. Die Punkte U und W sind leicht zu konstruieren. Der Impuls J ist die Resultierende des Normaldruckes N_0 und der Reibung R_0 , die im Punkte B angreifen und sich zur Reaktion \mathfrak{R} zusammensetzen, sowie des Gewichtes Mg mit dem Angriffspunkt G ; außerdem geht J durch den Punkt W , das Moment der drei Kräfte in W muß demnach verschwinden. Sind p_0 und q_0 die Koordinaten des Punktes G (§ 8, 2.), so ist $GW = \frac{s^2}{p_0}$, und das verschwindende Moment in W :

$$(1) \quad \left(p_0 + \frac{s^2}{p_0}\right) N_0 - q_0 R_0 - \frac{s^2}{p_0} Mg = 0, \quad \text{oder:} \\ (p_0^2 + s^2) N_0 - p_0 q_0 R_0 = Mg s^2.$$

Diese schon früher gefundene Gleichung bedeutet also geometrisch, daß der Impuls J der Kräfte N_0, R_0, Mg durch einen bestimmten Punkt geht.¹⁾ Zerlegt man den Impuls am Punkte W in seine horizontale und vertikale Komponente (R_0 bzw. $N_0 - Mg$), so ist sein Moment in G gleich $-\frac{s^2}{p_0}(N_0 - Mg)$, und man hat die Bewegungsgleichung:

$$(2) \quad Ms^2 \ddot{\theta} = - \frac{s^2}{p_0} (N_0 - Mg). \quad \text{oder} \quad \ddot{\theta} = - \frac{N_0 - Mg}{Mp_0},$$

und durch Integration:

$$(3) \quad \dot{\theta} = - \frac{N_0 - Mg}{Mp_0} t; \quad \theta - \theta_0 = - \frac{N_0 - Mg}{2Mp_0} t^2.$$

Um das Momentanzentrum m zu finden, entnehme man aus der Figur die Beziehung:

$$\frac{mU}{p_0} = \frac{R_0}{N_0 - Mg}, \quad \text{oder} \quad mU = \frac{p_0 R_0}{N_0 - Mg}.$$

Alsdann ist

$$mB = mU + q_0 = \frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{N_0 - Mg},$$

1) Das gilt auch noch, wenn beliebige eingeprägte Kräfte gegeben sind; bildet man das Moment des Impulses in W , das ja verschwinden soll, so erhält man die Gl. § 7 (8), wenn man dort noch alle Geschwindigkeitsgrößen gleich Null setzt.

und man hat schließlich als Geschwindigkeit des Berührungspunktes unter dem Einflusse des Impulses J den Ausdruck:

$$(4) \quad mB \cdot \dot{\theta} = - \frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{Mp_0} t,$$

sie ist also nach abnehmendem x gerichtet.

4. Nunmehr ist die uns interessierende Anfangsbewegung gefunden, sie findet statt in dem noch abzuschätzenden Intervalle τ ; superponieren wir jetzt wieder die anfängliche Translationsgeschwindigkeit v_0 der ganzen Scheibe, so ergibt sich die Gleitgeschwindigkeit von B :

$$(5) \quad v = v_0 - \frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{Mp_0} t, \quad \text{gültig für } 0 < t < \tau.$$

Der Punkt B kommt somit zur Ruhe in dem Zeitpunkte:

$$(6) \quad T = \frac{Mp_0 v_0}{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)},$$

aber dieses Resultat ist nur dann richtig, wenn $T < \tau$ bleibt; wir wollen daher im nächsten Paragraphen die Bedingungen für $\mu(N)$ feststellen, unter denen diese Forderung erfüllt ist. Wird dann τ selbst eine kleine Zahl, so gilt dies auch von T , der Körper kommt in kurzer Zeit zur Ruhe, und das versteht man gerade unter „Selbstsperrung“. — Es sei noch festgestellt, daß diese geometrische Ableitung von der Kreisgestalt der Scheibe keinen Gebrauch macht, da nur der Krümmungsradius an der Berührungsstelle in Betracht kommt.

§ 10. Abschätzung des Intervalles τ .

1. Zur genauen Eingrenzung des gesuchten Intervalles τ wäre die Kenntnis des ganzen Bewegungsverlaufes erforderlich, die wir uns aber nicht so leicht verschaffen können; wir wollen die Rechnung daher nur näherungsweise durchführen und schlagen folgenden Weg ein:

Wir nehmen an, für den Normaldruck N lasse sich aus den Differentialgleichungen eine konvergente Entwicklung

$$(1) \quad N = N_0 + N'_1 t + N_1 t^2 + \dots$$

aufstellen; für sehr kleine Werte von t dürfen wir uns auf die Anfangsglieder beschränken; nun wird t auf ein Gebiet $0 < t < \tau$ so eingegrenzt, daß das Glied $N_1 t^2$ (N'_1 wird sich gleich Null herausstellen) gegen N_0 klein bleibt. Dann darf man angenähert im Intervalle $(0, \tau)$ $N = N_0$ setzen, und, wie alsdann nachgewiesen wird, auch $\theta = \theta_0$ konstant annehmen. Diesen Nachweis noch erbracht, wird alsdann τ das gesuchte Intervall sein (vgl. § 9).

Nach § 8 gilt für jedes t die Gleichung:

$$(2) \quad (s^2 + p^2)N - pqR = Ms^2(g - (q - a)\theta^2), \quad \text{und für } t = 0$$

$$(3) \quad (s^2 + p_0^2)N_0 - p_0q_0R_0 = Mgs^2.$$

Wären in (2) p , q und θ als Funktionen von t bekannt, so könnten wir hieraus mit Hilfe von

$$(4) \quad R = \mu \cdot N$$

die gesuchte Reihenentwicklung für N ableiten. Die Anfangsglieder der Reihe kann man jedoch wegen der Annahme $\theta_0 = 0$ ohne Kenntnis der genauen Lösung bestimmen. Setzt man die Reihe (1) in (2) und (4) ein, differenziert je einmal nach t und setzt dann $t = 0$, so erhält man für die Koeffizienten N'_1 und N_1 zwei Gleichungen zu ihrer Berechnung, die nun durchgeführt werden soll.

2. Für $t = 0$ hat man:

$$(5) \quad \dot{\theta} = 0; \quad \frac{d(pq)}{dt} = 0; \quad \frac{dp^2}{dt} = 0; \quad \frac{d(q-a)\theta^2}{dt} = 0; \quad \frac{dN}{dt} = N'_1.$$

$$(6) \quad \frac{d^2(p^2)}{dt^2} = 2p_0\ddot{p}_0; \quad \frac{d^2(pq)}{dt^2} = p_0\ddot{q}_0 + q_0\ddot{p}_0; \quad \frac{d^2(q-a)\theta^2}{dt^2} = 2(q_0-a)\ddot{\theta}_0^2; \quad \frac{d^2N}{dt^2} = 2N_1.$$

Ferner ist unter der Annahme, daß die Reibung R während des betrachteten Intervalles außer von N nicht merklich von anderen Funktionen der Zeit (etwa von v) abhängt:

$$(6a) \quad \frac{dR}{dt} = \left(\mu + N \frac{d\mu}{dN}\right) \frac{dN}{dt}; \quad \frac{d^2R}{dt^2} = \left(\mu + N \frac{d\mu}{dN}\right) \frac{d^2N}{dt^2} + \left(2 \frac{d\mu}{dN} + N \frac{d^2\mu}{dN^2}\right) \left(\frac{dN}{dt}\right)^2.$$

Wir setzen noch zur Abkürzung für $t = 0$, also $N = N_0$:

$$(6b) \quad -\lambda = \left(\frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dN}\right)_0; \quad \mu_0 = \frac{R_0}{N_0}; \quad \left(\mu + N \frac{d\mu}{dN}\right)_0 = \mu_0(1 - \lambda).$$

Dann erhält man für N'_1 in der angegebenen Weise die Gleichung:

$$(7) \quad (s^2 + p_0^2)N'_1 - p_0q_0\mu_0(1 - \lambda)N'_1 = 0 \quad \text{oder} \\ N'_1 \{s^2 + p_0^2 - p_0q_0\mu_0(1 - \lambda)\} = 0.$$

Die Klammer reduziert sich wegen (3) auf den Ausdruck:

$$(8) \quad \frac{Mgs^2}{N_0} + \lambda p_0q_0\mu_0.$$

Nimmt man an, daß $\lambda = -\left(\frac{N}{\mu} \frac{d\mu}{dN}\right)_0$ positiv sei, so kann die Klammer nicht verschwinden, es muß dann $N'_1 = 0$ sein. Mit Fortlassung dieses Koeffizienten erhält man für N_1 die Gleichung:

$$(9) \quad 2N_1 \{s^2 + p_0^2 - p_0q_0\mu_0(1 - \lambda)\} + N_0 \{2p_0\ddot{p}_0 - \mu_0(p_0\ddot{q}_0 + q_0\ddot{p}_0)\} = -2Ms^2(q_0 - a)\ddot{\theta}_0^2,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen II und III:

$$(10) \quad \begin{aligned} & 2 N_1 \{ s^2 + p_0^2 - p_0 q_0 \mu_0 (1 - \lambda) \} \\ & = \frac{N_0(N_0 - Mg)}{M p_0} \{ p_0(4(q_0 - a) + \mu_0 p_0) - 3 \mu_0 q_0 (q_0 - a) \}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$(11) \quad h \equiv \frac{N_0 - Mg}{N_0}, \quad \text{also} \quad N_0(1 - h) = Mg$$

und erhalten statt (3):

$$(3') \quad p_0^2 - p_0 q_0 \mu_0 + h s^2 = 0.$$

Mit Benutzung dieses Ausdruckes geht (10) über in:

$$(12) \quad N_1 = \frac{N_0 g h^2}{2 p_0^2 (1 - h)} \cdot \frac{(q_0 - a) \left\{ 4 - 3 \frac{\mu_0 q_0}{p_0} \right\} + \mu_0 p_0}{\frac{\mu_0 q_0}{p_0} \{ 1 - h(1 - \lambda) \} - (1 - h)}.$$

3. Um nun N_1 ausschließlich durch die Anfangswerte p_0, q_0 auszudrücken, müßten wir Gl. (3) nach N_0 auflösen. Das ist aber im allgemeinen in geschlossener Form nicht möglich, zumal wir über den Ausdruck der Funktion $R(N)$ noch nichts angenommen haben. Nimmt man jetzt zur Vereinfachung, wie in § 8, 3. erwähnt, $s = p_0$ an, so geht (3') über in:

$$(13) \quad p_0(1 + h) = \mu_0 q_0,$$

ist aber natürlich zur Auflösung nach N_0 auch nicht geeignet. Führt man diese Gleichung in (12) ein, so kommt nach einigen Reduktionen:

$$(14) \quad N_1 = - \frac{N_0 g h (q_0 - a) k}{p_0^2 (1 - h) [1 - h + \lambda(1 + h)]},$$

wo

$$(15) \quad k = \frac{3h - 1}{2} - \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0$$

gesetzt ist.

Die gesuchte Anfangsentwicklung von N lautet somit:

$$(16) \quad N = N_0 \left\{ 1 - \frac{g h (q_0 - a) k}{p_0^2 (1 - h) [1 - h + \lambda(1 + h)]} t^2 \right\}.$$

4. Beschränkt man t auf ein Intervall $0 < t < \tau$, derart daß

$$(17) \quad \tau^2 \cdot \frac{g h (q_0 - a) k}{p_0^2 (1 - h) \{ 1 - h + \lambda(1 + h) \}} \equiv \delta,$$

gleich einer willkürlich anzunehmenden Zahl δ wird, die man gegen 1 vernachlässigen kann, so ist angenähert $N = N_0$ und $R = R_0$. Ferner ist nach § 9 (3):

$$(18) \quad \begin{aligned} \theta - \theta_0 &= - \frac{N_0 - Mg}{2 M p_0} t^2 = - \frac{g h}{2 p_0 (1 - h)} t^2, \quad \text{oder:} \\ \theta &= \theta_0 \left\{ 1 - \frac{g h}{2 p_0 \theta_0 (1 - h)} t^2 \right\}. \end{aligned}$$

Das zweite Glied erreicht im Gebiete $(0, \tau)$ seinen Maximalwert:

$$(19) \quad \alpha \equiv \frac{gh}{2p_0\theta_0(1-h)} \tau^2 = \delta \cdot \frac{1-h+\lambda(1+h)}{2k} \cdot \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}.$$

Fordert man von λ , daß

$$(20) \quad 1 - h + \lambda(1 + h) \leq 2k$$

sein soll, oder wegen (15) nach kurzer Rechnung:

$$(20a) \quad \lambda \leq \frac{1}{1+h}(4h - 2 - \mu_0 \operatorname{tg}\theta_0),$$

so folgt aus (19):

$$(21) \quad \alpha \leq \delta \cdot \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0},$$

und nach (17) wird

$$(22) \quad \tau^2 \leq \delta \cdot \frac{2p_0^2(1-h)}{gh(q_0-a)}.$$

Für kleine Winkel θ_0 ist $\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}$ um wenigens größer als 1, und jedenfalls hat α die Größenordnung von δ , fällt also in (18) gegen 1 weg. Dann ist im Intervalle $(0, \tau)$ angenähert $\theta = \theta_0$, und daher überhaupt die rechte Seite der Differentialgleichungen I–III merklich konstant. Das in (17) eingeführte Intervall τ ist somit das gesuchte, wenn die Zulässigkeit der Voraussetzungen über λ und θ_0 noch nachgewiesen ist.

§ 11. Eintritt der Selbstsperrung.

1. Über die Funktion $\mu(N)$ haben wir bereits einige Annahmen gemacht, die jetzt noch zu vervollständigen sind. Wir dürfen für kleine Drucke R zu N proportional setzen, der Proportionalitätsfaktor sei gerade dem in § 8 (4) eingeführten kritischen Coulombschen Koeffizienten μ' gleich, der nach Beobachtungen stets kleiner als 1 ist; erst für größere Werte von N entspreche μ der Forderung $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu = 0$, sodaß sicher $\mu < \mu'$ ist. Dann liefert die Gleichung § 10 (3), wie man an der Fig. 2 ohne weiteres übersieht, einen beliebig großen Anfangsdruck N_0 , dem gegenüber Mg klein ist; es ist nahezu $h = 1$, ferner $1 - h = \frac{Mg}{N_0}$ eine sehr kleine Zahl. Weiter war schon verlangt, daß für $N = N_0$

$$(1) \quad \lambda = - \frac{N \frac{d\mu}{dN}}{\mu}$$

positiv sei; für Werte N_0 , die über einem gewissen N' liegen, ist dies wegen der Forderung $\lim \mu = 0$ sicher erfüllt. Jetzt fordern wir aber ausdrücklich, daß die Größe λ für sehr große Drucke weder Null noch unendlich werde und die Entwicklung gestatte:

$$(2) \quad \lambda = \sigma \left\{ 1 + \frac{\alpha_1}{N} + \frac{\alpha_2}{N^2} + \dots \right\};$$

durch Integration folgt:

$$(3) \quad \mu = c \cdot e^{-\sigma \ln N} \left(1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots \right) = \frac{c}{N^\sigma} \left(1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \dots \right).$$

Es erscheint möglich zu verlangen, daß $R = \mu \cdot N$ mit wachsendem N jedenfalls nicht verschwinde; das führt auf die Einschränkung:

$$(4) \quad 0 < \sigma \leq 1.$$

Die Bedingung $\lim \mu = 0$ hat zur Folge, daß $\sigma \neq 0$ ist; nach (2) ist genähert $\lambda = \sigma$ und jedenfalls auch $0 < \lambda < 1$. Mit diesen Annahmen über $\mu(N)$, die für große N keiner unmittelbaren Beobachtung widersprechen können, reichen wir aus.

2. Führt man in die Bedingung für λ (§ 10 (20a)) $1 - h = \frac{Mg}{N_0}$ mit den erlaubten Vernachlässigungen ein, so kommt:

$$(5) \quad \lambda \leq 1 - \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{Mg}{4N_0} (6 + \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0). \quad \#$$

Für hinreichend große N_0 kommt das dritte Glied nicht in Betracht; wir haben also nur noch θ_0 abzuschätzen. Nun sollte (vgl. § 8 (4)) θ_0 entsprechend der Ungleichung

$$p_0 < \frac{1}{2} \mu' (a + \rho \cos \theta_0)$$

bestimmt werden. Eine graphische Darstellung der Kurven $\rho \sin \theta_0$ und $\frac{1}{2} \mu' (a + \rho \cos \theta_0)$ zeigt, daß für kleine Werte für μ' auch θ_0 klein ausfällt, um so kleiner, je stärker die Ungleichheit besteht. Nimmt man für μ' einen Durchschnittswert $\frac{1}{2} a$ an, so wird θ_0 so klein, daß $\frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\theta_0}$ nahe bei 1 liegt, dagegen $\frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0$ beträchtlich kleiner als 1 wird. Die Ungleichung (5) bedeutet dann keine allzustarke Einschränkung und ist sicher erfüllt, wenn man $\lambda = \sigma$ setzt.

Setzt man in § 10 (15) $h = 1 - \frac{Mg}{N_0}$ ein, so wird

$$k = 1 - \frac{3}{2} \frac{Mg}{N_0} - \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0 \quad \text{oder angenähert}$$

$$k = 1 - \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0,$$

d. h. k wird jedenfalls nicht viel kleiner als 1.

Unsere früher angestellten Abschätzungen sind nunmehr gesichert.

3. Jetzt ziehen wir das Resultat von § 9 (6) heran; es war:

$$(6) \quad T = \frac{M p_0 v_0}{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)} = \frac{(1-h) \mu_0 v_0}{g(h(1+h) + \mu_0^2)},$$

und wir hatten schon verlangt, daß $\varepsilon \equiv \frac{T}{\tau} < 1$ sein solle. Schreibt man $\varepsilon < 1$ beliebig vor, setzt $T = \varepsilon \tau$ in § 10 (17) ein und nimmt an, daß v_0 von der Größenordnung:

$$(7) \quad v_0 \sim g_0 \frac{h(1+h) + \mu_0^2}{1+h} \sqrt{\frac{g}{hk(q_0 - a)}}$$

sei, was ja für v_0 keine allzustarke Einschränkung bedeutet, so folgt näherungsweise

$$(8) \quad \varepsilon^2 \delta = \frac{1-h}{1-h+\lambda(1+h)} \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 \delta = \frac{1-h}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \frac{Mg}{N_0}.$$

Hierin steckt eine Bedingung für den Anfangsdruck N_0 , und erst wenn auch noch diese erfüllt ist, stellt der Ausdruck T die Zeit dar, zu der die „Selbstsperrung“ eintritt. Wir mußten, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen, eine Reihe von notwendigen Annahmen einführen, ohne darüber zu entscheiden, ob sie auch hinreichend seien. Jetzt schlagen wir den umgekehrten Weg ein, setzen diese Forderungen als erfüllt voraus und zeigen, wie alsdann die Rechnung verläuft.

4. Der Coulombsche Koeffizient ist für die berührenden Materialien gegeben; die Anfangslage θ_0 entspricht der Ungleichung

$$\sin \theta_0 \leq \frac{1}{2} \mu' \frac{\alpha + e \cos \theta_0}{e},$$

θ_0 fällt sehr klein aus. Den Anfangsdruck N_0 berechnen wir aus $p_0(1+h) = g_0 \mu_0$, wo für große N eine Entwicklung von der Form:

$$\mu = \frac{c}{N^\sigma} \left(1 + \frac{A_1}{N} + \dots \right)$$

gegeben ist. Wir dürfen die Lösung N_0 als sehr groß annehmen, so daß $1-h = \frac{Mg}{N_0}$ und $\mu_0 = \mu(N_0)$ kleine Zahlen sind. Dann wird $k = 1 - \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{tg} \theta_0$ die Größenordnung 1 haben; angenähert wird

$\lambda = - \left(\frac{N \frac{d\mu}{dN}}{\mu} \right) = \sigma$. Ferner muß N_0 so groß sein, daß sich der Quotient $\frac{Mg}{N_0} \frac{1}{2\lambda} = \delta \varepsilon^2$ in zwei Zahlen zerlegen läßt, von denen $\varepsilon^2 < 1$, dagegen δ gegen 1 zu vernachlässigen ist. Alsdann bestimmt man ein Intervall τ aus:

$$\tau^2 = \delta \cdot \frac{p_0^2 (1-h) [1-h+\lambda(1+h)]}{gh(g_0-a)k}$$

und beschränkt t auf das Gebiet $0 < t < \tau$. Die Variable t nimmt mit τ nur sehr kleine Werte an, sodaß während τ die Reaktionen N_0 und R_0 , sowie der Winkel θ_0 konstant bleiben. Hat die Anfangsgeschwindigkeit dieselbe Größenordnung wie in (7), so sinkt sie zur Zeit $T = \varepsilon \tau < \tau$ auf Null herab, die Scheibe kommt in kürzester Zeit zur Ruhe, d. h. es tritt Selbstsperrung ein. Die alsdann stattfindende Bewegung interessiert uns hier nicht, wir wollten ja nur den Fall der Gleitreibung behandeln. Die Rechnung ist nur angenähert durchgeführt, da von vornherein keine spezielle Annahme über die Form des Reibungsgesetzes gemacht werden sollte. Eine genauere Durchführung hätte etwa an die Gleichung (3) anzuknüpfen, kann aber nicht zu wesentlich verschiedenen Resultaten führen.

Das Ergebnis unserer Untersuchung können wir kurz so zusammenfassen: *Die v. Misessche Annahme stellt eine hinreichende Bedingung dar für die uneingeschränkte theoretische Brauchbarkeit eines stereodynamischen Reibungsgesetzes, wenigstens bei unserem allgemeinen Bewegungsproblem. Sie läßt der näheren, experimentell zu ermittelnden Form des Reibungsgesetzes einen weiten Spielraum. An einem Beispiel ist dann gezeigt, wie man ein Reibungsgesetz, der allgemeinen Forderung entsprechend, so annehmen kann, daß die Theorie auf die Selbstsperrung führt.*

Untersuchungen kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume.

VON MAX SERGELIUS in Helsingfors.

Herr L. Burmester hat eine ebenso einfache als sinnreiche Theorie „*Kinetographische Verwandtschaften ebener und räumlicher Systeme*“ in den Sitzungs-Berichten der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften zu München, Bd. 37, Heft 1, 1907, veröffentlicht und damit den Anstoß zur Untersuchung einer umfangreichen Gruppe neuer geometrischer Verwandtschaften in der Ebene und im Raum gegeben. Diese Verwandtschaften nennt er kinetographische, weil er sie auf kinematische Weise erzeugt. Die Theorie, an und für sich von hohem Wert, erhält ihre eigentliche Bedeutung erst dadurch, daß Burmester ihre Anwendung auf ebene und räumliche Mechanismen zeigt.

Aus den ebenen und räumlichen kinetographischen Verwandtschaften kann man neue geometrische Bilder — Kurven und Flächen — ableiten und für solche bekannte Bilder neue und elegante Konstruktionen angeben. Aus der Erzeugungsweise dieser Bilder kann man umgekehrt Apparate aufbauen, mit deren Hilfe die Bilder selbst mechanisch erzeugt werden können.

Die oben erwähnte Burmestersche Theorie hat schon den Anlaß zu zwei Untersuchungen in der Ebene gegeben. Beide sind als Dissertationen an der Kgl. Technischen Hochschule zu München veröffentlicht worden, von denen die erste, „*Untersuchungen einer zwei-vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft*“ von H. Rieder, im Jahre 1907 erschien. Rieder erzeugt eine spezielle ebene kinetographische Verwandtschaft, indem er die elliptische und die damit zusammenhängende kardioidische Bewegung ebener Systeme ineinander benützt. Er zeigt auch, wie man mit einem nach den Regeln von Burmester ausgeführten Apparat entsprechende Punkte der beiden kinetographisch aufeinander bezogenen Systeme bestimmen kann.

Die zweite Abhandlung, von K. Hübsch, die im Jahre 1909 erschien, lautet: „*Untersuchung einer kinetographischen Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben*“. Hübsch erzeugt auch eine spezielle ebene kinetographische Verwandtschaft mit einer zwei-vierdeutigen Punktkorrespondenz. Die Bewegung des einen Systems in dem andern wird erzeugt durch das zentrisch-geradlinige, die von dem zweiten in dem ersten durch das zentrisch-winkelige Schleifschiebergetriebe.

Die Aufgabe, die ich mir selbst zur Untersuchung vorgelegt habe und deren Behandlung eine ganz andere ist als die der erwähnten Verfasser, zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste ein ebenes Problem, der zweite sein Analogon im Raume behandelt.

In dem ersten Abschnitte — das ebene Problem — wird die Bewegung des einen Systems in dem andern durch eine Drehung um einen unveränderlichen Punkt festgelegt. Mit dieser Bewegung ist dann eine gleiche Bewegung des letzten Systems in dem ersten verbunden. Das Problem behandle ich vollkommen allgemein, indem ich alle diejenigen kinetographischen Verwandtschaften untersuche, die überhaupt bei der genannten Bewegung entstehen können, unter der Voraussetzung, daß die sog. Ausgangskurven Gerade durch den Drehpunkt sind. Die entsprechenden Punkte in den kinetographisch verwandten Systemen bestimme ich mittels eines mechanischen Apparates und für die geometrischen Bilder — unikursale Kurven 4. Ordnung — die sich aus den erzeugten Verwandtschaften ergeben, habe ich neue und einfache Konstruktionen angegeben.

In dem zweiten Abschnitt — das räumliche Problem — lege ich die Bewegung der beiden Räume ineinander durch eine Drehung um eine unveränderliche Achse fest. Auch in diesem Abschnitt untersuche ich alle diejenigen kinetographischen Verwandtschaften, die bei der genannten Drehung entstehen können, unter der Voraussetzung, daß die sog. Ausgangsflächen Ebenen durch die Drehachse sind. Wegen der rein theoretischen Natur des räumlichen Problems habe ich dieses ganz kurz und zusammenfassend behandelt und nur die Haupteigenschaften der Flächen 4. Ordnung angegeben, die bei jenen Verwandtschaften entstehen, und welche Flächen neue Typen von Flächen 4. Ordnung sind.

Sowohl Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. L. Burmester als Herrn Prof. Dr. K. Doehlemann an der Kgl. Technischen Hochschule zu München darf ich hier meinen besten Dank für viele wertvolle Ratschläge bei der Ausarbeitung dieser Abhandlung aussprechen.

Schließlich ist es mir noch eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. R. Sturm in Breslau, für die Förderung meiner geometrischen Studien meine Dankbarkeit zu bezeigen.

Erster Abschnitt.

Kinetographische Korrespondenzen [2,2] in der Ebene.

I. Kapitel.

Ebene kinetographische Korrespondenzen.

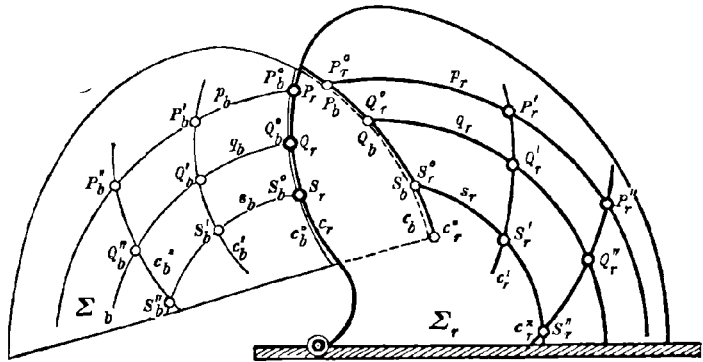
§ 1. Allgemeine Darlegungen.

Nach Burmester gilt in bezug auf eine kinetographische Verwandtschaft oder Korrespondenz¹⁾ in der Ebene folgende Beziehung:

Eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebenen Systeme Σ_r und Σ_b (Fig. 1), von denen Σ_r in Ruhe, Σ_b beweglich ist, bestimmt sich durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems Σ_b in dem Systeme Σ_r und durch die ein-eindeutige Zuordnung der Punkte auf zwei Kurven C_r und C_b in beiden Systemen.²⁾

Entsprechende Punkte in den auf diese Weise kinetographisch aufeinanderbezogenen Systemen Σ_r und Σ_b sind dann diejenigen Punkte X_r und X_b in beiden Systemen, die sich in demselben Augenblick mit zugeordneten Punkten der Ausgangskurven C_b und C_r decken.

Fig. 1.



Ordnen wir den Punkten $P_b, Q_b, S_b \dots$ auf C_b eindeutig die Punkte $P_r, Q_r, S_r \dots$ auf C_r zu, so ergeben sich folgende Gruppen entsprechender Punkte (Fig. 1):

X_r -Punkte	X_b -Punkte
Gruppe 0: ($P_r^0 Q_r^0 S_r^0 \dots$)	Gruppe 0: ($P_b^0 Q_b^0 S_b^0 \dots$)
Gruppe 1: ($P_r^1 Q_r^1 S_r^1 \dots$)	Gruppe 1: ($P_b^1 Q_b^1 S_b^1 \dots$)
Gruppe 2: ($P_r^2 Q_r^2 S_r^2 \dots$)	Gruppe 2: ($P_b^2 Q_b^2 S_b^2 \dots$)

usw.

1) L. Burmester: „Kinetographische Verwandtschaften ebener Systeme und räumlicher Systeme“. Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akad. der Wissenschaften Nr. 37, München 1907.

2) Die kinetographische Verwandtschaft kann dadurch erweitert werden, daß man die Zuordnung der Punkte der Kurven C_r und C_b mehrdeutig macht.

In jedem der beiden Systeme Σ_r und Σ_b entsteht bei der Bewegung des Systemes Σ_b in Σ_r ein Kurvennetz, nämlich:

$$\text{in } \Sigma_r: \begin{cases} H_r \equiv (p_r q_r s_r \dots) \\ \Gamma_r \equiv (c_r^0 c_r^1 c_r^2 \dots) \end{cases}$$

und

$$\text{in } \Sigma_b: \begin{cases} H_b \equiv (p_b q_b s_b \dots) \\ \Gamma_b \equiv (c_b^0 c_b^1 c_b^2 \dots) \end{cases}.$$

Die Kurvenscharen H_r, H_b (Fig. 1) nennen wir Bahnkurven, die Scharen Γ_r, Γ_b Lagekurven.

Wollen wir eine kinetographische Korrespondenz analytisch untersuchen, so müssen wir nach Burmester¹⁾ als krummlinige Koordinaten oder Parameter die Scharen H_r, Γ_r und H_b, Γ_b wählen, denn entsprechende Punkte der ebenen Systeme sind stets Schnittpunkte entsprechender Kurven in H_r, Γ_r und H_b, Γ_b . Nehmen wir insbesondere als Ausgangskurven C_r und C_b in Σ_r und Σ_b zwei kongruente Kurven, lassen diese in ihren Anfangslagen zusammenliegen und ordnen in dieser Lage diejenigen Punkte, die sich decken, auf $C_r \equiv C_b^0$ und $C_b \equiv C_r^0$ einander zu, so erhalten wir eine spezielle Zuordnung, die wir eine identische Zuordnung der Punkte auf den Ausgangskurven nennen. Die spezielleste identische Zuordnung ergibt sich, wenn die C_r und C_b Geraden sind.

Professor Burmester hat in der genannten Arbeit Beispiele kinetographischer Verwandtschaften gegeben und zugleich ihre Verwendung bei einfachen Getrieben gezeigt. Eine Klasse dieser Aufgaben habe ich mir in dieser Arbeit zur Untersuchung vorgelegt.

§ 2. Charakter der Aufgabe, die im ersten Abschnitt untersucht wird.

Zur Untersuchung in der Ebene wird diejenige Gruppe kinetographischer Korrespondenzen vorgelegt, die auf folgende Weise entstehen.

Ein ebenes System Σ_b dreht sich um einen festen Punkt $S_b \equiv S_r^0$ in Σ_r (Fig. 2); zu Ausgangskurven wählen wir zwei zusammenfallende und durch den Drehpunkt gehende Geraden C_b und C_r und ordnen die auf ihnen befindlichen Punktreihen $C_b \equiv (P_b Q_b S_b \dots)$ und $C_r \equiv (P_r Q_r S_r \dots)$ einander:

1. *projektiv,*
2. *ähnlich,*
3. *kongruent und*
4. *identisch*

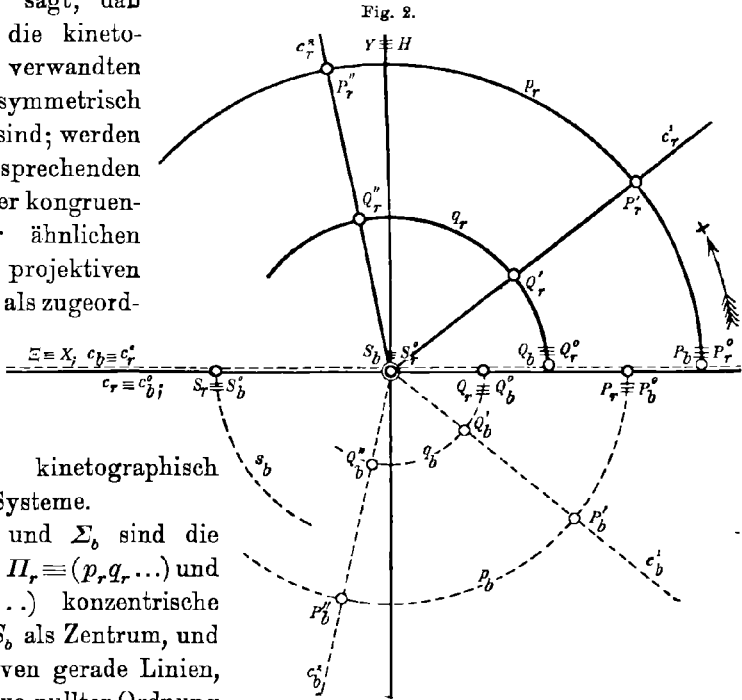
zu.

1) S. Anm. 1 S. 369.

Durch jede dieser vier Zuordnungen entsteht eine kinetographische Korrespondenz zwischen den Systemen Σ_r und Σ_b , von denen Professor Burmester sagt, daß im Falle 4 die kinetographisch verwandten Systeme „symmetrisch kongruent“ sind; werden aber die entsprechenden Punkte zweier kongruenten, zweier ähnlichen oder zweier projektiven Punktreihen als zugeordnete Punkte

angenommen, so ergeben sich komplizierte kinetographisch verwandte Systeme.

In Σ_r und Σ_b sind die Bahnkurven $\Pi_r \equiv (p_r, q_r, \dots)$ und $\Pi_b \equiv (p_b, q_b, \dots)$ konzentrische Kreise mit S_b als Zentrum, und die Lagekurven gerade Linien, die eine Kurve nullter Ordnung umhüllen, d. h. die Lagekurven $\Gamma_r \equiv (C_r^0, C_r^1, C_r^2, \dots)$ und $\Gamma_b \equiv (C_b^0, C_b^1, C_b^2, \dots)$ sind zwei konzentrische Strahlenbüschel mit ihren Scheiteln in S_b (Fig. 2)



II. Kapitel.

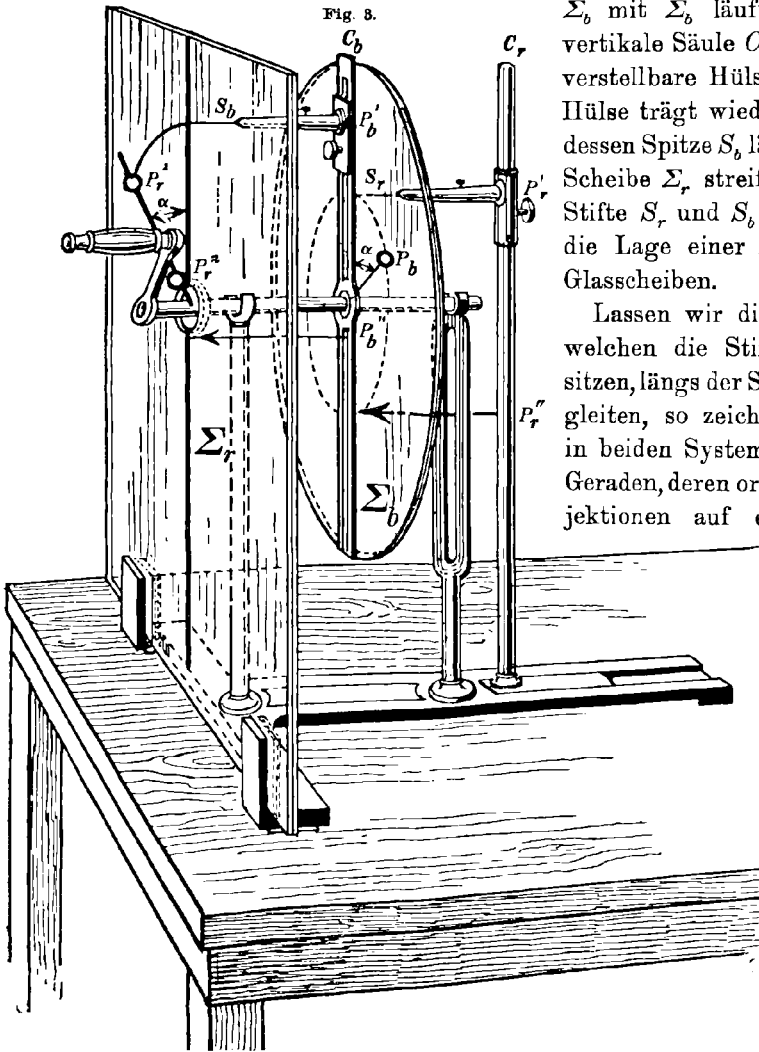
Geometrische und analytische Untersuchung der Vieldeutigkeit der vier Korrespondenzen zwischen Σ_r und Σ_b .

§ 3. Geometrische Untersuchung der Vieldeutigkeit der Verwandtschaften.

Um die Vieldeutigkeit der Korrespondenzen der beiden aufeinander kinetographisch bezogenen Systeme Σ_r und Σ_b geometrisch festzustellen, benützen wir den in Fig. 3 abgebildeten Apparat.

Ein Tisch trägt zwei parallele matte Glasscheiben, von denen die eine Σ_r (das ruhende System) starr mit dem Tisch verbunden ist. Die andere Σ_b (das bewegliche System) dagegen ist in bezug auf diese beweglich. Das System Σ_b wird mittels einer Kurbel in Bewegung gesetzt, wie in Fig. 3 ersichtlich ist. Auf dem Tisch befindet sich noch

eine dem festen Systeme angehörende vertikale Säule C_r . Auf C_r sitzt eine verstellbare Hülse, die einen auf der Scheibe Σ_b schreibenden Stift S_r trägt. Längs der Schnittlinie der Normalebene durch C_r zu



Σ_b mit Σ_b läuft eine andere vertikale Säule C_b , auf der eine verstellbare Hülse sitzt. Diese Hülse trägt wieder einen Stift, dessen Spitze S_b längs der festen Scheibe Σ_r streift. Die beiden Stifte S_r und S_b haben immer die Lage einer Normalen der Glasscheiben.

Lassen wir die Hülsen, auf welchen die Stifte S_r und S_b sitzen, längs der Säulen C_r und C_b gleiten, so zeichnen die Stifte in beiden Systemen senkrechte Geraden, deren orthogonale Projektionen auf eine mit den

Scheibenparallele Ebene sich decken. In Fig. 2 sind die sich deckenden Geraden C_r und C_b horizontal gezeichnet. Ordnen wir dann in der Ausgangslage (wo C_b vertikal ist, Fig. 3) diejenigen

Stiftstellungen S_r und S_b , deren Projektionen in der Projektionsebene miteinander durch eine: 1. *Projektivität*, 2. *Ähnlichkeit*, 3. *Kongruenz* oder 4. *Identität* verbunden sind (d. h. zwischen deren Cartesischen Koordinaten eine gebrochene oder ganze lineare Gleichung besteht), einander zu, so sind damit die vier früher genannten kinetographischen Korrespondenzen zwischen Σ_r und Σ_b bestimmt.

Wir bestimmen nun mit Hilfe des Apparates zu einem Punkte P_b in Σ_b die korrespondierenden Punkte in Σ_r (Fig. 3). Gemäß der Definition müssen entsprechende Punkte im gleichen Augenblick sich mit den Spitzen S_r und S_b für zugeordnete Einstellungen dieser Spitzen decken. Lassen wir nun die Scheibe Σ_b einen Umlauf in Σ_r ausführen, so fällt der Punkt P_b während dieses Umlaufes mit zwei Einstellungen des Stiftes S_r auf der Säule C_r zusammen. Diese Lagen der S_r werden mit P'_r und P''_r in Fig. 3 bezeichnet. Diesen Einstellungen ordnen sich zwei andere in Σ_b zu, die wir mit P'_b und P''_b bezeichnen wollen. Wir stellen dann:

1. den Stift S_r in die Lage P'_r und den Stift S_b in die Lage P'_b und
2. " " S_r " " " P''_r " " " S_b " " " P''_b

und bewegen die Scheibe in den beiden Fällen soweit, daß die Spitze S_r mit dem Punkte P_b zusammenfällt. Hierbei deckt sich in jedem Augenblick die Spitze S_b mit einem Punkte in Σ_r , und so ergeben sich auf einer durch den Drehpunkt gehenden Geraden in Σ_r zwei Punkte P^1_r und P^2_r . Hieraus ersehen wir, daß einem Punkte P_b in Σ_b , dessen Radiusvektor mit der vertikalen Säule C_r einen Winkel α bildet, zwei Punkte P^1_r und P^2_r in Σ_r entsprechen, deren Verbindungslinie mit C_r denselben Winkel α einschließt.

Auf dieselbe Weise ergeben sich mittels des Apparates zu einem Punkte P_r in Σ_r mit dem Polarwinkel β die beiden entsprechenden Punkte P^1_b und P^2_b in Σ_b mit demselben Polarwinkel β .

Die Punkte P^1_r und P^2_r einerseits und P^1_b und P^2_b andererseits sind identisch für einen im Endlichen befindlichen Drehpunkt in den Fällen wo wir die Punktreihen auf den Ausgangsgeraden C_r und C_b miteinander durch eine: 1. inverse Ähnlichkeit, 2. inverse Kongruenz oder 3. Identität verbinden und den Drehpunkt in den Doppelpunkt verlegen. Hiermit hat sich ergeben:

Satz. Wenn ein System Σ_b sich um einen Punkt in Σ_r dreht und die Punktreihen auf zwei zusammenfallenden und durch den Drehpunkt gehenden Geraden projektiv, ähnlich oder kongruent einander zugeordnet werden, so entstehen im allgemeinen kinetographische Korrespondenzen [2, 2], die in den speziellen Fällen der Ähnlichkeit und Kongruenz und immer für Identität sich auf kinetographische Korrespondenzen [1, 1] reduzieren.

Dieses Ergebnis können wir auch analytisch bestätigen.

§ 4. Die Transformations- oder Verwandtschaftsgleichungen der ebenen Systeme Σ_r und Σ_b .

Um analytisch die Vieldeutigkeit der Korrespondenzen zwischen den Punkten in Σ_r und Σ_b festzustellen, nehmen wir an, daß Σ_r in

Fig. 2 und 3 sich in der Anfangslage befindet, und wählen die Koordinatenachsen in diesem System so, daß die ξ -Achse mit C_r zusammenfällt und daß die H -Achse durch den Drehpunkt $S_b \equiv S_r^0$ senkrecht zur ξ -Achse geht (Fig. 2). In Σ_b lassen wir die Koordinatenachsen X und Y mit den ξ - und H -Achsen zusammenfallen.

Hiernach wählen wir auf C_r und C_b zwei zugeordnete Punkte P_r und P_b (Fig. 2) in den projektiven, ähnlichen, kongruenten oder identischen Punktreihen ($P_r, Q_r, S_r \dots$) bzw. ($P_b, Q_b, S_b \dots$) und lassen

das System Σ_b sich um einen Winkel α so drehen, daß das Achsenkreuz (X, Y) in einem gegebenen Momente der Bewegung die Lage X_α, Y_α (Fig. 4) einnimmt.

Als variable Parameter nehmen wir:

$$P_b O = P_b S_b = \lambda_r, \quad P_r O = P_r T_r = \lambda_b \quad \text{und} \quad \sphericalangle \xi X_\alpha = \alpha,$$

wo O die zugeordneten Punkte in den gegebenen Punktreihen nicht deckt. λ_r, λ_b können alle reellen Werte, und α kann alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen.

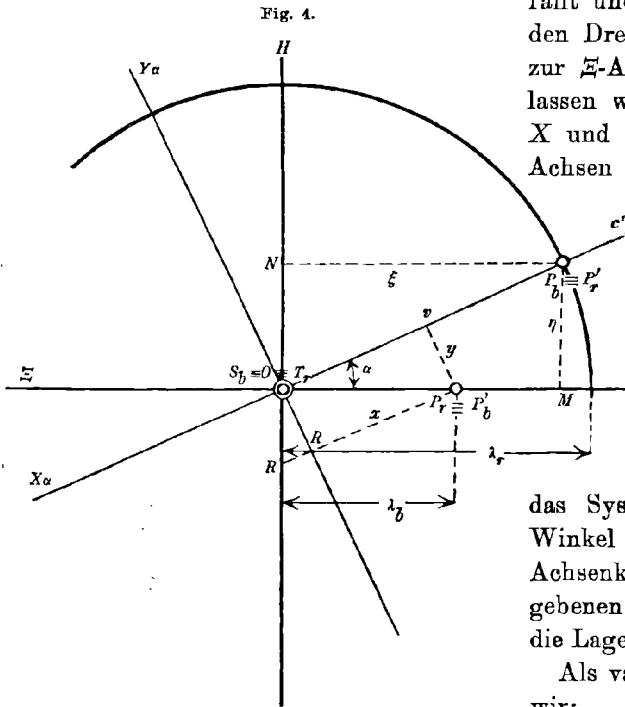
Aus der Fig. 4 ergeben sich folgende Transformationsgleichungen in krummlinigen Koordinaten:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_r \cos \alpha \\ \eta = \lambda_r \sin \alpha \end{cases} \quad \text{und} \quad (2) \quad \begin{cases} x = \lambda_b \cos \alpha \\ y = -\lambda_b \sin \alpha \end{cases}$$

Wählen wir die Parameter wie oben, so treten die Kurvenscharen $H_r \Gamma_r$ und $H_b \Gamma_b$ als Scharen von Parameterkurven auf, wovon wir uns durch Elimination von α und λ_r bzw. α und λ_b überzeugen können.

Ordnen wir nun die beiden Punktreihen $C_b \equiv (P_b, Q_b, S_b \dots)$ und $C_r \equiv (P_r, Q_r, S_r \dots)$ einander 1. projektiv zu, so besteht zwischen den Parametern λ_r und λ_b die bilineare Gleichung:

$$(3) \quad a \lambda_r \lambda_b + b \lambda_b + c \lambda_r + d = 0,$$



die bei einer hyperbolischen oder parabolischen Projektivität mit dem Anfangspunkt in einem Doppelpunkt lautet:

$$(4) \quad a\lambda_r\lambda_b + b\lambda_b + c\lambda_r = 0.$$

Der Gleichung (3) gemäß transformieren sich die Gleichungssysteme (1) und (2) in:

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_r \cos \alpha \\ \eta = \lambda_r \sin \alpha, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} x = -\frac{c\lambda_r + d}{a\lambda_r + b} \cos \alpha \\ y = \frac{c\lambda_r + d}{a\lambda_r + b} \sin \alpha, \end{cases}$$

von denen die Gleichungen (5) mittels der Formeln:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \alpha = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$\lambda_r = \frac{d - b\sqrt{x^2 + y^2}}{a\sqrt{x^2 + y^2} - c}$$

in folgende übergehen:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = \frac{d \mp b\sqrt{x^2 + y^2}}{\pm a\sqrt{x^2 + y^2} - c} \cdot \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \eta = -\frac{d \mp b\sqrt{x^2 + y^2}}{\pm a\sqrt{x^2 + y^2} - c} \cdot \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Diese letzten Gleichungen besagen, daß einem Punkte $P_b(xy)$ in Σ_b zwei Punkte $P'_r(\xi'\eta')$ und $P''_r(\xi''\eta'')$ in Σ_r entsprechen.

Ebenso transformieren sich die Gln. (6) mittels der Formeln:

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

und

$$\lambda_r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

in

$$(8) \quad \begin{cases} x = -\frac{d \pm c\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\pm a\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b} \cdot \frac{\xi}{\pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y = \frac{d \pm c\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\pm a\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b} \cdot \frac{\eta}{\pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (8) ersehen wir wieder, daß einem Punkte $P_r(\xi\eta)$ in Σ_r zwei Punkte $P'_b(x'y')$ und $P''_b(x''y'')$ in Σ_b entsprechen.

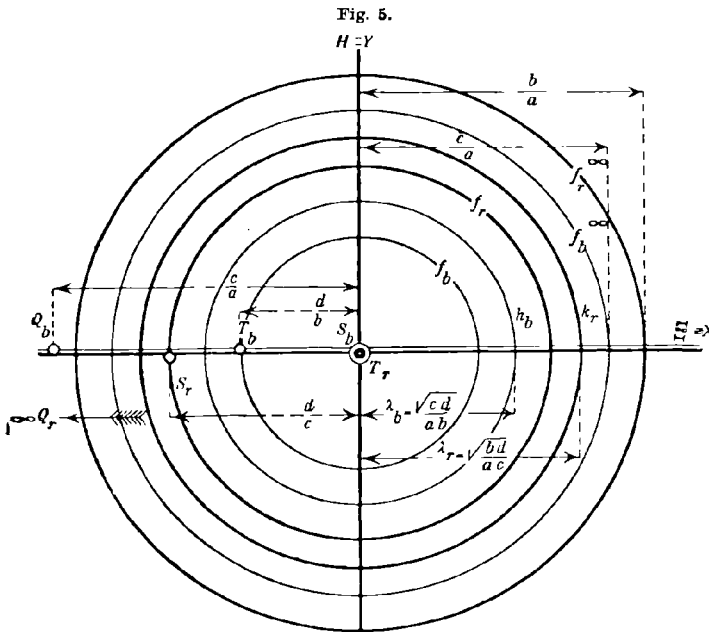
Bei einer hyperbolischen oder parabolischen Projektivität mit dem Doppelpunkt im Anfangspunkt (Drehpunkt) ist $d = 0$ in den Gl. (7) und (8).

Ordnen wir hiernach die beiden Punktreihen $C_b \equiv (P_b Q_b S_b \dots)$ und $C_r \equiv (P_r Q_r S_r \dots)$ einander: 2. *ähnlich*, 3. *kongruent* oder 4. *identisch* zu, so haben wir in den Transformationsgleichungen (7) und (8) im zweiten Falle $a = 0$ und im dritten Falle $a = 0, \frac{d}{c} = -\frac{d}{b} = k$ zu setzen.

Im vierten Falle, d. h. für *Identität* erhalten wir folgende Übergangsgleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = -x \\ \eta = y \end{cases} \quad (10) \quad \begin{cases} x = \xi \\ y = -\eta. \end{cases}$$

Verlegen wir schließlich den Anfangspunkt im zweiten und dritten



Falle in einen Doppelpunkt, so erhalten wir Gleichungen, die sich von den Gleichungen (9) und (10) entweder nur um eine Konstante unterscheiden oder mit diesen identisch sind. Die Zuordnungen geben eine Korrespondenz [1, 1]. Hiermit hat sich von neuem der Satz auf Seite 373 ergeben.

Bevor wir dieses Kapitel schließen,

wollen wir noch kurz die geometrische Konstruktion entsprechender Punktgruppen behandeln, und weil die Parameter λ_r und λ_b symmetrisch in der bilinearen Gleichung (3) auftreten, brauchen wir nur die geometrische Konstruktion entsprechender Punkte des einen Systems anzugeben.

§ 5. Konstruktion derjenigen Punkte in Σ_r , die einem Punkte in Σ_b entsprechen.

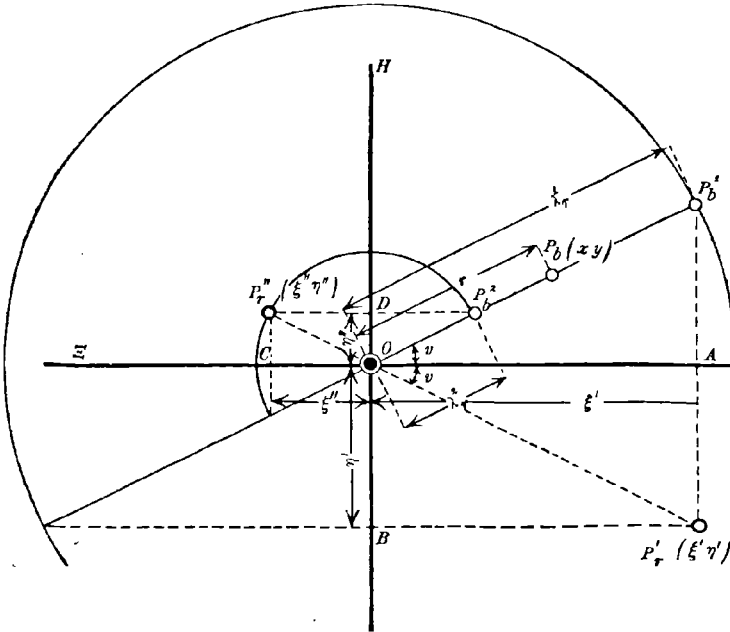
Zu der Konstruktion entsprechender Punktgruppen wählen wir die Koordinatenachsen wie im vorigen Paragraphen.

In den beiden konjektiven Punktreihen $C_r \equiv (P_r Q_r S_r \dots)$ und

$C_b \equiv (P_b Q_b S_b \dots)$ wählen wir zwei Ausgangsgruppen (Fig. 5) der Gleichung (3) gemäß, z. B. die Gruppen:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_b \equiv \lambda_b = -\frac{c}{a} \\ S_b \equiv \lambda'_b = 0 \\ T_b \equiv \lambda''_b = -\frac{d}{b} \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_r \equiv \lambda_r = \infty \\ S_r \equiv \lambda'_r = -\frac{d}{c} \\ T_r \equiv \lambda''_r = 0. \end{array} \right.$$

Fig. 6.



Die Konstruktion der Punkte $P'_r(\xi' \eta')$ und $P''_r(\xi'' \eta'')$ in Σ_r , die einem Punkte $P_b(xy)$ in Σ_b entsprechen, liefert dann die Gleichungen (6). In Polarkoordinaten $(r v)$ lauten diese:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{c\lambda_r + d}{a\lambda_r + b} \\ v = (180^\circ - \alpha), \end{array} \right.$$

die nicht nur für $r v$ sondern auch für $-r, v + 180^\circ$ bestehen. Setzen wir diese Werte der Parameter λ_r und α in die Gleichung (5) ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = \frac{br-d}{ar-c} \cos v \\ \eta' = -\frac{br-d}{ar-c} \sin v \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'' = -\frac{br+d}{ar+c} \cos v \\ \eta'' = \frac{br+d}{ar+c} \sin v, \end{array} \right.$$

die uns die Konstruktion der Punkte P'_r und P''_r unmittelbar liefern (Fig. 6).

Die Konstruktion gibt an, daß die dem Punkte $P_b(xy)$ in Σ_b entsprechenden Punkte $P'_r(\xi\eta)$ und $P''_r(\xi''\eta'')$ auf derselben Geraden durch den Anfangspunkt liegen, welche Gerade mit der ξ -Achse denselben Polarwinkel ν bildet, wie der Radiusvektor des Punktes P_b mit dieser Achse.

III. Kapitel.

Die Übergangskurven, Hauptpunkte und Hauptkurven der Systeme Σ_r und Σ_b .

§ 6. Die Übergangskurven in den Systemen Σ_r und Σ_b .

In den vorangehenden Paragraphen haben wir sowohl geometrisch als analytisch festgestellt, daß die ebenen Systeme Σ_r und Σ_b zueinander in einer Korrespondenz [2, 2] stehen. Eindeutigkeit können wir aber dadurch erzielen, daß wir, wie bei den Riemannschen Flächen, die Systeme Σ_r und Σ_b mit zwei Blättern überdecken.

Die beiden Blätter in jedem Systeme hängen dann längs bestimmter Kurven zusammen, die infolge der Entstehung unserer kinetographischen Verwandtschaften Kreise sind und deren Punkte dadurch gekennzeichnet werden, daß die Vieldeutigkeit in denselben aufhört. Diese Kurven wollen wir Übergangskurven in den Systemen Σ_r und Σ_b nennen.

Bei Bestimmung der Übergangskurven müssen wir die drei Fälle der Projektivität, Ähnlichkeit und Kongruenz nebst ihren Sonderfällen jeden für sich berücksichtigen, unter der Voraussetzung, daß ausgeartete Zuordnungen der Punktreihen auf den Ausgangskurven nicht betrachtet werden, d. h. unter der Voraussetzung, daß in der bilinearen Gleichung (3) $ad - bc \neq 0$ ist. Wir können dann folgende Sonderfälle unterscheiden:

Bei *Projektivität*:

1. $d \neq 0$ $\alpha)$ $b \neq 0, c \neq 0$ $\beta)$ $b = 0$ $\gamma)$ $c = 0$ $\delta)$ $b = c = 0,$
2. $d = 0.$

Bei *Ähnlichkeit* und *Kongruenz*:

1. $d \neq 0,$ 2. $d = 0.$

Für endliche Werte der Koordinaten $(x|y)$ und $(\xi|\eta)$ ergeben sich im Falle der Projektivität, Ähnlichkeit und Kongruenz unserer Verwandtschaftsgleichungen (7) und (8) gemäß die Übergangskurven:

$$\begin{aligned} \text{in } \Sigma_r: \lambda_r^2 &= \xi^2 + \eta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_r^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{bd}{ac} \\ \text{in } \Sigma_b: \lambda_b^2 &= x^2 + y^2 = 0 \quad \text{,,} \quad \lambda_b^2 = x^2 + y^2 = \frac{cd}{ab}, \end{aligned}$$

welche Kurven mit h_r und h_b bezeichnet werden sollen. Berücksichtigen wir dann nur reelle Werte der Variablen, was ja auch infolge der Natur unseres Problems nur einen eigentlichen Sinn hat, so stellt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ bzw. $\xi^2 + \eta^2 = 0$ den Koordinatenanfang in Σ_b bzw. Σ_r dar. Die Werte der $(\xi | \eta)$ und $(x | y)$ werden dann dem Gleichungssystem (7) bzw. (8) gemäß unbestimmt, d. h. der Ursprung in Σ_b bzw. Σ_r ist ein Hauptpunkt, mit welchem wir uns im nächsten Paragraphen näher beschäftigen werden. Lassen wir dagegen auch imaginäre Werte zu, so stellt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ bzw. $\xi^2 + \eta^2 = 0$ ein imaginäres Geradenpaar in Σ_b bzw. Σ_r dar, nämlich das Paar der sog. Minimalgeraden durch den Drehpunkt. Die Gleichungen (7) und (8) besagen dann, daß den Punkten jenes imaginären Geradenpaares in Σ_b und Σ_r die Kreispunkte in Σ_r und Σ_b zugeordnet sind und umgekehrt.

In bezug auf den unendlich fernen Punkt von Σ_b oder Σ_r , der durch die Koordinaten $(x = \infty | y = qx)$ bzw. $(\xi = \infty | \eta = q\xi)$ gegeben ist, liefern:

1. Im Falle der *Projektivität*: die Gl. (7) und (8) folgende Grenzwerte:

$\alpha) b \neq 0, c \neq 0$

$$(11) \quad \begin{cases} \lim_{x=\infty} \xi = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \\ y = qx \\ \lim_{x=\infty} \eta = \frac{b}{a} \cdot \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \\ y = qx \end{cases}$$

und

$$(12) \quad \begin{cases} \lim_{\xi=\infty} x = -\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \\ \eta = q\xi \\ \lim_{\xi=\infty} y = \frac{c}{a} \cdot \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \\ \eta = q\xi. \end{cases}$$

Eliminieren wir q aus Gl. (11) bzw. (12), d. h. betrachten wir alle Punkte der fraglichen imaginären Geraden in Σ_b und Σ_r , so erhalten wir:

$$\lim \xi^2 + \lim \eta^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\lim x^2 + \lim y^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2,$$

somit den Satz:

Der unendlich fernen Geraden durch den Drehpunkt in Σ_b bzw. Σ_r entspricht in Σ_r bzw. Σ_b eine zerfallende Kurve 4ter Ordnung, die aus einem

Kreis mit dem Radius $\lambda_r = \frac{b}{a}$ bzw. $\lambda_b = \frac{c}{a}$ und dem imaginären Geradenpaar $\xi^2 + \eta^2 = 0$ bzw. $x^2 + y^2 = 0$ besteht.

Diese Kurven wollen wir mit f_r^∞ bzw. f_b^∞ bezeichnen. In Fig. 5 sind die Übergangskurven h_b bzw. k_r und f_b^∞ bzw. f_r^∞ gezeichnet.

β) $b = 0$. Dann transformieren sich die Kurven f_r^∞ und k_r in Nullkreise, die Kurve f_b^∞ bleibt unverändert und die Kurve h_b geht in die unendlich ferne Gerade über.

γ) $c = 0$. Dann erhalten wir die Umkehrung des Falles β).

δ) $b = c = 0$, dann wird die Korrespondenz [1, 1]. Wenn schließlich $d = 0$, so ergibt sich von neuem der Fall α).

2. Im Falle der *Ähnlichkeit* und *Kongruenz* gehen die Kreise der Übergangskurven h_r , f_r^∞ und h_b , f_b^∞ in die unendlich ferne Gerade über.

§ 7. Die Hauptpunkte und die Hauptkurven der Σ_r und Σ_b .

Die Gleichungssysteme (7) werden für $O \equiv (x = 0 | y = 0)$ unbestimmt, d. h. dem Anfangspunkt in Σ_b entspricht nicht nur ein einziges Punktpaar in Σ_r , sondern unendlich viele, das ist eine Hauptkurve f_r .

Aus den Gl. (6) folgt in der Tat, daß den Werten $(x = 0 | y = 0)$ unendlich viele Wertepaare λ_r, α der Parameter entsprechen, die alle der Bedingung:

$$(13) \quad c\lambda_r + d = 0$$

genügen. Gl. (13) ist folglich die Gleichung der f_r in krummlinigen Koordinaten (λ_r, α) . Um die Gleichung der Hauptkurve in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, müssen wir aus den Gl. (5) und (13) die Parameter λ_r und α eliminieren. Die Elimination gibt:

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2,$$

wo $k = -\frac{d}{c}$. Aus dieser Gleichung folgt:

Satz: Dem Anfangspunkt in Σ_b entspricht eine Hauptkurve f_r in Σ_r , die ein Kreis mit dem Radius $-\frac{d}{c}$ ist. Analog ergibt sich der

Satz: Dem Anfangspunkt in Σ_r entspricht eine Hauptkurve f_b in Σ_b , die ein Kreis mit dem Radius $-\frac{d}{b}$ ist.

Die Hauptkurven f_r und f_b sind in Fig. 5 gezeichnet.

Bei Kongruenz fallen die Hauptkurven f_b und f_r zusammen.

Setzen wir $d = 0$, d. h. lassen wir den Anfangspunkt in einen Doppelpunkt einer Projektivität, Ähnlichkeit oder Kongruenz fallen, so werden die Hauptkurven f_r und f_b Nullkreise.

IV. Kapitel.

Die Bestimmung der Kurven C_r und C_b in Σ_r und Σ_b , die den geraden Linien l_b und l_r in Σ_b und Σ_r entsprechen.

Weil die Übergangsgleichungen (7) und (8) vollkommen analog sind, haben wir nur die einer Geraden entsprechende Kurve des einen Systemes zu untersuchen.

§ 8. Die analytischen Gleichungen derjenigen Kurven C_r in Σ_r , die einer Geraden l_b in Σ_b entsprechen.

Infolge der Entstehung unserer kinetographischen Korrespondenzen können wir zeigen, daß wir nur diejenige Kurve C_r in Σ_r zu untersuchen brauchen, die einer Koordinatenachse parallel laufenden Geraden entspricht.

Wir wollen annehmen, die Gerade l_b sei der Y -Achse parallel (Fig. 7), und das System Σ_b befinde sich nach einem Umlauf in Σ_r wieder in der Ausgangslage.

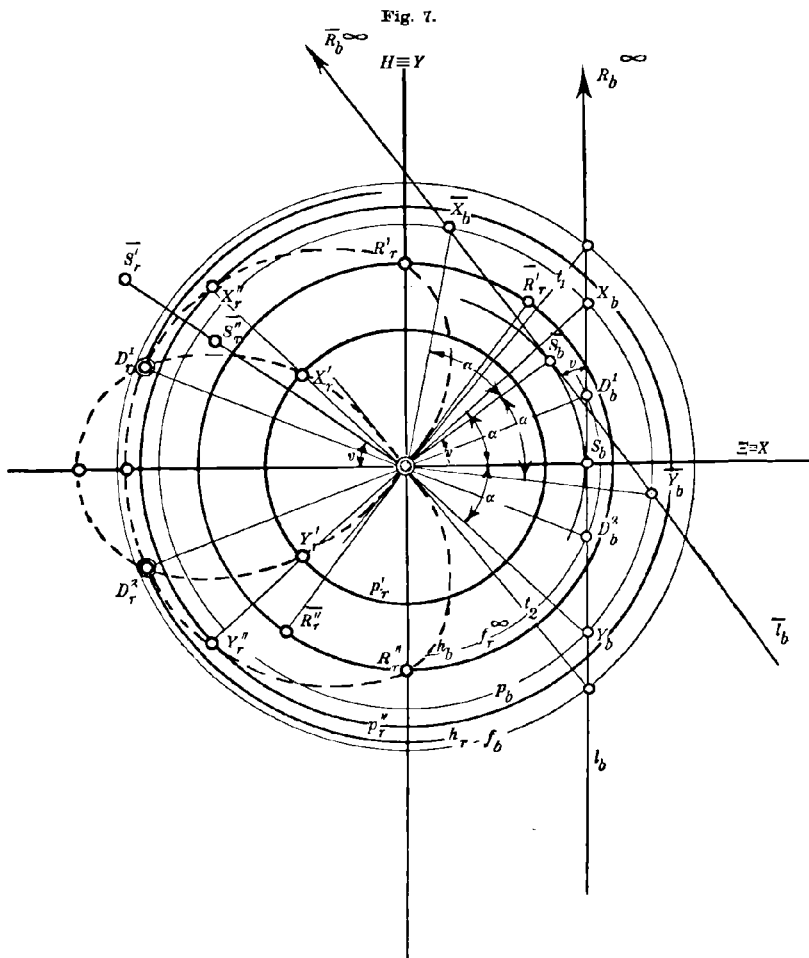
Die beiden Systeme Σ_r und Σ_b werden dann von konzentrischen Kreisen überzogen, von denen einem in dem einen System zwei in dem anderen entsprechen. Die Gerade l_b schneidet jeden Kreis in Σ_b , z. B. den Kreis p_b in Σ_b in zwei Punkten X_b und Y_b , die symmetrisch in bezug auf den Fußpunkt S_b des Lotes vom Anfangspunkt auf l_b liegen. Die den Punkten X_b und Y_b entsprechenden Punkte ($X'_r X''_r$) und ($Y'_r Y''_r$) sind dann die Schnittpunkte der Geraden OY_b und OX_b (§ 5) und der Kreise p'_r und p''_r , welche dem Kreis p_b entsprechen. Die Punkte $X'_r Y'_r$ einerseits und $X''_r Y''_r$ andererseits liegen folglich symmetrisch in bezug auf das oben genannte Lot. Die Kurve C_r (in Fig. 7 punktiert), welche der Geraden l_b entspricht, ist folglich symmetrisch in bezug auf die Ξ -Achse. R_b^x und R'_r, R''_r sind entsprechende Punkte.

Dreht sich das System Σ_b um einen Winkel v , so geht die Gerade l_b in die Lage \bar{l}_b über, und die Punkte X_b, Y_b in die Lagen X_b, Y_b . Die Sehne $X_b Y_b$ wird gleich der Sehne $\bar{X}_b \bar{Y}_b$ und die Kurve C_r , die der beliebig gewählten Geraden \bar{l}_b entspricht, wird folglich kongruent mit der Kurve C_r . Ihre Symmetrallinie $\bar{S}'_r \bar{S}''_r$ schließt mit der Ξ -Achse den Winkel v ein. Hiermit besteht der:

Satz: *Einer beliebig gewählten Geraden in Σ_b entspricht in Σ_r eine symmetrische Kurve, deren Symmetrallinie mit der Ξ -Achse denselben Winkel bildet, wie das Lot vom Anfangspunkt auf die gegebene Gerade mit dieser Achse.*

Bewegt sich noch die Gerade l_b parallel mit sich selbst, so tut es auch die Gerade \bar{l}_b , und die entsprechenden Kurven C_r und \bar{C}_r werden

in jedem Augenblick kongruent. Wir können uns folglich auf die Untersuchung der Kurve C_r , die der Geraden l_b entspricht, beschränken und dann ihre Eigenschaften auf die Kurve C_r , die einer beliebig gewählten Geraden entspricht, übertragen.



I.

Wir bestimmen zuerst die Gleichung der Kurve C_r in Σ_r , die der Geraden:

$$(14) \quad l_b \equiv x = n$$

in Σ_b entspricht, wo n der Achsenabschnitt ist. Um diese Gleichung zu erhalten, müssen wir die Variablen x, y aus den Gl. (8) und (14) eliminieren. Die Elimination gibt: im Falle 1, für Projektivität:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi^4(n^2 a^2 - c^2) + \xi^2 \eta^2(2n^2 a^2 - c^2) + \eta^4(n^2 a^2) \\ &\quad + \xi^3(2ncb - 2nad) + \xi \eta^2(2ncb - 2nad) \\ &\quad + \xi^2(d^2 - n^2 b^2) + \eta^2(-n^2 b^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

im Falle 2. für *Ähnlichkeit*:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi^4(-c^2) + \xi^2 \eta^2(-c^2) \\ &\quad + \xi^3(2ncb) + \xi \eta^2(2ncb) \\ &\quad + \xi^2(d^2 - n^2 b^2) + \eta^2(-n^2 b^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

im Falle 3. für *Kongruenz*:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi^4 + \xi^2 \eta^2 + \xi^3(2n) + \xi \eta^2(2n) \\ &\quad + \xi^2(-k^2 + n^2) + \eta^2(n^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Für $d = 0$ sind Gl. (15), (16), (17) reduzibel, und in Produktform lauten sie

$$(18) \quad [a(\eta^2 + \xi^2) + c\xi - nb][a(\eta^2 + \xi^2) - c\xi + nb] = 0$$

und:

$$(19) \quad (\eta^2 + \xi^2)(c\xi - nb)^2 = 0.$$

Suchen wir insbesondere das Bild C_r der Y -Achse, d. h. der Geraden

$$l_b \equiv x = 0,$$

so finden wir das Ergebnis am einfachsten mittels der Gl. (6), wo wir $x = 0$ zu setzen haben. Wir erhalten:

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha = 90^\circ, 270^\circ \\ &\lambda_r = \frac{d}{c}. \end{aligned} \right.$$

Für $d = 0$ ist:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = 90^\circ, 270^\circ \\ &\lambda_n = 0. \end{aligned} \right.$$

II.

Hiernach suchen wir die Gleichung der Kurve C'_r in Σ_r , die einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden l'_b :

$$l'_b \equiv mx + ny = 0$$

in Σ_b entspricht. Wir erhalten:

$$-m\xi(c\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + d) + n\eta(c\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + d) = 0,$$

welche Gleichung reduzibel ist, und lautet im Falle 1 und 2:

$$(21) \quad (n\eta - m\xi)^2[d^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2)] = 0$$

im Falle 3:

$$(22) \quad (n\eta - m\xi)^2[k^2 - (\xi^2 + \eta^2)] = 0.$$

Wenn der Anfangspunkt mit einem Doppelpunkt zusammenfällt, so lauten die Gleichungen (21) und (22):

$$(23) \quad (\xi^2 + \eta^2)(n\eta - m\xi)^2 = 0.$$

§ 9. Diskussion der Gleichungen der Kurven C_r und C'_r und ihre geometrische Konstruktion.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen wollen wir jetzt diskutieren und dann eine geometrische Konstruktion der Kurven C_r und C'_r angeben. Wir beginnen mit der

I. Kurve C_r

und setzen voraus, daß $d \neq 0$.

Aus den Gl. (15), (16), (17) ist ersichtlich, daß die Kurven C_r , die diese Gleichungen geometrisch darstellen, von vierter Ordnung sind und symmetrisch in bezug auf die Ξ -Achse liegen. Weiter finden wir, daß diese Kurven einen singulären Punkt im Anfangspunkt ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) besitzen, dessen Tangenten reell und verschieden oder zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem die Diskriminante:

$$D^2 \equiv d^2 - n^2 b^2 \gtrless 0,$$

d. h. je nachdem:

$$(24) \quad \frac{d}{b} \gtrless n.$$

Außerdem ergibt sich die Anzahl der Asymptoten der Kurven C_r aus der Gleichung:

$$(25) \quad \operatorname{tg}^4 \theta (n^2 a^2 - c^2) + \operatorname{tg}^2 \theta (2n^2 a^2 - c^2) + (n^2 a^2) = 0,$$

wo θ der Winkel ist, den eine Asymptote mit der H -Achse bildet.

Die Wurzeln der Gl. (25) sind:

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = \pm i \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \theta_{3,4} = \frac{na}{\pm \sqrt{c^2 - n^2 a^2}},$$

d. h. alle Kurven C_r sind zirkuläre Kurven.

Geometrisch können wir diese Resultate einfach bestätigen. Dem § 6 gemäß entspricht der unendlich fernen Geraden l_r^∞ in Σ_r die Übergangskurve f_b^∞ in Σ_b , und da die Gerade l_b der Kurve f_b^∞ in 4 Punkten begegnet, so schneidet die Gerade l_r^∞ die Kurve C_r in 4 Punkten, von denen zwei in den Kreispunkten der Ebene Σ_r liegen. Die Kurve C_r ist folglich eine zirkuläre Kurve 4. Ordnung.

Zufolge § 7 wieder entspricht dem Anfangspunkt $O(\xi = 0 \mid \eta = 0)$ in Σ_r , der Hauptkreis f_b in Σ_b , und weil jede Gerade l_b die Hauptkurve f_b in zwei reellen verschiedenen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten schneidet, so muß der Punkt ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) auf der

Kurve C_r als ein Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder isolierter Punkt auftreten.

Die rechte Seite der Gl. (24) gibt die Länge des Lotes vom Anfangspunkte auf die Gerade l_b an, und da $\frac{d}{b}$ der Radius des Hauptkreises f_b in Σ_b ist, so finden wir, daß ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) ein Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder isolierter Punkt ist, je nachdem das Lot auf l_b kleiner, gleich oder größer als der Radius des Kreises f_b ist.

Die beiden Winkel φ , welche die Tangenten des singulären Punktes mit der H -Achse bilden, hängen einfach mit den Schnittpunkten der Geraden l_b und f_b zusammen. Um dies nachzuweisen schreiben wir die Gleichung der Fundamentalkurve f_b in der Form:

$$\begin{cases} x = -\frac{d}{b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ y = \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \end{cases}$$

Eliminieren wir die Variablen x und y zwischen diesen Gleichungen und der Gl. (14), so erhalten wir die Gleichung, welche die Tangenten im singulären Punkte O bestimmen. Folglich sind die Winkel der fraglichen Tangenten gleich den beiden Polarwinkeln jener Punkte der f_b , wo die Gerade l_b diese Kurve schneidet (Fig. 7).

Das Geschlecht der Kurve C_r können wir einfach folgendermaßen feststellen. Wie oben gesagt, hat die Kurve C_r jedenfalls einen reellen singulären Punkt im Anfangspunkt, besitzt aber außerdem noch zwei andere singuläre Punkte, die auch konjugiert imaginär sein können. In der Tat fallen die beiden Punkte in Σ_r , die einem Punkt der Bahnkurve h_b entsprechen (Fig. 5), zusammen, und weil jede Gerade l_b der Bahnkurve h_b mit dem Radius $\lambda_b = \sqrt{\frac{c'd}{ab}}$ in zwei Punkten D_b^1 und D_b^2 begegnet (Fig. 7), treten folglich die diesen Schnittpunkten entsprechenden Punkte D_r^1 und D_r^2 auf h_r als singuläre Punkte der Kurve C_r auf. Die Kurve C_r ist mithin eine rationale Kurve.

Bisher hat sich ergeben:

Jeder Geraden im einen System entspricht eine zirkulare symmetrische und rationale Kurve 4. Ordnung im andern.

Die geometrische Konstruktion der Kurve C_r wollen wir noch in den einzelnen Fällen der Projektivität, Ähnlichkeit und Kongruenz im Zusammenhang mit dem Verhalten der Kurve C_r zum Unendlichen angeben. Die Konstruktion der Kurve C_r könnte zunächst nach § 5 erfolgen, indem wir zu den einzelnen Punkten der Geraden l_b die entsprechenden Punkte konstruieren. Es gelingt aber auch, eine Kon-

struktion mit Kegelschnitten anzugeben, mit deren Hilfe wir einfach unsere unikursale, symmetrische und zirkulare Kurve zeichnen können.

Wir führen in Gl. (15) mittels der Formeln:

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta$$

Polarkoordinaten ein, und erhalten:

$$(26) \quad \pm \rho = \frac{d \cdot \cos \theta}{c \cdot \cos \theta + an} + \frac{nb}{c \cdot \cos \theta + an}.$$

Setzen wir in der Gl. (26) $\frac{d}{an} = p$, $\frac{bn}{an} = q$ und $\frac{c}{an} = s$, so können wir diese auf die Form:

$$\begin{cases} \rho_\theta = \frac{p}{1 + s \cos \theta} \cos \theta + \frac{q}{1 + s \cos \theta} \\ \rho_{\theta+\pi} = - \left(\frac{p}{1 - s \cos \theta} \cos \theta - \frac{q}{1 - s \cos \theta} \right) \end{cases}$$

• bringen. Die Kurve C_r kann nun aus zwei Kurven k_1 und k_2 zusammengesetzt werden, deren Polargleichungen bzw. sind:

$$(27) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{p}{1 \pm s \cos \theta} \\ \rho_2 = \frac{q}{1 \pm s \cos \theta} \end{cases}$$

und folglich ergeben sich die Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} \rho_\theta = \rho_1 \cos \theta + \rho_2 \\ \rho_{\theta+\pi} = - (\rho_1 \cos \theta - \rho_2). \end{cases}$$

Die Gleichungen (27) stellen zwei ähnliche Kegelschnitte k_1 und k_2 mit den Parametern p bzw. q und der Exzentrizität s dar. Addieren und subtrahieren wir nach der Gl. (28) zwei zu ein und demselben Polarwinkel gehörige Radien $\rho_1 \cos \theta$ und ρ_2 , so entsteht die Kurve C_r .

Wir beginnen mit der:

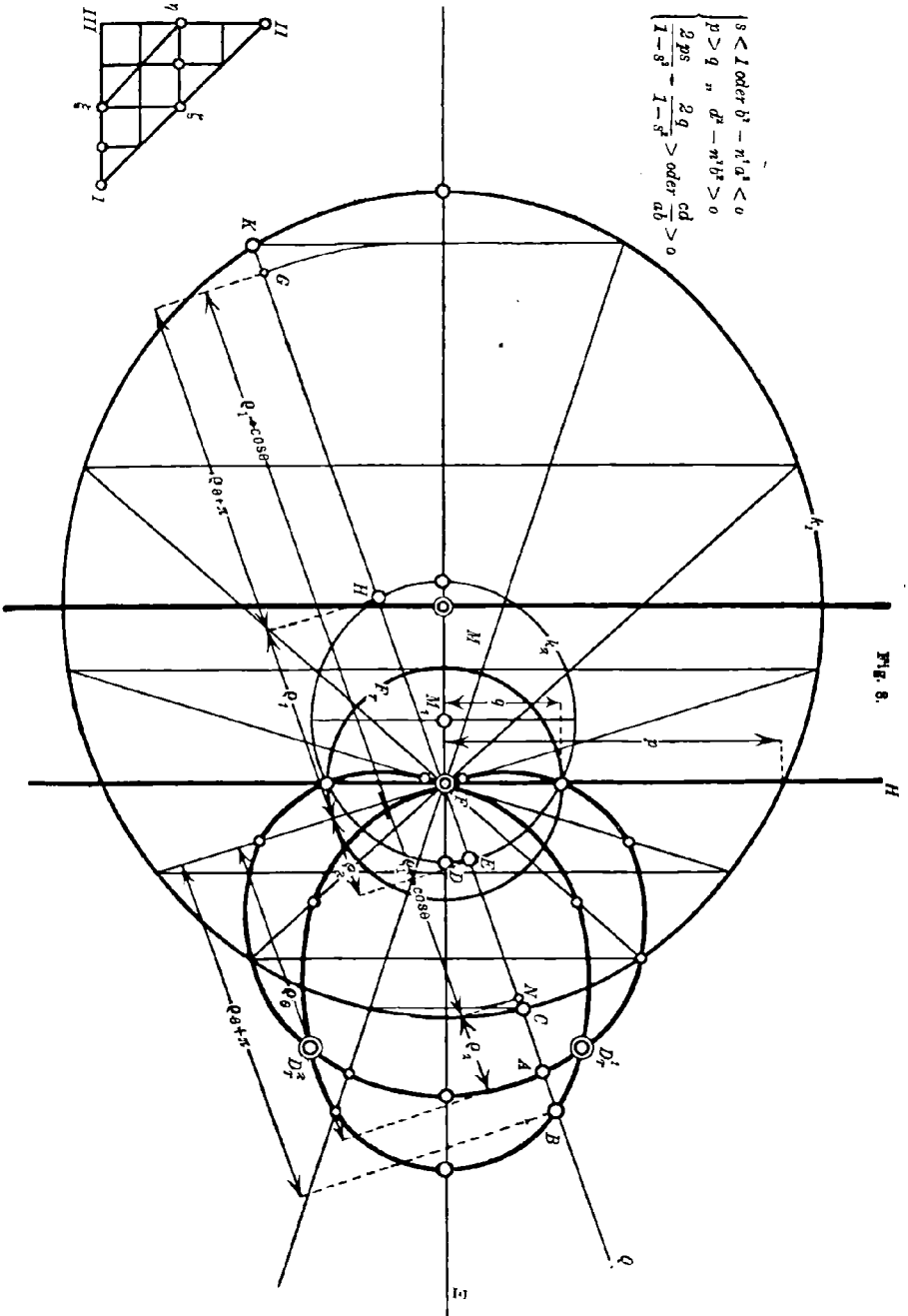
1. *Projektivität* $d \neq 0$

α) $b \neq 0, \quad c \neq 0.$

Gl. (25) und (27) liefern folgende mögliche Fälle: $c - n^2 a^2 \leq 0$.

1. Nehmen wir an $c^2 < n^2 a^2$ und legen die Gl. (15) auf das analytische Dreieck (Fig. 8), so erkennen wir unmittelbar, daß die Kurve C_r nur durch die im Endlichen liegende Ecke III ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) des Fundamentaldreiecks geht und dort einen singulären Punkt hat; aus dem analytischen Polygon wieder, daß die Gleichung der Näherungskurve der Ecke III

$$\xi \pm \frac{nb}{\sqrt{a^2 - n^2 b^2}} \eta = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} s < 1 \text{ oder } b^2 - n^2 a^2 < 0 \\ p > q \text{ n } d^2 - n^2 b^2 > 0 \\ \frac{2ps}{1-s^2} - \frac{2q}{1-s^2} > \text{oder } \frac{cd}{ab} > 0 \end{array} \right.$$

Fig. 8.

ist, welche Gleichung die Tangenten $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$ im Punkte ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) darstellt.

Die Kurve C_r begegnet weiter der II -Achse außer im Anfangspunkt noch in zwei Punkten $\eta = \pm \frac{b}{a}$, und der Ξ -Achse außer im Anfangspunkte noch in zwei Punkten:

$$\xi = \frac{n(bc - ad) \pm (dc - n^2 ab)}{c^2 - n^2 a^2}.$$

Den Wurzeln der Gl. (25) zufolge geht die Kurve C_r nicht reell durchs Unendliche; die Gerade l_b schneidet in der Tat den Kreis mit dem Radius $\frac{c}{a}$ nicht, weil $\frac{c}{a} < n$ ist. In Fig. 8 ist die Kurve C_r mit Doppelpunkten gezeichnet.

Die Annahme $c^2 - n^2 a^2 < 0$ ist identisch mit der Voraussetzung $s < 1$ in den Gleichungen (27), d. h. die Kurven k_1 und k_2 sind Ellipsen, und folglich erhalten wir nur endliche Radienvektoren ρ_θ und $\rho_{\theta+\pi}$, d. h. die Kurve C_r hat keinen unendlich fernen Punkt. Mit Hilfe der Ellipsen k_1 und k_2 wollen wir nun die C_r (Fig. 8) zeichnen. Der Anfangspunkt ist ein Doppel-, Rückkehr- oder isolierter Punkt, je nachdem $\frac{d}{nb} \gtrless 1$, d. h. je nachdem $p \gtrless q$ ist. In der Figur ist $p > q$. Um weiter die beiden anderen singulären Punkte der C_r reell zu erhalten, müssen wir die Übergangskurve h_b reell nehmen, das ist die Größe $\lambda_b^2 = \frac{cd}{ab} \geq 0$ oder $cd - ab\lambda_b^2 \geq 0$ wählen. Für $\lambda_b = n$, haben wir in bezug auf die Realität: $cd - abn^2 \geq 0$, die auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{2ps}{1-s^2} - \frac{2q}{1-s^2} \geq 0$$

und uns besagt, daß die Doppelpunkte D_r^1 und D_r^2 reell werden, wenn der halbe Brennpunktsabstand der Ellipse $k_1 \geq$ der Halbachse $M_1 D$ der Ellipse k_2 ist. In unserer Figur 8 ist $MF > M_1 D$, folglich sind die Doppelpunkte D_r^1 und D_r^2 reell.

Um dann die Kurve C_r Punkt für Punkt mittels der Ellipsen k_1 und k_2 zu erhalten, legen wir die Ellipse k_1 mit der Exzentrizität MF und dem Parameter p so auf das Koordinatensystem ΞH , daß der Brennpunkt F in den Anfangspunkt fällt, und die größere Achse mit der Ξ -Achse vereint liegt. Die Ellipse k_2 mit der Halbachse $M_1 D$ und dem Parameter q , die, unserer Annahme zufolge, innerhalb der Ellipse k_1 fällt, legen wir ganz ähnlich wie k_2 auf die Koordinatenachse ΞH (Fig. 8). Durch den Brennpunkt F , der als ein Doppelpunkt unserer

Kurve C_r auftritt, ziehen wir dann Geraden FQ und markieren ihre Schnittpunkte E, H mit k_1 und C, K mit k_2 . Auf dieser Geraden FQ erhalten wir dann den Gleichungen (28) gemäß zwei Punkte A und B der Kurve C_r , wenn wir:

$$\begin{aligned} FA = \varrho_\theta &= FN + FE = \varrho_1 \cos \theta + \varrho_2 \quad \text{und} \\ FB = -\varrho_{\theta+\pi} &= FG - FH = \varrho_1 \cos \theta - \varrho_2 \end{aligned}$$

setzen.

2. Setzen wir dann voraus, daß $c^2 > n^2 a^2$, so erhalten wir dasselbe analytische Polygon, wie oben, und die Kurve C_r verhält sich im Endlichen, wie die vorige, geht aber den Wurzeln der Gl. (25) gemäß zweimal reell durchs Unendliche mit den Asymptotenrichtungen:

$$\xi \pm \frac{na}{\sqrt{c^2 - n^2 a^2}} \eta = 0.$$

Im vorliegenden Falle ist $s > 1$, die Kegelschnitte k_1 und k_2 sind dann Hyperbeln, und folglich erhalten wir zwei unendlich große Radienvektoren ϱ_θ ; die Kurve C_r geht mithin zweimal reell durchs Unendliche.

In bezug auf die singulären Punkte der Kurve C_r ist nichts Neues zu erwähnen. Die Kurve erhalten wir Punkt für Punkt ganz ähnlich wie im vorigen Falle; wir haben jetzt Hyperbeln statt Ellipsen zu nehmen.

3. Für $c^2 = n^2 a^2$ zeigt die Gl. (15), auf das analytische Dreieck gelegt, daß die Kurve C_r sich wie die vorigen in $(\xi = 0 \mid \eta = 0)$ verhält, aber durch den unendlich fernen Punkt der ξ -Achse geht und dort die unendlich ferne Gerade als Tangente hat.

Den Wurzeln der Gl. (25) gemäß hat die Kurve zwei reelle Asymptoten, von denen eine unendlich fern ist. Die Gleichung der einen, die unmittelbar hervorgeht, ist $\eta = 0$, d. h. die Asymptote ist die ξ -Achse selbst. Die Richtung der andern Asymptote ist die der H -Achse, was uns direkt die Gl. (25) liefert, wenn wir darin $n = \infty$ setzen.

Die Annahme $c^2 = n^2 a^2$ liefert $s = 1$. Die Kegelschnitte k_1 und k_2 sind dann Parabeln, und längs der ξ -Achse erhalten wir folglich einen unendlich großen Radius; die Kurve C_r geht mithin einmal ins Unendliche mit der ξ -Achse als Asymptote, und weil die beiden Parabeln einander in dem unendlich fernen Punkte dieser Achse berühren, so tritt die unendlich ferne Gerade als Tangente der Kurve C_r in dem unendlich fernen Punkt auf.

Die Doppelpunkte D_r^1 und D_r^2 ergeben sich als reelle Punkte, wenn $p \geq q$ ist, und als konjugiert imaginär, wenn $p < q$ ist. Die Konstruktion der Kurve C_r mit Hilfe der Parabeln ist der Konstruktion der C_r im Fall 1 vollkommen analog. Weil die Konstruktion und die

Gestalt der Kurve C_r in allen drei Fällen eine große Ähnlichkeit mit der Konstruktion der Pascalschen Schnecke oder der Konchoide mit kreisförmiger Basis darbietet, wollen wir für die zirkuläre rationale und symmetrische Kurve C_r den Namen *Konchoide mit kegelschnittförmiger Basis* einführen.

β) Für $b = 0$ stellt Gleichung (15) eine Kurve C_r^β dar, die sich in bezug auf die unendlich ferne Gerade ähnlich verhält wie die C_r mit

Fig. 9. $c^2 - n^2 a^2 \leq 0$. Nach dem analytischen Dreieck (Fig. 9) erhalten wir als Näherungskurve für den Ursprung:

$$d^2 \eta^2 - 2mad\xi^2 \eta + m^2 a^2 \xi^4 \equiv (d\eta - ma\xi^2)^2 = 0.$$

Der Anfangspunkt erweist sich daher als ein Oskulationsknoten.

Die Polargleichungen der Kurve C_r^β lauten:

$$\begin{cases} \rho_\theta = \rho_1 \cos \theta \\ \rho_{\theta+\pi} = -\rho_1 \cos \theta, \end{cases}$$

und die Radienvektoren der Punkte der Kurve C_r^β ergeben sich daher aus einem einzigen Kegelschnitt.

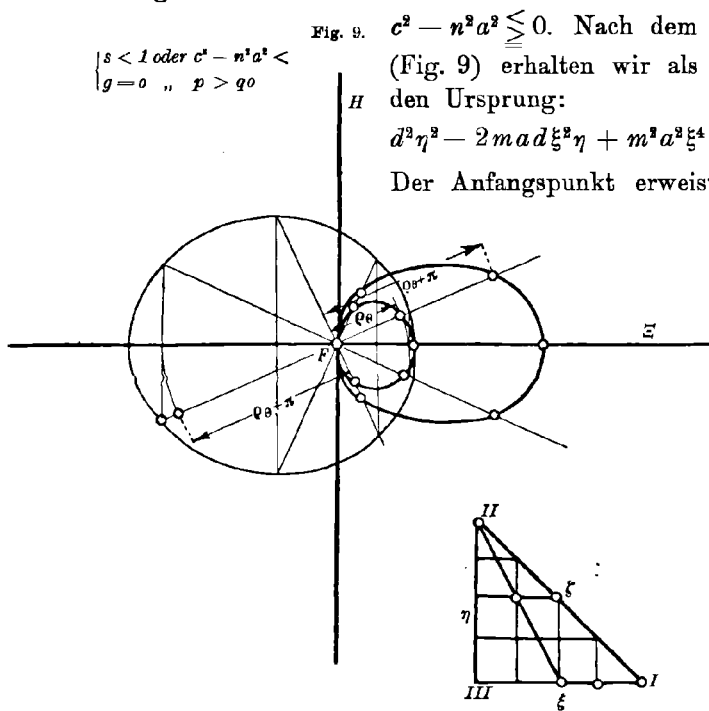
Die Fundamentalkurve f_b und die Übergangskurve h_b

gehen in die ideelle Gerade über, welcher in Σ_r für $b = 0$ der Nullkreis entspricht. Alle drei Doppelpunkte der C_r^β vereinigen sich hiermit im Anfangspunkt, der somit ein Oskulationsknoten wird. Die Konstruktion der Kurve C_r^β geht unmittelbar aus der Fig. 9 hervor.

γ) Annahme $c = 0$. Die Gl. (15) können wir jetzt in die Form:

$$\left(\eta^2 + \xi^2 - \frac{d}{na}\xi\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2(\eta^2 + \xi^2) = 0$$

setzen, die eine Pascalsche Schnecke darstellt. Der Pol liegt im Anfangspunkt, das Intervall der Schnecke ist $\frac{b}{a}$ und der Durchmesser der Basis $\frac{d}{na}$. Die Schnecke verhält sich übrigens zu den Koordinatenachsen ganz wie die Konchoide C_r mit elliptischer Basis. Gl. (25) liefert für



$c = 0$ die Doppelwurzeln $+i$ und $-i$, d. h. eine bizirkulare Kurve, wozu die Schnecke auch gehört.

Für $c = 0$ lauten die Gln. (28):

$$\begin{cases} \varrho_\theta = p \cos \theta + q \\ \varrho_{\theta+\pi} = -(p \cos \theta - q), \end{cases}$$

die besagen, daß wir zur Konstruktion der Kurve C_r einen Kreis nebst einer konstanten Strecke brauchen. Die Übergangskurve h_r wird ein Nullkreis, dem in Σ_r die beiden Kreispunkte entsprechen. In diese Punkte fallen daher die Doppelpunkte D_r^1 und D_r^2 .

δ) Der Vollständigkeit wegen betrachten wir noch den Fall $c = 0$, $b = 0$, wo die Gl. (15) sich auf

$$[na(\eta^2 + \xi^2) - d]^2 = 0$$

reduziert. Die Kurve C_r wird dann zur doppelten Basis der Pascalschen Schnecke.

2. Ähnlichkeit und Kongruenz $d \neq 0$.

Wir kommen dann zu der Kurve C_r , die die Gln. (16) und (17) darstellen. Diese können wir folgendermaßen umformen:

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{c}\right)^2 \xi^2 - (\eta^2 + \xi^2) \left(\xi - n\frac{b}{c}\right)^2 = 0 \\ k^2 \xi^2 - (\eta^2 + \xi^2) (\xi + n)^2 = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine Nikomedische Konchoide mit dem Pole im Anfangspunkt und dem Intervall $\frac{d}{c}$ bzw. k darstellt. Die Basis ist parallel mit der H -Achse und hat die Entfernung $-n\frac{b}{c}$ bzw. n vom Anfangspunkt. Die Wurzeln der Gl. (25) drücken aus, daß die Kurve C_r in der Richtung der H -Achse ins Unendliche geht.

Die Gl. (28) verwandeln sich in die gewöhnliche Polargleichung der Konchoide:

$$\pm \varrho = \frac{nb}{c \cos \theta} + \frac{d}{c}.$$

Die Übergangskurve h_r geht in die ideelle Gerade über, der in Σ_r wieder die ideelle Gerade entspricht. Die Doppelpunkte D_r^1 und D_r^2 fallen im unendlich fernen Punkt der H -Achse zusammen und bilden folglich dort den für die Konchoide charakteristischen Berührungsknoten.

Es bleibt noch übrig, die Kurve C_r im Falle $d = 0$ zu untersuchen. Gl. (28) zeigt, daß die C_r in zwei Kreise zerfällt, Gl. (29)

wieder, daß die Kurve C_r in eine Doppelgerade und in einen Doppelpunkt im Anfangspunkt ausartet.

Als Bild der Y -Achse ergibt sich der Gl. (20) zufolge die doppelte H -Achse und der Hauptkreis f_r , von denen der Hauptkreis sich im Falle $d = 0$ auf einen Doppelpunkt reduziert.

Zufolge den Betrachtungen im Anfang des § 9 können wir die Eigenschaften der Kurve C_r in Σ_r , die einer Geraden l_b in Σ_b , welche einer Koordinatenachse parallel ist, entspricht, auf eine Kurve \bar{C}_r in Σ_r die einer beliebig gewählten Geraden \bar{l}_b in Σ_b entspricht, übertragen. Hiermit können wir auch folgenden Satz aussprechen.

Einer Geraden in einem System entspricht in einem andern eine zirkuläre und rationale Kurve C_r vierter Ordnung, die eine Symmetrallinie besitzt. Im Falle der projektiven Zuordnung ergibt sich eine Konchoide mit kegelschnittförmiger Basis, deren Intervall im allgemeinsten Falle variabel, in speziellen Fällen entweder Null oder konstant ist. Bei ähnlicher und kongruenter Zuordnung ist die Basis eine Gerade und das Intervall konstant.

Bei speziellen Zuordnungen kann es noch vorkommen, daß die Kurve entweder in zwei Kreise oder in eine Doppelgerade nebst einem Doppelpunkt zerfällt.

Der X -Achse und der Y -Achse selbst entspricht in Σ_r die doppelte ξ - bzw. H -Achse und, der Hauptkreis f_r , der sich in einen Doppelpunkt im Ursprung zusammenziehen kann und umgekehrt.

Wir gehen hiermit zu der

II. Kurve C'_r

über. Die Gleichung (21) und (22) sagen uns, daß die der Geraden l'_b entsprechende Kurve C'_r in Σ_r aus einer Kurve vierter Ordnung besteht, die diesen Gleichungen gemäß aus einer Doppelgeraden durch den Anfangspunkt und aus der Fundamentalkurve f_r sich zusammensetzt.

Fällt der Anfangspunkt wieder in einen Doppelpunkt, so zeigt die Gleichung (23), daß die Fundamentalkurve f_r sich in den Anfangspunkt zusammenzieht. Geometrisch könnten wir dies einfach bestätigen. Da die Gerade l'_b durch den Anfangspunkt ($x = 0 \mid y = 0$) geht so muß die dem Punkte ($x = 0 \mid y = 0$) entsprechende Kurve f_r einen Bestandteil der Kurve C'_r ausmachen. Der andere Teil der C'_r ist dann eine Kurve zweiten Grades, zerfällt aber, weil er durch den singulären Punkt ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) der C'_r gehen muß.

Hiermit hat sich ergeben:

Einer durch den Anfangspunkt ($x = 0 \mid y = 0$) gehenden Geraden l'_b in Σ_b entspricht eine Kurve vierter Ordnung C''_r in Σ_r , die aus der

Hauptkurve f_r und aus einer Doppelgeraden durch den Anfangspunkt besteht. In speziellen Fällen wird die Hauptkurve durch den Doppelpunkt ($\xi = 0 \mid \eta = 0$) ersetzt.

Die Untersuchung der in diesem Abschnitt genannten kinetographischen Verwandtschaft zwischen Σ_r und Σ_b hat ergeben, daß, wenn Σ_b sich in Σ_r so bewegt, wie es auf Seite 373 angegeben ist, die ebenen Systeme Σ_r und Σ_b in eine Korrespondenz [2, 2] mit dem Transformationsgrade 4 in beiderlei Sinne und vom Geschlechte 0 kommen. In den speziellen Fällen der ähnlichen und kongruenten Zuordnung der Ausgangsgruppen wird die Korrespondenz ein-eindeutig mit dem Transformationsgrade 1, wenn die Ebenen sich doppelt überdecken, d. h. sie wird eine Kollineation.

Die Untersuchung der Kurve, die einem Kegelschnitt entspricht, soll erst im 2. Teile dieser Arbeit behandelt werden, und zwar da synthetisch-geometrisch, d. h. wir betrachten dort den Kegelschnitt als das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel und untersuchen dann das Erzeugnis der beiden projektiven Kurvenbüschel vierter Ordnung, die den Strahlenbüscheln in dem andern Systeme entsprechen. Das Erzeugnis ist im allgemeinsten Falle eine zirkulare Kurve 8. Ordnung mit einem vierfachen Punkte im Anfang.

Bevor wir die Untersuchung der ebenen kinetographischen Verwandtschaften abschließen, wollen wir noch hervorheben, daß den Bahn- und Lagekurven in Σ_r und Σ_b die Bahn- und Lagekurven in Σ_b und Σ_r entsprechen, was unmittelbar aus der Entstehung unserer Verwandtschaften hervorgeht.

Wir verlassen hiermit die Ebene und gehen zum Raume über.

Zweiter Abschnitt.

Kinetographische Korrespondenzen [2, 2] im Raum.

V. Kapitel.

Räumliche kinetographische Korrespondenzen.

§ 10. Allgemeine Darlegungen.

Die Definition der kinetographischen Verwandtschaften ebener Systeme gilt verallgemeinert auch für die kinetographischen Verwandtschaften räumlicher Systeme.¹⁾ Im Raume hat man:

Eine kinetographische Verwandtschaft oder Korrespondenz zweier räumlichen Systeme T_r und T_b , von denen T_r in Ruhe, T_b beweglich ist,

1) L. Burmester: „Kinetographische Verwandtschaft ebener und räumlicher Systeme“. Sitz.-Ber. der kgl. bayer. Akad. der Wissenschaften Bd. 37, Heft 1. München 1907.

bestimmt sich durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems T_b in T_r und durch die eindeutige Zuordnung der Punkte auf zwei Flächen F_b bzw. F_r in beiden Systemen.¹⁾

Entsprechende Punkte in den auf diese Weise kinetographisch aufeinander bezogenen räumlichen Systemen T_r und T_b sind dann solche Punkte X_r und X_b in beiden Systemen, die sich in demselben Augenblick mit zugeordneten Punkten der Ausgangsflächen F_b und F_r decken.

Wenn das System T_b sich in T_r bewegt, so werden die beiden Systeme von einem Gebüsch von Flächen durchzogen, welches Gebüsch immer eine ∞^1 -fache Mannigfaltigkeit von Flächen enthält, die unter sich kongruent sind und die wir Lageflächen nennen wollen. Außerdem wird eine ∞^2 -fache Mannigfaltigkeit von Flächen von den Bahnkurven erfüllt, die die einzelnen zugeordneten Punkte auf den Ausgangsflächen während der Bewegung des T_b in T_r beschreiben.

Identisch nennen wir im Raum eine Zuordnung, wenn die Ausgangsflächen kongruente Flächen sind, und wenn diejenigen Punkte einander zugeordnet werden, die einander decken. Die speziellste identische Zuordnung ergibt sich, wenn die Ausgangsflächen Ebenen sind.

§ 11. Charakter der Aufgabe, die im zweiten Abschnitt behandelt wird.

Im Raum wird diejenige Gruppe kinetographischer Korrespondenzen zur Untersuchung vorgelegt, die auf folgende Weise entstehen:

Ein räumliches System T_b dreht sich um eine feste Achse $S_r T_r \equiv S_b^0 T_b^0$ in T_r (Fig. 10); zu Ausgangsflächen wählen wir zwei zusammenfallende und durch die Drehachse gehende Ebenen Σ_b und Σ_r , und wir ordnen die in denselben befindlichen Punktfelder $\Sigma_b \equiv (P_b Q_b S_b \dots)$ und $\Sigma_r \equiv (P_r Q_r S_r)$ einander 1. kollinear, 2. affin, 3. ähnlich, 4. kongruent und 5. identisch zu.

Durch jede dieser fünf Zuordnungen entsteht eine kinetographische Korrespondenz zwischen den Systemen T_r und T_b , von denen die identische Zuordnung auf eine spezielle involutorische kinetographische Verwandtschaft der T_r und T_b führt.

In T_r und T_b sind die Bahnkurven Kreise, deren Mittelpunkte auf der Drehachse $S_r T_r$ liegen, und die Lageflächen $F_r \equiv (\Sigma_r^0, \Sigma_r' \dots)$ und $F_b \equiv (\Sigma_b^0, \Sigma_b' \dots)$ Ebenen, die eine Fläche nullter Ordnung einhüllen, d. h. die Lageflächen F_r und F_b bilden zwei koachsiale Ebenenbüschel.

1) Die Verwandtschaft kann im Raum auch erweitert werden durch eine mehrdeutige Zuordnung der Punkte auf den Ausgangsflächen.

VI. Kapitel.

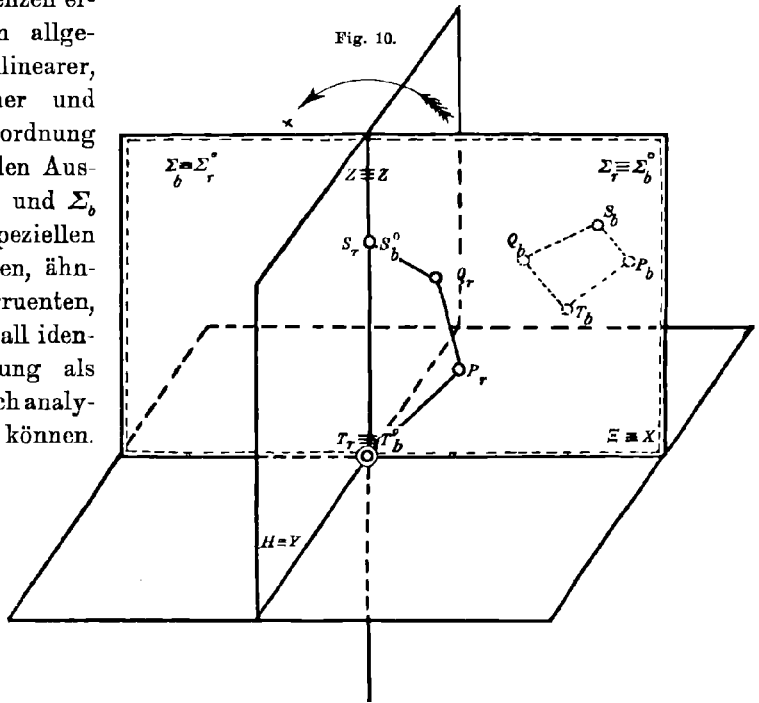
Untersuchung der Vieldeutigkeit der fünf Korrespondenzen zwischen Σ_r und Σ_b .

§ 12. Die Verwandtschaftsgleichungen der Räume T_r und T_b .

Geometrisch erhalten wir auf gleichartige Weise wie in der Ebene in § 3 die Vieldeutigkeit der fünf oben erwähnten Korrespondenzen der beiden aufeinander kinetographisch bezogenen Punkträume T_r und T_b . Die Korrespondenzen erweisen sich im allgemeinen bei kollinear, affiner, ähnlicher und kongruenter Zuordnung der Punkte in den Ausgangsebenen Σ_r und Σ_b als [2, 2]; in speziellen Fällen der affinen, ähnlichen und kongruenten, immer in dem Fall identischer Zuordnung als [1, 1], was wir auch analytisch feststellen können.

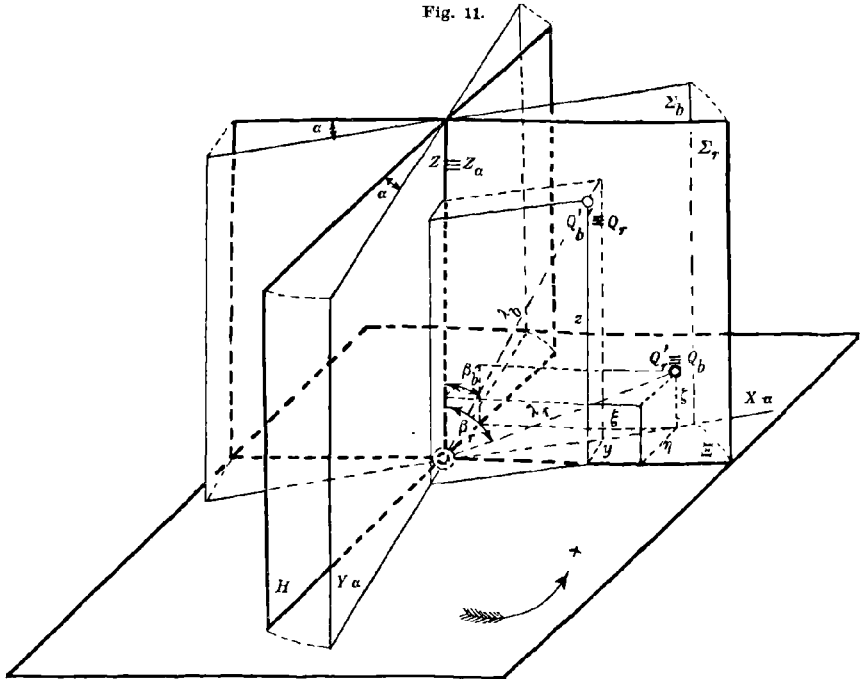
Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß T_b in Fig. 10 sich in der Anfangslage befindet und wählen die Koordinatenachsen in diesem Systeme so, daß die Z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt, die X-Achse senkrecht zu dieser in der Ausgangsebene liegt und die Y-Achse wieder senkrecht zu dieser Ebene ist. In T_r lassen wir die ξ, H und Z beziehlich mit X, Y, Z zusammenfallen.

Hiernach wählen wir in Σ_r und Σ_b zwei zugeordnete Punkte Q_r und Q_b (Fig. 10) in den kollinearen, affinen, ähnlichen, kongruenten oder identischen Punktfeldern $(P_r, Q_r, S_r, T_r, \dots)$ und $(P_b, Q_b, S_b, T_b, \dots)$ und lassen das System T_b sich um einen Winkel α drehen, so daß das Achsenkreuz $[X, Y, Z]$ in einem gegebenen Moment der Bewegung sich in der Lage $[X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha]$ befindet (Fig. 11).



In diesem Moment gibt der Punkt Q_b einen Punkt Q'_r in T_r an, und der zu dem Punkte Q_b zugeordnete Punkt Q_r einen Punkt Q'_b in T_b .

Entsprechende Punkte in einer der fünf oben genannten kinetographischen Verwandtschaften der T_r und T_b müssen folglich die Punkte Q'_r und Q'_b sein. Die Koordinaten dieser Punkte seien mit $Q'_r \equiv (\xi | \eta | \zeta)$ und $Q'_b \equiv (x | y | z)$ bezeichnet (Fig. 11).



Die variablen Parameter sind:

$$\begin{cases} Q_b O = \lambda_r; \sphericalangle Q_b O Z = \beta_r \\ Q_r O = \lambda_b; \sphericalangle Q_r O Z = \beta_b \\ \sphericalangle X_\alpha = H Y_\alpha = \alpha. \end{cases}$$

Den Parametern λ_r und λ_b können beliebige reelle Werte erteilt werden, den Winkeln α , β_r und β_b alle Werte zwischen 0 und 2π .

Aus der Fig. 11 erhalten wir folgende Übergangsgleichungen von dem Systeme T_b in T_r :

$$(29) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_r \sin \beta_r \cos \alpha \\ \eta = -\lambda_r \sin \beta_r \sin \alpha \\ \zeta = \lambda_r \cos \beta_r \end{cases}$$

und von dem System T_r zu T_b :

$$(30) \quad \begin{cases} x = \lambda_b \sin \beta_b \cos \alpha \\ y = \lambda_b \sin \beta_b \sin \alpha \\ z = \lambda_b \cos \beta_b. \end{cases}$$

Lassen wir der Einfachheit wegen bei der Drehung des Systems T_b in T_r die Ebenen $z = 0$ und $\xi = 0$ einander entsprechen und ordnen die beiden Punktfelder $\Sigma_r \equiv (P_r, Q_r, S_r, T_r \dots)$ und $\Sigma_b \equiv (P_b, Q_b, S_b, T_b \dots)$ einander 1. kollinear zu, so bestehen zwischen den Parametern λ_r und λ_b , β_r und β_b folgende bilineare Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_b \sin \beta_b = \frac{a_1 \lambda_r \sin \beta_r + b_1 \lambda_r \cos \beta_r + c_1}{a_3 \lambda_r \sin \beta_r + b_3 \lambda_r \cos \beta_r + c_3} \\ \lambda_b \cos \beta_b = \frac{b_2 \lambda_r \cos \beta_r}{a_3 \lambda_r \sin \beta_r + b_3 \lambda_r \cos \beta_r + c_3} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die Gleichungssysteme (29) und (30) in den Formen:

$$(31) \quad \begin{cases} \xi = \lambda_r \sin \beta_r \cos \alpha \\ \eta = -\lambda_r \sin \beta_r \sin \alpha \\ \zeta = \lambda_r \cos \beta_r \end{cases}$$

und

$$(32) \quad \begin{cases} x = \frac{a_1 \lambda_r \sin \beta_r + b_1 \lambda_r \cos \beta_r + c_1}{a_3 \lambda_r \sin \beta_r + b_3 \lambda_r \cos \beta_r + c_3} \cos \alpha \\ y = \frac{a_1 \lambda_r \sin \beta_r + b_1 \lambda_r \cos \beta_r + c_1}{a_3 \lambda_r \sin \beta_r + b_3 \lambda_r \cos \beta_r + c_3} \sin \alpha \\ z = \frac{b_2 \lambda_r \cos \beta_r}{a_3 \lambda_r \sin \beta_r + b_3 \lambda_r \cos \beta_r + c_3} \end{cases}$$

schreiben, von denen die Gleichungen (31) mittels der Formeln:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$\begin{cases} \lambda_r \sin \beta_r = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon_2 z + \varepsilon_3}{\kappa_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \kappa_2 z + \kappa_3} \\ \lambda_r \cos \beta_r = \frac{\tau_2 z}{\kappa_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \kappa_2 z + \kappa_3} \end{cases}$$

in folgende übergehen:

$$(33) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\pm \varepsilon_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon_2 z + \varepsilon_3}{\pm \kappa_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \kappa_2 z + \kappa_3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \eta = -\frac{\pm \varepsilon_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon_2 z + \varepsilon_3}{\pm \kappa_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \kappa_2 z + \kappa_3} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \zeta = \frac{\tau_2 z}{\pm \kappa_1 \sqrt{x^2 + y^2} + \kappa_2 z + \kappa_3} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (33) ersehen wir, daß einem Punkte $Q_b(x|y|z)$ in T_b zwei Punkte $Q_r'(\xi'|\eta'|\xi')$ und $Q_r''(\xi''|\eta''|\xi'')$ in T_r entsprechen.

Hiernach stellen wir mittels der Formeln:

$$\cos \alpha = -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \quad \sin \alpha = -\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$\lambda_r \sin \beta_r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \lambda_r \cos \beta_r = \xi$$

die Transformationsgleichungen auf:

$$(34) \quad \begin{cases} x = \frac{\pm a_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_1 \xi + c_1}{\pm a_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_3 \xi + c_3} \cdot \frac{\xi}{\pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y = -\frac{\pm a_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_1 \xi + c_1}{\pm a_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_3 \xi + c_3} \cdot \frac{\eta}{\pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ z = \frac{b_2 \xi}{\pm a_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_3 \xi + c_3}, \end{cases}$$

die uns wieder zeigen, daß einem Punkt $Q_r(\xi|\eta|\xi)$ in T_r zwei Punkte $Q_b(x'|y'|z')$ und $Q_b''(x''|y''|z'')$ in T_b entsprechen.

Ordnen wir hiernach die beiden Punktfelder Σ_b und Σ_r einander: 2. *affin*, 3. *ähnlich*, 4. *kongruent* und 5. *identisch* zu, so verschwinden die Nenner in obenstehenden Verwandtschaftsgleichungen und insbesondere lauten sie im Falle der Identität:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = -y \\ \xi = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi \\ y = -\eta \\ z = \xi. \end{cases}$$

Die Gleichungen (33), (34) und ihre Sonderfälle liefern uns den

Satz: Wenn ein Raum T_b sich um eine Achse in einem festen Raum T_r dreht und die Punktfelder in zwei zusammenfallenden und durch die Drehachse gehenden Ebenen kollinear, affin, ähnlich oder kongruent einander zugeordnet werden, so entstehen im allgemeinen kinetographische Korrespondenzen [2, 2], die in den besonderen Fällen der Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz sich auf kinetographische Korrespondenzen [1, 1] reduzieren.

Ganz wie in der Ebene können wir auch im Raum mittels der Gleichungen (33) und (34) eine graphische Konstruktion entsprechender Punktgruppen angeben. Hierfür haben wir nur zwei Ausgangsgruppen von je vier Elementen in Σ_b und Σ_r festzustellen, in welchen die Parameter zweier entsprechenden Elemente die früher angegebenen bilinearen Gleichungen befriedigen müssen. Aus der Erzeugungsweise unserer kinetographischen Verwandtschaften finden wir nämlich unmittelbar, daß einem Punkte Q des einen Systems zwei Punkte Q' und Q'' des ande-

ren entsprechen, die in einer durch die Drehachse gehenden Ebene liegen, welche mit der Ausgangsebene ΞZ denselben Winkel bildet, wie die durch Q und die Drehachse bestimmte Ebene.

VII. Kapitel.

Die Übergangskurven und Flächen, Hauptkurven und Hauptflächen der Systeme T_r und T_b .

§ 13. Die Übergangskurven und Flächen der Systeme T_r und T_b .

Für endliche Werte der Koordinaten $(x|y|z)$ und $(\xi \eta \zeta)$ und unter der Voraussetzung, daß wir nicht ausgeartete Zuordnungen betrachten, ergibt sich unseren Transformationsformeln gemäß in jedem Raum eine Übergangsfläche und eine Übergangskurve. Die Fläche ist ein Drehungskegel, dessen Achse mit der Drehachse zusammenfällt.

Dem Übergangskegel in T_r mit der Gleichung:

$$a_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_1 \xi + c_1 = 0,$$

welchen wir mit \mathfrak{F}_r bezeichnen wollen, entspricht in T_b die Z -Achse. Der Kegel \mathfrak{F}_r ist eine Hauptfläche für das System T_r , wie wir es im folgenden Paragraphen zeigen werden. Der Übergangskurve K_r in T_r , die ein Kreis:

$$a_2 a_3 (\xi^2 + \eta^2) - c_1 c_3 = 0$$

in der ΞH -Ebene ist¹⁾, entspricht in T_b wieder ein Kreis K_b .

In bezug auf den unendlich fernen Punkt in T_b und T_r zeigen uns die Verwandtschaftsgleichungen, daß es noch eine dritte Übergangsfläche in den beiden Systemen gibt, z. B. in T_r die Fläche F_r^∞ :

$$a_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_3 \xi + c_3 = 0$$

und

$$\xi^2 + \eta^2 = 0,$$

welche aus einem Drehungskegel und aus einem imaginären Ebenenpaar durch die Z -Achse bestehen. Somit hat man den

Satz: Der unendlich fernen Ebene des einen Systems entspricht in dem anderen eine zerfallende Fläche 4. Ordnung, die aus dem imaginären

1) Wenn wir die Ebenen $z = 0$ und $\xi = 0$ in den bilinearen Gleichungen einander nicht zuordnen, so liegt der Übergangskreis in der Ebene:

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}.$$

Ebenenpaar $\xi^2 + \eta^2 = 0$ durch die Drehachse und aus einem Drehungskegel um diese Achse besteht.

Die Koordinatenebenen schneiden die Übergangsflächen in Kurven, welche der unendlich fernen Geraden bzw. den Koordinatenebenen entsprechen.

Im Falle der affinen, ähnlichen oder kongruenten Zuordnung der Ausgangsfelder gehen die Übergangskurven K_r und K_b in die unendlich ferne Gerade über, die Kegel der Flächen F_r^∞ und F_b^∞ wieder in die unendlich ferne Ebene.

§ 14. Die Hauptkurven und Hauptflächen der Systeme T_r und T_b .

Die beiden ersten Gleichungen der Gleichungssysteme (33) werden für $(x = 0 | y = 0 | z = k)$ unbestimmt, d. h. ein Punkt $z = k$ auf der Z -Achse in T_b ist ein Hauptpunkt, die Z -Achse selbst wird eine Hauptgerade und jedem Punkt auf ihr entspricht, wie wir es aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} a_1 \lambda_r \sin \beta_r + b_1 \lambda_r \cos \beta_r + c_1 = 0 \\ -k a_3 \lambda_r \sin \beta_r + (b_3 - k b_3) \lambda_r \cos \beta_r - k c_3 = 0 \end{cases}$$

ersehen, ein Kreis in der Ebene $\xi = k'$, dessen Mittelpunkt auf der Z -Achse liegt.

Lassen wir dann den Punkt $z = k$ die Z -Achse durchlaufen, d. h. fassen wir die Größe k in obenstehenden Gleichungen als einen variablen Parameter auf und eliminieren ihn aus diesen Gleichungen, so ergibt sich die Fläche \mathfrak{F}_r mit der Gleichung

$$a_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_1 \xi + c_1 = 0,$$

die hiermit eine Hauptfläche im Systeme T_r ist. Analog ergibt sich die Hauptfläche \mathfrak{F}_b in T_b .

VIII. Kapitel.

Bestimmung der Flächen F_r und F_b , die den Ebenen E_b und E_r in T_b und T_r entsprechen.

Die Verwandtschaftsgleichungen (33) und (34) unterscheiden sich voneinander nur in den Koeffizienten; wir brauchen folglich nur die einer Ebene entsprechende Fläche des einen Systems zu untersuchen.

§ 15. Die Fläche F_r in T_r , die einer Ebene E_b in T_b entspricht.

Zufolge der Entstehung unserer kinetographischen Korrespondenzen können wir wie in der Ebene zeigen, daß alle diejenigen Flächen in

T_r kongruent sind, welche Ebenen entsprechen, die einen und denselben Kreiskegel um die Drehachse Z umhüllen.

Zur Untersuchung nehmen wir folglich nur diejenigen Flächen, welche Ebenen entsprechen, die parallel der oder durch die Y - und Z -Achse gehen, oder parallel der XY -Ebene sind. Außerdem bestimmen wir die Bilder der Koordinatenebenen.

Aus der Entstehungsweise unserer kinetographischen Verwandtschaften geht weiter hervor:

Jeder Ebene E_b in T_b entspricht in T_r eine symmetrische Fläche F_r , deren Symmetrialebene mit der ΞZ -Ebene denselben Winkel bildet, wie die Normalebene der E_b durch die Z -Achse.

Diese symmetrische Fläche F_r ist, wie wir einfach zeigen können, von der 4. Ordnung. Dem § 13 gemäß entspricht nämlich der unendlich fernen Ebene E_r^∞ in T_r die Übergangsfläche F_b^∞ in T_b und folglich begegnet die Ebene E_r^∞ der Fläche F_r in einer Kurve 4. Ordnung, die den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zweimal berührt. Die Berührungsehne begegnet der Kurve noch in zwei Punkten, die den Schnittpunkten der Ebene E_b und eines auf dem Fluchtkegel F_b^∞ liegenden Kreises entsprechen.

I.

Wir bestimmen zuerst die Flächen F_r und F'_r in T_r , die der zur Y - bzw. Z -Achse parallelen Ebene:

$$E_b \equiv sx + nz = ns \text{ bzw.}$$

$$E'_b = mx + ny = nm$$

in T_b entsprechen, wo m, n, s die Abschnitte auf der Koordinatenachse sind.

Die Fläche F_r ist, wie wir es oben gezeigt haben, eine symmetrische Fläche 4. Ordnung. Weitere Eigenschaften dieser Fläche ergeben sich aus folgenden Überlegungen: Die Ebene E_b von T_b trifft die Z -Achse in einem Punkt P_b , also enthält die entsprechende Fläche F_r in T_r den dem P_b entsprechenden Hauptkreis auf \mathfrak{F}_r . Die Ebene E_b schneidet ferner die Hauptfläche \mathfrak{F}_b in einem Kegelschnitt, der wieder jedem Hauptkreis auf \mathfrak{F}_b in zwei Punkten begegnet. Die Z -Achse ist folglich eine singuläre Gerade der Fläche F_b und kommt im allgemeinen auf ihr teilweise isoliert vor. Sie ist eine Doppelgerade, eine Rückkehrkante oder isoliert bis auf einen Punkt, je nachdem die Ebene E_b der Hauptfläche begegnet, eine Tangentialebene derselben ist oder die Spitze des Hauptkegels enthält. Der isolierte Teil der Z -Achse auf der Fläche F_r wird von dem nicht isolierten durch einen uniplanaren Punkt getrennt.

Außer der singulären Geraden Z besitzt die Fläche F_r zwei singuläre Punkte, deren Verbindungslinie senkrecht auf der Symmetral-

ebene der Fläche steht. Die singulären Punkte können auch konjugiert imaginär auf der Fläche auftreten.

Die Fläche F_r berührt noch, wie oben gesagt ist, zweimal den unendlich fernen Kugelkreis und hat in besonderen Fällen in den Berührungspunkten Rückkehrpunkte.

Auf der Fläche F_r reduziert sich der Hauptkreis auf einen Doppelpunkt, nämlich auf die Spitze des Hauptkegels \mathfrak{S}_r , und die Z -Achse trägt die Fläche als Doppelgerade mit Ausnahme einer Strecke AB , deren Endpunkten diejenigen Kreise auf F_b entsprechen, die von der Ebene E'_b berührt werden.

Wie die Singularitäten auf den Flächen F_r und F'_r im Falle der affinen, ähnlichen oder kongruenten Zuordnung der Ausgangsfelder sich verändern, ist leicht einzusehen.

II.

Zweitens bestimmen wir die Flächen F''_r und F'''_r in T_r , welche einer durch die Y - bzw. Z -Achse gehenden Ebene:

$$E''_b \equiv sx + nz = 0 \text{ bzw.}$$

$$E'''_b = mx + ny = 0$$

in T_b entsprechen.

Die gestaltlichen Verhältnisse der Fläche F''_r unterscheiden sich von denjenigen bei der Fläche F_r in bezug auf die ΞH -Ebene, welche Ebene dieser Fläche in einer rationalen Kurve 4. Ordnung und jener in einer zerfallenden Kurve derselben Ordnung begegnet. Die zerfallende Kurve besteht aus der Fundamentalkurve in der ΞH -Ebene und der doppelten H -Achse.

Die Fläche F'''_r zerfällt in eine Doppalebene durch die Z -Achse und in den Hauptkegel \mathfrak{S}_r , was ja auch unmittelbar die Gleichung:

$$(m\xi - n\eta)^2(a_1\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + b_1\xi + c_1)^2 = 0$$

der Fläche F'''_r liefert.

III.

Drittens bestimmen wir die Fläche F^{IV}_r in T_r , welche einer der XY -Ebene parallel laufenden Ebene

$$z = s$$

in T_b entspricht.

Die Fläche F^{IV}_r ist eine ausgeartete Fläche 4. Ordnung, deren Bestandteile ein Kreiskegel und das imaginäre Ebenenpaar $\xi \pm i\eta = 0$ sind. Die Gleichung der Fläche lautet:

$$[\xi^2 + \eta^2][sa_3\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + (sb_3 - b_2)\xi + sc_3] = 0.$$

IV.

Schließlich bestimmen wir die Flächen in T_r , die den Koordinatenebenen in T_b entsprechen.

Analytisch und synthetisch-geometrisch können wir leicht feststellen, daß die Flächen in T_r , welche den Ebenen $y = 0$ und $x = 0$ in T_b entsprechen, bei jeder Zuordnung ausgeartete Flächen sind; jede von ihnen enthält den Hauptkegel \mathfrak{F}_r und die doppelt zu rechnende Koordinatenebene $\eta = 0$ bzw. $\xi = 0$. Den Ebenen $z = 0$ in T_b entspricht wieder das imaginäre Ebenenpaar $\xi \pm i\eta = 0$ durch die Z -Achse und die doppelt zu rechnende Koordinatenebene $\xi = 0$.

Die Untersuchung der im zweiten Abschnitt erzeugten räumlichen kinetographischen Verwandtschaften zwischen T_r und T_b hat ergeben, daß, wenn T_b sich in T_r so bewegt, wie es auf Seite 394 angegeben ist, die räumlichen Systeme T_r und T_b in eine Korrespondenz [2, 2] mit dem Transformationsgrade 4 in beiderlei Sinne kommen. In den besonderen Fällen der affinen, ähnlichen und kongruenten Zuordnung der Ausgangsfelder Σ_r und Σ_b wird die Korrespondenz [1, 1].

Bei der allgemeinen Zuordnung haben sich neue Typen von Flächen 4. Ordnung ergeben, die alle dem Noetherschen¹⁾ Satze gemäß Homaloide, also auf einer Ebene eindeutig abbildbar sind.

Bevor wir die Untersuchung abschließen, wollen wir noch hervorheben, daß einer Geraden des einen Raumes in dem anderen Raume eine Raumkurve 4. Ordnung²⁾ entspricht, die den unendlich fernen imaginären Kugelkreis in zwei Punkten berührt und bei besonderen Lagen der Geraden singuläre Punkte erhält. In besonderen können wir dieses leicht bestätigen, wenn die Gerade in der ideellen Ebene liegt.

Helsingfors, den 13. März 1912.

Su una nuova deduzione della legge di frequenza degli errori.

Nota di CORRADINO MINEO a Palermo (Italia).

Il problema di dedurre *rigorosamente* da un sistema di postulati e per *qualunque* sistema d'osservazioni la legge di frequenza degli errori, è tutt' altro che semplice, come provano i numerosi tentativi fatti: fors'anco è vano ricercarne la risoluzione in tutta la sua generalità. Tanto vero che non pochi autori (Borel, Montessus ...) preferiscono ormai

1) Noether, „Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen“, Math. Ann. Bd. 3 (1871), S. 161.

2) Sturm, R. „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“. Teil IV, Leipzig 1909, S. 459.

di considerare la cosiddetta legge di Gauss come un risultato dell'esperienza.

Tuttavia questa legge, con un'analisi non semplice ma rigorosa, è stata dimostrata in una magistrale Memoria del Pizzetti¹⁾, in quanto si consideri come una legge *limite*, corrispondente al caso in cui si supponga crescente all'infinito il numero delle cause d'errore.

Più recentemente il problema è stato affrontato in tutta la sua generalità dal Sig. Story²⁾, il quale, ritenendo poco rigorosi e molto approssimativi gli sviluppi dati alla teoria degli errori, ha inteso a una deduzione matematica rigorosa della legge di probabilità da postulati semplici e universalmente accettabili. Secondo i risultati del Sig. Story, la funzione $\varphi(x)$ di probabilità, relativa a un dato sistema concreto di osservazioni, andrebbe determinata integrando per serie una certa equazione a derivate parziali: il metodo condurrebbe, dunque, a una conoscenza soltanto approssimativa della $\varphi(x)$; e inoltre, per le gravi difficoltà di calcolo, la teoria degli errori, a dir vero, si renderebbe in generale inapplicabile. Ma il fatto che più importa rilevare è che nella forma generale per la $\varphi(x)$ la legge di Gauss, vale a dire il caso ordinario, non rientrerebbe che in via eccezionale e quasi *per impossibile!* È vero che in favore della legge di Gauss stanno le classiche misure di Bessel e di Bradley, ma non si può disconvenire che il colpo contro di essa, secondo i risultati del Sig. Story, sarebbe assai grave, almeno in teoria.

In effetti, però, le cose non vanno così. Noi mostreremo: 1° che la deduzione del Sig. Story non discende necessariamente dalle premesse, ma contiene dell'arbitrario; 2° che movendo della sua idea fondamentale (ispirata, si può dire, alle teorie del Crofton³⁾), ma lueggiandola e sviluppandola altrimenti, non è dato trarne, in fondo, che la legge di Gauss; 3° che questa quindi si può ancora una volta stabilire con una deduzione abbastanza rigorosa, che vale quanto i postulati, su cui si fonda, valgono.

1. Noi ammetteremo anzitutto che per una data classe di misurazioni fisiche esista un' *unica* funzione $\varphi(x)$, che rappresenti la *frequenza relativa* dell'errore *accidentale* x , commesso nel misurare una determinata grandezza; dimodochè $\varphi(x)dx$ esprimerà, come si suol dire, la probabilità che l'errore x cada tra x e $x + dx$. Ma la $\varphi(x)$, oltre

1) Pizzetti, *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* (Atti della r. Università di Genova, 1892).

2) W. E. Story, *A new general theory of errors* (Proc. of the American Acad. of Arts and Sciences, Vol. 40, n° 3, 1904, pp. 167—202).

3) Crofton, *On the proof of the law of obs.* [Phil. Trans. London, CLIX, 1870] e *Probability* [Encycl. Brit. XIX, 1885].

che dell' errore x , dovrà esser funzione di certi parametri variabili da sistema a sistema d'osservazioni; senza di che la probabilità di commettere un errore x , numericamente assegnato, sarebbe sempre la stessa, qualunque si fossero l'accuratezza, i mezzi adoperati nel fare le misure e le circostanze nelle quali si opera: cosa evidentemente assurda. Supporremo quindi che la $\varphi(x)$ contenga un certo numero di parametri, i cui valori, determinabili *a posteriori*, dipenderanno dal dato sistema d'osservazioni, cioè avranno, come si dice, un valore *statistico*. In quanto all'errore x , non sembra grave inconveniente ammettere che esso, contrariamente a quel che avviene nella realtà, possa assumere *tutti* i valori compresi in un certo intervallo $(-\alpha, \beta)$, dove α e β sono due numeri positivi. Si può anco ammettere che nelle vicinanze degli estremi $-\alpha, \beta$ dell'anzidetto intervallo la $\varphi(x)$ prenda valori piccolissimi, affatto trascurabili in pratica. Naturalmente, in tutti gli altri punti dell'intervallo la $\varphi(x)$ si dovrà mantenere positiva, affinchè essa possa rappresentare una legge di frequenza; ma noi non imporremo alla $\varphi(x)$ tale condizione, che si vedrà in ultimo verificata. Ammetteremo, però, che $\varphi(x)$ sia sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto dell'intervallo $(-\alpha, \beta)$.

Infine, è da supporre, come generalmente si fa, che in ciascuna osservazione agisca un numero n grandissimo, ma *finito*, di cause d'errore (ognuna delle quali produca un effetto piccolo rispetto a n). Ora, dato un sistema d'osservazioni e le n cause d'errore (per quanto sconosciute), che vi agiscono, noi possiamo certamente concepire un altro sistema d'osservazioni, che si differenzii dal primo soltanto per la presenza di un'altra causa d'errore C_{n+1} (dovuta p. es. al variare d'una qualche circostanza). Il nuovo sistema d'osservazioni sarà caratterizzato da altri valori dei parametri, di cui è funzione $\varphi(x)$; ma se gli effetti di C_{n+1} sono abbastanza piccoli a petto di quelli dovuti all'insieme delle cause C_1, C_2, \dots, C_n , i parametri, e quindi la relativa frequenza d'un dato errore, varieranno di pochissimo nel passaggio dal primo al secondo sistema.

Siamo allora condotti a postulare una causa d'errore C_{n+1} , che produca errori y , compresi in un intervallo $(-a, b)$ piccolissimo rispetto all'intervallo $(-\alpha, \beta)$, con legge di frequenza $f(y)$. Vedremo, peraltro, che la funzione f si potrà anco far coincidere con quel che diventa la φ per convenienti valori dei suoi parametri; e in generale la $f(y)$ assumerà valori piccolissimi in vicinanza degli estremi dell'intervallo $(-a, b)$ e valori finiti ma *grandi* in vicinanza dello zero. In ogni modo, la causa C_{n+1} d'errore, che ci permetteremo di chiamare *virtuale*, preciseremo con la seguente

Definizione. Chiameremo *causa virtuale d'errore*, rispetto a un dato sistema d'osservazioni, una causa capace di produrre errori y con

legge di frequenza $f(y)$ tale che: 1) $f(y)$ è continua nell' intervallo $(-a, b)$, dove a e b sono due numeri positivi abbastanza piccoli, nel senso che sarà dichiarato appresso; 2) essa verifica le relazioni

$$(1) \quad \int_{-a}^b f(y) dy = 1, \quad \int_{-a}^b y f(y) dy = \varepsilon_1, \quad \int_{-a}^b y^2 f(y) dy = \varepsilon_2,$$

dove ε_1 e ε_2 siano due numeri piccolissimi¹⁾; 3) per $m > 3$, l'integrale

$$\varepsilon_m = \int_{-a}^b y^m f(y) dy$$

è assolutamente trascurabile, sicchè si possa ritenere

$$(2) \quad \varepsilon_m = 0, \quad (m \geq 3).$$

Premesso tuttocì, formuleremo come segue i postulati su cui verrà fondata la nostra deduzione.

Postulato I: Qualunque sia il complesso delle cause d'errore che influiscono sulle osservazioni, l'errore x commesso nel misurare una data grandezza fisica, essendo α e β due numeri positivi, può assumere tutti i valori compresi nell' intervallo $(-\alpha, \beta)$, e la sua frequenza relativa, per una certa classe di misurazioni fisiche, è una funzione $\varphi(x)$, la quale: 1) è sviluppabile in serie di Taylor in tutto l'intervallo $(-\alpha, \beta)$; 2) contiene un certo numero di parametri caratteristici del dato sistema d'osservazioni; 3) si può ritenere nulla in ciascuno degli intervallini $(-\alpha - \eta, -\alpha + \eta)$, $(\beta - \eta, \beta + \eta)$, dove η è un numero positivo convenientemente piccolo; 4) verifica infine la condizione

$$(3) \quad \int_{-\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = 1.^2)$$

Postulato II. La probabilità $\varphi(x)dx$ che un errore x sia compreso tra x e $x + dx$, è indipendente dall' unità di misura in cui s'intende espresso l'errore x .

1) Non c'è nessuna incompatibilità ad ammettere che i due integrali $\int_{-a}^b f(y) dy$, $\int_{-a}^b y^2 f(y) dy$ siano due numeri piccoli anche dello stesso ordine: in fatti, se supponiamo $f(y) > 0$, nell' intervallo, il primo integrale (teorema della media) potrà essere uguale al valore che prende y in un punto prossimo allo zero, mentre il secondo potrà eguagliare il valore di y^2 in un punto prossimo a uno degli estremi. Peraltro si farà vedere appresso come si possa costruire la $f(y)$ in modo da soddisfare alle condizioni (1) e (2).

2) La quale, come è noto, esprime che l'errore è certamente compreso tra $-\alpha$ e β .

Postulato III (della causa virtuale). *Se interviene una causa virtuale d'errore* (cfr. la Def.), *i parametri della funzione φ subiscono incrementi piccolissimi, dimodochè la frequenza relativa dell' errore z , somma dell' errore x dovuto al complesso delle cause precedenti e dell' errore y dovuto alla nuova causa, s'intenderà combiata in $\varphi(z) + \delta\varphi(z)$, essendo $\delta\varphi(z)$ l'incremento di 1° ordine di $\varphi(z)$ relativo agl' incrementi dei parametri.*

Questi postulati equivalgono, nella sostanza, a quelli ammessi, esplicitamente o implicitamente dal Sig. Story, salvo che la nostra causa virtuale ci sembra, dal punto di vista analitico, più chiaramente precisata dell' "infinitesimal source of error" dell' autore.¹⁾

2. L'errore complessivo

$$z = x + y$$

varierà evidentemente tra $-(\alpha + a)$ e $\beta + b$, e la sua probabilità è per ipotesi (Postulato III)

$$(4) \quad [\varphi(z) + \delta\varphi(z)] dz.$$

Ma noi possiamo trovarci un' altra espressione di essa applicando il teorema della probabilità composta (giacchè gli errori x e y sono da considerare come avvenimenti indipendenti).

Qui ci sia lecita una breve digressione. Supponiamo che la causa d'errore C_{n+1} sia qualunque, cioè produca anch' essa errori y compresi in un intervallo non piccolo e con frequenza $f(y)$ qualunque ma continua. Le due funzioni $\varphi(x)$ e $f(y)$ si suppongano, inoltre, definite soltanto nei loro rispettivi intervalli $(-\alpha, \beta)$, $(-a, b)$. Come si può esprimere, allora, la probabilità che l'error $z = x + y$ sia compreso tra z e $z + dz$? È evidente che se il secondo errore è un certo y , l'altro deve esser compreso tra $z - y$ e $z - y + dz$: la probabilità di quest' ultimo è quindi $\varphi(z - y) dz$, mentre la probabilità totale si avrà moltiplicando quella espressione per la probabilità che ha l'errore y di esser compreso tra y e $y + dy$ e facendo poi la somma di tutti i prodotti analoghi, che si ottengono dando a y tutti e soli quei valori dell' intervallo $(-a, b)$ per i quali $z - y$ resta compreso, per un dato z , nell' intervallo $(-\alpha, \beta)$. Questa probabilità totale dell' error z — il quale, come si è notato, varierà tra $-(\alpha + a)$ e $\beta + b$ — non è però esprimibile, per ogni z , con

$$(5) \quad dz \int_{-a}^b \varphi(z - y) f(y) dy,$$

1) Sembra infatti che il Sig. Story voglia considerare i due integrali da noi indicati con $\int_{-a}^b y f(y) dy$ e $\int_{-a}^b y^2 f(y) dy$ come infinitesimi e l'integrale $\int_{-a}^b y^m f(y) dy$, per $m > 2$, come rigorosamente nullo: ma in tal caso è da dubitare che la funzione $f(y)$ esista, e tutto il procedimento può diventare illusorio.

eccettochè non si voglia: o imporre alla funzione $\varphi(x)$ di esser nulla in ogni punto esterno all' intervallo $(-\alpha, \beta)$, o supporre addirittura infiniti gli estremi del detto intervallo, cioè x variabile tra $-\infty$ e $+\infty$. Fuori di queste due ipotesi, non c'è altro mezzo che introdurre sotto il segno integrale — secondo l'ingegnosa idea di Cauchy così feconda nelle questioni di probabilità — un *coefficiente restrittore*¹⁾ (o *fattore di discontinuità*), cioè una funzione, nel caso nostro, di $z-y$, che sia eguale a 1 per tutti i valori dell' argomento interni all' intervallo $(-\alpha, \beta)$ e si annulli per ogni altro valore. Indicando con I_{z-y} un tale coefficiente la probabilità dell' error $z = x + y$ sarebbe in ogni caso

$$dz \int_{-a}^b I_{z-y} \varphi(z-y) f(y) dy.$$

Ma nell' ipotesi della causa virtuale d'errore, a e b sono numeri molto piccoli e noi potremo sempre supporre

$$(6) \quad a + b < \eta,$$

dimodochè [Postulato I, condizione 3)] la $\varphi(x)$ sarà nulla in ciascuno degl' intervalli $(-\alpha - a - b, -\alpha)$, $(\beta, \beta + a + b)$: la probabilità totale, per l'error z , potrà allora essere rappresentata dalla (5), per ogni z , purchè, come si è fatto, s' imponga alla $\varphi(x)$ di esser nulla nei due intervallini $(-\alpha - \eta, -\alpha + \eta)$, $(\beta - \eta, \beta + \eta)$.

Tornando al nostro argomento, potremo dunque eguagliare l'espressione (5) con la (4), scrivendo

$$(7) \quad \varphi(z) + \delta \varphi(z) = \int_{-a}^b \varphi(z-y) f(y) dy.^2)$$

1) Cauchy, *Oeuvres complètes*, 1^{ère} Série, t. XII, pp. 79—94.

2) Notiamo che a questo punto il Sig. Story sostituisce agli errori i *residui*, cioè le differenze tra i valori osservati e la media aritmetica di questi, che sono poi eguali alle differenze tra gli errori sconosciuti e la loro media aritmetica. L' A. afferma a questo proposito, che le osservazioni non ci posson mai far conoscere nè il *vero* valore d'una grandezza nè i *veri* errori commessi nel misurarla, ma *soltanto* la media dei valori osservati e i residui delle varie osservazioni. Questa affermazione, però, implica già il postulato che la media dei valori osservati sia il valore più esatto o più conveniente (se non il più probabile) della grandezza misurata; nè serve d'altra parte a bandire le idee di *vero* valore della grandezza e di *vero* errore d'una misura (idee che, assolutamente parlando, sono, è vero, affatto metafisiche, ma che con opportune convenzioni possono in infiniti modi ricevere significato positivo): chè, anzi, per arrivare ai residui, si è costretti a passare attraverso ai *veri* errori x e alla loro media $\int_{-\alpha}^{\beta} x \varphi(x) dx$!

In fondo, in questa introduzione dei residui, non c'è che un espediente analitico, col quale l'A. può far dipendere la determinazione della φ da una sola equazione a derivate parziali, anzichè da due.

Dalla quale, sviluppando $\varphi(z - y)$ in serie intorno al punto z (Postulato I) e tenendo presenti le (1), otteniamo

$$(8) \quad \delta \varphi(z) = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2}.$$

3. Poniamo ora

$$(9) \quad \sigma_m = \int_{-\alpha}^{\beta} x^m \varphi(x) dx$$

per ogni valore intero di m (per $m = 0$, $\sigma_0 = 1$ per la (3)). σ_m non rappresenta altro (per il teorema di Bernoulli) che il valor medio delle potenze m^{me} degli errori x , appartenenti al primitivo sistema d'osservazioni. Evidentemente σ_m è funzione dei soli parametri di $\varphi(x)$. Per l'intervento delle causa virtuale d'errore, variando di quantità piccolissime soltanto i parametri di $\varphi(x)$ (Postulato III), σ_m si muterà in $\sigma_m + \delta \sigma_m$, dove $\delta \sigma_m$ indica, al solito, l'incremento di 1° ordine di σ_m relativo agli incrementi degli anzidetti parametri. D'altra parte l'espressione del valor medio delle potenze m^{me} dell' errore complessivo $z = x + y$ si può avere altrimenti, tenendo presente che esso varia tra $-\alpha - a$ e $\beta + b$ e che la sua legge di frequenza è espressa dalla (4). Eguagliando le due espressioni, scriveremo

$$\begin{aligned} \sigma_m + \delta \sigma_m &= \int_{-\alpha - a}^{\beta + b} z^m [\varphi(z) + \delta \varphi(z)] dz = \\ &= \int_{-\alpha}^{\beta} z^m [\varphi(z) + \delta \varphi(z)] dz + \int_{\beta}^{\beta + b} z^m [\varphi(z) + \delta \varphi(z)] dz - \int_{-\alpha}^{-\alpha - a} z^m [\varphi(z) + \delta \varphi(z)] dz. \end{aligned}$$

Ma poichè, per la (6) e per il Postulato I, $\varphi(z)$ è nulla negli intervalli $(\beta, \beta + b)$, $(-\alpha - a, -\alpha)$, i due ultimi integrali sono nulli, e quindi scriveremo, badando alla (7),

$$\sigma_m + \delta \sigma_m = \int_{-\alpha}^{\beta} z^m dz \int_{-\alpha}^b \varphi(z - y) f(y) dy.$$

È lecito invertire le integrazioni¹⁾, sicchè possiamo scrivere

$$\sigma_m + \delta \sigma_m = \int_{-\alpha}^b f(y) dy \int_{-\alpha}^{\beta} z^m \varphi(z - y) dz.$$

Nell' integrale $\int_{-\alpha}^{\beta} z^m \varphi(z - y) dz$ facciamo il cambiamento di variabile

$$z = x + y.$$

1) Non s'intende perchè, nel fare l'inversione, il Sig. Story cambi i limiti di uno dei due integrali.

Avremo

$$\int_{-a}^{\beta} z^m \varphi(z-y) dz = \int_{-a-y}^{\beta-y} (x+y)^m \varphi(x) dx = \int_{-a}^{\beta} (x+y)^m \varphi(x) dx + \int_{\beta}^{\beta-y} (x+y)^m \varphi(x) dx - \int_{-a}^{-a-y} (x+y)^m \varphi(x) dx.$$

Ricordando che y è sempre un numero compreso tra $-a$ e b e che quindi la $\varphi(x)$ assume (Postulato I) valori nulli in ciascuno degli intervalli $(\beta - b, \beta + a)$, $(-a + b, -a + a)$, ne deduciamo che i due ultimi integrali sono nulli; sicchè avremo in conclusione

$$(10) \quad \sigma_m + \delta \sigma_m = \int_{-a}^b f(y) dy \int_{-a}^{\beta} (x+y)^m \varphi(x) dx.$$

Sviluppando $(x+y)^m$ col tener presente le (1), (2), (3) e (9), otteniamo

$$(11) \quad \delta \sigma_m = m \sigma_{m-1} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} m(m-1) \sigma_{m-2} \varepsilon_2.$$

Da questa si trae

$$(12) \quad \varepsilon_1 = \delta \sigma_1, \quad \varepsilon_2 = -2 \sigma_1 \delta \sigma_1 + \delta \sigma_2;$$

sicchè la (11) si può anco scrivere

$$(13) \quad \delta \sigma_m = m [\sigma_{m-1} - (m-1) \sigma_1 \sigma_{m-2}] \delta \sigma_1 + \frac{1}{2} m(m-1) \delta \sigma_{m-2} \sigma_2 \quad (m > 2).$$

Tenendo conto delle (12), la (8) diventa

$$(14) \quad \delta \varphi(z) = - \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \right] \delta \sigma_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \delta \sigma_2.$$

Questa mostra che φ è certamente funzione di σ_1 e σ_2 , ma non prova per nulla che φ debba *necessariamente* esser funzione anco di σ_3 , σ_4 , $\sigma_5 \dots$, come il Sig. Story assume *arbitrariamente*. Delle σ_m , intanto, solo *due* sono indipendenti, σ_1 e σ_2 , e tutte le altre ne dipendono, come mostra la (11), integrando la quale è appunto possibile (il che si vedrà altrimenti in modo più generale) ricavare, per ricorrenza, σ_3 , σ_4 , $\sigma_5 \dots$ in funzione di σ_1 e σ_2 .

Notiamo ancora che per il Sig. Story il numero delle σ_m contenute in $\varphi(z)$ sarebbe n , se da n in poi σ_m è riconosciuto in pratica trascurabile. Ma chi dice che il numero n esista? Questo dovrebbe essere un altro postulato della teoria, se le osservazioni e l'ordinaria teoria degli errori non provassero che σ_m (per m pari) è sempre finito e anzi, *in generale*, diverge per valori crescenti di m .

Noi ammetteremo senz' altro che $\varphi(z)$ contenga solamente σ_1 e σ_2 , che saranno appunto i suoi unici parametri essenziali. Possiamo allora scrivere

$$(15) \quad \delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} \delta \sigma_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_2} \delta \sigma_2,$$

e paragonando questa con la (14), deduciamo

$$(16) \quad \begin{cases} \sigma_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_2} = 0; \end{cases}$$

cioè la funzione cercata $\varphi = \varphi(z, \sigma_1, \sigma_2)$ dev' essere un integrale comune alle due equazioni (16).

Teniamo ora conto del Postulato II. Cambiando l' unità di misura degli errori, z si cambierà in cz , essendo c una costante, mentre σ_1 e σ_2 si cambiano evidentemente in $c\sigma_1, c^2\sigma_2$: e dovrà essere

$$\varphi(cz, c\sigma, c^2\sigma_2) d(cz) = \varphi(z, \sigma_1, \sigma_2) dz.$$

Supponendo in particolare $c = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}$ (è sempre $\sigma_2 > 0$) e ponendo

$$(17) \quad \frac{z}{\sqrt{\sigma_2}} = t, \quad \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2}} = \varrho;$$

potremo scrivere

$$(18) \quad \varphi(z, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \psi(t, \varrho).$$

Per mezzo delle (17), (18), le (16) si trasformano nelle seguenti

$$(19) \quad \begin{cases} \varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \psi = 0. \end{cases}$$

$$(20) \quad (1 - t\varrho) \frac{\partial \psi}{\partial t} + (1 - \varrho^2) \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \varrho \psi,$$

della quale l'integrale generale è

$$(21) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho^2}} F\left(\frac{t - \varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}}\right),$$

dove F è simbolo di funzione arbitraria e dove si è supposto $|\varrho| < 1$, condizione che in pratica si potrà ritenere verificata.

Ponendo

$$(22) \quad u = \frac{t - \varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}}$$

e introducendo la (21) in una qualunque delle (19), si trova che $F(u)$ deve soddisfare all' equazione ordinaria lineare e omogenea

$$(23) \quad F''(u) + uF'(u) + F(u) = 0.$$

Questa ammette la soluzione particolare $e^{-\frac{u^2}{2}}$, la cui conoscenza per-

mette, come si sa, di abbassare l'ordine della (23) e quindi di trovare l'integrale generale, che è

$$(24) \quad F(u) = \left[C_1 + C_2 \int_0^u e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] e^{-\frac{u^2}{2}},$$

essendo C_1 e C_2 le due costanti arbitrarie.

Per conseguenza la (21) diventa

$$(25) \quad \psi = \left[C_1 + C_2 \int_0^{\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\frac{u^2}{2}}}}$$

e quindi abbiamo ancora, per la (18),

$$(26) \quad \varphi = \left[C_1 + h\sqrt{2} C_2 \int_{\sigma_1}^z e^{h^2(z - \sigma_1)^2} dz \right] h\sqrt{2} e^{-h^2(z - \sigma_1)^2},$$

dove è

$$(27) \quad h = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma_2 - \sigma_1^2)}}.$$

Notiamo che è sempre da ritenere in pratica

$$(28) \quad \sigma_2 > \sigma_1^2,$$

e che nelle (27) intendiamo presa la determinazione positiva del radicale, sicchè sarà

$$(29) \quad h > 0.$$

La frequenza relativa dell' error $z = \sigma_1$, il quale errore è in ogni caso un errore possibile (nell' ordinaria teoria è $\sigma_1 = 0$), è, secondo la (26),

$$C_1 h \sqrt{2},$$

e quindi sarà sempre da supporre

$$(30) \quad C_1 > 0.$$

4. Bisognerà ora che sia possibile determinare le costanti assolute C_1 e C_2 per tutti i casi, giacchè per ipotesi la φ non deve contenere che i due soli parametri σ_1 e σ_2 , determinabili sperimentalmente in ogni sistema concreto di osservazioni. Inoltre la nostra φ dovrà soddisfare alla condizione (3) e a tutte le altre enunciate nel Postulato I, senza di che il procedimento adoperato per trovarla non avrebbe valore. Questa determinazione delle costanti C_1 e C_2 si può effettivamente fare per tutti i casi, osservando che la φ , data da (26), è finita per ogni valore finito di z e si annulla per $z = \pm \infty$.¹⁾ Assumeremo allora

$$(31) \quad -\alpha = -\infty, \quad \beta = +\infty;$$

1) Essa, poi, ha un solo zero al finito. Infatti, il fattore

$$C_1 + h\sqrt{2} C_2 \int_{\sigma_1}^z e^{h^2(z - \sigma_1)^2}$$

vale a dire che l'errore potrà prendere tutti i valori possibili. Questa ipotesi, apparentemente paradossale, si giustifica, come nell'ordinaria teoria, col fatto che la φ , fuori d'un certo intervallo finito per z , assumerà valori piccolissimi, praticamente nulli.

Importa, poi, notare che nell'ipotesi (31), la condizione 3) del Postulato I è rigorosamente soddisfatta.

Per quel che riguarda la relazione (3), osserviamo che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_0^u e^{\frac{u^2}{2}} du$$

non ha senso, perchè per valori divergenti di u la funzione $e^{-\frac{u^2}{2}} \int_0^u e^{\frac{u^2}{2}} du$

è paragonabile a $\frac{1}{u}$: è dunque necessario porre

$$(32) \quad C_2 = 0;$$

e conseguentemente si trova subito

$$(33) \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

E la (26) diventa semplicemente

$$(34) \quad \varphi = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(z-\sigma_1)^2} \quad \left(h = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma_2 - \sigma_1^2)}} \right);$$

che è la legge di frequenza degli errori, verificante rigorosamente ai postulati ammessi I e II.

5. Facilmente si vede poi che le relazioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z \varphi(z) dz = \sigma_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \varphi(z) dz = \sigma_2$$

sono identicamente verificate dalla (34).

che entra in φ , è una funzione monotona di z : sempre crescente, se, per fare un'ipotesi, è anco $C_2 > 0$, nel qual caso la funzione si annulla una sola volta per un certo $z_1 < \sigma_1$. Questo valore potrebbe esser considerato come un limite inferiore per i valori dell'error z , inquantochè per ogni valore $z < z_1$, la φ diventerebbe negativa. Ma questa via porterebbe al fatto poco concepibile che gli errori cadano in un intervallo un cui estremo è necessariamente finito mentre l'altro può essere infinito; nè essa condurrebbe, come è facile persuadersi, alla determinazione delle costanti C_1 e C_2 per tutti i casi.

Peraltro, che C_2 debba esser nulla, si può vedere in quest'altro modo. Tra i sistemi d'osservazioni possibili ve ne sarà certamente qualcuno (anzi è il caso più frequente!) per il quale risulti $\sigma_1 = 0$ e $\alpha = \beta$ (intervallo simmetrico rispetto allo 0);

ma, in tal caso, affinchè la (26) sodisfaccia alla condizione $\int_{-\alpha}^{\alpha} x \varphi(x) dx = 0$, occorre,

e basta, che sia $C_2 = 0$; e poichè C_2 è costante assoluta, sarà 0 sempre.

In generale si trova

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{2m} = \sigma_1^{2m} + \sum_{p=1}^{p=m} 1. 3. 5. \dots (2p-1) \binom{2m}{2p} \sigma_1^{2m-2p} (\sigma_2 - \sigma_1^2)^p, \\ \sigma_{2m+1} = \sigma_1^{2m+1} + \sum_{p=1}^{p=m} 1. 3. 5. \dots (2p-1) \binom{2m}{2p} \sigma_1^{2m+1-2p} (\sigma_2 - \sigma_1^2)^p; \end{array} \right.$$

ed è facile verificare che le (35) danno per tutti i valori di m gl'integrali della (13), il cui 2° membro è sempre un differenziale esatto.

6. Quanto alla legge di frequenza relativa alla causa virtuale d'errore (n° 1), noi potremo anco supporre

$$f(y) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(y-\varepsilon_1)^2} \left(k = \frac{1}{\sqrt{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2)}} \right),$$

e purchè $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ si suppongano convenientemente piccoli, le (1), (2) potranno esser verificate con tutta quell' approssimazione che si vuole.

Supposto, p. es.,

$$\varepsilon_1 = 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 3.125 \times 10^{-4}, \quad (k = 40), \quad a = b = 0.1,$$

allora segue

$$\int_{-a}^b f(y) dy = 1 - 1548 \times 10^{-11}, \quad \int_{-a}^b y f(y) dy = \varepsilon_1 - 4 \times 10^{-11},$$

$$\int_{-a}^b y^2 f(y) dy = \varepsilon_2 - 16 \times 10^{-11},$$

mentre ε_m , per $m \geq 3$, è piccolissimo di fronte a ε_1 e ε_2 .

Ma nulla c'impedisce di supporre anco qui che l'errore y possa teoricamente variare tra $-\infty$ e $+\infty$, dal momento che nell'esempio numerico recato, la $f(y)$ assume valori assolutamente trascurabili fuori dell'intervallo $(-0.1, 0.1)$. In tal caso, abbiamo *rigorosamente*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \varepsilon_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy = \varepsilon_2.$$

Quanto a ε_m , per $m \geq 3$, notiamo che $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ si possono pensare arbitrariamente piccoli (con $\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2$), senza che le precedenti relazioni cessino di sussistere. In altri termini, pensata una causa virtuale cui corrispondono i due parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, ne potremo pensare un'altra cui corrispondano parametri più piccoli dei precedenti; cioè potremo pensare che $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ percorrano delle successioni convergenti a zero. In tal caso ε_m

per $m \geq 3$, è un infinitesimo d'ordine superiore ai due infinitesimi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, come si vede dalle relazioni rigorose

$$\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1^3, \quad \varepsilon_4 = -2\varepsilon_1^4 + 3\varepsilon_2^2, \dots$$

In questo senso la deduzione della (34) si può dire abbastanza rigorosa.

7. Infine è da osservare che la curva di probabilità, corrispondente alla (34), non è che la solita quando si sottoponga a una traslazione parallelamente all' asse z e di valore σ_1 .

Se u_1, u_2, \dots, u_n sono i risultati sperimentali della misura d'una data grandezza, il valore di questa cui corrisponde la massima frequenza, secondo la legge (34), è

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{n} + \sigma_1.$$

I punti di flesso della curva (34), anzichè per $z = \pm \sqrt{\sigma_2}$ (come avviene nell' ordinaria teoria), si hanno per

$$z = \sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1^2}.$$

Ec. ec.

È da pensare, però, che l'asimmetria della curva (rispetto all' asse perpendicolare a z nel punto $z = 0$) non indicherebbe altro che il persistere di qualche causa *sistematica* d'errore. Se gli errori son da considerare come affatto accidentali, è allora da supporre $\sigma_1 = 0$ e φ funzione pari dell' error z . In questa ipotesi, il procedimento per dedurre la φ resta semplificato d'assai, e, si trova, come sarebbe facile vedere direttamente,

$$(36) \quad \varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}},$$

ossia quel che diventa la (32) quando vi si ponga $\sigma_1 = 0$.¹⁾

Allora le (35) diventano

$$(37) \quad \sigma_{2m} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m - 1) \sigma_2^m, \quad \sigma_{2m+1} = 0,$$

com' è noto.

Palermo, marzo 1912.

1) Questo caso particolare — tanto utile nella pratica — non rientra nella teoria del Sig. Story se non supponendo $\sigma_m = 0$, per $m > 2$; ipotesi in generale assurda e non verificata nella pratica se non quando gli errori sieno compresi in un piccolissimo intervallo.

Zur Dynamik des Kurbelgetriebes.

Von Dr.-Ing. A. PRÖLL in Danzig-Langfuhr.

Die in der Technik vielfach getroffene Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeit der Kurbel eines gewöhnlichen Dampf- oder Gasmaschinengetriebes während des sogenannten Beharrungszustandes entspricht bekanntlich nicht der Wirklichkeit. Schon der fast immer eingeführte „Ungleichförmigkeitsgrad“, der für eine Maschine einen mittleren Verhältniswert der Schwankungen in der Drehzahl angibt, widerspricht dieser Auffassung, die auch tatsächlich nur für manche Berechnungen als mehr oder weniger genügende Annäherung zur wesentlichen Vereinfachung der Beziehungen eingeführt wird. Bei vielen dynamischen Rechnungen ist aber eine solche Annäherung unstatthaft, und man muß mit dem genauen Wert der augenblicklichen Drehzahl sowie mit der tangentialen Beschleunigung des Kurbelzapfens für jede Winkelstellung desselben rechnen.

Ein allgemeines und sehr elegantes graphisches Verfahren zur Ermittlung des in jedem Augenblick wirklich herrschenden Geschwindigkeitszustandes eines beliebigen Getriebes hat Prof. Wittenbauer angegeben und in mehreren Abhandlungen niedergelegt.¹⁾ Danach ist es bei Kenntnis der wirkenden Kräfte (der treibenden und der widerstehenden) sowie der Massenverteilung in den einzelnen Gliedern des Getriebes mit Hilfe besonderer Konstruktionen möglich, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kurbelzapfens (und auch der übrigen Gelenke) auf kinematischem Wege aufzufinden und etwa in einer Kurve niederzulegen. In einer weiteren Abhandlung²⁾ zeigt Wittenbauer, wie man die erhaltenen Resultate zu benützen hat, um eine genaue Berechnung aller im Getriebe vorkommenden Stabspannungen, Gelenkdrücke und Auflagerreaktionen durchzuführen.

Die Methoden sind nicht schwierig, auch allgemein anwendbar, jedoch erfordern sie einen nicht unerheblichen Zeitaufwand. Denn für die erste Aufgabe (Ermittlung der Kurbelgeschwindigkeit) muß die auf die

1) F. Wittenbauer: Graphische Dynamik (Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 50). Die graph. Ermittlung des Schwungradgewichtes (Zeitschr. des Vereins deutscher Ing. 1905).

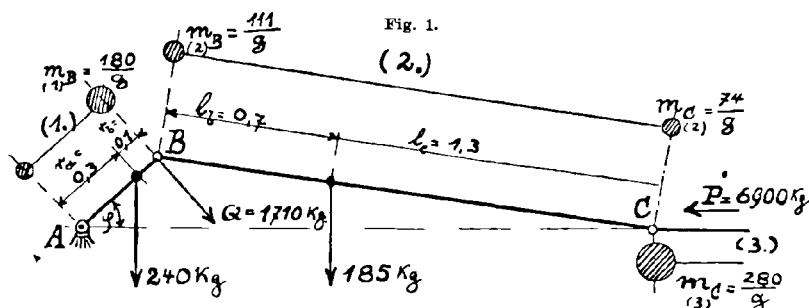
2) F. Wittenbauer: Dynamische Kraftpläne des Kurbelgetriebes (Zeitschr. des Vereins deutscher Ing. 1906) siehe auch Dynamische Kraftpläne (Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 53, 1906, S. 274).

Kurbelwarze reduzierte Masse des Getriebes in besonderer Weise (durch die von Wittenbauer eingeführten „Ersatzmassen“ der Glieder) ermittelt, ebenso die Kraftreduktion durchgeführt werden und sodann nach Konstruktion eines Arbeits- (Energie-) Diagramms das „Massengewicht-Energie“-Diagramm aufgestellt werden; dieses letztere gestattet dann allerdings rasch und in einfacher Weise die punktweise Bestimmung der Kurbelumfangsgeschwindigkeit. Nun erst ist es möglich, der zweiten Aufgabe näher zu treten und aus den gefundenen Geschwindigkeiten die Beschleunigungen (ebenfalls graphisch durch Tangentenmethoden) abzuleiten und daraufhin die Beschleunigungsdrücke zu bestimmen, welche man zur Aufstellung des Kräfteplanes braucht. Auch hierzu ist eine Massenverteilung der Glieder des Getriebes erforderlich, die aber von anderer Art ist, als die vorhin erwähnte Methode der Ersatzmassen.

Führt man nun eine solche Aufgabe tatsächlich durch, so wird man in den meisten Fällen finden, daß der schließliche dynamische Kraftplan nicht genau stimmt, d. h. es läßt sich nicht immer ein vollständiger Schluß der Polygone zu Wege bringen, wie dies doch für dynamisches Gleichgewicht erforderlich wäre. Es hat dies seinen Grund darin, daß kleine Fehler bei der Ermittlung der Geschwindigkeiten und besonders der Beschleunigungen fast unvermeidlich sind. Da aber treibende Kraft und Widerstand zusammen mit den vorhandenen Massen den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des Getriebes bestimmen, so muß ein Fehler in dessen Ermittlung notwendigerweise den Kräfteplan stören. Ist der Fehler nicht zu groß, so ist es leicht, durch nachträgliche Korrektur an den Beschleunigungskräften das Gleichgewicht herzustellen. Es kommt dies also auf eine Richtigstellung, bezw. Nachprüfung der Beschleunigung hinaus, und auf diesem Umstand beruht das nachfolgende Verfahren zur direkten Aufstellung des dynamischen Kraftplanes eines Kurbelgetriebes, ohne vorhergehende besondere Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes. Das Verfahren führt infolgedessen erheblich rascher zum Ziele und liefert gewissermaßen als Nebenprodukt die Beschleunigung des Kurbelzapfens. Es soll sogleich an einem Beispiel gezeigt werden.

Gegeben ist das Getriebe einer einzylindrigen Dampfmaschine von 40 cm Zylinderdurchmesser (Kolbenfläche 1256 cm²) und 80 cm Hub. Fig. 1 zeigt die Hauptabmessungen des Getriebes, sowie die Lage der Schwerpunkte von Kurbel und Pleuelstange und deren Gewichte samt dem Gewicht der hin und hergehenden Teile der Maschine. In Fig. 2 ist ein Indikator-Überdruckdiagramm angegeben, das zu dieser Maschine gehört, und es sei für eine bestimmte Stellung der Kurbel (Kurbelwinkel φ z. B. = 45°) und die entsprechende Abszisse im Indikator-

diagramm der Kräfteplan zu konstruieren. Dabei ist angenommen, daß das zu überwindende Drehmoment an der Kurbelwelle konstant sei. Aus dem Indikatordiagramm ermittelt man den mittleren Druck $p_i = 2,14 \text{ kg/cm}^2$, dem eine Kolbenarbeit pro Hub von 2150 kgm entspricht.



Daraus folgt also ein mittlerer (konstanter) Tangentialwiderstand, der zu überwinden ist, von

$$Q = \frac{2 \cdot 2150}{2 r \pi} = \frac{4300}{0,8 \pi} = 1710 \text{ kg.}$$

Zu der Kraft Q kann zweckmäßigerweise auch gleich der Anteil der Gewichte von Kurbel und Pleuelstange hinzugerechnet werden. Man findet dafür¹⁾ in der gezeichneten Stellung $Q' = 210 \text{ kg}$ im gleichen Sinne wie Q wirkend, so daß insgesamt

$$Q + Q' = 1920 \text{ kg}$$

in Richtung von Q einzuführen sind.

In der betrachteten Stellung ist der Überdruck 5,5 atm, daher beträgt der Kolbendruck

$$P = 5,5 \cdot 1256 = 6900 \text{ kg.}$$

Wir nehmen eine mittlere Umdrehungszahl von

$$n = 120 \text{ Uml./min. } (\omega = 12,6)$$

als gegeben an und gehen nun so vor, daß wir für die erste Annäherung diese Geschwindigkeit zugrunde legen und nur die Kolbenbeschleunigung

1) Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen findet man leicht

$$Q' = \left(G_K \frac{r_a}{r} + G \frac{l_B}{l} \right) \cos \varphi = (g m_B) \cos \varphi$$

(siehe Bezeichnung in Fig. 1), also hier $Q' = 291 \cos 45^\circ \sim 210 \text{ kg}$. Diese für horizontale Maschinen geltende Beziehung wird auch durch die Konstruktion bestätigt.

sowie die Normalbeschleunigung des Kurbelzapfens berücksichtigen. Die letztere beträgt

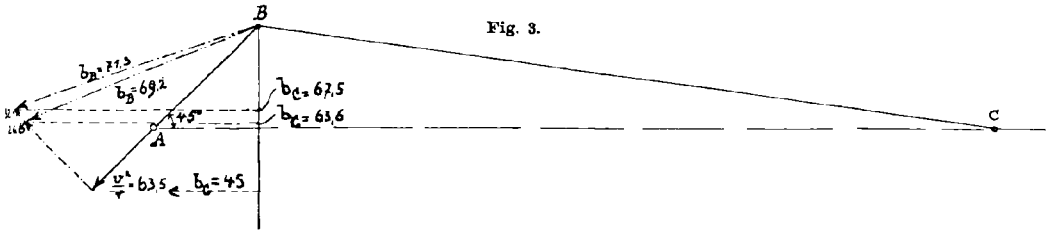
$$\frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 63,5 \text{ m/sek}^2.$$

Wir zeichnen sie in der Richtung der Kurbel ein (Fig. 3) und erhalten in der Horizontalprojektion gleichzeitig einen angenäherten Wert der Kolbenbeschleunigung b_c unter vorläufiger Vernachlässigung des Fehlergliedes der Pleuelstange. Es ist

$$b_c = 45 \text{ m/sek}^2.$$

Mit diesem Werte der Kolbenbeschleunigung erhält man für die Trägheitskraft der hin und hergehenden Massen

$$T_c = -b_c m_c = -45 \cdot \left(\frac{354}{g}\right) = -1625 \text{ kg.}^1)$$



Die Masse m_c setzt sich dabei nach Fig. 1 zusammen aus den Massen von Kreuzkopf, Kolben und Kolbenstange ($m_c = \frac{280}{g}$) und dem nach dem Schwerpunktsatz²⁾ in C vereinigt gedachten Teil der Pleuelstange

$$m_c = \frac{185 \cdot 0,7}{g \cdot 2,0} = \frac{74}{g}.$$

An dem Kurbelzapfen dagegen haben wir als rein rotierende Masse anzunehmen:

$$m_{B1} = \frac{240 \cdot 0,3}{g \cdot 0,4} = \frac{180}{g}, \text{ von der Kurbel herrührend, und}$$

$$m_{B2} = \frac{185 \cdot 1,3}{g \cdot 2,0} = \frac{111}{g} \text{ von der Pleuelstange herrührend, zusammen also}$$

$$m_B = \frac{291}{g}.$$

1) Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Trägheitskraft der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet ist. Die Richtung wird nachher in den Kräfteplänen berücksichtigt.

2) Daß man für die Beschleunigungsdrücke die Massen der Glieder eines Getriebes nach dem Hebelgesetz auf die Gelenke verteilen kann, zeigte Wittenbauer in den oben (unter 2) genannten Schriften und vorher schon Lorenz in seiner Techn. Mechanik starrer Systeme (Seite 341).

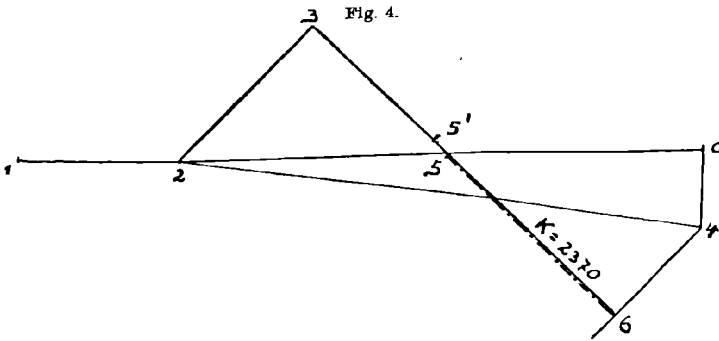
Auf diese wirkt zunächst nur die Zentrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$, so daß die Trägheitskraft (in der Kurbelrichtung)

$$T_B = -\omega^2 r m_B = -1880 \text{ kg}$$

beträgt. Mit diesen ersten Annahmen, sowie mit den Kräften P und $(Q + Q')$ zeichnen wir nun den ersten Kräfteplan (Fig. 4) in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \overline{01} &= P = 6900 \text{ kg}, & \overline{24} &\text{ parallel zur Pleuelstange} \\ \overline{12} &= T_c = 1625 \text{ kg}, & \overline{04} &\perp 01. \end{aligned}$$

Dann gibt $\overline{24}$ die Größe der Stangenkraft in der Pleuelstange, $\overline{04}$ den Normaldruck auf die Gleitbahn in C . Für das Gleichgewicht des



Knotenpunktes B folgt der Linienzug $4235'5$, worin $\overline{42}$ die eben gefundene Stangenkraft darstellt, $23 \# T_B$, $\overline{35'} = Q$ und $\overline{5'5} = Q'$ ist. Da im Punkte B noch die Kraft in der Kurbel wirkt,

so zieht man $\overline{46}$ parallel zur Kurbelrichtung und erkennt nun, daß der Linienzug sich nicht schließt, weil das Stück $\overline{56}$ fehlt. Die Größe dieser Strecke stellt eine Kraft

$$K = 2370 \text{ kg}$$

dar; um diese müßte also der Widerstand $(Q + Q')$ größer sein, wenn Gleichgewicht bei der angenommenen gleichförmigen Bewegung des Kurbelzapfens herrschte. Da dies aber nicht der Fall ist, so stellt K in erster Annäherung die beschleunigende Tangentialkraft dar. Wir erhalten aus ihr nun leicht die Beschleunigung des Kurbelzapfens $\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$ durch die von Wittenbauer angestellte Überlegung¹⁾, daß K_r mit dieser Beschleunigung und den maßgebenden Abmessungen der Kurbel sowie des Schwungrades in folgender Weise zusammenhängt. Es ist nämlich

$$K = \frac{1}{g} \left(G \cdot \frac{k_g^2}{r^2} + G_k \cdot \frac{r_a r_b}{r^2} - \frac{k_k^2}{r^2} \right) \frac{dv}{dt},$$

1) Wittenbauer, graph. Kräftepläne a. a. O.; siehe auch Lorenz, Mechanik starrer Systeme (Seite 343).

wenn G_s und G_k die Gewichte von Schwungrad bezw. Kurbel, k_s und k_k die entsprechenden Trägheitsradien bedeuten, während r_a und r_b die Schwerpunktabstände der Kurbel sind. In unserem Falle hat das Schwungrad der Maschine ein Trägheitsmoment

$$k_s^2 \cdot \frac{G_s}{g} = \frac{350 r^2}{g} \quad 1)$$

so daß mit den sonstigen Angaben (nach Fig. 1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{\left(\frac{350}{g} + 11,5\right)} = \frac{2370}{37} = 64 \text{ m/sek}^2$$

wird. Nun ist zu bedenken, daß dieser Wert jedenfalls viel zu hoch ist, da er sowohl die Kolbenbeschleunigung als auch die Totalbeschleunigung des Kurbelzapfens und damit die Trägheitskräfte T_c und T_B erheblich vergrößert, so daß bei einer neuen Zeichnung des Kraftplanes mit diesen Änderungen ein wesentlich kleineres K und damit auch $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ herauskäme.

Um die Korrekturrechnungen abzuklären, ist es daher zweckmäßig, gleich einen Mittelwert für die zweite Annäherung zu nehmen zwischen der bisherigen Annahme $r \frac{d\omega}{dt} = 0$ und $\frac{dv}{dt} = 64$; wir wählen also

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = 32 \text{ m/sek}^2$$

und zeichnen jetzt den Kräfteplan in zweiter Annäherung. Hier wird, wie man am besten zeichnerisch ermittelt (Fig. 3), die Gesamtbeschleunigung des Punktes B nun $b_B = 71,3 \text{ m/sek}^2$ (in anderer Richtung als vorhin), die Kolbenbeschleunigung b_C (Horizontalprojektion von b_B): $b_C = 67,5 \text{ m/sek}^2$.

Also wird

$$T_C = - \frac{354}{g} \cdot 67,5 = - 2440 \text{ kg,}$$

$$T_B = - \frac{291}{g} \cdot 71,3 = - 2110 \text{ kg.}$$

Der neue Kräfteplan Fig. 5 führt (mit denselben Bezeichnungen wie in Fig. 4) auf die neue Beschleunigungskraft

$$K = 780 \text{ kg,}$$

welche nach der Gleichung für K einer Tangentialbeschleunigung der Kurbel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{780}{37} = 21,1 \text{ m/sek}^2$$

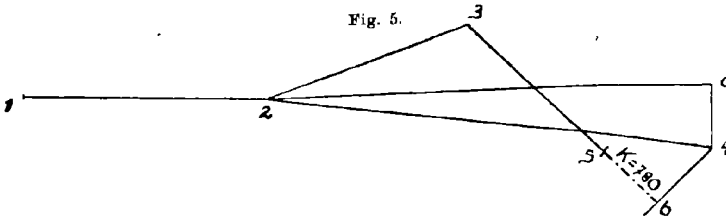
1) Das auf den Kurbelzapfen reduzierte Gewicht des Schwungrades beträgt 350 kg, weiter ist $r_a = 0,75 r$ $r_b = 0,25 r$ $k_k = 0,375 r$.

entspreche. Dieser Wert ist offenbar zu klein, wir wählen für die nächste (3. Annäherung) daher

$$\frac{dv}{dt} = \frac{32 + 21,1}{2} = 26,55 \text{ m/sek}^2$$

und zeichnen damit den dritten Kräfteplan. Da wir hier schon ziemlich richtige Verhältnisse getroffen haben werden, ermitteln wir insbesondere die Kolben-

beschleunigung genauer unter Hinzurechnung des Fehlergliedes $(\omega^2 \frac{r}{l} r \cos 2\varphi)^1$

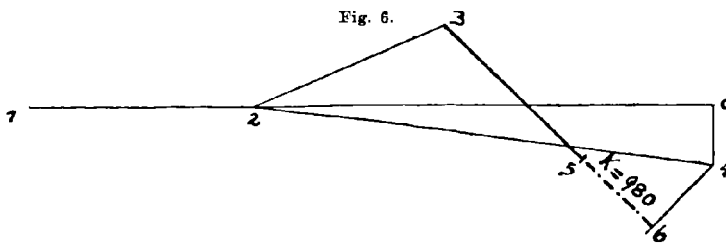


und finden der Reihe nach die folgenden Größen:

$$b_B = 69,2, \quad b_C = 63,6, \quad T_B = 2050 \text{ kg}, \quad T_C = 2295 \text{ kg},$$

Fig. 6 zeigt den dritten Kräfteplan, in dem nun folgende Kräfte auftreten:

$\overline{01} = P = 6900 \text{ kg}$, $\overline{12} = T_C = 2295 \text{ kg}$, $\overline{24} =$ achsiale Kraft in der Pleuelstange $= 4650 \text{ kg}$, Gleitbahndruck $D_C = \overline{40} = 625 \text{ kg}$, $\overline{23} = T_B = 2050 \text{ kg}$, $\overline{35} = Q + Q' = 1920 \text{ kg}$, $\overline{56} = K = 980 \text{ kg}$; $\overline{64} = 850 \text{ kg} =$ achsiale Kraft in der Kurbel.



Die nun erhaltene Größe von K entspricht einer Beschleunigung $\frac{dv}{dt} = 26,5 \text{ m/sek}^2$, also fast genau wie

angenommen wurde. Man hat also in dritter Annäherung der sehr rasch zu ermittelnden Kräftepläne brauchbare Ergebnisse erhalten und kann nun weitere Ergänzungen des Planes (Fig. 7) leicht durchführen. Insbesondere ergibt die Linie $\overline{45}$ die Größe und Richtung des Auflagerdruckes D_A in A , (aus dem Getriebe allein herrührend)

$$D_A = 1300 \text{ kg},$$

wozu freilich noch ein erheblicher vertikaler Zuschlag herrührend vom Gewicht von Schwungrad und Welle kommt. Auch durch etwaigen

1) Für die gewählte Stellung $\varphi = 45^\circ$ fällt dies Fehlerglied fort.

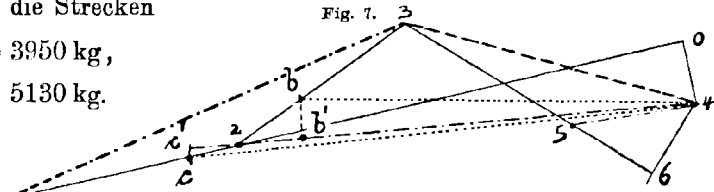
Riemenzug bedingte schiefe Auflagerdrücke wären für die Lagerdrücke in A zu berücksichtigen, doch gehören derartige Kräfte nicht eigentlich zu dem Getriebe und können immer gesondert eingeführt werden.¹⁾

Teilt man dann noch den Beschleunigungsdruck T_B in zwei Teile entsprechend den Massenanteilen der Kurbel ($m_B = \frac{180}{g}$) und der Stange ($m_B = \frac{111}{g}$) (Teilungspunkt b) und ebenso den Beschleunigungsdruck T_C nach der Pleuelstangenanteil ($m_C = \frac{74}{g}$) und Kolben usw. ($m_C = \frac{280}{g}$) mit dem Teilungspunkt c , so erhält man die Gelenkdrücke in B und C ohne weiteres durch die Strecken

$$\overline{4b} = G_B = 3950 \text{ kg,}$$

$$\overline{4c} = G_C = 5130 \text{ kg.}$$

Ebenso
findet man mit
Rücksicht auf 1



die veränderlichen achsialen Trägheitskräfte die Stabspannung in der Pleuelstange im Punkte B

$$S_B = \overline{4b'} = 3940 \text{ kg}$$

und im Punkte C

$$S_C = \overline{4c'} = 5100 \text{ kg,}$$

wenn b' und c' die Projektion von b und c auf die Richtung $\overline{24}$ sind.

Wegen der Begründung dieser Konstruktionen sei auf die angeführte Wittenbauersche Arbeit hingewiesen.

In zweierlei Hinsicht bedarf die angegebene Methode noch einer Berichtigung. Zunächst ist das von der Winkelbeschleunigung der Pleuelstange herrührende Moment vernachlässigt worden, weil es sehr klein ist. Man kann es aber in ganz ähnlicher Weise wie dies mit dem Kräftepaar Kr geschehen ist durch ein Kräftepaar $K_2 \cdot l$ einführen, für das sich mit analogen Bezeichnungen finden läßt:

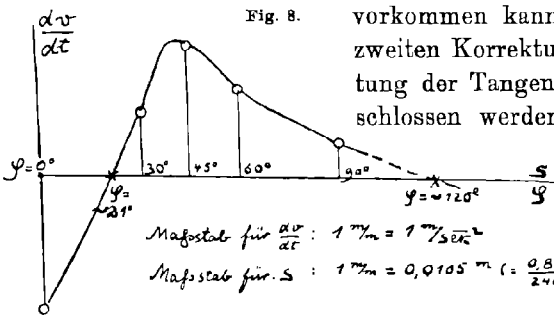
$$K_2 = m_2 \frac{l_b l_c}{l^2} \frac{K_3}{l} \varepsilon.$$

Hierin ist k_2 der Trägheitshalbmesser (um den Schwerpunkt) der Stange bezogen auf den Schwerpunkt, ε ihre Winkelbeschleunigung, die man

1) Es darf nicht übersehen werden, daß irgendwelche durch Riementrieb oder Zahnradübersetzung mit der Maschine zwangsläufig verbundene (rotierende) Massen ebenso wie das hier allein betrachtete Schwungrad (Dynamoanker usw.) bei der Berechnung von $\frac{dv}{dt}$ aus K zu berücksichtigen sind; es treten dann eben in der Gleichung für K noch neue Glieder in der Klammer hinzu.

leicht aus den beiden Totalbeschleunigungen b_B und b_C der Punkte B und C findet. Es läßt sich dieses Moment, bezw. die Kraft K_2 leicht hinterher noch dem Kräfteplan einfügen, was nur sehr geringfügige Änderungen nötig macht. In dem vorliegendem Beispiel ist $K_2 \sim 25$ kg, also zu vernachlässigen.

Größere Bedenken möchte dagegen ein anderer Umstand erregen. Wir haben von vornherein die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω_m der Konstruktion zugrunde gelegt. Aus der verhältnismäßig großen Tangentialbeschleunigung ersehen wir aber schon, daß bei diesem Beispiel stark wechselnde momentane Winkelgeschwindigkeiten auftreten werden, und es ist von vornherein nicht zu übersehen, ob nicht durch eine falsche Wahl von ω_m grundsätzlich falsche Resultate erzielt werden. Dem kann entgegen gehalten werden, daß in dem betrachteten Beispiel ein ganz besonders großer Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{1}{3}$ gewählt wurde¹⁾ (daher auch das leichte Schwungrad), und daß es in den meisten Fällen möglich ist, abzuschätzen, ob man sich im Bereich größter, kleinster oder mittlerer Umdrehungsgeschwindigkeit befindet, so daß nur ein Fehler bei der Wahl von ω im Betrage von $(\frac{\delta}{4} \omega)$ bis höchstens $(\frac{\delta}{2} \omega)$



unschwer eine in erster Annäherung brauchbare Kurve der Tangentialbeschleunigungen aufzeichnen können, aus der man die Lage der 0-Punkte (also der Geschwindigkeitsmaxima und -minima) sowie den ungefähren Verlauf der Geschwindigkeitskurve entnehmen kann. Eine solche Kurve ist z. B. in Fig. 8 gezeichnet worden, nachdem für die Stellungen $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ mit derselben mittleren Geschwindigkeit $n = 120$ t/min die Kräftepläne in der beschriebenen Weise (und zwar nur bis zur 2. Annäherung!) aufgestellt und danach die Beschleunigungen $\frac{dv}{dt}$ ermittelt wurden. So wenig genau infolgedessen diese Kurve sein kann, so läßt

1) Die Daten für das Beispiel sind dem bekannten Werke von Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, II. Auflage, entnommen.

sich aus ihr doch entnehmen, daß bei etwa $\varphi = 21^\circ$ ein Minimum, bei rd. $\varphi = 120^\circ$ ein Maximum der Geschwindigkeit liegen muß. Durch Planimetrieren zwischen $\varphi \sim 21^\circ$ und $\varphi \sim 120^\circ$ erhält man dann¹⁾ unter Berücksichtigung des Zeichnungsmaßstabes aus dieser Kurve

$$\frac{1}{2} (v_{120^\circ}^2 - v_{21^\circ}^2) \sim 8,5 \frac{\text{m}^2}{\text{sek}^2}$$

und daraus mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{120 \pi}{30} \cdot r = 5,04 \text{ m/sek}$ die extremen Geschwindigkeitswerte $v_{120^\circ} = 5,9 \text{ m/sek}$ und $v_{21^\circ} = 4,16 \text{ m/sek}$ in erster Annäherung, sowie auch die Geschwindigkeiten für Zwischenwerte. Es zeigt sich dabei, daß bei der betrachteten Stellung $\varphi = 45^\circ$ die angenommene mittlere Tourenzahl nahezu der wirklichen entspricht. Erforderlichenfalls kann danach eine Korrektur der Kräftepläne stattfinden, die im übrigen meist nicht allzugroße Änderungen zur Folge haben wird.

Das geschilderte Verfahren paßt sich hauptsächlich dem gewöhnlichen Kurbelgetriebe an, doch ist es seinem Grundgedanken nach auch für andere Getriebe anwendbar, bei denen die Aufstellung eines statischen Kräfteplans ohne große Schwierigkeit möglich ist. Freilich wird es bei verwickelten Getrieben lange nicht so rasch zum Ziele führen und bietet darum in dieser Beziehung kaum erhebliche Vorteile vor dem direkten und genauen Wittenbauerschen Verfahren.

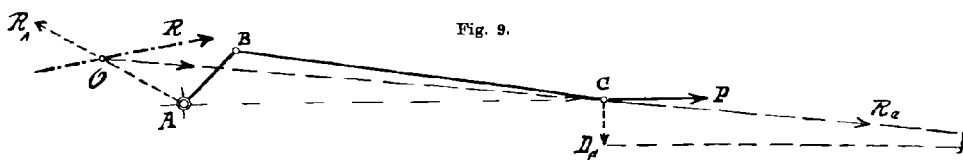
Schließlich möge noch einer weiteren Anwendung des dynamischen Kräfteplans (Fig. 7) gedacht werden. Untersucht man nämlich die vom Getriebe auf das Gestell der Maschine ausgeübten Kräfte, so sind diese (nach Fig. 9) in $C: R_C$ zusammengestellt aus dem Auflagerdruck D_C (nach unten) und dem Dampfdruck P auf den Zylinderdeckel (nach rechts); in A , der Auflagerdruck D_A und die vom äußeren Drehmoment (und Gewichtswirkung) herrührende Kraft $Q + Q' + K$, zusammen

1) Wegen der dem Kurbelweg s proportionalen Abszissen dieser Kurve folgt durch Integration (Planimetrierung) $\int_1^2 \frac{dv}{dt} ds = \int_1^2 v dv = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$. Man erhält also

den Zuwachs der Geschwindigkeitsquadrate zwischen 2 betrachteten Stellungen. Selbstverständlich könnte nun durch Einführung der gefundenen Geschwindigkeitswerte eine weitere Verbesserung der Kräftepläne wie der Kurve Fig. 8 erreicht werden, doch liegt dies nicht im Sinne des Verfahrens, das gerade einen kurzen Näherungsweg zur Ermittlung der Kräfte und der Beschleunigungen bieten soll. Handelt es sich um die Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes allein, so wird die Wittenbauersche Methode vorzuziehen sein. Es genügt das gekennzeichnete Verfahren aber vollständig zu einer oberflächlichen Schätzung der Geschwindigkeiten.

$R_A \neq \overline{43}$ in Fig. 7; die Resultierende R dieser Kräfte erscheint im Kräfteplan (Fig. 7) als die (strichpunktierte) Strecke $\overline{13}$, es ist die freie Massenkraft des Getriebes; ihr Angriffspunkt O kann aus Fig. 9 leicht gefunden werden.

Es bietet auch keine Schwierigkeit, aus dem Kräfteplan Fig. 7 die Bedingungen für einen (teilweisen) Ausgleich der bewegten Massen im Kurbelgetriebe abzuleiten und danach graphisch die Größe der erforderlichen Gegengewichte zu bestimmen. Man hat nur durch die



Wahl von m_B (mit Rücksicht auf das Gegengewicht an der Kurbel) die Kraft T_B so zu beeinflussen, daß die freie Massenkraft $\overline{13}$ eine gewünschte Richtung erhält. (Wenn z. B. $T_B = 0$ wird, fällt $\overline{13}$ mit $\overline{12}$ zusammen und man erreicht nur horizontale Massendrucke; ein noch größeres Gegengewicht gestattet T_B negativ zu machen, bis $\overline{13} \perp \overline{12}$ wird, dann hat man nur vertikale Massendrucke usw.).

Zusammenfassung.

Es wird ein Näherungsverfahren beschrieben zur graphischen Ermittlung der tangentialen Kurbelbeschleunigung bei einem gegebenen Kurbelgetriebe; im Zusammenhange damit wird der vollständige dynamische Kräfteplan im Anschluß an das Wittenbauersche Verfahren aufgestellt und an einem Beispiel erläutert.

Über eine Gesetzmäßigkeit der Planetenrotation.

Von H. NIES in Köln-Deutz.

Obgleich die Gesetze der Ortsveränderungen der Massen im Welt-raum seit Newton vollständig bekannt sind und nicht mehr grundsätzliche sondern nur noch rechnerische Schwierigkeiten machen, so bietet doch die Welt der Himmelskörper noch manches ungelöste Rätsel. Es sei nur hingewiesen auf die Erforschung der Ursachen jener Kraft, die zusammen mit der Gravitation die Kegelschnittbahnen der Himmelskörper bestimmt, und auf die theoretische Begründung der Rotation. Besonders die letzte hat die Aufmerksamkeit aller Forscher in höchstem

Maße erregt; dennoch sind wir heute nicht weiter als zu jenen Zeiten, da das Fernrohr zum ersten Male Kenntnis davon gab, daß die Achsendrehung nicht eine Eigenschaft der Erde allein, sondern aller Planeten — und man darf wohl sagen aller Himmelskörper — sei.

Ausgehend von der Überzeugung, daß eine solche allgemeine Eigenschaft nicht die Wirkung eines Zufalls sein könne, habe ich langjährige vergleichende Berechnungen angestellt und gefunden, daß man setzen kann¹⁾:

$$(1) \quad K = \frac{\left(\frac{M}{n}\right) \gamma^2 \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot a^3}{\left(\sqrt{2\pi \frac{R}{U}}\right) g^2}.$$

Hierin ist K eine Konstante, M die Masse, n die Dichte, δ die Achsenneigung, a die große Bahnachse, U die Rotationsdauer des Planeten in Zeitsekunden, g die Beschleunigung der Schwere an seiner Oberfläche und γ die Beschleunigung, welche die Einheit der anziehenden Masse der Einheit der angezogenen erteilt.

Die nachstehende Tabelle enthält die in die Formel (1) eingehenden Größen. Sie gibt auch die mit überraschender Genauigkeit übereinstimmenden Werte von K wieder.

	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Mond
M	1:408000	1:333470	1:3093500	1:1047,355	0,0124:333470
n	0,8853	1	0,7177	0,2353	0,62
a	0,72333	1	1,52369	5,20280	1
γ	1,913	1	0,4307	0,03694	1
$2R$	0,9746	1	0,5307	11,3367	0,273
g	0,862	1	0,3828	2,477	0,167
U	23 ^h 57 ^m 36 ^s ¼	23 ^h 56 ^m 4 ^s	24 ^h 37 ^m 22 ^s ,7	9 ^h 50 ^m	27 ^d ,32166
δ	14°	23°30'	25°	3°6'	3°30'
$\log K$	6,3343	6,3343	6,3362	6,3365	6,3389

Nur für den Planeten Saturn, der außer den obengenannten der einzige weitere Himmelskörper ist, für den die Rotations-elemente bekannt sind, ergab sich der abweichende Wert $\log K = 7,5287$. Ich führte dies in meiner Veröffentlichung in den Astronomischen Nachrichten auf die abweichende Form des Saturn zurück, da die Rotation der übrigen Himmelskörper nicht wie zu erwarten war der Masse, sondern, wie die Formel (1) zeigt, dem Volumen proportional ist. Beim Monde ergab sich die seltsame Tatsache, daß γ nicht auf die Erde sondern ebenfalls auf die Sonne zu beziehen war.

1) Vgl. meine Veröffentlichung in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 190, Nr. 4546, Januar 1912.

Die unentwickelte Formel (1), die ich nur beibehalten hatte, um für das Gesetz einen einfachen schriftlichen Ausdruck geben zu können¹⁾, war einer weiteren Untersuchung nicht förderlich. Es gelang mir jedoch, die Formel in entsprechender Vereinfachung durch einen neuen Faktor auch der Saturnrotation anzupassen, ohne irgendwie den andern Körpern Gewalt antun zu müssen. Die Tatsache, daß das Volumen für die Rotation der maßgebende Faktor sei, blieb bestehen und wurde noch durch die neue Tatsache, daß auch das Verhältnis Ringdurchmesser durch Äquatordurchmesser hierfür maßgebend ist, weiter verstärkt. Bezeichnet $M_{\bar{a}}$ einen dem Volumen proportionalen Faktor (vgl. a. a. O. meine dargelegte Überzeugung, daß dies die den Körper durchdringende Äthermenge sei), R den äquatorialen Halbmesser des Körpers, δ die Achsenneigung, M die Masse, a die große Bahnachse, U die Rotationsdauer in Zeitsekunden und $C = R:U$ die Rotationsgeschwindigkeit eines Punktes am Äquator, ferner R_1 den Halbmesser eines eventuellen Ringes (Saturn) und K eine Konstante, so kann man setzen:

$$(2) \quad K = \frac{(M_{\bar{a}})^2 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \delta}{M^2 \cdot a \cdot \sqrt{C}} \cdot \left(\frac{R}{R_1}\right)^3.$$

Hierbei ist R_1 als der Abstand des äußersten Planetenpunktes zu verstehen, der beim Saturn im Ringe liegt; und dementsprechend ist R_1 beim Fehlen eines Ringes nicht gleich Null, sondern gleich R zu setzen. Diese Festlegung braucht nicht im Widerspruche mit der von Hirn und Maxwell vertretenen und auch durch die spektrographischen Beobachtungen Keelers bestätigten Anschauungen über die Natur des Ringes zu stehen. Es handelt sich hier nicht um die Massen; und die Eigenbewegung der Ringteilchen braucht die Tatsache nicht auszuschließen, daß sie in bezug auf die Saturnrotation als Teile Saturns zu gelten haben. Für alle Körper außer Saturn ist mithin $R:R_1 = 1$, und für sie geht die Formel (2) über in

$$(3) \quad K = \frac{M_{\bar{a}} \cdot R \cdot \operatorname{tg} \delta}{M^2 \cdot a \sqrt{C}},$$

die man auch, um ihren überraschend symmetrischen Bau zu zeigen, in folgender Form schreiben kann:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{M^2 \cdot a \cdot \sqrt{C}}{M_{\bar{a}}^2 \cdot R \cdot \sqrt{K}}.$$

Die bei der Benutzung der Formel (2) erhaltenen Ergebnisse sind aus der nachstehenden Zusammenstellung ersichtlich. Sämtliche Werte, mit Ausnahme von δ und U wurden bei der Erde in der Einheit an-

1) Siehe a. a. O.

genommen; $M_{\bar{a}}$ wurde bei den Körpern ohne wesentliche Abplattung (Venus, Erde, Mars und Mond) proportional R^3 und bei Saturn und Jupiter proportional $R^3 \varepsilon$ gesetzt, wo ε den Abplattungsfaktor bedeutet. Sämtliche Werte wurden der neuesten Auflage des „Newcomb-Engelmann“ entnommen. Nur die Werte von δ und U bei der Venus entnahm ich beide dem Brennerschen Werke: „Spaziergänge durch das Himmelszelt“, da sie sonst nirgends angegeben waren.

	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Mond
$M_{\bar{a}}$ =	0,974 ³	1	0,531 ³	11,35 ³ · 0,94	9,24 ³ · 0,9	0,0201
M =	0,817	1	0,108	314,5	95,3	0,0124
R =	0,974	1	0,531	11,35	9,24	0,272
R_1 =	0,974	1	0,531	11,35	21,76	0,272
δ =	14°	23°30'	25°	3°6'	26°20' ¹⁾	3°30'
a =	0,72333	1	1,52369	5,2028	9,53884	1
U =	23 ^h 57'36 ^{1/3} ''	23 ^h 56'4''	24 ^h 37'22,7''	9 ^h 55'41''	10 ^h 14'	27 ^d 32166
ε =	1	1	1	0,94	0,9	1
$\log K$ =	2,1065	2,1059	2,1054	2,1025	2,1094	2,1099

Auch hier ist die Übereinstimmung eine so große, daß man kaum noch an einen Zufall glauben kann, und ich behaupte, daß sämtliche zu unserm Sonnensystem gehörenden Körper einem Rotationsgesetze gehorchen, dessen mathematischer Ausdruck in der Formel (2) enthalten ist. Eine ähnliche Beziehung wird auch zwischen den Satelliten und ihren Zentralkörpern bestehen; sie durch vergleichende Rechnungen festzustellen, ist jedoch unmöglich, da einzig und allein hierfür unser Mond in Frage käme. Sie wird erst aufzustellen sein, wenn die theoretische Begründung der Formel gegeben ist.

Die gefundenen Gleichungen, insbesondere die Formel (3), die für die Himmelskörper ohne Ring gilt, lassen sich jedoch schon jetzt in einfacher Weise deuten. Berücksichtigt man, daß $M : M_{\bar{a}} =$ Masse durch Volumen = n ist, wo n die Dichte bezeichnet, so geht die Formel (3) über in

$$K = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{R \cdot \operatorname{tg} \delta}{a \cdot \sqrt{C}}$$

oder in

$$K^2 \cdot C = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{R^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta}{a^2}$$

Nun ist $R \cdot \operatorname{tg} \delta$ der größte Wert, den man als Projektion von R auf der Rotationsachse erhalten kann, wenn man die Projektionsstrahlen parallel zur Bahnebene zieht. Bezeichnet man ihn als R' und nennt ihn

1) Newcomb-Engelmann gibt 27° an.

der Einfachheit halber „die maximale Projektion des Äquatorradius auf der Rotationsachse“, so ist

$$K^2 \cdot C = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{R^2}{a^2},$$

und das Rotationsgesetz lautet in Worten:

Die Rotationsgeschwindigkeit eines Äquatorpunktes ist direkt proportional dem Quadrate der maximalen Projektion des Äquatorradius auf der Rotationsachse und umgekehrt proportional dem Quadrate der großen Bahnachse und der vierten Potenz der Dichte des rotierenden Körpers.

Zu diesem Satze tritt für die Körper mit einem Ringe noch der Zusatz: *und direkt proportional der sechsten Potenz des Verhältnisses: Äquatordurchmesser durch Ringdurchmesser.*

Das Gesetz bestätigt mithin die bekannte Tatsache, daß mit der Abnahme der Körperdichte die Rotationsgeschwindigkeit zunimmt; es steht aber scheinbar mit der Tatsache in Widerspruch, daß die der Sonne am fernsten stehenden Planeten die kürzere Rotationsdauer besitzen. Freilich nur scheinbar, da R , a und δ in Wechselbeziehungen stehen, die nicht gleich zu überblicken sind, sondern ebenfalls erst durch die theoretische Begründung des Gesetzes in ihrer wahren Natur erkannt werden können.

Die theoretische Begründung der mitgeteilten Formeln zu finden, erscheint mir bei der Wichtigkeit, welche die Rotation für unsere Ansichten vom Bau des Weltalls und von der Entstehung der Planeten besitzt, als ein sehr erstrebenswertes Beginnen. Ich habe deshalb geglaubt, die Physiker und Mathematiker auf die oben niedergelegten Ergebnisse hinweisen zu sollen.

Ein Instrument zur graphischen harmonischen Analyse.

Von H. v. SANDEN in Göttingen.

Im Folgenden wird ein zeichnerisches Verfahren angegeben, das gestattet, in bequemer Weise einerseits Funktionen der Form:

$$y = a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x + \dots + a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

darzustellen, andererseits gegebene periodische Funktionen auf obige Form zu bringen, d. h. die „Fourier-Koeffizienten“ a_i und b_i zu bestimmen.

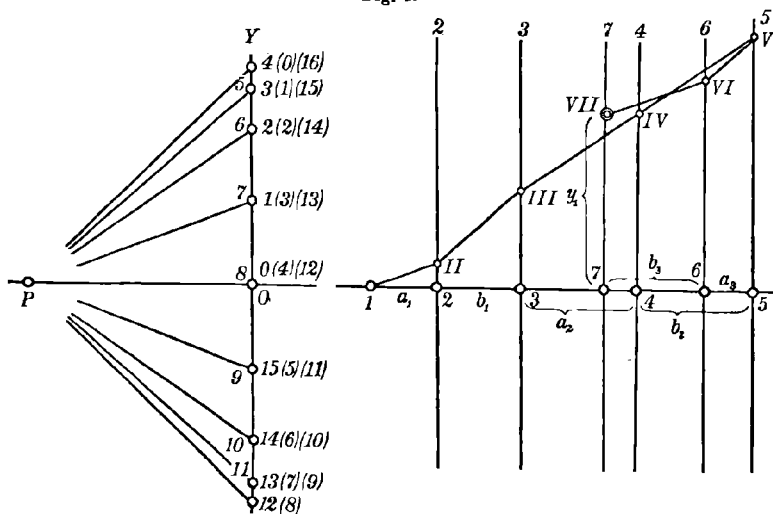
Im ersten Falle sind die $2n$ Koeffizienten a_1 bis a_n und b_1 bis b_n gegeben. Unter Annahme einer geeigneten Strecke als Längeneinheit tragen wir dieselben auf einer horizontalen Geraden *hintereinander* auf

und zwar nach rechts wenn sie positiv, nach links wenn sie negativ sind. Die Anfangs- und Endpunkte der Strecken seien durch fortlaufende Ziffern bezeichnet (s. Fig. 1).

In der Figur ist die Strecke $\overline{1\ 2} = a_1$; $\overline{2\ 3} = b_1$; $\overline{3\ 4} = a_2$; $\overline{4\ 5} = b_2$ usw. (In der Fig. 1 sind $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$; $a_3, b_3 < 0$ angenommen.) Durch die Punkte 1, 2, 3 usf. sind vertikale Geraden zu ziehen. Dies ist die *einzig*e Vorbereitung, die in praxi zu treffen ist.

Zur Erläuterung des Verfahrens vervollständigen wir die Zeichnung noch weiter.

Fig. 1.



Wir ziehen eine vertikale Gerade OY und tragen auf ihr, immer vom Punkte O aus, positiv nach oben, unter Annahme einer zweckmäßigen Längeneinheit, die Werte von $\sin x$ auf, und zwar für Werte von x , die Vielfache von $\frac{2\pi}{16}$ sind. (Man wird gleich sehen, daß die Teilung der Periode in gerade 16 Teile unwesentlich ist.) Die Endpunkte der so erhaltenen Strecken seien wieder durch Ziffern bezeichnet. Es ist also $\overline{0\ 1} = \sin 1 \cdot \frac{2\pi}{16}$; $\overline{0\ 2} = \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{16}$ usw. Die Punkte 1 und 7; 2 und 6; 3 und 5 usw. fallen zusammen. Die so erhaltenen Strecken $\overline{0\ 1}$, $\overline{0\ 2}$ usw. stellen natürlich auch die Werte der \cos der Vielfachen von $\frac{2\pi}{16}$ dar. Nur müssen die Endpunkte dann anders numeriert werden. Dies ist in Fig. 1 durch die eingeklammerten Zahlen geschehen.

Es ist also $\overline{0\ (1)} = \cos 1 \cdot \frac{2\pi}{16}$; $\overline{0\ (2)} = \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{16}$; $\overline{0\ (0)} = \cos 0 \cdot \frac{2\pi}{16}$ usw. Auf der horizontalen Geraden nehmen wir jetzt einen „Pol“ P an und

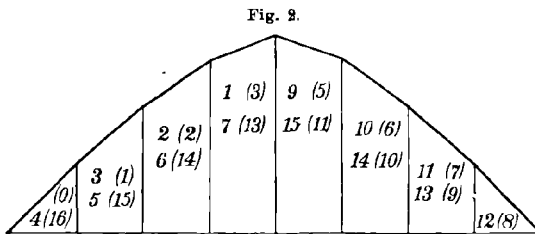
verbinden ihn mit den Punkten 1, 2, 3 usw. auf der Geraden OY . Dann sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel dieser Strahlen $\overline{P1}$, $\overline{P2}$... usw. mit der Horizontalen proportional den Sinussen bzw. Kosinussen der Vielfachen von $\frac{2\pi}{16}$.

Um den Wert der Funktion y für den Wert $x_1 = 1 \cdot \frac{2\pi}{16}$ zu finden, ziehe ich durch den Anfangspunkt 1 der Strecke $\overline{12} = a_1$ (auf der horizontalen Geraden) eine Parallele zu $\overline{P1}$. Sie schneidet die Vertikale im Endpunkte 2 von a_1 in einem Punkte II und es ist die Strecke $\overline{2II}$ gleich $a_1 \cdot \sin 1 \cdot \frac{2\pi}{16}$. Durch II wird jetzt II III parallel zum Strahle $\overline{P(1)}$ gezogen. III ist der Schnitt dieser Parallelen mit der Vertikalen durch 3 und es ist

$$\overline{3III} = a_1 \sin 1 \cdot \frac{2\pi}{16} + b_1 \cos 1 \cdot \frac{2\pi}{16}.$$

Durch III zieht man jetzt eine Parallele $\overline{III IV}$ zu $\overline{P2}$ usw.¹⁾

Die Ordinate des Schnittpunktes VII der letzten Parallelen mit der Vertikalen durch den Endpunkt der letzten Strecke b_n gibt dann den Wert von y für $x_1 = 1 \cdot \frac{2\pi}{16}$. Will man den Wert für $x_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{16}$



finden, so hat man Parallele zu $P2, P(2); P4, P(4)$ zu ziehen usw.

Um die technische Schwierigkeit des Ziehens der Parallelen zu den Strahlen durch P zu vermeiden, kann man sich

eines in Fig. 2 dargestellten „Richtungs-Lineals“ bedienen. Seine untere Kante ist gerade und wird an die Reißschiene angeschlagen, die einzelnen Linienstücke des oberen Randes stellen die Strahlen des Strahlbüschels durch P in Fig. 1 dar; darunter stehen die entsprechenden Ziffern. (Die eingeklammerten Zahlen sind rot aufgedruckt.)²⁾

Die ganze Arbeit ist also jetzt: Abtragen der Koeffizienten auf einer Horizontalen, Ziehen der Vertikalen durch die Endpunkte, Konstruktion des Zickzackweges für jeden Wert $x_\mu = \mu \cdot \frac{2\pi}{16}$ ($\mu = 0, 1, \dots, 16$),

1) Diese Methode um Summen von Produkten zu zeichnen ist vielfach gebräuchlich, vgl. J. Massau, Ann. de l'association des ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand (1) 2 (1877/78), p. 13, 203; Mém. sur l'intégration graphique, Bruxelles 1878.

2) Das Instrument ist bei Schröder in Darmstadt zu haben.

durch Ziehen von Geraden längs des Lineals unter Beachtung der richtigen Reihenfolge, Ablesung der Endordinate bzw. deren Übertragung in eine die Kurve darstellende Figur.

Soll die umgekehrte Aufgabe gelöst werden, d. h. die Bestimmung der Koeffizienten a_λ und b_λ , so ist das Verfahren genau das gleiche, nur daß statt der Koeffizienten a_λ und b_λ auf der Horizontalen die 16 an den Stellen $x_\mu = \mu \cdot \frac{2\pi}{16}$ ($\mu = 0 \dots 15$) gemessenen Ordinaten y_μ nacheinander unter Berücksichtigung der Vorzeichen aufgetragen werden:

Es ist

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot \sin \lambda x dx$$

und

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \lambda x dx.$$

Wir approximieren die Integrale durch die Summen:

$$a_\lambda = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\mu=0}^{15} y_\mu \cdot \sin \lambda \cdot \mu \cdot \frac{2\pi}{16}$$

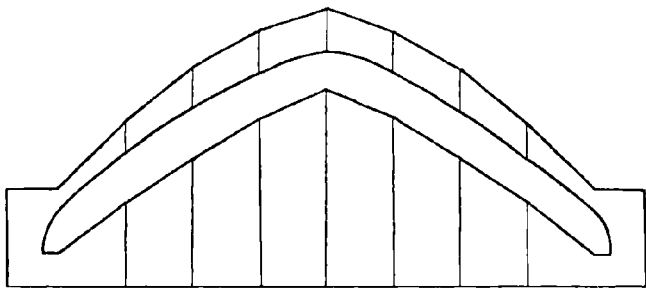
($\lambda = 0, 1, 2, \dots 7$)

$$b_\lambda = \frac{1}{8} \cdot \sum_{\mu=0}^{15} y_\mu \cdot \cos \lambda \cdot \mu \cdot \frac{2\pi}{16},$$

die sich nach unserem Verfahren in der Weise zeichnen lassen, daß jetzt auf der horizontalen Geraden die gegebenen Ordinaten y_μ nacheinander aufgetragen werden.

Dieser zweite Fall ist noch insofern einfacher, als man es nur mit Sinus- oder nur mit Kosinusgliedern zu tun hat.

Fig. 3.



Will man, je nach der gewünschten Genauigkeit, die Periode in mehr oder weniger Teile als 16 teilen (es empfiehlt sich natürlich, die Anzahl durch 4 teilbar zu machen), so hätte man andere Lineale zu benutzen. Für 32 Teile ist die in Fig. 3 angegebene Form vielleicht zweckmäßig, bei der die Strecken sozusagen in zwei Etagen angeordnet sind.

Kleinere Mitteilungen.

Über das Elastizitätsproblem einer dünnen Schale von Kugel-, Kegel- oder Ringflächenform.

Im folgenden will ich in aller Kürze über eine Untersuchung berichten, die andernorts¹⁾ eine ausführliche Darstellung finden wird. Sie löst das Elastizitätsproblem für eine dünne, von Parallelkreisen begrenzte (oder in sich geschlossene) axial symmetrisch belastete Schale, die die Form einer Kugel-, Kegel- oder Ringfläche hat. Maschinenteile von dieser Form kommen in der Technik häufig vor²⁾; auch fällt die Theorie des Kugelgewölbes unter dieses Problem.

Die Elastizitätstheorie dünner Schalen liefert für die allgemeine Drehungsfläche Differentialgleichungen vierter Ordnung; ich zeige, daß sie in solche zweiter Ordnung zerfallen, wenn die Meridiankrümmung $\frac{1}{R_1}$ konstant ist. Allerdings kann dabei ein Durchgang durchs Imaginäre nicht vermieden werden.

Der Kürze wegen muß ich für die Bezeichnung im einzelnen auf das Lehrbuch von Love³⁾ verweisen.

Die Schale habe zunächst die Form einer beliebigen Drehungsfläche, und es seien T_1 die resultierende Zugspannung, G_1 das Spannungsmoment, N_1 die Schubkraft für die Längeneinheit eines durch einen Parallelkreis gelegten Normalschnittes, $T_2, G_2, N_2 = 0$ dieselben Größen für einen Normalschnitt durch den Meridian; ferner X, Z die Belastungs-, u, w die Verschiebungskomponenten tangential und normal zum Meridian. Als Flächenparameter α werde der Winkel der Flächennormalen mit der Drehachse genommen. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen⁴⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\alpha} (T_1 R_2 \sin \alpha) - T_2 R_1 \cos \alpha - N_1 R_2 \sin \alpha + R_1 R_2 \sin \alpha X = 0 \\ \frac{d}{d\alpha} (N_1 R_2 \sin \alpha) + T_1 R_2 \sin \alpha + T_2 R_1 \sin \alpha + R_1 R_2 \sin \alpha Z = 0 \\ \frac{d}{d\alpha} (G_1 R_2 \sin \alpha) - G_2 R_1 \cos \alpha - N_1 R_1 R_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Setzt man $N_1 R_2 = V$, $F(\alpha) = \int R_1 R_2 \sin \alpha (X \sin \alpha + Z \cos \alpha) d\alpha + \text{Konstante}$, so ergeben die zwei ersten dieser Gleichungen:

$$T_1 = -\frac{1}{R_1} \cot \alpha \cdot V - \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha}, \quad T_2 = -\frac{1}{R_1} \frac{dV}{d\alpha} + \varphi(\alpha),$$

1) Physikalische Zeitschrift 1913.

2) Stodola, Dampfturbinen, 4. Aufl. Berlin 1910, S. 332, 597.

3) A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität, deutsch v. Timpe, Leipzig 1907, Kap. XXIV.

4) Ebenda Seite 612/613.

wo $\varphi(\alpha)$ und $F(\alpha)$ nur von der Belastung abhängen. Man kann jetzt die Hauptdehnungen, und damit auch die Verschiebungen u , w durch T_1 und T_2 , also schließlich durch V ausdrücken¹⁾ und erhält für die Größe

$$U^* = \frac{1}{R_1} \left[u + \frac{dw}{d\alpha} \right] = \kappa_2 R_2 \operatorname{tg} \alpha \text{ die Gleichung:}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{dV}{d\alpha} \right] - \left(\frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha - \sigma \right) V = a R_1 U^* + \Phi.$$

Hier ist a eine positive Plattenkonstante, und Φ hängt von der Belastung ab.

Andererseits können auch G_1 und G_2 durch U^* ausgedrückt werden²⁾, so daß die letzte der Gleichungen (1) übergeht in

$$(3) \quad \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{dU^*}{d\alpha} \right] - \left(\frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha + \sigma \right) U^* = -b R_1 V + \Psi.$$

Auch hier ist b eine positive Plattenkonstante, Ψ von der Belastung abhängig.³⁾

Das Elastizitätsproblem der Schale ist auf die Lösung der Gleichungen (2) und (3) zurückgeführt. In allen praktisch wichtigen Fällen können elementare Partikulärlösungen angegeben werden, so daß ich mich hier auf den homogenen Fall einer unbelasteten Schale ($\Phi = \Psi = 0$) beschränke. Führt man den linearen Operator

$$L(\) = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{d(\)}{d\alpha} \right] - \frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha \cdot (\)$$

ein, und setzt zur Normierung $U^* = i\lambda U$, ($i = \sqrt{-1}$), so kann die Konstante λ reell so bestimmt werden, daß (3) und (2) übergehen in:

$$(4) \quad L(U) - \sigma U = i\lambda R_1 V, \quad L(V) + \sigma V = i\lambda R_1 U,$$

und die Elimination gibt für U :

$$(5) \quad L\left(\frac{1}{R_1} L(U)\right) - \sigma L\left(\frac{U}{R_1}\right) + \frac{\sigma}{R_1} L(U) + (\lambda^2 R_1^2 - \sigma^2) \frac{U}{R_1} = 0.$$

Entsprechend für V .

Nimmt man R_1 nun als konstant an (Kugel, Torus, Kegell) und setzt die positive, reelle Konstante $\lambda^2 R_1^2 - \sigma^2 = \kappa^2$, so vereinfacht sich (5) zu

$$(6) \quad LL(U) + \kappa^2 U = 0.$$

Dies aber zerfällt in die zwei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(7) \quad L(U) + i\kappa U = 0, \quad L(U) - i\kappa U = 0,$$

denen übrigens auch V genügt, und die wesentlich identisch sind.

Für die Kugelschale ist $R_1 = R_2$, und (7) geht über in

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \cotg \alpha \cdot \frac{dU}{d\alpha} - (\cotg^2 \alpha + i\kappa) U = 0.$$

1) Love: a. a. O. Gleichung (36') auf S. 605, Gleichung (21) auf S. 594.

2) Ebenda, Gleichung (37') auf S. 606 und Gleichung (26) auf S. 597.

3) Für die Kugelschale sind die Gleichungen (2) und (3) schon aufgestellt worden von H. Reißner, Spannungen in Kugelschalen, Müller-Breslau-Festschrift 1912, S. 192.

Die Transformation $U = \sin \alpha \cdot Z$, $\sin^2 \alpha = x$, gibt für Z die *hypergeometrische Differentialgleichung*

$$x(1-x) \frac{d^2 Z}{dx^2} + \left(2 - \frac{5}{2}x\right) \frac{dZ}{dx} - \frac{1+i\kappa}{4} \cdot Z = 0,$$

so daß z. B. für eine im Scheitel geschlossene Kugelschale U und V durch den reellen und den imaginären Teil der hypergeometrischen Reihe

$$\sqrt{x} \cdot F(a, b, 2, x) = \sqrt{x} \left\{ 1 + \frac{a \cdot b}{1! 2!} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! 3!} x^2 + \dots \right\}$$

mit

$$a = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5 - 4i\kappa}), \quad b = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5 - 4i\kappa})$$

dargestellt werden. Im allgemeinen Falle treten logarithmische Glieder hinzu.

Für den Kegel vom halben Öffnungswinkel γ hat man

$$x = R_1 \left(\alpha + \gamma - \frac{\pi}{2} \right)$$

einzuführen, und den Grenzübergang zu $R_1 = \infty$ zu machen. Gleichung (7) wird:

$$x \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{dU}{dx} - \frac{U}{x} - i\lambda \cotg \gamma U = 0.$$

Das in $x = 0$ reguläre Integral ist durch die überall und rasch konvergente Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\xi^x}{(x-1)!(x+1)!} \quad (\xi = i\lambda \cotg \gamma \cdot x)$$

angegeben, die rein numerische Koeffizienten hat, und eine Tabulierung zuläßt.

Hat die Kugel oder der Kegel im Scheitel eine axiale Bohrung, so treten dort Randspannungen ($T_2 G_2$) auf, die mit unbegrenzt abnehmendem Bohrungsdurchmesser sich dem Doppelten der Werte nähern, welche im Scheitel der geschlossenen Schale unter sonst gleichen Umständen herrschen. Durch diesen Satz wird ein bekanntes Ergebnis aus der Theorie ebener Platten verallgemeinert.

Als Belastungen kommen praktisch in Betracht Massenkräfte von konstanter Größe und Richtung (Eigengewicht, Trägheitskräfte), Zentrifugalkräfte und konstanter Oberflächendruck. Unter den elementaren Lösungen, die man in allen diesen Fällen für Kugel und Kegel finden kann, ist die besonders bemerkenswert, welche den Fall einer geschlossenen, nirgends gehaltenen Kugelschale gibt, die sich um einen Durchmesser gleichförmig dreht.

Zürich.

ERNST MEISSNER.

Bücherschau.

C. V. L. Charlier. Studies in stellar statistics. I. Constitution of the Milky way, first memoir. 63 S. 4. Meddel. Lunds astronom. observat. Ser. II. Nr. 8. Lund 1912, H. Ohlsson.

Die Abhandlung ist entstanden aus Vorlesungen, die der Verf. im Herbst 1911 an der Universität Lund hielt. Sie bietet in vielfach neuer Form eine Einführung in die modernen Methoden der Stellarstatistik und bringt außerdem eine Anzahl originaler Untersuchungen. Es wird zunächst die einfache Fundamentalgleichung der Stellarstatistik abgeleitet, die allgemein für einen beliebigen Charakter (Helligkeit, Eigenbewegung, Spektraltypus, Distanz von Duplices) der Sterne gilt. Einige Spezialisierungen und Vereinfachungen führen unter Zugrundelegung bestimmter Hypothesen über den Verlauf der Sternecharaktere zu Seeligers Formeln und zu den von Schwarzschild mit Hilfe Fourierscher Integrale aufgestellten Relationen. Teils zur Erläuterung seiner Methoden, teils zu tieferem Eindringen in die Konstitution der Milchstraße zeigt Charlier dann an einem praktischen Beispiel, wie sich jetzt der Bau der Fixsternwelt genauer erforschen ließe. Zu dem Zwecke teilt er die Himmelssphäre in 48 flächengleiche Trapeze von je $860 \square^{\circ}$ ein, für die er einzeln alle zugänglichen Daten über Helligkeit, Eigenbewegung, Farbe, Spektrum gesammelt hat. Zu eingehenderem Studium greift er hier fürs erste zwei dieser Flächen heraus, eine in der Milchstraße, eine am Pol der Milchstraße. Nach einer interessanten Untersuchung über das gegenseitige Verhalten verschiedener Helligkeitskataloge und über die Größenklasse der schwächsten Sterne der Carte photographique du ciel kommt er zu dem Ergebnis, daß in dem Trapez am galaktischen Pol 600 000—2 000 000 Sterne enthalten sind, während in dem Raumkegel, der durch das Trapez am galaktischen Äquator bestimmt wird, mindestens 50mal mehr Sterne, 30 000 000—250 000 000, stehen.

Wie die Helligkeiten so müssen nun noch die Entfernungen der Sterne diskutiert werden. Als Anhalt dient dabei die Eigenbewegung, da das Material an direkt beobachteten Parallaxen auch nicht entfernt ausreicht. Als Einheit des Abstandes wählt Charlier die Sirinsweite (Siriometer), die er dahin festsetzt, daß sie 1 000 000mal größer sein soll, als die große Halbachse der Erdbahn; dem Siriometer entspricht demnach eine jährliche Parallaxe von $0''.206$. Es bleibt aber in diesen Untersuchungen noch eine große Unsicherheit zurück, und der mittlere Abstand der Sterne als Funktion der Größenklasse sowohl als auch die Dichtigkeit der Sternverteilung in verschiedenen Distanzen ergibt sich nur innerhalb weiter Grenzen. Die Grenze unseres Sternsystems läge danach in der Ebene der Milchstraße bei einer Entfernung von 600—1400 Siriometern. In ausführlichen übersichtlich angeordneten Tabellen teilt der Verf. am Schlusse die von ihm gesammelten numerischen Grundlagen seiner Studie mit. Sie sind als Material von großem Wert und können auch noch nach anderer Richtung oder in anderer Weise bearbeitet werden.

Die schönen Untersuchungen, die der Verf. in weiteren Heften fortzusetzen gedenkt, sind dem Direktor der Harvard-Sternwarte E. C. Pickering gewidmet, dem wir nächst W. Herschel das meiste und wertvollste Material für die Kenntnis des Baues des Fixsternhimmels verdanken.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

A. Jeremias. Das Alter der babylonischen Astronomie. 2. Aufl. Mit 15 Abbild. 92 S. 8. „Im Kampfe um den Alten Orient“ Nr. 3. Leipzig 1909, J. C. Hinrichs. *M* 1.60.

Das Büchlein ist mit Temperament geschrieben und erhebt auch ausdrücklich Anspruch darauf, eine Streitschrift zu sein, wie der Titel der Sammlung („Wehr- und Streitschriften“), in der es erschien, besagt. Der Verf. gehört zu den eifrigsten und heftigsten Verteidigern der Lehre vom Panbabylonismus, der „auf der These ruht, daß im alten Babylonien in astronomisch bestimmbareren historischen, bez. für uns prähistorischen Zeiten systematische Himmelsbeobachtungen gemacht worden sind, die sich auf andern Gebieten des Geisteslebens, insbesondere in der kosmisch-astralen Mythologie und in dem Stil der astral-mythologischen Geschichtslegende widerspiegeln, und deren geistiger Einfluß durch die antike Welt gewandert ist.“ Die Polemik Jeremias' richtet sich in erster Linie und immer wieder gegen den Astronomen und Assyriologen F. X. Kugler S. J.; dessen Nachweis, daß die Babylonier vor 700 a. C. eine wissenschaftliche Astronomie nicht besessen haben, ist der eigentliche Anlaß der hier vorliegenden Streitschrift gewesen. Ref. kann nicht auf die zahlreichen, komplizierten Fragen astronomischer, historisch-chronologischer, juridischer Natur näher eingehen; er möchte nur ohne Beweis seine Ansicht zu einigen Punkten erwähnen, mit denen er sich einmal beschäftigt hat. Das liegt hier um so näher, als auch Jeremias für wichtige Fragen trotz umfangreicher Darstellung einen Beweis nicht erbringt.

Wenn es bei Jeremias heißt: „Die Geisteskultur Babyloniens ruht auf der Himmelskunde“, so stimmt schon dieser Satz nicht; die ältesten Tontafelfunde enthalten überhaupt nichts Astronomisches. Von der Präzession wissen die Astronomen Babyloniens nichts; sie würden auch kaum Interesse an dieser Erscheinung genommen haben. Eine altbabylonische Astronomie existiert nicht. Um das Jahr 2000 a. C. herum kennen die babylonischen Astronomen die synodische Umlaufzeit der Venus nicht. Dabei ist Venus nächst Sonne und Mond das hellste Gestirn am Himmel und ausgezeichnet durch die regelmäßige, nur geringen Schwankungen unterworfenen Wiederkehr ihrer Erscheinungsphasen. Um die Zeit Hammurapis kann von einem geordneten Kalender noch gar nicht die Rede sein. Erst um 700 a. C. tauchen Beobachtungsreihen auf, die einen wissenschaftlichen Anschein haben, und erst in der hellenistischen Zeit, als der antike Erdkreis von griechischem Geist durchtränkt wird, beginnt ein rascher Aufschwung babylonischer Himmelskunde, der dann im zweiten vorchristlichen Jahrhundert zur Blüte führt.

Diese Anschauungen stehen in schroffem Gegensatz zu den von Jeremias vertretenen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Neue Bücher.

Analysis.

1. WEITBRECHT, WILH., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. I. Teil. Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. (Sammlung Göschen Nr. 302.) Leipzig u. Berlin 1912, Göschen. Geb. *M* —.90.
 2. ——— Dasselbe, II. Teil. Zahlenbeispiele. (Sammlung Göschen Nr. 641.) Berlin u. Leipzig 1913, Göschen. Geb. *M* —.90.
- S. auch 11, 12, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51.

Astronomie.

3. Enzyklopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. VI, 2. Astronomie. 5. Lfg. Leipzig 1912, Teubner. *M* 3.40.
 4. HARTMANN, O., Astronomische Erdkunde. 4., umgearb. Aufl. Stuttgart und Berlin 1912, Grub. Geb. *M* 1.20.
 5. KOPPE, M., Die Bahnen der beweglichen Gestirne i. J. 1913. Eine astronomische Tafel nebst Erklärung. Berlin 1913, Springer. *M* —.40.
 6. KRITZINGER, H. H., Die Errungenschaften der Astronomie, nach den Originalarbeiten der führenden Forscher dargestellt. („Erkenntnisbücherei“ Bd. 1.) Weimar 1912, Kiepenheuer. Geb. *M* 6.—; Geschenkausg. *M* 10.—.
 7. MARTUS, H. C. E., Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Große Ausgabe. 4. Aufl., mit vielen Zusätzen, bearb. nach dem Stande der Wissenschaft i. J. 1911. Dresden u. Leipzig 1912, Koch. *M* 12.50.
 8. WOLF, MAX, Stereoskopbilder vom Sternhimmel. I. Serie 4. Aufl. Leipzig 1913, Barth. In Halbleinw.-Mappe *M* 5.—.
- S. auch 37, 43, 46.

Darstellende Geometrie.

9. ROHN, KARL, und PAPPERITZ, ERWIN, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In drei Bänden. I. Bd. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. 4., erweiterte Aufl. Leipzig 1913, Veit & Comp. *M* 13.—; geb. in Leinw. *M* 14.—.
 10. WEISS, MAX, Die geschichtliche Entwicklung der Photogrammetrie und die Begründung ihrer Verwendbarkeit für Meß- und Konstruktionszwecke. Stuttgart 1913, Strecker & Schröder. *M* 12.—; geb. *M* 14.—.
- S. auch 45, 46, 49, 51.

Geschichte.

11. MIKAMI, YOSHIO, The development of Mathematics in China and Japan. (Abh. zur Geschichte der mathem. Wiss. Heft XXX.) Leipzig 1912, Teubner. *M* 18.—; geb. in Leinw. *M* 19.—.

12. ZEUTHEN, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. („Die Kultur der Gegenwart“, Teil III, Abteilung I, erste Lieferung.) Berlin u. Leipzig, 1912, Teubner. *M* 3.—.

S. auch 28, 43.

Mechanik.

13. ABRAMONSKY, E., Die aerodynamischen Linien der Insekten- und Vogelschwinger. Neue Beobachtungen für Motorflieger. (Erweit. Sonderdr. aus: „Der Luftverkehr“.) Leipzig 1913, v. Criegern. *M* —.60.
14. BURR, W. H., and FALK, M. S., The graphic method of influence lines for bridge and roof computations. 3rd ed. London 1913, Chapman & Hall. 12 s. 6 d.
15. BUSCH, HANS, Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik. Leipzig 1913, Hirzel. *M* 6.—, geb. *M* 7.—.
16. DUBBEL, HEINR., Die Steuerungen der Dampfmaschinen. Berlin 1913, Springer. Geb. in Leinw. *M* 10.—.
17. GUILLET, A., Propriétés cinématiques fondamentales des vibrations. Conférences faites en 1911 aux Candidats au certificat de physique générale. Notes de M. Aubert. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 16.—.
18. KÖGLER, Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe. Berlin 1913, Springer. *M* 2.—.
19. MILLER, ANDREAS, Gleichgewicht einer Gruppe schwimmender Vollkörper. Mit Figuren, Beispielen und Versuchen. München 1913, Kellerer. *M* 4.—.
20. WIESNER, SIEGBERT, Grundlinien der Kinematik. Wien 1913, Verlag für Fachliteratur. K. 1.—.

S. auch 25, 28, 34, 43, 46, 49.

Physik.

21. FLEMING, J.-A., Propagations des courants électriques dans les conducteurs téléphoniques et télégraphiques. Traduit par C. RAVUT. Paris, 1913, Gauthier-Villars. Fr. 12.—.
22. GÖRGES, H., Grundzüge der Elektrotechnik. Leipzig 1913, Engelmann. *M* 18.—; geb. in Leinw. *M* 19.20.
23. GOLDHAMMER, D. A., Dispersion und Absorption des Lichtes. (Mathem.-physikal. Schriften für Ingen. und Studierende, 16.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* 3.60; geb. in Leinw. *M* 4.—.
24. KÄHLER, KARL, Luftelektrizität. (Sammlung Göschen Nr. 649.) Geb. in Leinw. *M* —.90.
25. LAUE, M., Das Relativitätsprinzip. 2. verm. Aufl. („Die Wissenschaft“ Bd. 38). Leipzig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 8.—; geb. *M* 8.80.
26. LEICK, A., Physikalische Tabellen. (Sammlung Göschen Nr. 650.) Berlin und Leipzig 1913, Göschen. Geb. *M* —.90.
27. LINDER, CARL v., Physik und Technik auf dem Wege zum absoluten Nullpunkt der Temperatur. Festrede. München 1912, Franz. *M* —.60.
28. PLANCK, MAX, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. 3. Aufl. („Wissenschaft und Hypothese, VI.“) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 6 —.
29. — Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 2., teilweise umgearb. Aufl. Leipzig 1913, Barth. *M* 7.—; geb. *M* 7.80.
30. — Vorlesungen über Thermodynamik. 4. Aufl. Leipzig 1913, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 7.50.
31. RAYONNEMENT, La théorie du, et les quanta. Rapports et discussions de la Réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911, sous les auspices de E. Solvay, publiés par P. Langevin et M. de Broglie. Paris 1912, Gauthier-Villars. Fr. 15.—.

32. SENSEL, GUSTAV VON, Elektrizität und Optik, behandelt vom Standpunkte der Elektronentheorie. Wien u. Leipzig 1913, Hölder. *M* —.90.
33. VOGEL, EMIL, Über die Temperaturveränderung von Luft und Sauerstoff beim Strömen durch eine Drosselstelle bei 10° C und Drücken bis zu 150 Atmosph. Weimar 1912, Steinert. *M* 2.—.
34. WEINHOLD, ADOLF F., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentieren im Unterricht an höheren Schulen und techn. Lehranstalten. 5. verb. u. verm. Aufl. 3. Lfg. Leipzig 1913, Barth. *M* 11.—.
35. WOOD, R.-W., Optique physique. Ouvrage traduit de l'anglais d'après la deuxième édition par H. Vigneron et H. Labrouste. T. 1. Optique ondulatoire. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 16.—.
36. ZENNECK, J., Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie. 2., vollständig umgearb. u. verm. Aufl. des Leitfadens. Stuttgart 1913, Enke. *M* 15.—; geb. in Leinw. *M* 16.60.
S. auch 38, 43, 46, 49, 50.

Tafeln, Rechenapparate.

37. BREUSING's nautische Tafeln. Im Verein mit O. Fulst und H. Meldau neu zusammengestellt und hrag. v. C. Schilling. Mit 3 erdmagnet., vom Reichmarineamt zur Verfügung gestellten Karten. 10. Aufl. Leipzig 1913, Heinsius Nachf. Geb. in Leinw. *M* 9.—.
38. KÜSTER, F. W., Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. 13., neu berechnete Aufl. Leipzig 1913, Veit & Co. Geb. in Leinw. *M* 2.80.
39. Opus palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln v. 10" zu 10". Hrsg. v. W. Jordan. 2. bericht. Aufl. Hannover 1913, Hahn. *M* 7.—.
40. TREVEN, KARL, Der Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers und des Präzisionschiebers. (Sonderabdruck aus dem Lehrbuch der Mathematik für höhere Gewerbeschulen, hrsg. von Wilhelm Rulf.) Wien und Leipzig 1913, Deuticke. *M* —.80.
41. ZIMMERMANN, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 7. Aufl. Ausg. B m. Anhang, enth. Quadrattaf. Berlin 1913, Ernst & Sohn. Geb. in Leinw. *M* 6.—.
S. auch 49.

Verschiedenes.

42. ARCHIMEDIS opera omnia, cum commentariis Eutocii, iterum ed. J. L. Heiberg. Vol. II. Lipsiae 1913, Teubner. *M* 7.40; geb. in Leinw. *M* 8.—.
43. ENESTRÖM, GUSTAF, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. 2. Lfg. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV, 2. Lfg.) Leipzig 1913, Teubner. *M* 10.—.
44. MEZGER, CHRISTIAN, Die Chemie als mathematisches Problem. Metz 1913, Scriba. *M* 3.—.
45. OTT, KARL, Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (Abh. üb. den math. Unterr. in Deutschland, IV 2.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 4.—.
46. PICARD, ÉMILE, Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen v. F. und L. Lindemann. („Wissenschaft und Hypothese“ XVI.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 6.—.
47. SAINTE, LAGUË, A., Notions de mathématiques. Avec préface de G. Koenigs. Paris 1913, Hermann & Fils. Fr. 7.—.
48. SALPETER, J., Einführung in die höhere Mathematik f. Naturforscher u. Ärzte. Jena 1913, Fischer. *M* 12.—; geb. *M* 13.—.

49. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen hrsg. von Felix Auerbach und Rudolf Rothe. Mit einem Bildnis Friedrich Kohlrauschs. 3. Jahrgang 1913. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.
Geb. in Leinw. *M* 6.—.
50. VOLTERRA, VITO, Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles. Leçons professées à la Faculté des sciences de Rome en 1910, publiées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 5.50.
51. VOSS, A. Über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentl. Sitzung der K. bayrischen Akademie der Wissenschaften. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. 2., sorgfältig durchgesehene und vermehrte Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 4.—.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ARCHIMEDIS opera omnia, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 42.
- BALL, L. DE, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig 1912, Engelmann.
M 20.—; geb. *M* 21.50.
- BRANDENBURG, H., Der große Fermatsche Satz und sein Beweis mit Hilfe der allgemeinen pythagoräischen Dreiecksgleichung. 2. Ausg. Leipzig 1913, Lorentz.
M — 60.
- CULLIS, C. E., Matrices and Determinoids. (Readership lectures, University of Calcutta.) Vol. I. Cambridge 1913, University Press. 21 s.
- DEMARTRES, G., Cours de géométrie infinitésimale. Avec une préface de P. Appel. Paris 1913, Gauthier-Villars. Cartonné Fr. 17.—.
- DIENES, PAUL, Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 5.50.
- DOELEMANN, KARL, Die bildenden Künste, ihre Eigenart und ihr Zusammenhang. Vorlesungen, gehalten bei der Übernahme der ordentlichen Professur für darstellende Geometrie und höhere Mathematik (Abteilung für Architekten und Zeichenlehramtskandidaten) an der technischen Hochschule in München. Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* —.80.
- ENESTRÖM, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers, s. N. B. 43.
- FLEMING, J.-A., Propagation des courants électriques, s. N. B. 21.
- GIRSEKING, HUGO, Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen. Hilchenbach i. W. 1912, Wiegand. *M* 3.60.
- GOLDHAMMER, D. A., Dispersion und Absorption des Lichtes, s. N. B. 23.
- GUILLET, A., Propriétés cinématiques fondamentales des vibrations, s. N. B. 17.
- HARTMANN, O., Astronomische Erdkunde, s. N. B. 4.
- KÄHLER, K., Luftelektrizität, s. N. B. 24.
- KNOPP, KONRAD, Funktionentheorie. I. Teil. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. (Sammlung Göschen Nr. 668.) Berlin u. Leipzig 1913, Göschen. Geb. *M* —.90.
- KOPPE, M., Sterntafel 1913, s. N. B. 5.
- KOHLSCHÜTTER, ERNST, Ergebnisse der ostafrikanischen Pendel-Expedition der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen in den Jahren 1899 u. 1900, ausgeführt v. Hans Glauning und Ernst Kohlschütter. II. Bd. Die astronomisch-geodätischen Beobachtungen. (Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, mathem.-physikal. Klasse, neue Folge Bd. VIII, Nr. 5.) Berlin 1912, Weidmann. *M* 11.—.

- LANGÉVIN, P., et DE BROGLIE, M., La théorie du rayonnement et les quanta, s. N. B. 31.
- LEICK, A., Physikalische Tabellen, s. N. B. 26.
- LINDOW, M., Differential- u. Integralrechnung, m. Berücksichtigung der praktischen Anwendungen in der Technik. („Aus Natur u. Geisteswelt“ Nr. 387.) Leipzig 1913, Teubner. Geb. in Leinw. \mathcal{M} 1.25.
- LÖWENBERG, ERNST, Der große Fermatsche Satz $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$? Ur- u. Grundbeweis für seine Unmöglichkeit, gültig für alle Exponenten $\lambda > 2$. Berlin 1913, Schildberger.
- LÜCKHOFF, WALTER, Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes. Berlin-Wilmersdorf 1913, Selbstverlag des Verfassers.
- LUKAS, FRANZ KARL, Die Berechnung der Linsendicken bei optischen Linsensystemen. Zweite Mitteilung. (Priorität gewahrt bei der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien mit Schreiben vom 18. Mai 1912 in der Sitzung vom 23. Mai 1912.)
- MAINKA, C., Das bifilare Kegelpendel (Instrument für die Aufzeichnung von Erdbeben. Sonderabdruck aus den Mitteilungen der Philomath. Gesellsch. in Elsaß-Lothringen, Bd. IV, Heft 5, 20. Jahrgang, 1912). Straßburg i. E. 1913, Straßburger Druckerei und Verlagsanstalt.
- MARTUS, H. C. E., Astronomische Erdkunde, s. N. B. 7.
- MEHMKE, R., Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. (In 2 Bänden.) I. Bd. Punktrechnung. 1. Teilband. Das Rechnen mit Punkten, Geraden u. Ebenen (1. Hälfte). Grundzüge der projektiven Geometrie. Anwendungen und Übungen. (Teubners Sammlung, Bd. XXXVII. 1.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. \mathcal{M} 14.—.
- MIKAMI, Y., The development of Mathematics in China and Japan, s. N. B. 11.
- MILLER, A., Gleichgewicht einer Gruppe schwimmender Vollkörper, s. N. B. 19.
- NATURWISSENSCHAFTEN, Die, Wochenschrift für die Fortschritte der Naturwissenschaft, der Medizin und der Technik. (Zugleich Fortsetzung der von W. Sklarek begründeten naturwissenschaftlichen Rundschau.) Hrg. v. Arnold Berliner und Curt Thesing. 1. Jhr. Heft 1, 3. Januar 1913. Berlin, Springer. \mathcal{M} —.60. (Jährlich \mathcal{M} 24.—.)
- OTT, K., Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie, s. N. B. 45.
- PICARD, E., Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft s. N. B. 46.
- PLANCK, M., Das Prinzip der Erhaltung der Energie, s. N. B. 28.
- ROHN-PAPPERITZ, Darstellende Geometrie, s. N. B. 9.
- SAINTE-LAGÜÉ, A., Notions de mathématiques, s. N. B. 47.
- SCHNELL, HEINRICH, Aufgaben zur graphischen Darstellung f. den mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. Geb. in Leinw. \mathcal{M} 1.60.
- SENSEL, G. VON, Elektrizität und Optik, s. N. B. 32.
- STUDY, E., Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. 2. Heft. Konforme Abbildungen einfach zusammenhängender Bereiche. Hrg. unter Mitwirkung von W. Blaschke. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. \mathcal{M} 5.60.
- Tafelblätter, zusammengestellt aus den Figuren der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Tafelblatt 1—8, Fachgruppe Landfahrzeuge. Tafelblatt 9—11, Fachgruppe Förder- und Hebezeuge. Selbstverlag des Vereins deutscher Ingenieure.
- Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, s. N. B. 49.
- TREVEN, K., Der Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers, s. N. B. 40.
- VIVANTI, GIULIO, Esercizi di Analisi infinitesimale. Pavia 1913, Mattei & C.

- VOGEL, ERNST, Lösungen der Aufgaben in Močnik-Zahradničeks Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik für die III. u. IV. Klasse der Mittelschulen. Wien 1913, Tempsky. Geb. in Leinw. \mathcal{M} 1.50.
- VOIGT, ANDREAS, Untersuchung der Gleichung $x^m - y^m = z^n$ auf ihre Lösbarkeit durch ganze Zahlen. Frankfurt a. M., Adelmann.
- VOLTERRA, V., Leçons sur les équations intégrales, s. N. B. 50.
- VOSS, A., Über das Wesen der Mathematik, s. N. B. 51.
- WEITBRECHT, W., Ausgleichungsrechnung, s. N. B. 1 und 2.
- WIESNEK, SIEGBERT, Grundlinien der Kinematik, s. N. B. 20.
- WOOD, R.-W., Optique physique, s. N. B. 35.
- ZEUTHEN, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter, s. N. B. 12.

Errata-corrige

alle Memoria „Studio sulla spinta delle terre“ di M. Gebbia.

Pag.	Lin.	Invece di	leggi
125	Fig ^a . inf ^{re} .	O	Q
132	26	26.	26 _A
145	32	n° 21.	n° 31.
169	33	Φ_o	Φ_α
„	35	mamano	mancano
170	3—4	(23)	(22)
188	11	$\Phi_o = 0$	$\Phi_\alpha = 0$
200	13	1,3510	0,3510
„	21	1,23	1,25

Berichtigung

zur Besprechung von: F. Nölke, Ursprung der Kometen.

S. 212, Z. 20 v. o. Statt Sonnentemperatur lies Sonnenatmosphäre.